

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SÂMELA TAÍS GONZALEZ DO PRADO

**A MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DA
FUNÇÃO EXPONENCIAL**

**Bagé
2023**

SÂMELA TAÍS GONZALEZ DO PRADO

**A MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DA
FUNÇÃO EXPONENCIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD - Polo São Gabriel como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Luis Jeske Bihain

**Bagé
2023**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

P896m Prado, Sânela Taís Gonzalez do
A MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DA
FUNÇÃO EXPONENCIAL / Sânela Taís Gonzalez do Prado.
39 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização)--
Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NO
ENSINO MÉDIO (MATEMÁTICA NA PRÁTICA), 2023.

"Orientação: Cristiano Peres Oliveira".

1. A MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DA
FUNÇÃO EXPONENCIAL. I. Título.

SÂMELA TAIS GONZALES DO PRADO

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD - Pólo São Gabriel como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão defendido e aprovado em: 19/06/2023.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira

UNIPAMPA

Prof. Dra. Francieli Aparecida Vaz

UNIPAMPA

Prof. Dr. Leandro Blass

UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **CRISTIANO PERES OLIVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/07/2023, às 20:35, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO BLASS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/07/2023, às 20:58, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **FRANCIELI APARECIDA VAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 10/07/2023, às 08:54, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1178271** e o código CRC **B5365BD2**.

“As grandes ideias surgem da observação dos pequenos detalhes”.
Augusto Cury

RESUMO

Entende-se que o Ensino de Matemática deve ser trabalhado em sala de aula de forma contextualizada, valorizando o cultural, social e econômico dos estudantes. A Modelagem Matemática é uma metodologia que proporciona uma construção do saber matemático relacionado com a realidade de maneira significativa, tanto para o aluno como para o professor. Assim, resolveu-se aplicá-la por meio de um experimento de despoluição de um lago a fim de trabalhar a função exponencial de forma prática e contextualizada, com o intuito de verificar se a construção e resolução de modelos matemáticos a partir da Modelagem Matemática contribuem para o desenvolvimento do ensino da função exponencial. Este trabalho tem um caráter qualitativo de cunho exploratório, descritivo e com utilização da técnica de observação. Para a operacionalização do trabalho se considerou a premissa de buscar desenvolver o pensamento matemático dos discentes e para isso, adotou-se como estratégia o experimento vivenciado na disciplina de Conteúdo e Prática do Curso de Especialização em Matemática no Ensino Médio (Matemática na Prática). Os sujeitos da pesquisa foram os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Alegrete/RS, destaca-se que as atividades relatadas neste trabalho constituem-se em uma aula inédita para a professora/pesquisadora. Entre as estratégias utilizadas na realização da aula destaca-se que os alunos foram organizados em grupos e disponibilizados documentos para cada grupo elaborasse um relatório com o registro de todas as etapas do experimento. A produção de dados se deu por meio da análise dos relatórios elaborados pelos estudantes, bem como pela observação e registro da aula por parte da autora. Após análise foi possível concluir que atividade proporcionou o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes com ênfase na resolução da função exponencial, colaborando com o senso crítico, tornando-o capaz de argumentar baseado em fatos matemáticos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Experimento. Função Exponencial.

ABSTRACT

It is understood that Mathematics Teaching must be worked in the classroom in a contextualized way, valuing the cultural, social and economic aspects of the students. Mathematical Modeling is a methodology that provides a construction of mathematical knowledge related to reality in a meaningful way, both for the student and the teacher. Thus, it was decided to apply it through an experiment in order to work the exponential function in a practical and contextualized way, in order to verify if through a mathematical model it is possible to develop an understandable learning in relation to the study of the exponential function. This work is qualitative in nature, exploratory, descriptive, and uses the observation technique. For the operationalization of the work it was considered the premise of seeking to develop the mathematical thinking of students and for this, we adopted as a strategy the experiment experienced in the discipline of Content and Practice of the Specialization Course in Mathematics in Secondary Education (Mathematics in Practice). The research subjects were students of the first year of high school in a public school in Alegrete/RS. It is worth mentioning that the activities reported in this paper constitute an unprecedented class for the teacher/researcher. Among the strategies used in the class, the students were organized in groups and documents were made available for each group to prepare a report with a record of all the steps of the experiment. The production of data occurred through the analysis of the reports prepared by the students, as well as through the observation and recording of the class by the author. After the analysis it was possible to conclude that the activity provided the development of mathematical skills of the students with emphasis in solving the exponential function, collaborating with the critical sense, making them able to argue based on mathematical facts.

Keywords: Mathematical Modeling. Experiment. Exponential Function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas da Modelagem Matemática	17
Figura 2 – <i>check list</i> e Texto	22
Figura 3 – Organização dos recipientes	23
Figura 4 – Simulação do lago poluído	24
Figura 5 – Simulação de despoluição	24
Figura 6 – Cálculos	25
Figura 7 – Resposta do grupo	25
Figura 8 – Opinião dos grupos	26
Figura 9 – Tabela completa com cálculos	27
Figura 10 – Gráfico construído pelo grupo	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Períodos e quantidade de poluentes

27

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO.....	12
2.CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA	14
2.1 Base Nacional Comum Curricular.....	14
2.2 Educação Matemática.....	15
2.3 Modelagem Matemática.....	16
3.METODOLOGIA.....	20
3.1 Escolhas metodológicas.....	20
3.2 Operacionalização da pesquisa.....	20
4.APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS	22
4.1 Compreensão do problema do mundo real.....	22
4.2 Construção do modelo matemático	23
4.3 Resolução do modelo matemático.....	26
4.4 Validação do modelo matemático	27
5. CONSIDERAÇÕES	31
6.REFERÊNCIAS	32
7. APÊNDICES.....	34

1 INTRODUÇÃO

A compreensão da Matemática vai muito além do que apenas conteúdos programáticos sem sentido para os alunos, por esse motivo que o objetivo geral deste estudo é verificar se a construção e resolução de modelos matemáticos a partir da Modelagem Matemática contribuem para o desenvolvimento do ensino da função exponencial.

O professor em sua prática tem a possibilidade de relacionar os conteúdos de Matemática contidos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com questões da realidade, através de diversas metodologias (BNCC, 2018). A metodologia de ensino utilizada neste trabalho é a Modelagem Matemática, que tem como objetivo modelar um problema da vida real, fazendo com que os estudantes criem hipóteses sobre possíveis soluções, analisar através de um experimento ou não e chegar a conclusões fazendo uso da Matemática (MALAGUTTI; GIRALDO, 2013). Assim, propomos o seguinte questionamento: Como a Modelagem Matemática pode contribuir na aprendizagem dos alunos do Ensino Médio na resolução da função exponencial e construção de seu gráfico?

Trata-se de um estudo qualitativo que de acordo com (GIL, 2017) difere da quantitativa por utilizar uma perspectiva relacionada a interpretação, adotando como técnica de pesquisa e de coleta de dados a observação (CORREIA, 2009). No decorrer do estudo delineamos como objetivos específicos: Desenvolver habilidades matemáticas dos estudantes partindo de uma situação real; Resolver funções exponenciais e construção de seus gráficos e desenvolver o senso crítico relacionado às questões ambientais.

O interesse sobre este tema surgiu após a realização da disciplina de Conteúdo e Prática do Curso de Especialização em Matemática no Ensino Médio (Matemática na Prática). Durante a disciplina foram propostos vários exemplos de atividades práticas abordando diferentes conteúdos matemáticos. Por ser professora regente em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, decidiu-se trabalhar com a função exponencial, conteúdo que está previsto na BNCC, sendo esta uma aula inédita para professora pesquisadora, o que é um dos pré-requisitos exigidos para o trabalho de conclusão de curso.

O referido estudo está organizado em tópicos e subtópicos, o primeiro refere-se ao referencial teórico, em que buscamos elencar definições e conceitos advindos de diversos autores sobre a Modelagem Matemática, seguido da metodologia que permeia esta pesquisa. Os resultados em um primeiro momento estão apresentados em etapas da Modelagem Matemática de acordo com MALAGUTTI e GIRALDO (2013) e logo realizada uma reflexão

e discussão dos resultados. O fechamento se dá ao relatarmos as considerações finais acerca do estudo e dos objetivos, finalizando com os apêndices que complementam o trabalho.

2. CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

O trabalho foi baseado em conceitos de Educação Matemática, e Modelagem Matemática, abordadas pelos documentos norteadores da educação básica e outros materiais pertinentes aos temas. Aborda-se no decorrer da revisão de literatura a visão de diferentes autores sobre os assuntos destacados proporcionando relações com o que foi aplicado na prática.

2.1 Base Nacional Comum Curricular

Em uma pesquisa voltada à educação e principalmente a um conteúdo específico é importante estabelecer um embasamento na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica.

Um dos objetivos da etapa do Ensino Médio é fazer com que o estudante aprimore seus conhecimentos a respeito do que foi estudado durante o Ensino Fundamental. Assim como o próprio documento descreve a área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018, p.527). Sempre ressaltando a necessidade de relacionar a Matemática com a realidade do aluno.

O proposto na pesquisa adequa-se perfeitamente ao apresentado na BNCC, pois no documento (BRASIL, 2018) está escrito que os estudantes precisam ser estimulados a pensar, formular e resolver variados problemas e diferentes contextos, explorando sua autonomia e os conhecimentos matemáticos já adquiridos, além de desenvolver as habilidades de investigar, construir modelos matemáticos e solucionar situações problemas. Salienta ainda que os estudantes “devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.” (BRASIL, 2018, p. 529)

A proposta desta pesquisa está de acordo com o apresentado na BNCC, assim como nas habilidades descritas para o primeiro ano do Ensino Médio, com destaque neste trecho referente à terceira competência da Matemática.

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531)

Refere-se às habilidades e competências que devem ser exploradas em sala de aula, com atividades que estimulem o uso de estratégias, como proceder matematicamente diante de diferentes situações, assim como construir, resolver e argumentar sobre determinado problema.

O indivíduo que consegue desenvolver e aplicar essas capacidades matemáticas em situações do seu cotidiano torna-se letrado matematicamente, o que favorece sua prática social. Assim, entende-se que o ensino de Matemática, deve tornar o aluno protagonista da sua própria aprendizagem, o professor sai do papel de retentor do conhecimento para mediador, buscando junto ao aluno estratégias de resoluções de problemas, permitindo que o discente desenvolva sua autonomia e que por meio de problemas, construções e investigações relacionadas ao seu contexto seja capaz de fazer uso de suas habilidades matemáticas e aperfeiçoá-las.

2.2 Educação Matemática

Na transição do século XIX para o século XX, com John Dewey (1859-1952) ao propor um ensino de Matemática cooperativo e mais significativo entre o professor e o aluno, a Educação Matemática foi reconhecida como uma área prioritária da educação. Como descreve Pais “A Educação Matemática é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática.” (PAIS, 2019, p.12).

Algumas tendências teóricas relacionadas ao ensino de Matemática foram surgindo com a consolidação da Educação Matemática como área de pesquisa PAIS (2019). Autores como Carvalho (1991) e Bicudo (1993) descrevem que o objetivo da Educação Matemática é a compreensão e construção do saber matemático valorizando os aspectos sociais e culturais dos estudantes.

D’Ambrosio (1990) destaca a importância da Educação Matemática em sala de aula, pois esta está diretamente relacionada com situações do cotidiano dos estudantes, o que lhe

torna útil na escola, no trabalho e na vida. Assim sua importância está em “ser útil como instrumentador para a vida” e “por ser útil como instrumento para o trabalho” (D’AMBROSIO, 1990, p. 16-17).

Desse modo, é possível entendermos o poder que a Educação Matemática exerce no desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas dos estudantes, possibilitando aos mesmos a capacidade de interpretar e argumentar sobre fatores da sociedade na qual está inserido, tornando-os cidadãos críticos e criativos.

2.3 Modelagem Matemática

Durante o estudo do material disponibilizado no I Módulo na disciplina de Conteúdo e Prática do Curso de Especialização em Matemática no Ensino Médio (Matemática na Prática), foi proposto pelos professores/mediadores que fosse realizado um experimento denominado “Despoluição de um lago”. Sendo assim, surgiu a ideia de utilizar este mesmo experimento para elaborar um modelo matemático para explorar o conteúdo sobre função exponencial.

No momento em que se dispõe a abordar com os discentes a questão sobre despoluição de um lago, leva-se para sala de aula uma situação problema que está presente na nossa realidade, pois é possível associar com elementos existentes do município. Desta maneira trabalha-se com Modelagem Matemática e este estreitamento do conteúdo com elementos conhecidos pelos alunos, possibilitando ao educando a capacidade de formular, interpretar, resolver e avaliar determinadas situações, assim como a oportunidade da descoberta. Malagutti e Giraldo definem a Modelagem Matemática da seguinte maneira:

A Modelagem Matemática é um processo dinâmico no qual queremos estudar um problema real, utilizando ferramentas matemáticas adequadas. A análise de um modelo matemático permite-nos entender melhor o comportamento de um fenômeno no presente e, sobretudo, prever o que poderá acontecer no futuro (às vezes, por um período grande de tempo). (MALAGUTTI; GIRALDO, 2013, p. 28)

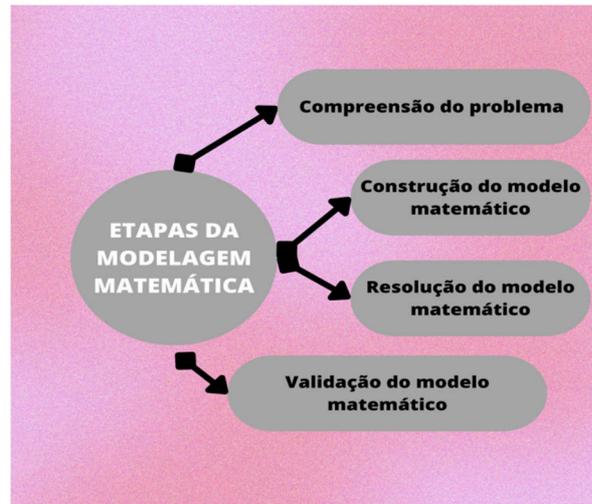
Embasados neste conceito, pois ele compõe um dos materiais estudados durante o curso de Especialização e representa exatamente o que foi realizado durante o experimento. Convém recorrer também, ao que ensina Burak (1992), ao conceituar a Modelagem Matemática como “um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” (Burak, 1992, p. 62). A definição de Biembengut (1999) se assemelha a de Burak e nas palavras de Caldeira a Modelagem Matemática é “um forte instrumento de crítica que oportuniza a clareza da importância da matemática na vida das pessoas, porque as aplicações, por meio da modelagem, “dão luz” aos conteúdos matemáticos” (BURAK e KLUBER, 2008, p.26).

Neste estudo a fim de que ocorra esse processo dinâmico de analisar um problema real por meio de ferramentas matemáticas se orienta pelas quatro etapas da Modelagem Matemática descrita por Malagutti e Giraldo (2013): Compreensão do problema; Construção do modelo matemático; Resolução do modelo matemático e Validação do modelo.

Mesmo utilizando as etapas sugeridas por Malagutti e Giraldo (2013) observam-se pontos em comum com as três últimas etapas elencadas por Burak que são: 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e 5) análise crítica das soluções Burak e Kluber (2008). Assemelham-se também com os três procedimentos elencados por Biembengut (1999): 1) interação – reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado (pesquisa); 2) matematização – formulação (hipótese) e resolução do problema em termos matemáticos; 3) Modelo matemático – interpretação da solução e validação do modelo (uso).

Quando se constrói um modelo matemático, tem-se como objetivo resolver um problema do mundo real. Eles podem se tornar um pouco mais complexos, pois, envolve fórmulas e equações matemáticas, além de requerer alguns conhecimentos prévios matemáticos básicos. A figura 1 apresenta as etapas da Modelagem Matemática.

Figura 1- Etapas da modelagem matemática



Fonte: Autora 2023

Entende-se que ao seguir as etapas por MALAGUTTI e GIRALDO (2013) a dinâmica se torna mais compreensível. Assim, descreve-se a seguir um pouco do que se refere cada etapa.

Etapa 1 - Este momento é de apropriação do problema e dos elementos que o compõem, estudar sobre a questão, analisar dados e conversar com pessoas de outras áreas do conhecimento para um melhor entendimento. MALAGUTTI e GIRALDO (2013).

Etapa 2 - Representação do problema, esta representação é um recorte da realidade, em que podemos realizar algumas simplificações, escolha de variáveis relevantes “o modelo passa a ser formado por equações, fórmulas e proposições passíveis de tratamento por métodos dedutivos.” (MALAGUTTI e GIRALDO, 2013, p.29).

Etapa 3 - Para resolução do modelo matemático é preciso utilizar algumas técnicas de resolução que segundo Malagutti e Giraldo (2013) se destacam as algébricas e as geométricas. Assim como afirmam “mesmo sem estarem vinculadas à modelagem matemática, estas técnicas são construídas ao longo dos anos, durante toda a vida escolar do estudante.” (MALAGUTTI e GIRALDO, 2013, p. 29).

Etapa 4 - De acordo com Malagutti e Giraldo nesta etapa ocorre o processo de validação do modelo matemático “Este processo consiste na comparação entre a solução obtida e os dados reais.” (MALAGUTTI e GIRALDO, 2013, p. 29).

Sem esquecer de que a Modelagem Matemática trata-se de um procedimento dinâmico e que tem como objetivo estimular a autonomia dos estudantes e proporcionar aos mesmos a oportunidade de criar conjecturas a respeito de um problema que na realidade afeta a todos.

Com a realização de leituras de alguns trabalhos que utilizaram a Modelagem Matemática no ensino e aprendizagem de funções exponenciais. Deparou-se com aspectos

positivos em seus resultados em relação a essa metodologia, mas também destacam suas dificuldades. Brucki (2011) concluiu que devido ao currículo do ensino regular ser carregado de conteúdos, trabalhar em todas as aulas utilizando a metodologia da Modelagem Matemática seria inviável, como complementam Zavala, Almeida e Mesquita (2013) a Modelagem Matemática é uma ferramenta para auxiliar o professor.

Este mesmo experimento de despoluição realizado e descrito neste trabalho está entre os experimentos aplicados no trabalho de dissertação de Emer (2020) que constata a relevância da Modelagem Matemática aliada à experimentação com contribuições significantes no ensino da função exponencial.

Um denominador comum observado entre estes estudos relatados anteriormente é a questão de que é efetiva a utilização da Modelagem Matemática no estudo e aplicação de funções exponenciais, porém vale ressaltar que o contexto social, cultural e as características dos alunos podem intervir nos resultados. Deste modo, pesquisas sobre Modelagem Matemática sempre serão válidas, uma vez que podem surgir outras perspectivas em torno deste tema.

3 METODOLOGIA

3.1 Escolhas metodológicas

Neste estudo adotou-se uma abordagem qualitativa, que para Gil (2017) difere-se da pesquisa quantitativa, em virtude de se utilizar de uma perspectiva relacionada com a interpretação. Conforme seu objetivo, a investigação classifica-se como uma pesquisa exploratória, descritiva GIL (2017) e experimental que consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto.

O delineamento experimental foi estruturado de acordo com o experimento apresentado no I Módulo na disciplina de Conteúdo e Prática do Curso de Especialização em Matemática no Ensino Médio (Matemática na Prática). A produção de dados vai de encontro com a técnica de observação, segundo a percepção de Correia “A Observação enquanto técnica exige treino disciplinado, preparação cuidada e conjuga alguns atributos indispensáveis ao observador -investigador, tais como atenção, sensibilidade e paciência.” (CORREIA, 2009, p. 35).

A escolha da escola se deu por conveniência uma vez que a professora pesquisadora atuava no local como professora regente e possuía conhecimento da realidade e do contexto escolar em que os alunos participantes estão inseridos. Salientando que se trata de uma aula inédita para a docente pesquisadora, a partir disso todo o planejamento e aplicação foi estruturado com as adequações necessárias seguindo o proposto apresentado no Curso de Matemática na Prática (Apêndice I).

3.2 Operacionalização da pesquisa

Participou da pesquisa uma escola estadual no município de Alegrete/RS localizada no bairro Centenário, composta por aproximadamente 760 alunos, 71 professores e 19 funcionários. Abrange o Ensino Fundamental I e II, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos (EJA) e o Ensino Técnico. Os estudantes são oriundos de bairros onde habitam famílias trabalhadoras e assalariadas. Alguns vivem em situação de vulnerabilidade social e existe um alto índice de violência. A proposta foi direcionada e aplicada com uma turma do 1º ano do Ensino Médio, a turma 104 do ano de 2022.

Para uma melhor percepção dos caminhos metodológicos traçados na realização da pesquisa, esta será dividida em passos.

Passo I - Foram realizadas leituras com o intuito de enriquecer nosso referencial teórico em temas como educação Matemática e Modelagem Matemática, trazendo colaborações de diversos autores.

Passo II - Foi realizada uma análise da matriz curricular do Rio Grande do Sul do primeiro ano do Ensino Médio e da Base Nacional Comum Curricular, a fim de aplicar um conteúdo ali previsto em uma aula inédita, ou seja, que a professora pesquisadora não tivesse realizado.

Passo III- Escolha do conteúdo a ser trabalhado; por estar finalizando o ano letivo, optou-se por trabalhar o conteúdo de função exponencial. Na busca por uma atividade prática relacionada à função exponencial, optou-se pela atividade chamada de “despoluição de um lago”, proposta no início do Curso de Especialização Matemática na Prática.

Passo IV - Com antecedência de uma semana, foi solicitado aos alunos o material necessário para efetivação da aula. Aplicou-se a atividade “Despoluição de um lago” com 30 alunos que foram divididos em seis grupos com cinco participantes cada. Cada grupo recebeu um relatório (Apêndice I) que deveria ser preenchido ao longo do experimento.

Passo V - Após a observação e coleta dos dados dispostos no relatório entregue aos estudantes realizamos a análise dos mesmos a fim de verificar se a intervenção favoreceu no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos a respeito de funções exponenciais.

4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste tópico apresenta-se o desenvolvimento da pesquisa realizada durante a aplicação da aula inédita para a professora pesquisadora, enfatizando os principais pontos observados, destacando os fatores positivos e negativos analisados desde o início da pesquisa até o momento da aplicação do experimento com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Para uma melhor apresentação do desenvolvimento da pesquisa e do experimento, organizaram-se em tópicos de acordo com as quatro etapas da Modelagem Matemática, MALAGUTTI e GIRALDO (2013) descritas anteriormente.

4.1 Compreensão do problema do mundo real

Assim como já descrito, essa etapa destina-se a compreensão do problema, esse que faz parte do mundo real, ou seja, da realidade dos estudantes. É preciso tomar conhecimento sobre os elementos que o compõem, para isso é interessante contribuições de profissionais de outras áreas, a fim de trocar ideias que possam servir de embasamento para criação do modelo matemático, de hipóteses e de possíveis soluções. MALAGUTTI e GIRALDO (2013).

O problema do mundo real se tratava da despoluição de um lago e o questionamento foi “se um lago que estava com a água límpida, voltaria a se tornar totalmente limpo depois de ter recebido um poluente?”.

A turma de 30 alunos foi dividida em cinco grupos e cada grupo recebeu um relatório, com um texto introdutório, passo a passo do experimento, alguns questionamentos que deveriam ser respondidos pelo grupo assim como espaços para que realizem cálculos. O texto contava a história de um lago que tinha sido poluído e que através dos seres vivos que viviam nele, uma equipe de biólogos e outros profissionais se criou uma rede colaborativa para que ele fosse se despoluindo aos poucos. A seguir o texto *era uma vez um lago*.

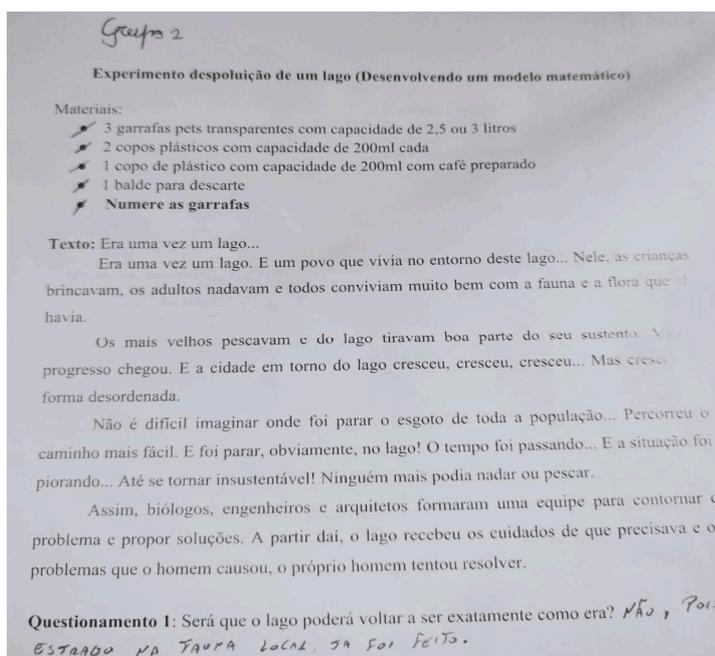
Era uma vez um lago. E um povo que vivia no entorno deste lago... Nele, as crianças brincavam, os adultos nadavam e todos conviviam muito bem com a fauna e a flora que ali havia. Os mais velhos pescavam e do lago tiravam boa parte do seu sustento. Mas o progresso chegou. E a cidade em torno do lago cresceu, cresceu, cresceu... Mas cresceu de forma desordenada. Não é difícil imaginar onde foi parar o esgoto de toda a população... Percorreu o caminho mais fácil. E foi parar, obviamente, no lago! O tempo foi passando... E a situação foi piorando... Até se tornar insustentável! Ninguém mais podia nadar ou pescar. Assim, biólogos, engenheiros e arquitetos formaram uma equipe para contornar o problema e propor soluções. A partir daí, o lago recebeu os cuidados de que precisava e os problemas que o homem causou, o próprio homem tentou resolver. Será que o lago poderá voltar a ser exatamente como era?(MALAGUTTI e GIRALDO, 2013 p.)

As aulas com a turma, público-alvo da pesquisa, aconteciam nas quintas-feiras e sextas-feiras, e era frequente os eventos, reuniões e outras atividades realizadas nestes dias. Assim o tempo foi um dos fatores para que todo procedimento ocorresse apenas em duas aulas consecutivas de 50 minutos cada, sem muito aprofundamento. Esta contextualização ocorreu na mesma aula de aplicação do experimento, tendo como referência o texto citado acima.

4.2 Construção do modelo matemático

Como dito anteriormente foram utilizadas duas aulas consecutivas com duração de 50 minutos cada para o desenvolvimento do experimento. De início foi entregue a cada grupo um relatório (Apêndice I) que começava com *check list* dos materiais que cada grupo deveria ter para dar início ao procedimento, lembrando que estes materiais foram solicitados aos alunos uma semana antes da data prevista da realização. Depois de conferida dos materiais, realizou-se a leitura do texto “Era uma vez um lago” apresentado na figura 2, logo após o texto já iniciava alguns questionamentos como: “Será que o lago poderá voltar a ser exatamente como era?” Os cinco grupos responderam que não, não tinha como o lago voltar ao normal uma vez que foi poluído.

Figura 2: *check list* e Texto



Fonte: Autora (2022)

Assim foi solicitado aos alunos que imaginassem, por exemplo, um habitat formado por um lago de águas límpidas, onde vivem diversas espécies de vegetais e animais, supondo

também que assim como o lago da história tivesse recebido uma grande carga de poluente e que no decorrer do tempo, houve um processo de despoluição natural, promovido pelos seres vivos pertencentes desse habitat.

Então chegou o momento de colocar em prática o exemplo citado acima, através do experimento que simulasse a despoluição do lago. O objetivo desta atividade era despertar o interesse do aluno para uma situação nova, para que entendesse a Matemática na Prática, nas palavras de Biembengut seria “um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente” (BIEMBENGUT 1999, p. 36). No relatório constava o passo a passo, sendo a primeira etapa organizar os recipientes conforme a figura 3.

Figura 3: Organização dos recipientes



Fonte: Autora (2022)

O recipiente 1 representava o lago modelo, o recipiente 2 representa o reservatório com água limpa para abastecer o lago modelo e o recipiente 3 representa o produto poluente. Para demonstrar que o lago se encontra poluído foram colocados 200 mililitros (ml) do recipiente 3 no recipiente 1 como mostra a figura 4. Devido ao tempo solicitamos aos estudantes que trouxessem os recipientes cordados e organizados.

Figura 4: Simulação do lago poluído



Fonte: Autora (2022)

Com o modelo construído iniciou-se a simulação de despoluição, realizando cinco vezes o mesmo procedimento que era retirar 200 ml do lago modelo e acrescentar 200 ml de água limpa retirada do reservatório. Alguma das dificuldades encontradas no início da atividade foi o fator de ir buscar a água, pois, os grupos precisavam ir buscá-la em um local distante da sala de aula. A seguir figura 5 ilustrando o processo de despoluição do lago.

Figura 5: Simulação de despoluição



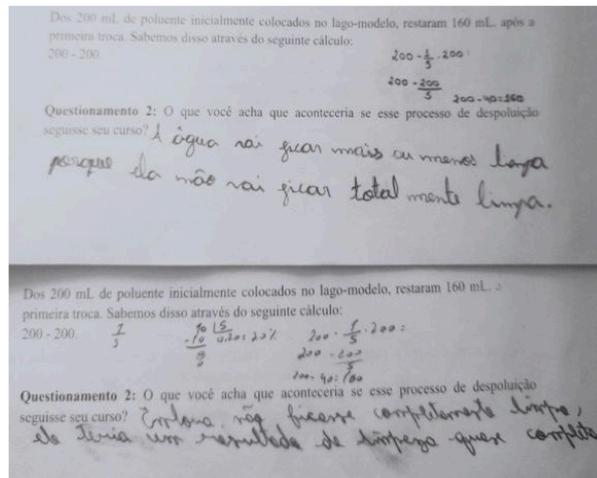
Fonte: autora (2022)

Foi possível perceber que os alunos apresentavam uma grande dificuldade de entender o passo a passo da despoluição, precisaram do auxílio da professora/observadora frequentemente para que não realizassem o procedimento de maneira equivocada, na maioria das vezes compreendiam as instruções quando realizávamos a leitura juntos, pois sozinhos se sentiam desorientados. Mas, acredita-se que o desenvolvimento desta atividade auxiliou os estudantes uma vez que é notável a falta de autonomia e segurança dos estudantes, acreditamos que isto deve ser trabalhado em sala de aula, a autonomia, o aluno precisa se enxergar como protagonista do processo. (BRASIL, 2018)

4.3 Resolução do modelo matemático

Para a despoluição do lago assumiu-se a premissa de que os organismos vivos do lago purificam 20% da quantidade de poluentes no lago durante um período de 24 horas. Como não tínhamos todo esse tempo, resolveu-se acelerar o processo na simulação. A cada procedimento de retirar 400 ml do lago poluído e repor 400 ml de água limpa foi equivalente a 24 horas. Assim foi questionada aos alunos a quantidade de poluente restante após a primeira troca, claramente não sabiam responder então, descobrimos que dos 200 ml de poluente colocado no lago após a primeira troca restaria 160 ml, através do seguinte cálculo $200 - (1 \cdot 200 / 5)$, o valor obtido na resolução do cálculo é de 160, ou seja, restam 160 ml de poluente ainda no lago.

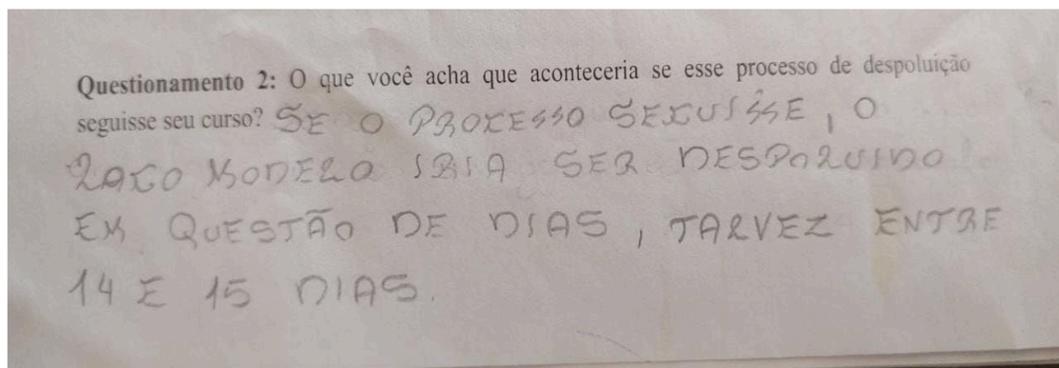
Figura 6: Cálculos



Fonte: Autora (2022)

Este primeiro cálculo foi realizado no quadro branco com o auxílio da professora/observadora, em que foi revisado o conteúdo de porcentagem e multiplicação de frações, na sequência os alunos foram indagados sobre o que aconteceria se esse processo de troca seguisse seu curso? Como mostra a figura 7.

Figura 7: Resposta do grupo



Fonte: Autora (2022)

Apenas um grupo descreveu de maneira equivocada, pressupondo que a água ficaria limpa em alguns dias, esse pensamento surgiu da análise do cálculo que eles resolveram e entenderam que a cada dia, ou seja, a cada troca iria diminuir 40 ml de poluente.

Realizou-se mais uma vez o processo de troca e foram feitas novas indagações. “A água tornou-se límpida?”, “Quanto resta de poluente?”. Neste primeiro questionamento, todos relataram que não, alguns relataram que ficou mais clara, mas não limpa totalmente e realizaram o cálculo observando que ainda restam 128 ml de poluente no lago. Podemos analisar as respostas na figura 8.

Figura 8: Opinião dos grupos



Fonte: Autora (2023)

Cada grupo realizou o procedimento de troca mais três vezes e depois de todas realizadas, perguntou-se novamente “o lago-modelo encontra-se totalmente limpo”? A resposta de todos foi que não e ao perguntar “e se continuássemos o experimento indefinidamente”? O que você acha que iria acontecer? Na figura acima podemos observar o raciocínio de cada grupo, sendo que eles elaboram as respostas de forma colaborativa e com discussões entre os integrantes do grupo.

4.4 Validação do modelo matemático

A fim de validar o modelo matemático os alunos realizaram cálculos para verificar a quantidade que ainda restava no lago modelo após cada troca, ressaltando que no experimento, ao substituir uma parte da água poluída (dois copos) pela mesma quantidade de água limpa, simulamos uma situação em que a taxa de purificação da água por organismos vivos é sempre a mesma, ou seja, a cada período de 24 horas.

Com esses cálculos eles deveriam preencher a seguinte tabela:

Tabela 1: Períodos e quantidade de poluente

Períodos de 24 horas	Quantidade de poluentes no recipiente
1º período	200
2º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 200 =$
3º período	
4º período	
5º período	
6º período	
7º período	
8º período	
9º período	

A seguir (figura 9) estão alguns registros da tabela completa pelos alunos.

Figura 9: Tabela completa com cálculos

Vamos completar a tabela...

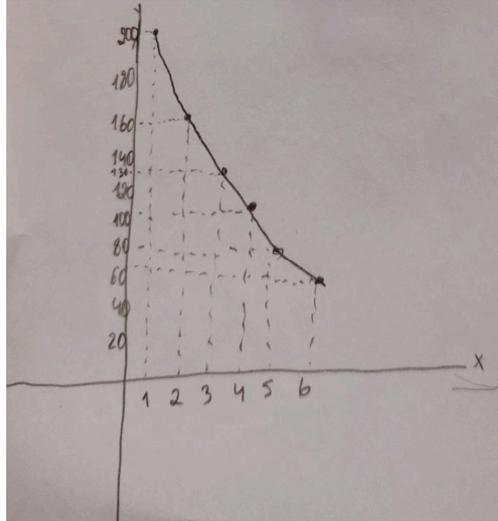
Períodos de 24 horas	Quantidade de poluentes no recipiente
1º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 200 =$
2º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 200 = 160$
3º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 160 = 128$
4º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 128 = 102,4$
5º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 102,4 = 81,92$
6º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 81,92 = 64,616$
7º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 64,616 = 51,6928$
8º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 51,6928 = 41,35424$
9º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 41,35424 = 33,083392$

Fonte: Autora, 2022

Com base nos dados da tabela acima os estudantes refletiram melhor se o lago ficará totalmente isento de poluição em algum momento, relataram que isso não iria acontecer apenas diminuir a quantidade de poluentes. Para validar esses argumentos foi proposta a

construção do gráfico utilizando os dados dispostos na tabela, cada grupo construiu o seu gráfico no relatório como o apresentado na figura 10.

Figura 10: Gráfico construído pelo grupo



Fonte: Autora, 2022

Com a observação da tabela da figura 9, os discentes já perceberam que os dados iriam diminuindo com a tendência de ir se aproximando de zero e com o gráfico essa percepção ficou ainda mais evidente, muitos comentaram que a linha construída a partir dos pontos do gráfico se aproxima do eixo x , porém não irá tocá-lo, o que implica que o lago não ficará totalmente limpo novamente.

Apoiados nos materiais disponibilizados no curso de Especialização em Ensino de Matemática do Ensino Médio seguiram-se as etapas ali apresentadas para guiar a aplicação em sala de aula. Entretanto somos sabedores das etapas sugeridas por outros autores. Segundo Burak a efetivação da Modelagem Matemática, em comparação com as etapas do estudo, observa-se que se acabou não realizando a primeira e segunda citada pelo autor, que seria uma escolha do tema por parte do grupo e pesquisas exploratórias.

Realizando uma reflexão a cerca disso, entende-se que houve vários aspectos que poderiam ser aprimorados e organizados de uma maneira mais eficaz. Porém estas experiências provocam a querer retomar em outro momento, tentando preencher algumas lacunas. Outro fator a se considerar é a questão de trabalho em grupo, o qual é válido na questão de socialização dos estudantes e trabalho colaborativo, entretanto como o grupo colocou suas ideias em um só relatório, algum estudante pode ter ficado com dúvidas e só acompanhou os demais, o professor com uma turma de 30 alunos realizando uma atividade dinâmica e colaborativa, por muitas vezes não percebe e a atividade acaba não atingindo todos envolvidos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizando uma análise de toda a atividade, conclui-se que foi possível responder ao problema de pesquisa que questionava como a Modelagem Matemática pode contribuir na aprendizagem dos alunos do Ensino Médio, na resolução da função exponencial e construção seu gráfico. Destaca-se que a Modelagem Matemática contribuiu positivamente no processo de ensino aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio com ênfase no estudo da aplicação de funções exponenciais, mesmo que nem todas as etapas previstas por Burak tenham sido contempladas.

Acredita-se que a proposta aqui apresentada foi ao encontro com o objetivo da Modelagem Matemática, pois segundo (Biembengut 1999, p. 20) a Modelagem Matemática é “o processo que envolve a obtenção de um modelo”. Com esse processo é possível interligar os conteúdos de Matemática com situações reais. Ela defendia que a modelagem não era apenas a aplicação de modelo, mas sim a construção de um modelo de maneira contextualizada proporcionando o uso das ferramentas matemáticas.

Percebe-se por meio da técnica de observação que o uso da Modelagem Matemática em sala de aula, promove e auxilia o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes, assim como atinge o proposto nos objetivos deste trabalho, ou seja, a Modelagem Matemática colabora para o aperfeiçoamento do pensamento matemático. A Modelagem possui como característica proporcionar aos discentes uma visão crítica sobre a Matemática, com a capacidade de relacioná-la com situações problemas do cotidiano e com o meio em que vive, como por exemplo, às questões ambientais. De acordo com Bassanezi (2002) “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. (BASSANEZI, 2002, p.16). Além de relacionar o estudante se torna ativo na formulação de resoluções para problemas reais baseado em fatos e argumentos matemáticos eficazes.

Como sugestão de trabalhos futuros pode-se citar a possibilidade de aprofundar os estudos sobre estes temas e de aplicar uma proposta envolvendo a Modelagem Matemática, a fim de realizar adequações com o intuito de sanar as lacunas percebidas durante a aplicação deste experimento em sala de aula.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. (1990). Modelagem matemática como método de ensino aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º graus. Dissertação de Mestrado. Rio Claro, Unesp.

Brasil. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, (2018). Recuperado de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf

Brucki, C. M. O uso de modelagem no ensino de função exponencial. Pontifícia Universidade Católica de São Paula PUC. 2011.

BURAK, D. Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese de Doutorado. Campinas, Unicamp. (1992).

CALDEIRA, A. D. (2004). Modelagem matemática na formação do professor de matemática: desafios e possibilidades. In: ANPED SUL. Anais... Curitiba: UFPR.

CARVALHO, D.L. Letramento matemático en las etapas infantil y adulta de alumnas de programas de educación para jóvenes y adultos. Praxis & Saber, v.2, n.3, pp.13-26, 2011.

CORREIA, M. C. B. A observação participante enquanto técnica de investigação. Pensar Enfermagem, Vol. 13 N.º 2 2º Semestre de 2009

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática. São Paulo: Ática, 1990.

EMER, Silvana. Modelagem matemática aliada à experimentação no ensino de funções exponenciais. 2020. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 31 jul. 2020. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/2919>.

Gil, A.C. (2017) Como elaborar projetos de pesquisa. 6. ed. São Paulo: Atlas.

INEP. Matriz de avaliação de Matemática (PISA). 2012.

KLÜBER, T. E. e BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

MALAGUTI, P. L. A. e GIRALDO, V. A. Curso de Especialização para professores do Ensino Médio de matemática. Modelo de despoluição: Módulo I. Cuiabá- MT. 2010.

ZAVALA, A. B. P. ALMEIDA, A. O. MESQUITA, K. A. P. C. Modelagem Matemática Aplicada a Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos. PROFMAT, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Experimento despoluição de um lago (Desenvolvendo um modelo matemático)

Materiais:

- 3 garrafas pets transparentes com capacidade de 2,5 ou 3 litros
- 2 copos plásticos com capacidade de 200ml cada
- 1 copo de plástico com capacidade de 200ml com café preparado
- 1 balde para descarte
- **Numere as garrafas**

Texto: Era uma vez um lago...

Era uma vez um lago. E um povo que vivia no entorno deste lago... Nele, as crianças brincavam, os adultos nadavam e todos conviviam muito bem com a fauna e a flora que ali havia.

Os mais velhos pescavam e do lago tiravam boa parte do seu sustento. Mas o progresso chegou. E a cidade em torno do lago cresceu, cresceu, cresceu... Mas cresceu de forma desordenada.

Não é difícil imaginar onde foi parar o esgoto de toda a população... Percorreu o caminho mais fácil. E foi parar, obviamente, no lago! O tempo foi passando... E a situação foi piorando... Até se tornar insustentável! Ninguém mais podia nadar ou pescar.

Assim, biólogos, engenheiros e arquitetos formaram uma equipe para contornar o problema e propor soluções. A partir daí, o lago recebeu os cuidados de que precisava e os problemas que o homem causou, o próprio homem tentou resolver.

Questionamento 1: Será que o lago poderá voltar a ser exatamente como era?

Imagine, por exemplo, um habitat formado por um lago de águas límpidas, onde vivem diversas espécies de vegetais e animais. Agora, suponha que este lago, assim como o lago da história que você leu antes, recebeu uma grande descarga de um produto poluente. No decorrer do tempo, houve um processo de despoluição natural, promovido pelos seres vivos pertencentes a esse habitat.

Passos do experimento

1 Preencha completamente o vasilhame 2 com água límpida



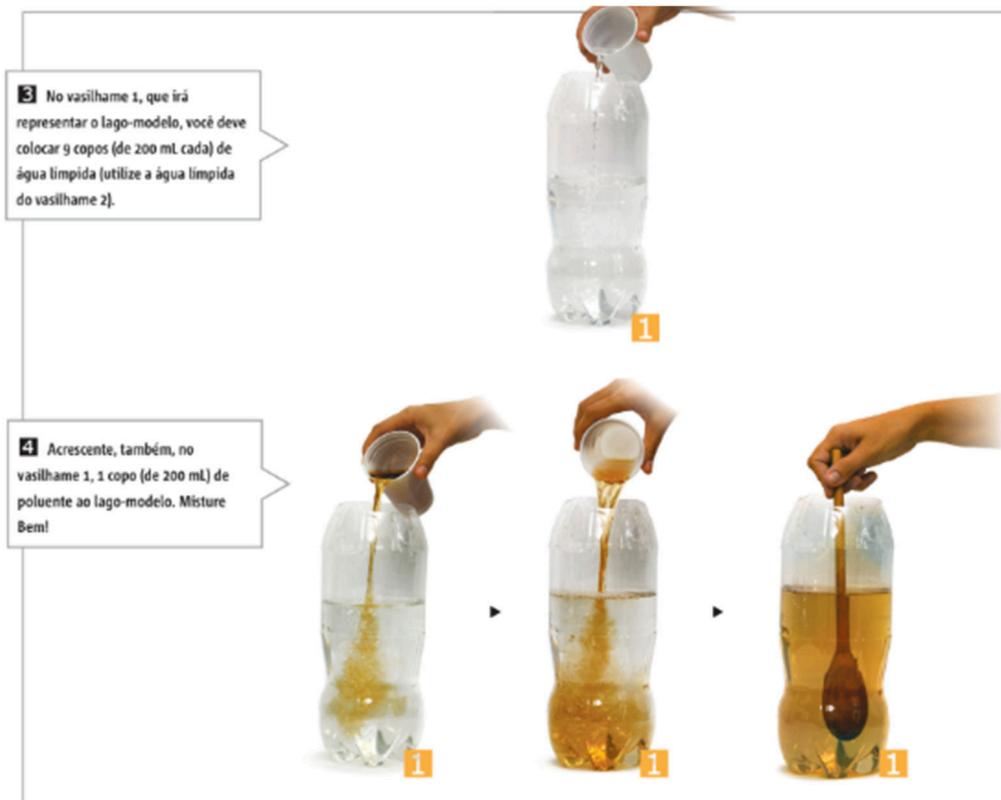
Este vasilhame representa nosso reservatório, e a água límpida nele contida irá abastecer nosso lago-modelo.

2 No vasilhame 3, misture um copo (de 200 ml) de café (previamente preparado) em aproximadamente um litro de água. Misture bem!



Este café (previamente preparado), misturado com um litro de água, representará a poluição no lago. De agora em diante, sempre que mencionarmos poluente, em nosso experimento, estaremos nos referindo à mistura de café e água.

Fonte: MALAGUTTI e GIRALDO (2013)

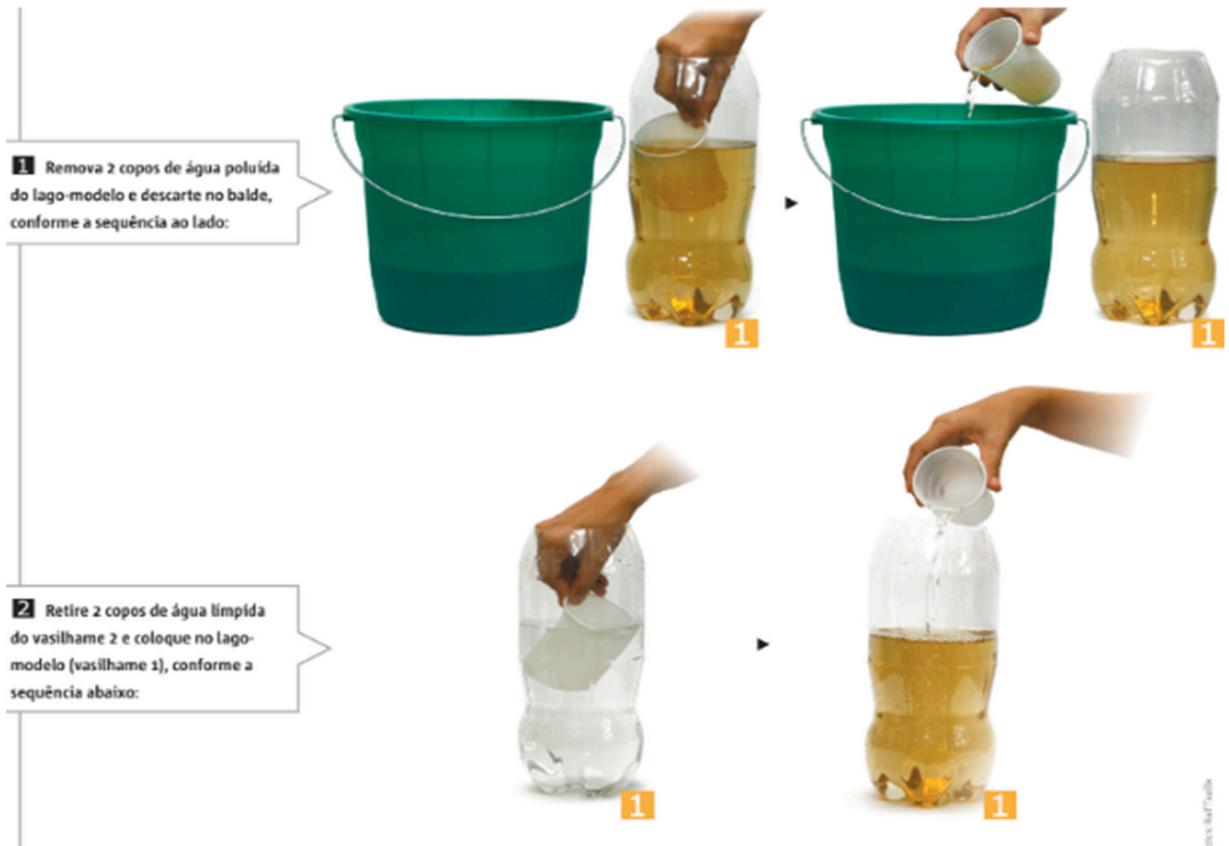


Fonte: MALAGUTTI e GIRALDO (2013)

Agora que já representamos o lago-modelo com a descarga de poluente, vamos simular a sua despoluição? Para isto, vamos assumir a seguinte premissa:

Os organismos vivos do lago purificam $\frac{1}{5}$ (ou seja, 20%) da quantidade de poluente no lago, durante um período de 24 horas.

É claro que em nossa simulação não iremos esperar 24 horas para verificar o que ocorreu... Vamos acelerar o processo, através do seguinte procedimento:



Fonte: MALAGUTTI e GIRALDO (2013)

Com este procedimento, você está simulando a despoluição do lago em um período de 24h. Dos 200 mL de poluente inicialmente colocados no lago-modelo, restaram 160 mL, após a primeira troca. Sabemos disso através do seguinte cálculo:
 $200 - 200 \cdot \frac{1}{5}$

Questionamento 2: O que você acha que aconteceria se esse processo de despoluição seguisse seu curso?

Vamos continuar nosso processo....



Fonte: MALAGUTTI e GIRALDO (2013)

A água tornou-se límpida?

Quanto resta de poluente?

Calcule a quantidade de poluente restante no lago-modelo, após a segunda troca de água. Faça seus cálculos e anote o resultado no espaço a seguir.

Repita o processo mais três vezes

Depois de todas estas trocas, o que você observa? O lago-modelo encontra-se totalmente limpo?

No experimento, ao substituir uma parte da água poluída (2 copos) pela mesma quantidade de água límpida, simulamos uma situação em que a taxa de purificação da água por organismos vivos é sempre a mesma, ou seja, $\frac{1}{5}$ a cada período de 24 horas.

E se continuássemos o experimento indefinidamente? O que você acha que iria acontecer?

Vamos completar a tabela....

Períodos de 24 horas	Quantidade de poluentes no recipiente
1º período	200
2º período	$200 - \frac{1}{5} \cdot 200 =$
3º período	
4º período	
5º período	
6º período	
7º período	