

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

JOÃO SIDINEI MAROSTEGA

**O USO DO GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA
DA DUPLICAÇÃO DO CUBO**

**Bagé
2023**

JOÃO SIDINEI MAROSTEGA

**O USO DO GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA
DA DUPLICAÇÃO DO CUBO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD – Polo São Gabriel, como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio

Orientador: Profa. Dra. Francieli Aparecida Vaz

Coorientador: Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira

**Bagé
2023**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

M354u Marostega, João Sidinei

O uso do GeoGebra na resolução do problema da duplicação do
cubo / João Sidinei Marostega.

47 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização)--
Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NO
ENSINO MÉDIO (MATEMÁTICA NA PRÁTICA), 2023.

"Orientação: Francieli Aparecida Vaz".

1. GeoGebra. 2. Equações cúbicas. 3. Construção. 4.
Autonomia. 5. Protagonista. I. Título.

JOÃO SIDINEI MAROSTEGA

O USO DO GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD – Polo São Gabriel, como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 10/06/2023.

Banca examinadora:

Profª. Dra. Francieli Aparecida Vaz

Orientadora

UNIPAMPA

Prof. Dr. Anderson Luis Jeske Bihain

UNIPAMPA

Prof. Dr. Leandro Blass

UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **FRANCIELI APARECIDA VAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/07/2023, às 19:52, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **ANDERSON LUIS JESKE BIHAIN, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/07/2023, às 18:49, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO BLASS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/07/2023, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1177012** e o código CRC **043A26BA**.

Dedico este trabalho minha família, esposa Carine, filhos João Pedro e Ana Carolina, pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTO

A Profa. Dra. Francieli Aparecida Vaz, pela dedicação, compreensão e apoio. Aos demais professores da UNIPAMPA pela sua dedicação e carinho obrigado por serem mestres no sentido completo da palavra. A todos os colegas de curso pela ajuda e compartilhamento de medos, sonhos e conquistas.

RESUMO

Este trabalho apresenta o relato de experiência referente a uma aula inédita para o autor envolvendo o estudo de equações cúbicas, realizado junto a uma turma do terceiro ano da Escola Estadual do Ensino Médio Yeté no município de Tuparendi-RS. Durante esse trabalho buscou-se identificar a contribuição que as tecnologias podem fornecer, na forma de estímulo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e das estruturas cognitivas que contribuam para o entendimento dos conteúdos abordados dentro da disciplina de matemática durante o terceiro ano do Ensino Médio. Durante este trabalho, com o objetivo de compreender quais as possíveis contribuições que o uso de tecnologias poderia trazer para o estudo das equações cúbicas, foi utilizado o *software* GeoGebra como ferramenta complementar no processo de ensino-aprendizagem. O papel do professor no decorrer do trabalho resumiu-se a uma postura de agente orientador, transferindo para o aluno o papel de protagonista nesse processo construtivo do conhecimento, possibilitando a eles através da experimentação, acerto e erro, formular suas próprias conclusões. Visando fornecer subsídios para criar um ambiente de pesquisa e debate foi proposto um desafio envolvendo a resolução de um problema com equações cúbicas, onde em um primeiro momento foi solicitado que tentassem encontrar a solução e após testarem as mesmas no GeoGebra. A avaliação do trabalho considerou a evolução do pensamento matemático, por parte dos alunos, quando esses conseguiram, durante a atividade, estruturar suas ideias em consonância com os conceitos matemáticos trabalhados anteriormente, o que foi potencializado com o uso do *software* GeoGebra, auxiliando de forma contundente no desenvolvimento da autonomia de pensamento dos alunos.

Palavras-Chave: GeoGebra, Equações cúbicas, Construção, Autonomia, Protagonista.

ABSTRACT

This paper presents an experience report referring to an unprecedented class for the author involving the study of cubic equations, carried out with a third-year class at Escola Estadual do Ensino Médio Yeté in the city of Tuparendi-RS. During this work, we sought to identify the contribution that technologies can provide, in the form of a stimulus for the development of logical reasoning and cognitive structures that contribute to the understanding of the contents addressed within the discipline of mathematics during the third year of high school. During this work, with the objective of understanding the possible contributions that the use of technologies could bring to the study of cubic equations, the GeoGebra software was used as a complementary tool in the teaching-learning process. The teacher's role in the course of the work boiled down to a posture of guiding agent, transferring to the student the role of protagonist in this constructive process of knowledge, enabling them, through experimentation, success and error, to formulate their own conclusions. Aiming to provide subsidies to create an environment for research and debate, a challenge was proposed involving the resolution of a problem with cubic cubic equations, where at first they were asked to try to find the solution and after testing them in GeoGebra. The evaluation of the work considered the evolution of mathematical thinking on the part of the students, when they managed, during the activity, to structure their ideas in line with the mathematical concepts previously worked on, which was enhanced with the use of the GeoGebra software, helping in a way forceful in the development of students' autonomy of thought.

Keywords: GeoGebra, Cubic equations, Construction, Autonomy, Protagonist.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tentativa para resolver o problema do cubo: duplicação da aresta	29
Figura 2 - Tentativa para resolver o problema do cubo: duplicando o seno do cubo ou duplicando das pedras	30
Figura 3 - Tentativa para resolver o problema do cubo: uso de duas régua	31
Figura 4 - Tentativa para resolver o problema do cubo: multiplicar a área da base por 6	32
Figura 5 - Tentativa para resolver o problema do cubo: criação de 8 cubos	32
Figura 6 - Tentativa para resolver o problema do cubo: uso do compasso para medir as diagonais	32
Figura 7 - Janela de visualização 3 D - GeoGebra.....	33
Figura 8 - Campo de entrada GeoGebra.....	33
Figura 9 - Cubo criado para a atividade	34
Figura 10 - O dobro da aresta - representação no GeoGebra	34
Figura 11 - Medir as pedras e duplicar - representação no GeoGebra	35
Figura 12 - Duplicar os palcos - representação no GeoGebra.....	35
Figura 13 - Oito vezes o lado elevado ao cubo - representação no GeoGebra	36
Figura 14 - Diagonal dobrada - representação no GeoGebra	37
Figura 15 - Base multiplicada por 6 - representação no GeoGebra	37
Figura 16 - Oito cubos colocados de 4 em 4 - representação no GeoGebra	38
Figura 17 - Utilização do compasso - representação no GeoGebra.....	38
Figura 18 - Alterações no esboço inicial feito pelos alunos.....	40
Figura 19 - Questionário sobre o uso de tecnologias no estudo da matemática	41

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	14
2.1 História da matemática no contexto do trabalho	14
2.2 O Desenvolvimento do raciocínio lógico	15
2.3 As tecnologias dentro da educação	17
2.4 Problema da duplicação do Cubo	18
2.5 Problema da Duplicação do Cubo por meio de uma equação cúbica	19
3. PLANO DE AULA - ANALISE A PRIÓRI.....	24
3.1 Plano de aula	26
4. ANÁLISE POSTERIORI.....	28
5. CONCLUSÃO.....	43
REFERÊNCIAS.....	45

1. INTRODUÇÃO

Até o início do século XX o ensino da matemática dava-se por meio de treinamentos de repetição e memorização, por isso quando falamos no ensino da matemática, observamos que ela é considerada por muitos alunos como algo de difícil entendimento e chata, D' Ambrósio (1991, p.1) diz: “[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando, o conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil”.

Essa fala do autor algumas vezes representa o pensamento dos alunos em relação à matemática, disciplina descrita por alguns como algo “incompressível”, recheada de fórmulas complexas e sem ligação prática com o cotidiano, conseguir aproximar os conteúdos trabalhados em sala de aula, dos interesses dos alunos talvez seja um dos maiores objetivos da docência atualmente.

Nessa busca por trazer novos significados as metodologias de ensino, estes pautados na construção dos conteúdos, objetivando despertar o desejo pela descoberta, deixando de lado as metodologias de ensino-aprendizagem pautadas em sistema de repetição mecânico.

Porém para que esse processo aconteça de maneira efetiva é preciso que o aluno assuma o seu papel como protagonista dentro do processo de ensino-aprendizagem, mas como fazer isso?

Essa pergunta embasa a pesquisa inicial e possibilita criar hipóteses, as quais serão analisadas no decorrer do trabalho afim de identificar sua validade.

Como dito por Vergara (2007), as hipóteses são antecipações das respostas ao problema escolhido, essas suposições geralmente são empregadas nas pesquisas qualitativas, já que não necessariamente se dá através da realização de testes, elas são de ordem provisória e pretende-se com a pesquisa verificar a veracidade ou não das mesmas.

Surge então o tema a ser desenvolvido durante esse trabalho, na qual busca-se identificar quais recursos pedagógicos possuem a capacidade de estimular o processo de construção da autonomia no aluno. Quais recursos pedagógicos possuem o poder de despertar no aluno o interesse pela matemática? Quais deles podem ser utilizadas objetivando aguçar o desejo pela descoberta?

Para responder a essa inquietude inicial buscou-se dentre os mais variados assuntos abordados pela matemática no Ensino Médio, um que pudesse delimitar nossa pesquisa inicial, tendo como base orientadora a BNCC (Bases Nacional Comum Curricular) que em suas competências e habilidades cita:

(EM13MAT401) converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2018 p.4).

Assim o estudo das equações cúbicas foi escolhido, principalmente pela dificuldade em conectá-lo com as rotinas diárias, também por ser base para muitos estudos posteriores dentro da matemática.

Visando introduzir o aluno nesse assunto relacionado as equações cúbicas, fez-se uso de um problema matemático histórico, neste caso o “Problema da duplicação do Cubo¹” como objeto de pesquisa, remetendo os alunos ao contexto histórico que envolvendo essa situação matemática, proporcionado argumentos necessários para o desenvolvimento do estudo das equações cúbicas, possibilitando que eles sigam as quatro fases da resolução como citadas por Polya (1995): compreender o problema, designar um plano, executar o plano, retrospecto do problema.

Ainda dentro do objetivo geral, busca-se avaliar como o uso do *software* GeoGebra pode auxiliar na compreensão de equações cúbicas, e quais contribuições ele pode trazer no que diz respeito desenvolver a autonomia nos alunos.

Busca-se também compreender os seguintes objetivos específicos: como o desafio de resolver um problema histórico contribui para criar um ambiente de motivação entre os alunos; como as tecnologias podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico; e se o estudo de caso aliado ao uso do GeoGebra conseguira remeter os alunos a ideia de resolução de uma equação cúbica.

“Se o problema de pesquisa é uma questão a investigar, o objetivo é um resultado a alcançar”, assim podemos pensar que o objetivo final, se alcançado, dá resposta ao problema (VERGARA 2007, p.25).

¹ Um dos três problemas clássicos da geometria grega, os outros dois são: a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo.

Definido o assunto a ser abordado como problema inicial, surge a necessidade de pensar qual abordagem metodológica, poderia ser apropriada para trazer a melhor compreensão dos resultados.

Opta-se então por uma ênfase em uma abordagem qualitativa, visto que o foco não está propriamente na resolução ou não do problema inicial, e sim nos processos construtivos que seriam desenvolvidos durante essa fase de descoberta, conforme descrita por Minayo (1999), nessa perspectiva qualitativa, não objetivamos buscar a verdade baseada nos conceitos de certo ou errado, em vez disso, nossa principal preocupação se faz em compreender a lógica subjacente à resolução, essa abordagem concentra-se em um nível de realidade que não pode ser mensurado quantitativamente.

Para um melhor entendimento do trabalho, ele será apresentado em capítulos, em primeiro lugar traremos os fundamentos teóricos, seguido do esboço do plano de aula aplicado, após teremos uma análise dos dados referentes a aplicação da aula, seguida das conclusões finais do autor.

2. REVISÃO DA LITERATURA

A seguir faremos um resgate histórico do tema de interesse deste trabalho e na sequência uma revisão de conceitos utilizados como referência.

2.1 História da matemática no contexto do trabalho

A matemática começou a se desenvolver em várias culturas ao redor do mundo, como a Mesopotâmia, o Egito, a Grécia, a Índia e a China (MOL,2013), estas sociedades, a matemática inicialmente tinha um foco prático, utilizado para resolver problemas cotidianos como medições de terras, comércio e construção.

Ainda segundo o autor no antigo Egito, por exemplo, os matemáticos utilizavam um sistema de numeração decimal e desenvolveram técnicas para calcular áreas e volumes enquanto na Mesopotâmia, foram desenvolvidos os primeiros sistemas de numeração, incluindo o sistema sexagesimal, que se baseava no número 60 e foi utilizado para medir o tempo e os ângulos.

Na Grécia antiga com matemáticos como Pitágoras, Euclides, Arquimedes (EVES, 2011) a matemática começou a ganhar um caráter mais abstrato e teórico, sendo desenvolvidas contribuições significativas para a geometria, álgebra e teoria dos números, as quais tem fundamentos dessa disciplina e suas postulações estudadas até os dias de hoje.

Ao observarmos a história da humanidade notamos que ela está ligada a uma evolução dos conceitos matemáticos, à medida que a humanidade progredia em seus aspectos culturais e tecnológicos a matemática se expandia e se ramificava em suas especificidades, trazendo contribuições para diversas áreas como medicina, engenharia tecnologias entre outras.

A importância do resgate cultural e histórico dos conhecimentos matemáticos torna-se algo tão vital que é citado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN,1997) quando fala que o professor ao conseguir mostrar a seus alunos as necessidades das diferentes épocas e culturas, conseguindo estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos existentes no passado e presente, desenvolve nos alunos atitudes e valores favoráveis a compreensão.

Farago (2003) fala que o uso da história matemática:

Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram. Assim, esta História é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria Matemática. Podemos entender por que cada conceito foi introduzido nesta ciência e por que, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. (FARAGO et al., 2003, p. 17).

Para Chaquiam (2017) o uso da história da matemática auxilia no processo de desenvolvimento do aluno, principalmente no que diz respeito a construção cognitiva, ele destaca:

A história da Matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada (CHAQUIAM, 2017, p. 14).

Assim expressões como compreender, entender, reviver unem-se a verbos como construir, produzir, idealizar, planejar, todos que carregam consigo um sentimento de coletivismo, uma vez que nada ou muito pouco se realiza sozinho ou que não reflita nas pessoas ao seu redor, esse processo de busca pela construção coletiva e participativa deve ser um sentimento comum as partes envolvidas no processo de aprendizagem.

2.20 Desenvolvimento do raciocínio lógico

Groenwald e Timm (2020) destacam a necessidade desenvolver nos indivíduos a criatividade, buscando gerar nos alunos o pensamento lógico dando uma ênfase nas interações entre as partes participantes do processo construtivo, os autores citam:

Ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolvendo a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas. (GROENWALD E TIMM, 2020, p.01).

Silvia Regina Canan (2000) diz que o conhecimento não é algo concebido ou pré-determinado no indivíduo, nem mesmo podemos atribuir a eles às características

inatas do objeto, mas são frutos de interações resultado das relações entre o sujeito, ambiente e objetos que permeiam esse sistema.

Essas relações entre os participantes do processo construtivos são estimuladas quando da busca pela integração entre teoria e prática, visto que esta desempenha um papel fundamental na instigação do desejo pela descoberta nos alunos. Para alcançar esse objetivo, é imprescindível desmistificar a noção de que tudo já foi descoberto e que a mera memorização é suficiente. É crucial, em vez disso, incentivar a busca por um entendimento mais profundo e encorajar a exploração do desconhecido.

Piaget (1983) resgata essa necessidade pelo novo quando cita que:

Todo conhecimento comporta um aspecto de elaboração nova (p.3) [...] conhecer não consiste, com efeito, em copiar o real, mas agir sobre ele e transformá-lo (na aparência ou na realidade), de maneira a compreendê-lo em função dos sistemas de transformação que estão ligados a estas ações" (PIAGET, 1983, p.15).

A descoberta, e composta por elementos formadores do processo de construção do conhecimento lógico-matemático, o qual ocorre de maneira dinâmica e interativa, segundo Piaget (1978), o conhecimento lógico-matemático é construído pela criança por meio do exercício mental sobre o mundo, resultante de suas ações e reflexões em relação ao objeto e ao mundo circundante.

Entende-se que não se pode desenvolver o raciocínio apenas ensinando repetições ou verbalizações, já que é o somatório das ações do sujeito que formam as estruturas cognitivas essenciais ao desenvolvimento lógico, assim o estímulo fornecido ao indivíduo é fundamental para que esse processo ocorra de maneira fluente, surge então à necessidade de sair do convencional.

Para Piaget (1999), necessário recriar o ambiente de aprendizagem no qual o aluno está integrado essa nova modelagem pode ser construída a partir da introdução de um novo fator ou objeto, porém esse processo de transformação somente ocorrerá de forma significativa quando esse material for interessante e trazer consigo uma significância para o aluno.

O aluno precisa então exercer uma ação sobre o objeto, tirando ele do seu estado de acomodação, gerando no sujeito uma inquietação, que só será amenizada quando ocorrer a assimilação do fato gerador, Piaget (1999) descreve desse processo de assimilação:

Ora assimilando assim os objetos, a ação e o pensamento são compelidos a se acomodarem a estes, isto é, a se reajustarem por ocasião de cada variação exterior. Pode-se chamar 'adaptação' ao equilíbrio destas assimilações e acomodações (PIAGET, 1999, p.17).

2.3 As tecnologias dentro da educação

Na busca por um objeto pedagógico com a capacidade de gerar essa inquietação, com as características de alterar a percepção dos alunos em relação as propostas pedagógicas apresentadas, propõe-se uso das tecnologias, tendo em vista sua capacidade de estimular a criatividade e independência de pensamento no aluno. Tajra (2012) traz a luz essa ideia quando nos diz que: “a introdução de novas tecnologias digitais gerou mudanças para dinâmica social, cultural e tecnológica, essas por sua vez abriram as portas para o acesso à informação”, isso aconteceu em todas os cenários inclusive dentro da esfera educacional, Sá e Machado citam:

O uso das tecnologias na sala de aula vem se tornando uma ferramenta de grande importância, pois consegue auxiliar tanto o professor quanto o aluno na explicação e na compreensão dos conteúdos. Com a tecnologia na aula os alunos sentem-se mais motivados a aprender e a partir disso o docente consegue ensinar de forma mais dinâmica e criativa (SÁ; MACHADO, 2017, p. 1).

Essa mudança tem como ponto central a construção do conhecimento e a interdisciplinaridade, rompendo com estruturas e fórmulas prontas ou práticas padronizadas no processo de ensino-aprendizagem.

Santos afirma que o papel da educação na “sociedade tecnológica” é formar sujeitos capazes de compreender e se situar na contemporaneidade, para que esse objetivo seja alcançado são necessárias mudanças na escola, mas não somente estruturais e sim culturais, é preciso que o docente reflita sobre a maneira tradicional de transmitir conhecimento “reinventar a aprendizagem e o ensino a fim de enfrentar desafios representados pela cultura contemporânea e pela emergência de um novo leitor e observador” (SANTOS, 2003, p. 40).

Assim sendo a educação abrange a habilidade de se adaptar de maneira dinâmica às transformações em nosso mundo, pois as novas tecnologias desempenham um papel essencial como mediadoras no processo de aquisição de cultura e conhecimento.

Assim as tecnologias têm a capacidade de proporcionar ao professor novas maneiras de apresenta a realidade ao aluno, buscando atingir o verdadeiro sentido do aprendizado, quando os alunos se tornam sujeitos ativos na construção e reconstrução do conhecimento transmitido.

Percebe-se então que ensinar matemática torna-se um objetivo que deve ser compartilhado entre professores e alunos, a tarefa de unir os conhecimentos técnicos com os desafios e necessidades de uma sociedade em constante evolução, e muitas vezes vista como uma tarefa árdua, Pereira (2013) diz:

[...] estudar Matemática, na maioria das escolas, é considerado um desafio pelos estudantes. Enquanto alguns se destacam, muitos têm dificuldades para compreender determinados tópicos e desenvolver habilidades necessárias para a resolução de problemas. Assim, o principal objetivo de incorporar as tecnologias de informação, nesse processo, é minimizar as dificuldades proporcionando o entendimento dos temas apresentados (PEREIRA et al., 2013, p. 8).

Construir os conhecimentos relacionados ao estudo da matemática de forma integral, passa pela capacidade de aliar o uso das tecnologias ao trabalho discente realizado em sala de aula, proporcionado com essa aproximação momentos de compartilhamento de ideias buscando a construção coletiva.

Porem esse processo não se apresenta como uma tarefa simples, levando em consideração a precariedade ou inexistência de recursos tecnológicos nas escolas, e por vezes a falta de capacitação dos professores, o que acaba por constituir barreiras a ser superada por todos os sujeitos envolvido no processo.

2.4 Problema da duplicação do Cubo

Buscando estruturar o projeto de pesquisa e definir parâmetros para avaliar os resultados futuros, realizou-se uma busca por trabalhos trouxessem alternativas para o problema de duplicação do cubo, procurou-se definir entre os trabalhos pesquisados os que tivessem ainda um viés voltado para a análise dos processos construtivos e qualitativos da pesquisa.

Dentre os trabalhos analisados citaremos alguns que, segundo análise pessoal, forneceram subsídios para a compreensão mais detalhada da pesquisa realizada.

Um dos primeiros trabalhos que recebeu atenção foi o realizado por Borlin (2008) - **Resolução do problema da duplicação do cubo utilizando o origami**. O

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) da Universidade Federal de Santa Catarina, o autor destaca o uso do origami (arte japonesa de dobrar o papel) apresentado por Peter Messer como forma de resolução do problema, ele ainda traz uma importante reflexão sobre a impossibilidade de resolução do problema utilizando uma régua não graduada e um compasso ao mesmo tempo em que resgata a contribuição que o projeto traz ao resgate da história da matemática, ainda consegue trazer um maneira de resolução para qualquer equação cúbica através dessa fantástica arte da dobradura.

Outro trabalho de pesquisa na resolução do problema tendo como base o uso da massa de modelar, foi proposta através de um relato de experiência apresentado por Celestino et. al (2019), **O Problema Da Duplicação Do Cubo Na Formação Inicial De Professores De Matemática**, no XV Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2019- Londrina.

Os autores trazem aqui um importante resgate da história da matemática, onde utilizam ele para contextualizar a importância do conceito a ser estudado, nesse trabalho procuram também mostrar a importância da utilização do uso de material concreto onde demonstram a resolução do problema da duplicação do cubo com utilização da massa de modelar, trazendo dados de como ela contribuiu com a construção do conhecimento entre os alunos.

Jesus (2021), em sua dissertação: **A duplicação do cubo e a impossibilidade da solução clássica: uma proposta para ensino usando geometria analítica, descritiva e dinâmica**, pela Universidade Federal de Sergipe, onde traz a análise da impossibilidade de resolução do problema através do uso da régua e compasso, comprovando essa afirmação através do uso da álgebra, trazendo para isso uma retomada histórica do problema matemático do cubo, para isso o autor busca embasamento em matemáticos como Gauss, Wantzel, Descartes entre outros. Ao comprovar essa impossibilidade apresenta soluções não-euclidianas para o problema através da construção de figuras geométrica no GeoGebra, neste trabalho o autor traz uma importante reflexão sobre a importância do uso da história da matemática como fonte geradora de interesse.

2.5 Problema da Duplicação do Cubo por meio de uma equação cúbica

Durante o desenvolvimento da aula, o professor optou por incorporar um contexto histórico relacionado a um problema matemático. Embora a ideia de usar relatos históricos remeta à história da matemática, essa abordagem não foi explorada como uma metodologia de ensino, isso em função da restrição de tempo para a realização do projeto, servindo dessa maneira somente como referencial para desenvolvimento do projeto.

Mas o que é um problema? Para Poyla(1995), “um problema matemático é a tarefa de encontrar uma solução para um certo problema matemático formulado em termos precisos, no contexto de uma estrutura matemática dada”, o autor ainda sugere que resolver o problema passa por traçar novos caminhos não antes descobertos, superando obstáculos em vista de alcançar o objetivo estabelecido, utilizando meios e ferramentas adequadas para esse propósito.

Nesse processo de construção e descobertas alguns aspectos importantes devem ser observados para Zuffi e Onuchic (2007), e preciso estimular os alunos a compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar os resultados e ser capaz de utilizar técnicas conhecidas para alcançar o objetivo.

Polya (1995) também nos traz uma contribuição importante no sentido de compreendermos a forma eficaz de trabalhar a resolução de problemas, para ele existem quatro fases para resolver um problema de matemática de forma eficiente:

Compreender o problema (CP): o que é necessário para resolvê-lo? Quais suas variáveis e incógnitas?

Designar um plano (DP): Esse problema é conhecido? Como as variáveis estão correlacionadas? Quais estratégias devemos usar para sua resolução?

Executar o plano (EP): é possível verificar cada passo da execução? É possível demonstrar que o plano está correto?

Retrospecto do problema (RP): é possível verificar o resultado encontrado?

No entanto, não é suficiente apenas apresentar o problema ao aluno. É necessário estruturá-lo de forma a torná-lo desafiador e interessante, a fim de que possa funcionar como um fator motivador para o aluno.

Com o objetivo de criar esse aspecto introdutório, optamos por utilizar um relato matemático histórico, o problema da "Duplicação do Cubo", existem algumas histórias contadas sobre o seu surgimento desse problema, uma delas relacionada a

insatisfação do Rei Minos quanto ao tamanho do túmulo de seu filho Glauco, outra com origem na mitologia grega conta que:

[...] quando uma peste assolou Atenas, dizimando cerca de um quarto de sua população, inclusive fazendo uma de suas vítimas Péricles. Então os habitantes, desesperados, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo havia um altar em forma de cubo e em troca do fim da peste, a divindade fez um pedido: *erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará.* (CONTADOR, 2012, p.248)

Esta última história é a responsável pelo problema da duplicação do cubo ser chamado também de problema deliano.

Esse problema foi fruto do estudo dos matemáticos gregos antigos, tanto que ficou conhecido como um dos três problemas clássicos da Grécia Antiga.

Algumas soluções foram consideradas desde os tempos da Grécia Antiga, como a solução de Arquitas (400 a.C) o qual propôs que a resposta poderia ser encontrada através da intersecção de três superfícies de revolução: o cilindro, o toro e o cone circular reto (EVES, 2011), o cruzamento das duas primeiras superfícies recebeu o nome de Curva de Arquitas, e o encontro desta curva com o cone resultou em quatro pontos de intersecção, como as distâncias dos pontos até a origem são iguais, foi considerado o ponto do primeiro quadrante.

Depois temos a solução de Eudoxo a qual teve seu relato feito por Eutócio (480 a 520 d.C.), propondo uma solução através do uso de linhas curvas, o mesmo Eutócio descreveu a solução de Menêmo que propôs encontrar duas médias proporcionais, o que consistiu em determinar um certo ponto como a intersecção entre duas cônicas (EVES, 2011).

O autor ainda traz o registro de vários outros matemáticos da antiguidade e da era moderna como Nicomedes, Platão, Apolônio de Perga, Herão de Alexandria, Filão de Bizâncio, Descartes, Newton propuseram resposta a esse problema todas elas baseadas na geometria plana.

Durante o século XVI o matemático René Descartes na sua obra "A Geometria" foi o primeiro a demonstrar a impossibilidade da resolução do problema grego através da geometria euclidiana (utilizando régua e compasso), mas somente depois com Pierre Laurent Wantzel (1837) temos a primeira prova moderna dessa impossibilidade, levantando a suspeita de que os gregos da época não tinham a resposta para esse problema.

Wantzel trouxe a luz do debate sobre esse problema utilizando uma metodologia ligada a construção do problema sobre a ótica da teórica da algébrica, definindo médias proporcionais entre dois segmentos retos de comprimento s e $2s$, sendo que essa média é a raiz de uma equação cúbica, resposta ao problema originalmente proposto.

A resposta algébrica proposta por Wantzel, repousa sobre as soluções das equações cúbicas ou equações cúbicas de 3º grau (fruto de nosso estudo) que são as equações do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, embora seu estudo seja datado da época de Arquimedes (225 A.C), seu estudo tornou-se mais contundente com Ormar Khayyam poeta, matemático e astrônomo persa dos séculos XI e XII, o qual apresentou um trabalho mais detalhado quando classificou e resolveu 13 casos de cúbicas, nesse período muitos debates matemáticos sobre esse assunto foram propostos, um dos mais conhecidos foi realizado entre Antônio Maria Flor e Tartaglia, sendo que cada um enviou 30 problemas envolvendo cúbicas para serem resolvidos em 50 dias, Tartaglia resolveu todos os problemas em duas horas vencendo seu oponente.

Atualmente no Ensino Médio, dentro da área da álgebra complementamos o estudo de equações cúbicas e ou funções polinomiais, conteúdo já trabalhado desde de 8º ano do ensino fundamental. Esse tema é importantíssimo para a compreensão de vários assuntos como a álgebra linear, análise matemática, cálculos.

A importância do seu estudo pode ser comparada ao desafio de sua compreensão, uma vez que ele traz alguns conceitos abstratos difíceis de relacionar à rotina dos alunos, o que por vezes resultam em um desinteresse em relação ao aprofundamento de seu estudo.

Com o objetivo de mitigar esses fatores desfavoráveis, considerou-se a combinação do uso do conceito histórico, como um elemento estimulante, com o auxílio das tecnologias, como um facilitador, para isso, foi adotado o contexto histórico mencionado anteriormente, juntamente com o *software* GeoGebra.

O GeoGebra foi escolhido por ser um *software* de licença livre que permite a construção de gráficos, desenhos geométricos, cálculos algébricos e outras atividades matemáticas. Sendo ele considerado por muitos educandos uma ferramenta extremamente útil para o ensino da matemática, pois possibilita ao aluno visualizar de forma clara e dinâmica conceitos abstratos, ao tempo em que permite ao professor

explorar novas situações e testando as hipóteses com os alunos de forma objetiva e prática.

3. PLANO DE AULA - ANALISE A PRIÓRI

Para Libâneo (1994), o planejamento é um procedimento que busca racionalizar, organizar e coordenar a ação docente, conectando a atividade escolar com os desafios presentes no contexto social, neste sentido pensou em estruturar um plano de aula articulado com o plano de ensino e o plano da escola, nesse sentido optou-se em desenvolver o trabalho em cima do conteúdo de equações cúbicas.

No processo de construção desse planejamento algumas etapas foram seguidas:

Primeiramente foi definido o tema da aula, que foi ao encontro do trabalho de pesquisa inicial e envolveu o estudo das equações cúbicas;

Definido o tema verificou-se a necessidade de pensar uma forma de tornar esse trabalho interessante e estimulante para os alunos, dessa forma, o contexto histórico surge como opção de ensino, pois nos remete a história da matemática.

Assim definimos dentro do tema da aula uma atividade introdutória, e para isso usamos o resgate de um problema matemático apresentado na Grécia antiga, como ponto inicial dos trabalhos, “o problema da duplicação do cubo”:

Quando uma peste assolou Atenas, dizimando cerca de um quarto de sua população, inclusive fazendo uma de suas vítimas Péricles. Então os habitantes, desesperados, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo havia um altar em forma de cubo e em troca do fim da peste, a divindade fez um pedido: *erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará* (CONTADOR, 2012, p.248).

O objetivo era despertar nos alunos o desejo pela descoberta através da sua resolução.

Após, pensou-se na ideia de criar um ambiente propício a descoberta e criatividade, objetivando inserir o aluno no processo de construção do conhecimento de maneira ativa, tornando ele agente de construção, autônomo pensante e criativo, pensado dessa maneira e tomando como base as ideias de Zatti (2017), quando diz que autonomia é percebida como uma condição:

Como ela se dá no mundo e não apenas na consciência dos sujeitos, sua construção envolve dois aspectos: o poder de determinar a própria lei e também o poder ou capacidade de realizar. O primeiro aspecto está ligado à liberdade e ao poder de conceber, fantasiar, imaginar, decidir, e o segundo ao poder ou capacidade de fazer. Para que haja autonomia, os dois aspectos devem estar presentes, e o pensar autônomo precisa ser também fazer autônomo. (Zatti, 2007, p. 12).

Entendeu-se que para alcançar essa autonomia durante as etapas dos processos construtivos e validar a proposta inicial do trabalho, precisava-se de um potencializador, dessa forma optou-se pelo uso do *software* GeoGebra devido à sua praticidade em demonstrar rapidamente as variações nos experimentos e seus comandos intuitivos de fácil utilização, o objetivo com o uso do *software* e bastante simples, fornecer aos alunos um instrumento de apoio, possibilitando a eles criar novas conjecturas a partir das suas conclusões iniciais.

Tão necessário quanto planejar e desenvolver o plano de aula, a análise dos resultados é de vital importância, na verificação dos resultados será levado em consideração não apenas as respostas corretas, mas também os processos construtivos, cada uma das etapas percorridas pelos alunos, até chegarem à conclusão final será analisada e depois validada pelo grande grupo.

A ideia é compreender como ocorrerá a construção do pensamento matemático em cada uma das fases do processo e a consequência dessa no desenvolvimento do raciocínio lógico, para isso, será adotada uma abordagem qualitativa (Minayo, 1999).

Como a análise terá como base os dados qualitativos, objetivaremos analisar o raciocínio lógico utilizado pelos alunos, já que como citado por COPI (1978) “O estudo da lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto”, como a lógica trata do estudo do raciocínio, observaremos as formas de estruturação deste dentro das etapas da resolução do problema, atentando para , os argumentos, construções, deduções usadas pelos alunos no processo de dar sentido ao resultado final.

Essa análise é considerada importante pois como citado por Abar (2006) o aprendizado da lógica contribui para o raciocínio esse por sua vez auxilia na compreensão de conceitos básicos, na verificação formal de programas e melhor os prepara para o entendimento do conteúdo de tópicos mais avançados.

Essa análise se torna importante uma vez que o desenvolvimento não eficaz desta “capacidade” reflete-se futuramente, quando os estudantes passam a se deparar com níveis cada vez mais elevados de situações em que precisam agir de forma lógica e organizada, muitas vezes não conseguindo expressar de forma clara suas opiniões em virtude da dificuldade de se expor de forma lógica suas ideias, segundo (Rauber et al., 2003), é comum encontrar alunos universitários com dificuldades para interpretar o que estão lendo, por não terem sido alfabetizados para

entender o que está “por trás” daquilo que está escrito, ou seja, o real significado e contexto.

Nosso objetivo é identificar se o processo de desenvolvimento do raciocínio lógico foi estimulado durante a resolução do problema, especialmente quando do uso do GeoGebra, e verificar se esse estímulo resultou em conhecimento necessário para que os alunos pudessem responder à pergunta inicial.

Após as fases de resolução, experimentação e debate um questionário estruturado será realizado com os alunos buscando verificar a opinião deles referente ao uso das tecnologias e como elas foram úteis nos processos de verificação da atividade proposta.

3.1 Plano de aula

Neste capítulo, para melhor situar dentro do cronograma do trabalho realizado, apresentaremos o plano de aula elaborado e realizado durante a pesquisa, suas análises serão discutidas em um capítulo seguinte.

Este trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual de Ensino Médio Yeté, na cidade de Tuparendi- RS com uma turma de 20 alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

A seguir estão os dados referentes ao plano de aula desenvolvido e aplicado neste trabalho.

Duração: 3 períodos de 50 minutos

Objetivo: Estudar com o auxílio do *software* GeoGebra um problema matemático envolvendo equações cúbicas, buscando relacionar com os conhecimentos já adquiridos.

Metodologia: Estudo de caso com a utilização de recurso tecnológico.

Material necessário: Quadro Branco, canetões, folha de anotações, computador com acesso à internet.

Desenvolvimento da aula

Essa aula foi dividida em dois momentos, sendo que o primeiro momento os alunos buscariam responder ao problema inicial relacionado a “Duplicação do Cubo”, onde para isso desenvolveriam um modelo matemático de resolução, após, com o uso do *software* GeoGebra, eles deveriam testar suas conclusões.

Em primeiro lugar os alunos serão divididos em duplas, e assim será apresentado o caso a ser resolvido, “O Problema da duplicação do Cubo”.

Será fornecida uma folha para anotações, onde os alunos utilizando a estratégia que melhor se servir, deverão encontrar uma resposta matemática para o problema, isso poderá ser feito através de desenhos ou fórmulas matemáticas.

A única regra imposta é de que os alunos não poderão fazer uso de uma régua graduada para resolução do mesmo, visto que a ideia é remete-los ao mesmo ambiente onde os gregos tentaram resolver esse problema.

Após, em um segundo momento os alunos deverão testar suas conclusões com a utilização do *software* GeoGebra, poderão também realizar ajustes no seu esboço inicial, neste momento também será realizada um diálogo onde os alunos poderão compartilhar entre si suas ideias.

O professor comentará as conclusões das duplas e fará o fechamento da atividade.

4. ANÁLISE POSTERIORI

No primeiro período de aula os alunos foram desafiados a resolver o problema matemático da “Duplicação do Cubo” após receber a folha contendo o caso a ser analisado os alunos deveriam resolver o mesmo, esperava-se que ao colocar em prática os conhecimentos já adquiridos relacionados a resolução de equações cúbicas, eles conseguissem formular uma resposta ao problema proposto trazendo uma solução algébrica, lógica e condizente com que lhes era requerido.

Como o intuito era desenvolver a lógica matemática e remeter eles a ideia da utilização de equações cúbicas, foi deixado que cada grupo escolhesse a melhor estratégia para resolver o problema, podendo formular a resposta em forma de uma equação algébrica ou como uma representação geométrica, porém o importante era que não fosse utilizada nessa etapa uma régua graduada (assim como no problema original).

Algumas ideias iniciais foram sendo esboçadas e à medida que elas eram sugeridas os grupos deveriam registrá-las em suas folhas. Algumas ideias foram surgindo de maneira bem rápida e sem muita reflexão, outros foram sendo construídos através de diálogo entre os alunos que conforme registravam suas ideias iniciais já realizavam ajustes nelas.

Para melhor compreensão da linha de pensamento dos alunos representaremos abaixo uma lista com algumas das ideias, as quais estão colocadas em ordem aleatória.

- ✓ Aumentar em 2x uma das arestas do cubo;
- ✓ Dobrar a aresta do cubo;
- ✓ Criar dois cubos e unir;
- ✓ Colocar quatro cubos de mesmo tamanho na base;
- ✓ Não é possível criar um cubo com o dobro do volume sem saber o

volume do cubo inicial.

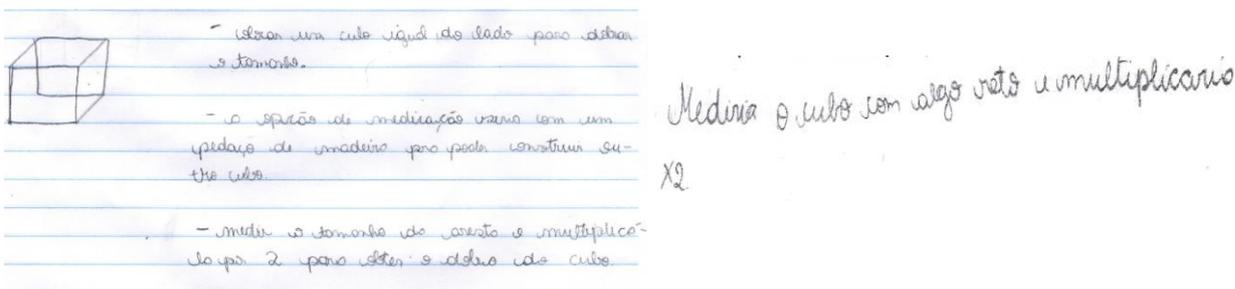
Apresentaremos alguns recortes das possibilidades levantadas pelos alunos durante o momento inicial, seguidas de um breve comentário tentando ajudar a compreender o pensamento matemático envolvido na resolução proposta, não serão registradas nesta parte do trabalho as conclusões levantadas em cima das respostas dos alunos, elas serão apresentadas em um momento posterior.

Para uma melhor compreensão as duplas serão nomeadas como dupla 1, dupla 2 e assim sucessivamente, como houve dois alunos que trabalharam de forma individual eles serão nomeados como aluno 1 e aluno 2, os recortes foram organizados de maneira que as ideias que apresentassem estrutura lógicas semelhantes estivessem juntas.

- **Dupla 1 e Aluno 1**

Ao analisarmos os recortes das soluções propostas por alguns alunos, observamos que elas buscaram aparentemente a solução mais “evidente” a qual seria simplesmente duplicar a medida do lado do cubo, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Tentativa para resolver o problema do cubo: duplicação da aresta



Fonte: dados da pesquisa (2023).

A ideia inicial dos alunos era que se o lado do cubo fosse aumentado em 2 vezes, isso por si só, resultaria na duplicação do seu volume, ressaltando que nesse momento do experimento os alunos não poderiam fazer uso de uma régua numerada (assim como no problema original proposto), tornando difícil para eles verificar se suas conclusões poderiam ou não ser verdadeiras.

Esperava-se nesse momento do trabalho que os alunos pudessem relacionar a solução do problema a resolução de um polinômio de 3º grau.

- **Duplas 2,3 e 4 - Aluno 2**

Aqui os alunos propuseram soluções práticas e similares, como vemos na Figura 2, os alunos propuseram a utilização de palmos como sistema métrico para medir a área do cubo, assim sabendo o número de palmos poderiam simplesmente duplicar esse número na construção do novo cubo, ou utilizar pedras e depois construir outro dobrando o número de pedras. Outra proposta foi a de utilizar o seno duplicado para construir um cubo com o dobro do tamanho, depois em conversa sobre

o que se esperava com a duplicação do seno, o aluno explicou que havia se equivocado e queria citar hipotenusa, pois havia relacionado a relação de Pitágoras, e acreditava que dobrando a hipotenusa (diagonal do cubo) poderia encontrar o dobro da área.

Lembrando que nessa etapa o professor orientador não teve interferência no raciocínio feito pelos alunos deixando eles a vontade para propor as soluções que melhor lhe provesse.

Figura 2 - Tentativa para resolver o problema do cubo: duplicando o seno do cubo ou duplicando das pedras

<p>Duplicar o seno do cubo original. Sendo um cubo $2x2x2$, duplicando o seno do mundo $4x4x4$.</p>	<p>Acreditamos que deveriamos ocupar pedras com medidas parecidas para formar o primeiro cubo, então deveriam duplicar o número de pedras para o segundo cubo</p>
<p>1º $(x^3)^2$ x = número de pedras </p> <p>2º pegariamos um metro de cordão tirariamos a medida para descobrir a área e depois duplicariamos </p>	<p>Medição o palmo e multiplica por 2 Número do 1º palmo $\times 2 = 24$ Usando o dobro do material que foi usada na 1ª construção</p>

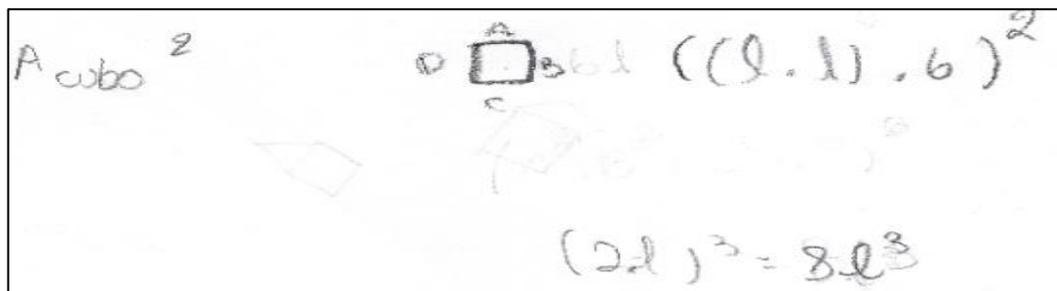
Fonte: dados da pesquisa (2023).

• Dupla 5

Aqui temos o esboço de uma solução estruturada como uma fórmula matemática, observamos na Figura 3, que na proposta dos alunos a duplicação do cubo seria possível multiplicando-se os lados do cubo ($l \times l$), para logo após multiplicar o valor encontrado por 6 ("pois o cubo tem 6 lados" - fala da dupla) e por fim elevando ao quadrado.

Pela dedução dos alunos eles chegariam a uma equação onde 8 vezes o lado elevado ao cubo resultaria no dobro de qualquer cubo original.

Figura 3 - Tentativa para resolver o problema do cubo: oito vezes o lado elevado ao cubo

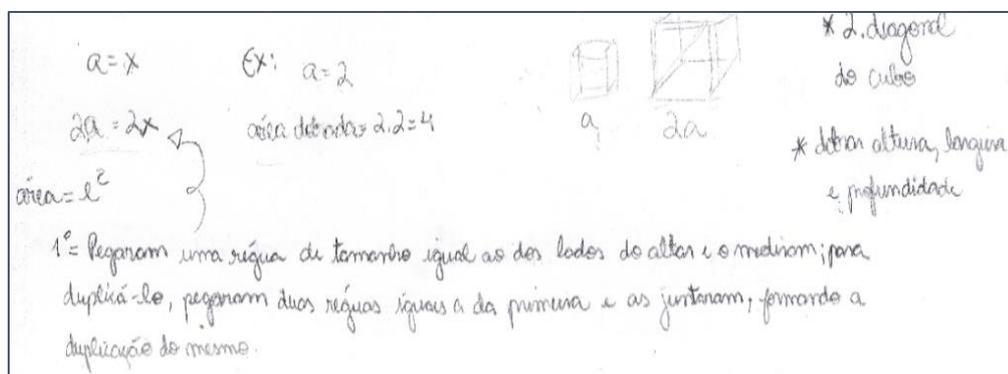


Fonte: dados da pesquisa (2023).

- **Dupla 6**

Essa dupla buscou, primeiramente, utilizar a diagonal do cubo para encontrar o resultado, conforme observamos na Figura 4, a duplicação da diagonal resultaria na duplicação do cubo, para isso usariam régua com tamanhos fixos, após medirem uniriam essas duas régua para formar uma nova régua que seria a medida padrão.

Figura 3 - Tentativa para resolver o problema do cubo: uso de duas régua

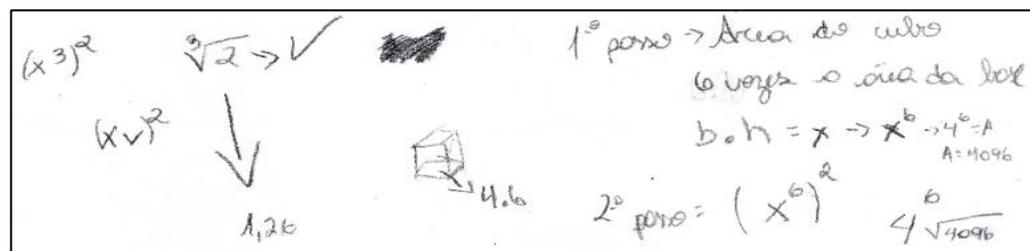


Fonte: dados da pesquisa (2023).

- **Dupla 7**

Essa dupla propôs a ideia de fazer a área do cubo multiplicada por 6 afim de resolver o problema proposto, conforme observamos na Figura 5, vale apenas ressaltar que até esse momento nem uma das duplas haviam mencionado que o problema poderia ser resolvido através de uma equação polinomial, embora estivessem formulando mesmo que inconscientemente equações desse tipo.

Figura 4 - Tentativa para resolver o problema do cubo: multiplicar a área da base por 6

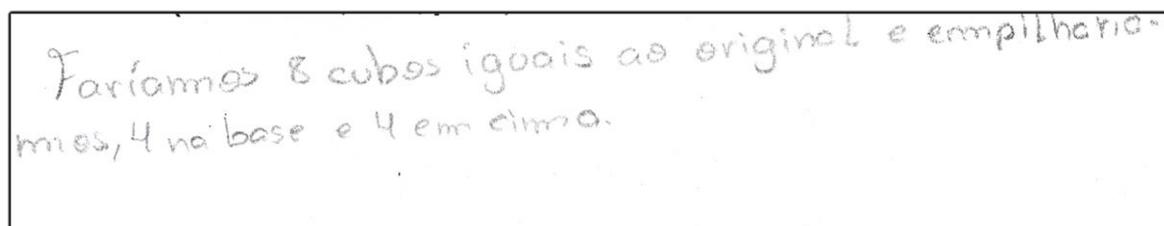


Fonte: dados da pesquisa (2023)

- **Dupla 8**

Na Figura 6, temos a solução proposta pelos alunos de criar 08(oito) cubos iguais ao original e empilhá-los 4 a 4.

Figura 5 - Tentativa para resolver o problema do cubo: criação de 8 cubos

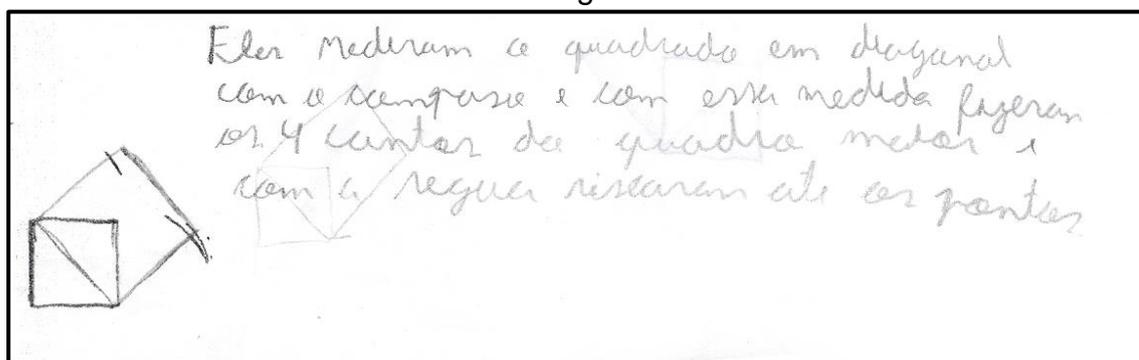


Fonte: dados da pesquisa (2023)

- **Dupla 9**

Aqui os alunos utilizaram como ferramenta de mediação o compasso (a única condição proposta aos alunos era de não utilizarem réguas), conforme observamos no recorte da Figura 7 os alunos com o uso do compasso mediram a diagonal do quadrado e após utilizando os cantos do quadrado como ponto de referência criaram um novo quadrado com o dobro da proporção do original

Figura 6 - Tentativa para resolver o problema do cubo: uso do compasso para medir as diagonais



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Concluída essa fase inicial os alunos deveriam testar as possibilidades por eles levantadas e verificar se elas dariam resposta ao problema da “duplicação do cubo”.

O segundo momento da aula foi realizado no laboratório de informática onde os alunos tiveram acesso ao GeoGebra de maneira online.

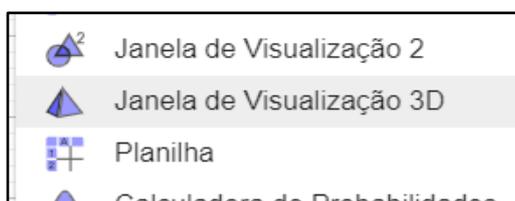
Como os alunos não tinham experiência com o uso do GeoGebra, o professor orientador apresentou algumas funções básicas ao grupo a fim de que eles pudessem manipular o cubo e realizar seus experimentos.

Foi acordado também que o cubo inicial que daria base para a experimentação seria construído de maneira coletiva sob direção do professor orientador, isso com o objetivo de que todos pudessem ter o cubo com as mesmas dimensões.

A construção do cubo no GeoGebra se deu da seguinte maneira:

- ✓ Abrir o *Software* GeoGebra, em <https://www.GeoGebra.org/classic>;
- ✓ Selecionar Janela de Visualização 3D, no menu direito, como mostra a Figura 8;
- ✓

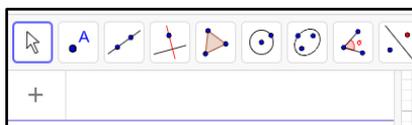
Figura 7 - Janela de visualização 3 D - GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa (2023)

- ✓ Na janela de álgebra, como mostra a Figura 9, no campo entrada digite o seguinte comando: Cubo $((0,0,0),(1,0,0),\text{EixoZ})$
- ✓

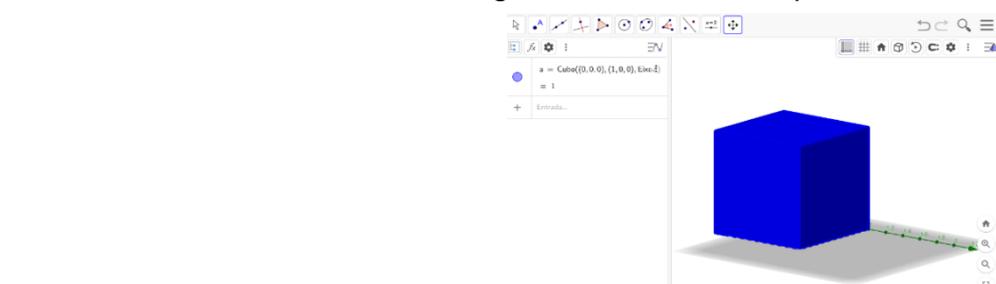
Figura 8 - Campo de entrada GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Como resultados temos o cubo com valor unitário que serviria de base para os alunos, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Cubo criado para a atividade



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Construído o cubo chegou a hora dos alunos realizarem as manipulações. Esperava-se nesse momento que os alunos já conseguissem ligar o problema à resolução de uma equação polinomial, porém observou-se até aqui que a preocupação em resolver o problema não permitiu a eles pensar nesta relação, o uso do GeoGebra buscava proporcionar a eles clareza necessária para que pudessem finalmente criar esse elo de ligação entre o problema e a resolução da equação cúbica.

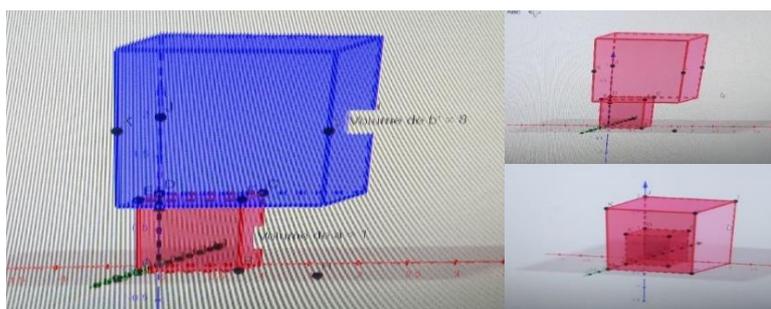
Faremos agora alguns recortes referente as construções feitas pelos alunos, nem todas as anotações foram adicionadas ao trabalho uma vez que os alunos realizaram um número muito grande de mudanças em seu experimento durante essa fase.

A seguir apresentaremos as conclusões relatadas pelos alunos referentes ao experimento, assim como as respostas por eles dadas diante dos questionamentos feitos pelo professor orientador.

Tentaremos colocá-las na mesma ordem que foi apresentada os recortes das análises iniciais dos alunos, essa ordem não representa a ordem que as observações foram apresentadas ao professor orientador.

- **Dupla 1 e Aluno 1**

Figura 10 - O dobro da aresta - representação no GeoGebra



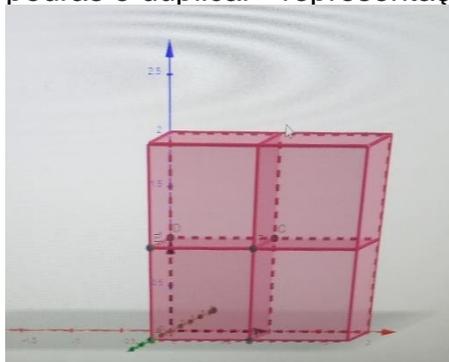
Fonte: dados da pesquisa (2023)

O Aluno 1 relatou: “*Não é possível dobrar o valor da aresta pois dessa forma acabamos com uma área 8 vezes maior que a inicial*”. Observamos na Figura 11 que os alunos imediatamente ao utilizarem o *software* GeoGebra, conseguiram observar que sua ideia inicial, de duplicar a aresta, iria resultar em um cubo com volume oito vezes maior que o inicial e não dobrado como o esperado.

Importante destacar a contribuição que o uso do GeoGebra traz ao estudo das relações métricas, uma vez que possibilitou aos alunos um rápido entendimento das relações existente entre a aresta e a área do cubo, através do uso de uma ferramenta denominada “área” disponível no *software*.

- **Duplas 2 e 4 e Aluno 2**

Figura 11 - Medir as pedras e duplicar - representação no GeoGebra



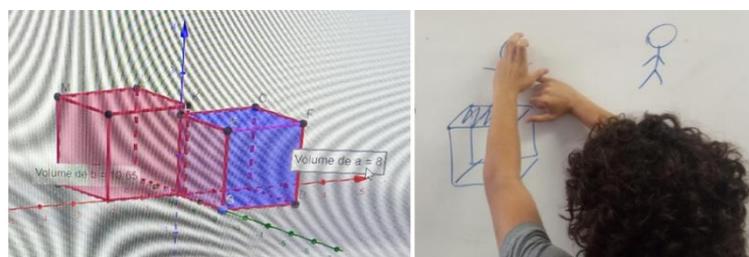
Fonte: dados da pesquisa

O Aluno 2 respondeu: “*Não daria certo pois dessa maneira não formaria um cubo, e sim um retângulo*”.

Obviamente no entendimento dos alunos ao criar outros dois cubos e uni-los eles estariam duplicando o volume do original, porém quando sua sugestão foi colocada no GeoGebra os próprios alunos após uma rápida comemoração observaram que não formava um cubo e sim um retângulo.

- **Dupla 3**

Figura 12 - Duplicar os palmos - representação no GeoGebra



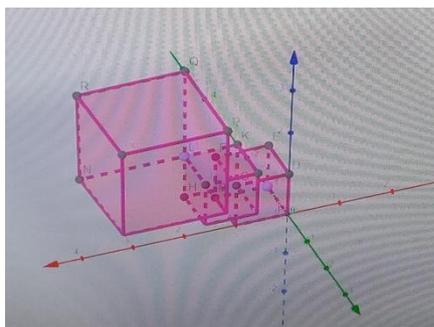
Fonte: dados da pesquisa (2023)

Uma das duplas resolver recriar o desenho no quadro branco e contar o número de palmos, após dobrar o valor e recriar com essas medidas o cubo no GeoGebra, o resultado foi um valor muito semelhante ao original, quando inquerido sobre o resultado o Aluno 3 respondeu: “*não dá certo ficou igual, erramos na hora de fazer a medida*”.

Esses alunos novamente realizaram o desenho no quadro e tentaram relacionar ele com o do GeoGebra, porém não conseguiram duplicar o volume pois na verdade acabaram desconsiderando as proporções entre o quadro e o computador.

- **Dupla 5**

Figura 13 - Oito vezes o lado elevado ao cubo - representação no GeoGebra



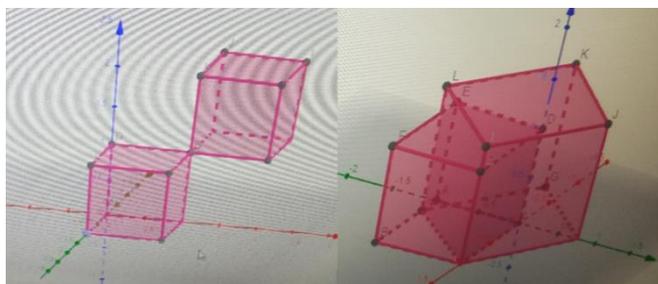
Fonte: dados da pesquisa (2023)

O Aluno 5 respondeu “*Não cria um cubo com o dobro e sim 8 vezes*”.

Os alunos rapidamente observaram que a utilização da fórmula matemática por eles proposta resultaria na criação de uma figura diferente da proposta, em ajustes por eles realizados, tentaram criar 8 cubos similares ao primeiro para tentar dobrar a volume utilizado a sua dedução inicial.

- **Dupla 6**

Figura 14 - Diagonal dobrada - representação no GeoGebra



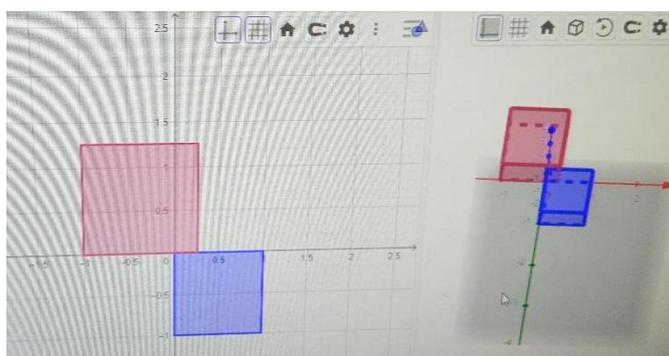
Fonte: Dados da pesquisa (2023)

O Aluno 6 respondeu “*Não conseguimos formar o cubo, com o tamanho pretendido, pois não encaixa dentro da figura original*”.

Os alunos observaram rapidamente com o uso das ferramentas do GeoGebra que o volume do cubo encontrado seria maior do que o que eles esperavam, embora estivessem muito próximo da resposta ao problema apresentada não conseguiram compreender a relação da diagonal com a área do cubo, nesta fase o professor orientador se resumiu a argumentar com os alunos, porém sem direcionar para a resposta correta.

- **Dupla 7**

Figura 15 - Base multiplicada por 6 - representação no GeoGebra

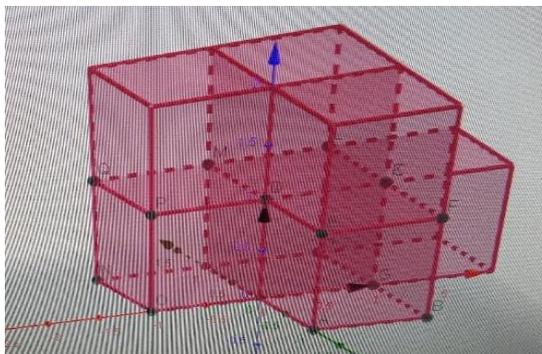


Fonte: dados da pesquisa (2023)

Aluno 7 respondeu: “*Não conseguimos dobrar o volume do cubo*”. Embora os alunos tivessem sugeridos que a área deveria ser multiplicada por seis vezes quando iniciaram a realização da suposição no GeoGebra observaram de forma rápida que não seria possível que a sua observação fosse verdadeira.

- **Dupla 8**

Figura 16 - Oito cubos colocados de 4 em 4 - representação no GeoGebra



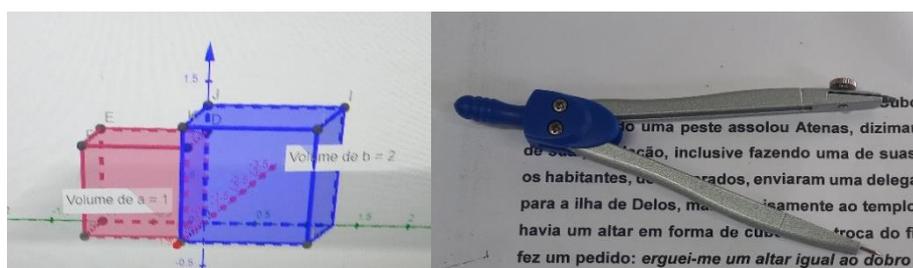
Fonte: dados da pesquisa (2023)

Um dos alunos da dupla 8 respondeu: “*Não sei o que deu errado, mas não vai formar um cubo, preciso de mais cubos iguais*”.

Os alunos desistiram de encontrar a resposta já que se tivessem prosseguidos com suas conclusões chegariam no resultado esperado.

- **Dupla 9**

Figura 17 - Utilização do compasso - representação no GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A dupla que utilizou o compasso conseguiu chegar no valor de aresta capaz de duplicar o volume do cubo. Quando questionada sobre como encontraram a medida eles responderam:

Foi medida a diagonal do primeiro cubo; após fomos aumentando a diagonal do 2º cubo até chegar no dobro do volume Para isso nós medimos na tela do GeoGebra o valor da diagonal e depois fomos aumentando o segundo cubo sempre na proporção de 0,1 até chegar em um valor de aresta de 1,25. (Dupla 9 - transcrição do professor)

Através desse experimento os alunos identificaram que a proporção que pode satisfazer todas as possibilidades de duplicação do cubo é a de multiplicar a aresta por 1,26 vezes seu próprio comprimento.

Após essa atividade um breve debate foi realizado com os alunos a respeito das suas conclusões, onde as duplas tiveram a oportunidade de expressar suas conclusões com o grande grupo, durante essa socialização a dupla 9 expos a sua maneira de resolução.

Observou-se nas falas dos alunos, que embora uma dupla tenha resolvido o problema da duplicação do cubo, nenhum dos alunos conseguiu relacionar a resolução do caso proposta ao uso de equações cúbicas.

Sendo assim o professor orientador apresentou aos alunos a dedução do problema, relacionando-a ao volume do cubo e sua resolução entro das equações cúbicas.

$$V = a^3$$

Como o objetivo era trabalhar com o polinômio de grau três a equação desenvolveu para esse sentido

$$V_1 = a^3 \rightarrow V_2 = b^3;$$

Buscando criar um “cubo b” com o dobro do volume, criamos a igualdade

$$V_2 = 2V_1;$$

Através das substituições deduzimos que

$$b^3 = 2a^3;$$

Colocando os fatores em evidência

$$\frac{b^3}{a^3} = 2;$$

Extraindo a raiz de ambos os lados temos:

$$\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^3}} = \sqrt[3]{2};$$

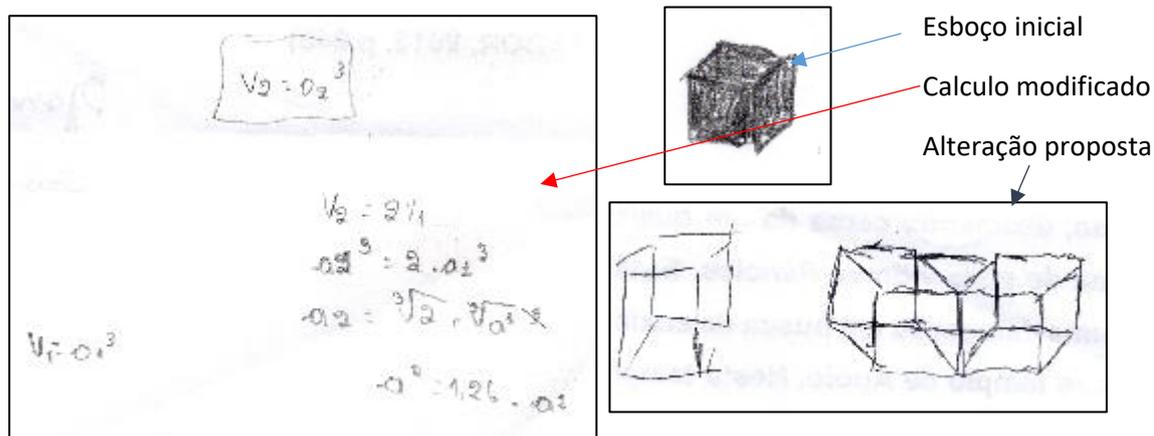
Como resultado temos

$$1 = \sqrt[3]{2} \text{ ou aproximadamente } \cong 1,26.$$

Após essa demonstração os alunos começaram a perceber que a resolução do problema passava pela dedução de uma equação de 3º grau.

Os alunos tiveram então outro momento onde eles trabalharam as suas alterações no GeoGebra e na folha de registro realizando adaptações no seu plano de resolução como demonstrada na figura a seguir:

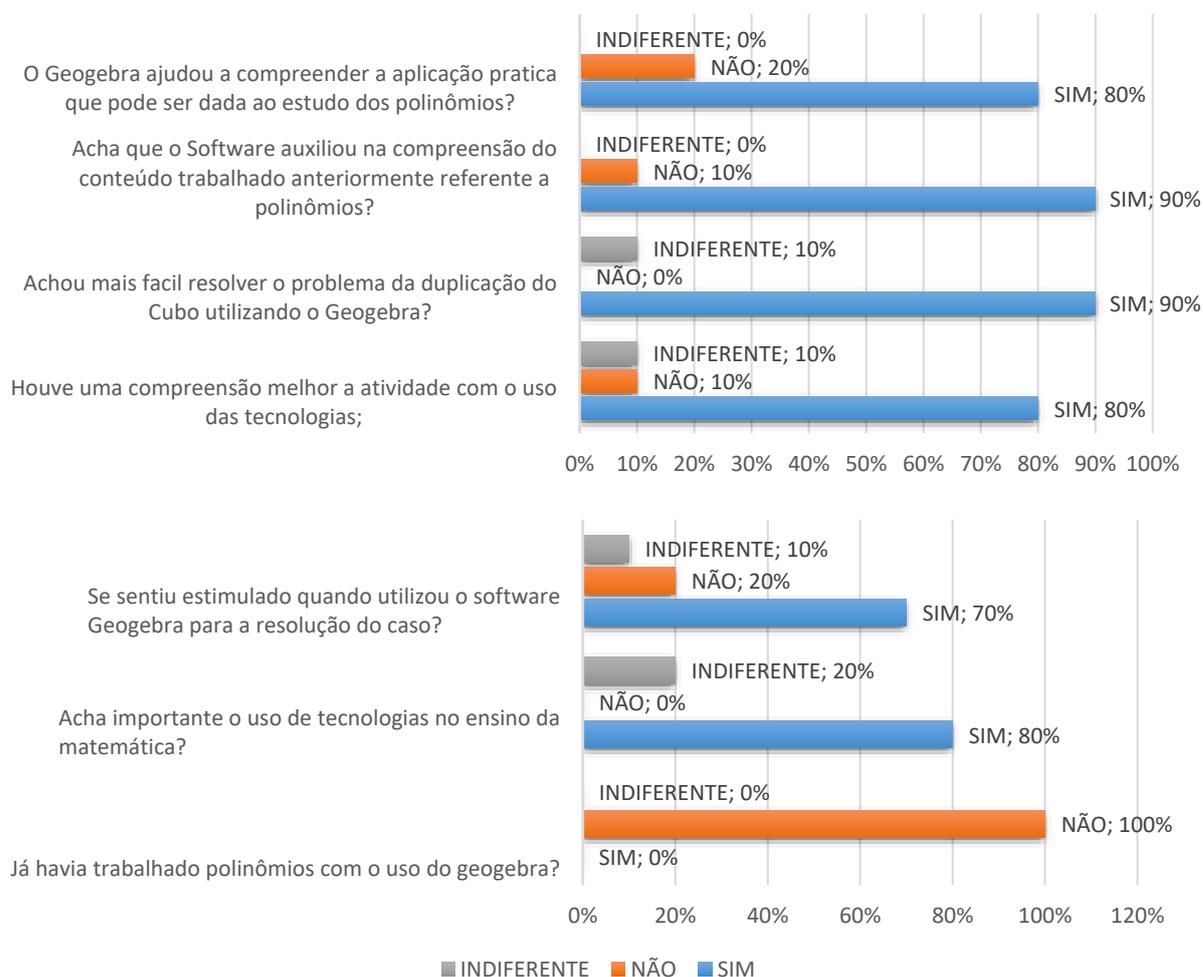
Figura 18 - Alterações no esboço inicial feito pelos alunos



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Após as alterações nos planos iniciais e validação das conclusões no GeoGebra, os alunos foram convidados a preencher um questionário com perguntas fechadas a fim de compreender na opinião deles, se e qual, contribuição a utilização do GeoGebra trouxe durante a realização da atividade proposta assim como buscar entender a influência que a tecnologia pode trazer para os processos de ensino aprendizagem, os gráficos a seguir representam a opinião dos alunos participantes da atividades.

Figura 19 - Questionário sobre o uso de tecnologias no estudo da matemática



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Ao analisarmos os dados do questionário, observamos em primeiro lugar que para os alunos as tecnologias contribuíram de maneira significativa no desenvolvimento da atividade, uma vez que 70% dos alunos acreditam que o GeoGebra foi fator motivador para a realização da atividade, e 80% respondeu que o uso de tecnologias deva estar presente durante o ensino da matemática.

Também observamos que 80% dos alunos acredita que obtiveram um ganho referente ao entendimento do conteúdo com a utilização do Geogebra, o que reforça o caráter emancipador que a tecnologia traz, quando de estimular a autonomia de pensamento, proporcionando aos alunos desenvolver novas formas de pensar diante do problema apresentado.

Quando ao fator facilitador 90% dos envolvidos na pesquisa responderam que o *software* foi de valia para a resolução da atividade proposta, o mesmo percentual acredita que ele contribuiu como instrumento de ligação entre o conteúdo trabalhado

e os conceitos que já haviam sido explorados anteriormente, transferindo as tecnologias uma característica de elo de ligação entre conhecimentos adquiridos e novas aplicações, agindo como agente potencializador do raciocínio lógico.

Outro aspecto relevante do trabalho é que, mesmo sem experiência prévia com o *software* utilizado, os alunos não enfrentaram obstáculos na realização da atividade.

Em questão de minutos, eles se familiarizaram com a ferramenta, o que pode ser atribuído à afinidade natural que possuem com o uso das tecnologias.

5. CONCLUSÃO

Ao concluir o trabalho queremos retomar as ideias iniciais que nortearam a pesquisa afim de discuti-las ao apresentar os resultados obtidos na pesquisa durante a fase de observação da atividade, análise dos dados e questionário respondido pelos alunos.

Um dos objetivos da pesquisa buscava compreender, como o uso das tecnologias poderiam contribuir para o estudo das equações cúbicas, para responder essa pergunta foi utilizado o *software* GeoGebra com o objetivo de auxiliar na resolução de um problema inicialmente proposto aos alunos.

Observamos na primeira parte da atividade a dificuldade dos alunos em associar a ideia da resolução algébrica do desafio do cubo ao volume da figura, mesmo essa ideia remetendo ao cálculo de uma equação cúbica, conceitos estudados anteriormente.

Esses conceitos começaram a serem resgatados quando do uso do GeoGebra, observou-se nas deduções posteriores ao uso do *software* uma maior compreensão não somente do problema que estava sendo resolvido, mas também da ligação dele com as equações cúbicas, isso fica mais claro quando após, as experimentações no modelo inicial de resolução, os alunos começaram a resolver o problema a partir do esboço de uma equação cúbica, como observamos na análise anteriormente apresentada (Figura 18).

Outro ponto importante e a capacidade do *software* de proporcionar aos alunos construções práticas, capazes de fornecer a eles mecanismos para construir o conhecimento de maneira intuitiva, auxiliando na criação de estruturas cognitivas, uma vez que eles mostraram maior rapidez no raciocínio lógico durante a realização das atividades, mostrando uma capacidade maior que a inicial de sugerir mudanças acertadas, transformando suas conclusões iniciais.

Isso mostrou uma maior autonomia pela busca do conhecimento por parte do aluno, ficando evidenciado a partir do momento em que eles não se prendem mais a estruturas fixas de resolução e buscam dentro do GeoGebra novas formas de atingir o objetivo inicial, se tornado independentes das orientações do professor.

Essa conclusão é reforçada pelo fato de embora, nenhum dos alunos participantes da pesquisa, ter tido contato anterior com o GeoGebra, isso não se apresentou como obstáculo para sua utilização, conseguindo realizar variações de seus experimentos de maneira muito rápida, confirmando que a tecnologia quando utilizado na matemática pode ser uma ferramenta potencializadora dos processos de aprendizagem, fato foi reafirmado pelos próprios alunos, quando no registro do questionário(figura 19), responderam na sua maioria que o uso de tecnologia deveria ser parte integrante do ensino da matemática.

Durante o trabalho, a história da matemática foi utilizada objetivando trazer ao trabalho um contexto histórico que introduziu o desafio a ser resolvido pelos alunos, essa metodologia acabou por se mostrar como uma influência positiva, transformando-se em motivação, pois despertou nos alunos o desejo pela descoberta, visto que os mesmos procuravam apoiar suas resoluções nos fatos históricos, buscando neles argumentos para defender suas respostas.

Compreende-se, portanto, que o resgate histórico matemático, aliado a momentos de debate de ideias, tem a capacidade de criar um ambiente de estímulo a descoberta.

E quando os alunos têm a oportunidade de testar suas próprias hipóteses de maneira rápida e prática, através do uso de recursos pedagógico como as tecnologias, eles são estimulados e começam a desenvolver um raciocínio lógico, isso ficou evidente durante o trabalho, baseado no aumento da velocidade com que os alunos começaram a criar novas alternativas para a resolução do problema, demonstrando com isso a formação de novas estruturas cognitivas, não somente com os conteúdos relacionados a disciplina, mas estabelecendo conexões espontâneas com outras áreas do conhecimento, criando uma base sólida para novas construção.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. 2006. **Introdução à Lógica**. 2^oed. São Paulo PUCSP, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BORLIN, Harley - **Resolução do problema da duplicação do cubo utilizando o origami**- TCC (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96619/Harley.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 11 de maio de 2023.

CANAN, Silvia Regina, **Metodologia, epistemologia e autonomia: relações possíveis**. Frederico Westphalen: Ed.URI,2000.

CELESTINO, Kamila Gonçalves; MARTINS, Márcio André - **O Problema da Duplicação do Cubo na Formação Inicial de Professores de Matemática** - Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM ISSN 2595-5578, disponível em http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1253/864. Acesso em 11 de maio de 2023.

CHAQUIAM, M. Ensaio Temático: História e Matemática em sala de aula. Belém: SBEM, 2017.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**, volume 1. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

D' AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global. Temas & Debates**, São Paulo, v.4, n.3, p. 1 a 16, 1991.

EVES, H. W. **Introdução à História da Matemática**. Trad. HYGINO H. DOMINGUES. Campinas: Unicamp, 2011.

FARAGO, J. L. et al. Do ensino da história da matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2003.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**. 9. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

GROENWALD, C. L. O.; TIMM, U. T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. Educação Matemática em Revista, v. 15, n. 2, p. 21-26, 2000.

JESUS, Adriano Tavares de **A duplicação do cubo e a impossibilidade da solução clássica: uma proposta para ensino usando geometria analítica, descritiva e dinâmica** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2021. Itabaiana, 2021. 95 f.; il.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994 (Coleção magistério 2º grau. Série formação do professor).

LÜTZEN, Jesper. “**The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle.**” *Centaurus* 52 (2010): 4–37. Disponível em <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1600-0498.2009.00160.x#>. Acesso em: 22 mar. 2023.

MINAYO, M C S O **Desafio do Conhecimento- Pesquisa Qualitativa em Saúde**, São Paulo Rio de Janeiro, HUCITEC-ABRASCO,1999.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da Matemática**. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em https://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em 21 mar. 2023.

PEREIRA, Leonardo Romão et. al. **O uso da tecnologia na educação, priorizando a tecnologia móvel**. 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/336529464>. Acesso em: 26 jan. 2023.

PIAGET, J. **A epistemologia genética**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

_____ **Psicologia da inteligência**. 2a ed., RJ, Zahar ed., 1983.

_____ **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação**. 3ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

_____ **Seis estudos de psicologia**. Tradução: Maria Alice Magalhães D' Amorim e Paulo Sergio Lima Silva - 24º Ed. Rio de Janeiro: FORENSE UNIVERSITARIA, 1999.

_____ **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação**. 3ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

POLYA, George. (1995). **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro.

_____ **A Arte de Resolver Problemas**, Editora Interciência Ltda, Rio de Janeiro, (1978).

RAUBER, J; Rosseto, M; Fávero, A M; Fávero, A A; Tonieto, C. 2003. **Que tal um pouco de lógica?!**, Ed. Clio Livros, Passo Fundo.

SÁ, Adriana Lourenço; MACHADO, Marília Costa. **O uso do software GeoGebra no estudo de funções**. XIV EVIDOSOL e XI CILTEC online, junho 2017. Disponível em: http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/viewFile/12142/10362 . Acesso em 02 Fev 2023.

SANTOS, Gilberto Lacerda (Org.). **Tecnologias na educação e formação de professores**. Brasília: Plano, 2003.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade**. São Paulo: Érica, 2012.

VERGARA, S. C. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2007. 96 p.

ZATTI, Vicente. **Autonomia e educação em Immanuel Kant e Paulo Freire**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.