

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

ANALETE LEAL DE CAMARGO

**CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM MATERIAL CONCRETO:
EXPERIÊNCIA DE UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO**

**Bagé
2023**

ANALETE LEAL DE CAMARGO

**CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM MATERIAL CONCRETO:
EXPERIÊNCIA DE UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD – Polo Arroio dos Ratos, como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Orientadora: Profa. Dra. Francieli Aparecida Vaz

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Luis Jeske Bihain

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

C172c Camargo, Analete Leal de

Construção de sólidos geométricos com material concreto:
experiência de uma turma do 3º ano do Ensino médio / Analete
Leal de Camargo.

50 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização)--
Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NO
ENSINO MÉDIO (MATEMÁTICA NA PRÁTICA), 2023.

"Orientação: Francieli Aparecida Vaz".

1. Geometria plana. 2. Visualização espacial. 3. Material
Concreto. I. Título.

ANALETE LEAL DE CAMARGO

CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM MATERIAL CONCRETO: EXPERIÊNCIA DE UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD – Polo Arroio dos Ratos, como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 14 de junho de 2023.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Francieli Aparecida Vaz

Orientadora

UNIPAMPA

Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira

UNIPAMPA

Prof. Dr. Everson Jonatha Gomes da Silva

UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **FRANCIELI APARECIDA VAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/07/2023, às 19:53, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **EVERSON JONATHA GOMES DA SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/07/2023, às 10:35, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **CRISTIANO PERES OLIVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/07/2023, às 22:52, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1177022** e o código CRC **28DD97CB**.

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco e Maria (**In memoriam**), mesmo que não estejam mais nesse plano espiritual, sei que zelam por mim, onde quer que estejam. As minhas lindas e amadas filhas Suélen e Paula, pelo amor, carinho e apoio nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradeço a Deus, por me dar força e coragem nos momentos mais difíceis. Agradeço à Universidade do Pampa, seu corpo docente, direção e administração que proporcionaram um curso de qualidade. À minha orientadora Francieli Aparecida Vaz pelo suporte, paciência e dedicação. À minha família e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que isso pudesse acontecer.

RESUMO

O presente trabalho é baseado na aplicação de aulas experimentais realizadas em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública, localizada na cidade de Caxias do Sul no estado do Rio Grande do Sul. Esta pesquisa é de caráter qualitativo e tem como objetivo o estudo da geometria espacial através da elaboração dos sólidos geométricos, com o uso de material concreto. Além disso, há também o propósito de fortalecer conteúdos estudados no ensino básico e fundamental, como as figuras geométricas planas. Também espera-se que os alunos concluam a experiência sabendo classificar os sólidos geométricos, suas propriedades e suas características e distinguir os sólidos geométricos entre poliedros e corpos redondos. Após, analisar-se-á as respostas dos alunos sobre a proposta da aula. A experiência justifica-se em razão de que a elaboração dos sólidos geométricos com material concreto associada ao adequado conhecimento teórico, torna mais acessível a compreensão, sedimenta o aprendizado do estudante em geometria e tem o potencial de tornar as aulas mais interessantes. Ademais, a pesquisa traz como problema: qual experiência uma turma de Ensino Médio pode adquirir elaborando seus próprios sólidos geométricos com material concreto para usá-los como uma aprendizagem desafiadora? A pesquisa demonstrou resultados imediatos, como o aumento do interesse, da criatividade e da participação, e efeitos prolongados, como o aumento da média dos alunos que participaram da pesquisa. Além disso, os alunos que participaram da experiência mostraram mais autonomia, interesse e liberdade para trazer sugestões de ideias de aulas de matemática mais dinâmicas.

Palavras-Chave: Geometria plana. Visualização espacial. Material Concreto.

ABSTRACT

This work is based on the application of experimental classes held with a 3rd grade high school class from a public school located in the city of Caxias do Sul in the state of Rio Grande do Sul. This research is qualitative and aims to study spatial geometry through the elaboration of geometric solids using concrete material. In addition, there is also the purpose of reinforcing content studied in basic and fundamental education, such as flat geometric figures. It is also expected that the students will conclude the experience by being able to classify geometric solids, understand their properties and characteristics, and distinguish between polyhedra and round figures. Afterwards, the student responses to the proposed class will be analyzed. The experience is justified because the elaboration of geometric solids with concrete material, combined with adequate theoretical knowledge, makes comprehension more accessible, solidifies the students' learning in geometry, and has the potential to make classes more interesting. Additionally, the research poses the question: what experience can a high school class acquire by elaborating their own geometric solids with concrete material for use as a challenging learning tool? The research demonstrated immediate results, such as increased interest, creativity, and participation, as well as long-term effects, such as an increase in the average grades of the participating students. Moreover, the students who participated in the experience showed more autonomy, interest, and freedom to suggest ideas for more dynamic math classes.

Keywords: Plane Geometry. Spatial Visualization. Concrete Material.

TABELA DE FIGURAS

Figura 1 - Tabuleta $\sqrt{2}$	17
Figura 2 - Modelos de peças em EVA.....	20
Figura 3 - Figura construída com peças de EVA.....	21
Figura 4 - Objetos semelhantes aos sólidos geométricos.....	31
Figura 5 - Descrições feitas pelos grupos sobre os objetos analisados.....	31
Figura 6 - Sólidos em acrílico: icosaedro, dodecaedro e paralelepípedo.....	33
Figura 7 - Alunos construindo os sólidos geométricos.....	34
Figura 8 - Sólidos geométricos feitos em cartolina (vista lateral) e Sólidos Geométricos feitos em cartolina (vista superior).....	35
Figura 9 - Tabelas preenchidas pelos alunos.....	37
Figura 10 - Alunos construindo as pirâmides em cartolina.....	38
Figura 11 - Pirâmides feitas em cartolina pelos alunos.....	38
Figura 12 - Corpos redondos em acrílico e cone e cilindro feitos em cartolina.....	40
Figura 13 - Retângulo, triângulo e semicírculo fixados no palito para rotacionar....	41
Figura 14 - Corpos redondos em acrílico e cone e cilindro feitos em cartolina.....	41
Figura 15 - Placas de papelão em formato quadrado de mesma espessura e de áreas iguais para comprovar o princípio de Cavalieri.....	42
Figura 16 - Placas de papelão em formato triangular de mesma espessura e de áreas iguais para comprovar o princípio de Cavalieri.....	42
Figura 17 - Questionário final respondidos pelos alunos que realizaram o experimento.....	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Descrições dos sólidos geométricos e Relação de Euler	36
--	----

LISTA DE SIGLAS

Saeb - Sistema de Avaliação da Educação Básica

Inep - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

Ideb - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

MEC - Ministério da Educação

SENAI - Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial

UFPA - Universidade Federal do Pará

gov - Governo

br - Brasil

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA.....	17
2.1 Material Concreto e o ensino da geometria.....	20
3 PLANEJAMENTO DA AULA.....	23
4 APLICAÇÃO DA AULA E ANÁLISE DO DADOS.....	30
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	47
REFERÊNCIAS.....	49

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho mostra uma experiência inédita de elaboração de sólidos geométricos com material concreto em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, na Escola Estadual de Ensino Médio Província de Mendoza, localizada na cidade de Caxias do Sul no Rio Grande do Sul.

De acordo com os resultados do Saeb (Inep, 2019), apenas 10,6% dos municípios do Rio Grande do Sul atingiram a meta do Ideb nos anos finais do Ensino Fundamental. Em vista disso, percebe-se que muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com lacunas na aprendizagem. Logo, considera-se que o estudo da geometria espacial em sala de aula é visto por alguns estudantes como um conteúdo de difícil compreensão, por ser abordado apenas de forma conceitual, com fórmulas prontas e deixando de lado a parte da construção dos sólidos geométricos com material concreto, o qual permite a visão e o entendimento necessário de suas características, padrões e deduções de fórmulas. Muitas vezes, o conteúdo abordado de forma inadequada, em vista de que, segundo Nacarato (2014, p. 15), por não terem se aproximado mais da geometria, muitos professores não têm conhecimento da relevância do pensamento geométrico na construção da aprendizagem matemática.

A construção do conhecimento dos alunos com o uso de material concreto é um potencial para a formação e solidificação do aprendizado. O estudante que não é estimulado e orientado a fazer uso dessas construções, pode, mais facilmente, tornar-se dependente, sem autonomia e competência para resolver um problema geométrico, quando as fórmulas não estão ao seu alcance.

A elaboração dos sólidos geométricos com material concreto, juntamente com um bom conhecimento em geometria plana, torna mais acessível a compreensão e solidifica o aprendizado do estudante, para uma melhor formação dos seus conceitos, definição de fórmulas e na resolução de problemas, tornando a aula mais interessante. Dessa forma, foi levantado o seguinte problema de pesquisa: Qual experiência uma turma de Ensino Médio pode adquirir elaborando seus próprios sólidos geométricos com material concreto?

Para responder à pergunta de pesquisa foi estabelecido o seguinte objetivo geral: produzir de sólidos geométricos a partir de material concreto com alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Seguindo os objetivos específicos: proporcionar o fortalecimento de conteúdos já estudados no Ensino Fundamental, como as figuras

geométricas planas; classificar os sólidos geométricos, suas propriedades e suas características; discernir os sólidos geométricos entre poliedros e corpos redondos; analisar as respostas dos alunos sobre a proposta da aula com a construção de sólidos geométricos através de material concreto.

A construção e manipulação dos sólidos geométricos com o uso de material concreto, se faz necessária, visto que, permite ao aluno enxergar todos os seus elementos, características, padrões, classificações e assim solidificar seu entendimento e a aprendizagem, uma vez que cabe ao professor ser esse incentivador, facilitador e mediador entre o conhecimento e o aluno. É importante ressaltar que o aluno deve ser levado a encarar a si próprio como sendo o protagonista do seu pensar, de suas próprias estratégias de aprendizagem. Isso se confirma pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 540).

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. (BRASIL, 2018, p. 540)

A presente pesquisa tenta demonstrar o quão importante é a construção dos sólidos geométricos para o estudo da geometria espacial no ambiente escolar, onde o professor torna-se um mediador dessa formação e não um mero transmissor de conhecimento, tornando o aprendizado mais relevante e pleno. Como afirma a frase: “Nos dias de hoje, não basta ao professor abrir a porta, entrar na sala de aula e dar sua aula, ele tem que criar condições para que a educação possa acontecer” (NÓVOA APUD MACHADO JUNIOR, 2005, p. 11).

Busca-se desenvolver uma aula que possa oportunizar aos alunos a investigação, exploração, relações, trabalho em grupo, troca de ideia, percepção de suas características, padrões, dedução de fórmulas e inúmeras possibilidades para a construção matemática e aplicá-las no estudo da geometria espacial.

Neste intuito, esta pesquisa tem caráter qualitativo, uma vez que busca analisar a contribuição que o uso de material concreto, para construir sólidos geométricos, pode gerar na aprendizagem deste conteúdo, buscando explorar sua curiosidade e fomentar o saber dos alunos. Como assegura a obra metodologias do trabalho científico Severino:

“São várias metodologias de pesquisa que podem adotar uma abordagem qualitativa, modo de dizer que faz referência mais a seus fundamentos epistemológicos do que propriamente a especificidades metodológicas”. (SEVERINO, 2016, p. 90)

Para apresentar o trabalho desenvolvido, foram necessários cinco capítulos. O primeiro é a introdução, que apresenta o tema, a questão de pesquisa, os objetivos e a metodologia de pesquisa. O segundo capítulo é destinado para uma revisão de literatura abordando um pouco da história e da importância da geometria no passado e nos dias atuais, os principais matemáticos que se dedicaram ao estudo da geometria, assim como acerca da utilização da geometria no cotidiano da sociedade. Além disso, uma segunda parte do referencial teórico trata acerca do uso do material concreto no ensino da matemática e da geometria, suas justificativas e a construção do raciocínio geométrico.

No terceiro capítulo será apresentado o planejamento das aulas propostas para as construções dos sólidos. O quarto capítulo apresentará a análise posterior às aulas, com a descrição dos recursos utilizados, etapas das construções dos sólidos geométricos, os debates dos grupos, as classificações dos sólidos, suas características, dedução de fórmulas, conclusão de resultados e o entusiasmo dos alunos com o aprofundamento do seu saber e gosto pelo estudo. E o último capítulo é destinado às considerações finais deste trabalho.

2. CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

A palavra Geometria, etimologicamente, composta por *geo* e *metria* denota “medição da terra”. Para Euclides, a geometria era uma ciência de dedução que operava seguindo hipóteses básicas - os axiomas e os postulados. (DANTE, 2008)

De acordo com Dante (2008, p. 359), “há evidentes indícios de que os babilônios, desde 2000 a. C., desenvolveram um considerável conhecimento geométrico”. A geografia babilônica também corrobora a tese de que os primeiros passos da geometria teriam se dado por lá, considerando que a Babilônia era aberta a invasões dos povos vizinhos, e também se localizava em uma região de passagem de caravanas. Além disso, a canalização dos rios, uma das realizações do rei babilônio Hamurábi no século XVIII a. C., também é indicativo dessa suposição. A Figura 1 apresenta uma das tabuletas babilônicas, placas de argila onde os babilônios colocavam em prática a escrita cuneiforme sendo muitas de conteúdo matemático, a YBC 7289 que demonstra uma aproximação sexagesimal bastante precisa para a raiz quadrada de dois:

Figura 1 - Tabuleta $\sqrt{2}$



Fonte: Página da Internet Yale University¹.

Heródoto acreditava que a geometria tinha se originado no Egito, devido às necessárias remarcações de terra depois da enchente anual das margens do vale do rio. Já o filósofo Aristóteles também responsabilizava o Egito pelo surgimento dessa

¹ Disponível em: <https://babylonian-collection.yale.edu/highlights>
Acesso em: 10 de jan. de 2023.

área matemática, no entanto, entendia que a existência de uma classe de sacerdotes e seu tempo de lazer fossem os responsáveis por tal. (BOYER, 2012)

Todavia, é plausível o entendimento da possibilidade de a geometria ter surgido, na verdade, antes mesmo da escrita, visando as necessidades habituais de organização, estruturação e aprendizado dos povos primitivos. Sendo assim, pode-se dizer que os homens neolíticos, com seus desenhos e figuras, deram início às ideias do estudo da geometria.

Séculos depois, o responsável por organizar a geometria de maneira lógica, foi Euclides - autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos (BOYER, 2012). Próximo do século 330 a.C. Na obra *Os Elementos*, ele reuniu, em 13 volumes, todos os fundamentos de geometria até então conhecidos e os organizou e sistematizou logicamente (DANTE, 2008, p. 157).

“Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto para a geometria que o estudo de *Os elementos*, e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria.”, palavras do filósofo grego Proclus em 450 d.C.

No entanto, a obra de Euclides não era uma síntese de todo o conhecimento geométrico, na verdade, era um texto de introdução à matemática elementar, ou seja, aritmética, geometria sintética e álgebra. (BOYER, 2012)

À vista disso, com o passar do tempo, a obra de Euclides se tornou um clássico, sendo referenciada, inclusive, por Arquimedes. Assim, a composição de Euclides se tornou um dos embasamentos utilizados no estudo da geometria nos dias de hoje. (DANTE, 2008)

A geometria conta também com a contribuição de outros matemáticos que marcaram o estudo da matéria. O grego Aristarco de Samos (310 a.C. -239 a.C.) comparou a distância da terra até o sol e até a lua, utilizando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções. Já Eratóstenes (276 a.C. -196 a.C.) idealizou o cálculo do raio da terra a partir da proporcionalidade entre medida e comprimento de arcos, nos ângulos correspondentes em paralelas cortadas por transversais e na razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Além desses, lembra-se também dos europeus, o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) e o alemão Johannes Kepler (1571-1630). O primeiro retomou as ideias heliocêntricas de Aristarco e produziu a teoria de que os planetas teriam órbitas circulares em torno do Sol, calculando os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias até o sol, com base na proporcionalidade de arcos e semelhança de

triângulos, já na forma trigonométrica. Já o germânico, aprimorou as ideias de Copérnico, afirmando que as órbitas são elípticas e apresentando as *3 leis de Kepler*, com conteúdo de proporção, áreas e elipses. (DANTE, 2008)

A geometria estudada atualmente é, em sua essência, a mesma que serviu de base para os estudiosos do passado adquirirem conhecimento e entendimento do meio que os cercava. Se atualmente temos um vasto conhecimento acerca da natureza e seus fenômenos, é consequência do esforço e dedicação desses antigos sábios, considerados grandes astrônomos, geômetras e matemáticos de suas épocas. (DANTE, 2008, p. 163).

Com o passar do tempo, a geometria seguiu a sociedade e os estudos acerca do tema avançaram. No Brasil, o ensino da geometria enfrentou diversas adversidades. Entre essas, durante 1970 a 1980, a influência do Movimento da Matemática Moderna, que destacava a linguagem, prejudicou a compreensão de conceitos matemáticos. Além disso, na época, não havia ferramentas, como livros didáticos, disponíveis amplamente, o que dificultou e retardou o ensino da geometria (NACARATO, 2014).

A importância do estudo da Geometria está aliada à influência do estudo da matemática como um todo, logo essa área é vista como “alicerce de quase todas as áreas do conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivo e criativo” (BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p. 9). Em vista disso, a geometria serve não apenas para o estudo matemático, mas também para o conhecimento do mundo e domínio da natureza.

Atualmente, são diversas as áreas que se utilizam da base dos conceitos geométricos, como a engenharia, a arquitetura, a agricultura, a pecuária, as pesquisas científicas da área de exatas e biológicas, a arte, a costura, os esportes, entre outras. Desde um estudo em um hospital que busca calcular a área necessária para o isolamento de x pacientes até o molde necessário para costurar uma camiseta, os conceitos geométricos são utilizados. Assim, percebe-se que a geometria está presente subjetivamente e objetivamente em todos os momentos da nossa vida.

Sendo uma área tão presente na sociedade e em nossas vidas, nota-se a importância fundamental do estudo da geometria. Com os avanços tecnológicos, é necessário preparar adequadamente as próximas gerações a fim de que conhecimentos iniciais sejam construídos para a instrução acerca da ciência e tecnologia de que todos devem se apropriar (KUENZER, 2005).

No entanto, fazer com que alunos do Ensino Fundamental e Médio compreendam essa importância e desejem estudar os conceitos geométricos não é tão simples. Por isso, são necessárias estratégias e a utilização de recursos que incentivem e despertem o interesse das novas gerações.

2.1 Material Concreto para o Ensino de Geometria

A partir de diversos estudos acerca do uso do material concreto no ensino da matemática, Smole e Diniz (2016), afirmam que desde sua origem, os materiais são pensados e construídos para que possam cumprir ideias a serem aplicadas, ou seja, são representações materializadas de propriedades e reflexões.

Diante disso, Nacarato e Santos (2014) defendem que seja essencial colocar os alunos em contextos em que eles possam manipular materiais didáticos: “[...] como o tangram, e geoplano, o uso de malhas, quebra-cabeças, construção de mosaicos, dentre outros – que contribuem para a ruptura com o modelo prototípico”. Nacarato e Santos, ainda trazem o exemplo seguinte:

[...] quando um aluno, dispondo das seguintes peças em EVA (Figura 2), constrói a figura a seguir (Figura 3), ele já está rompendo com a posição prototípica dessas formas e, possivelmente, ampliando seu repertório de imagens mentais (NACARATO e SANTOS, 2014, p. 20)

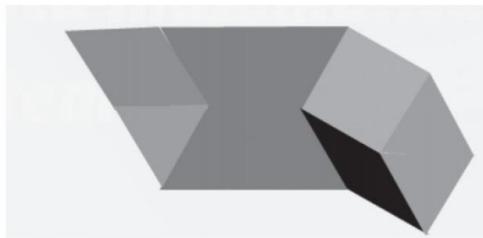
Figuras 2 - Modelos de peças em EVA



Fonte: Nacarato e Santos (2014).

Com isso, percebe-se que o uso do material concreto rompe barreiras conceituais e visa uma abordagem do conhecimento ampla e acessível. Além disso, há outras justificativas em relação ao uso do material manipulável no ensino da matemática, sobretudo no estudo da geometria.

Figura 3 - construída com peças de EVA



Fonte: Nacarato e Santos (2014).

Os fundamentos acerca do uso do material concreto na construção da aprendizagem, do pensamento e raciocínio, tanto matemático quanto geométrico, se dão com base em diferentes argumentos. No passado, para Smole e Diniz (2016), a teoria seria de que os materiais teriam potencial de facilitar a aprendizagem por estarem próximos da realidade dos alunos. Já hoje em dia, uma das justificativas mais utilizadas, segundo as autoras, seria que o recurso torna o processo de aprendizagem significativo. Além disso, também citam que em razão de serem manipuláveis, os materiais são concretos para os alunos, facilitando a aprendizagem.

Em 2008, Smole *et al.*, já justificavam o uso do material concreto no ensino da matemática, devido ao ambiente criado em sala de aula, caracterizado pela proposição, investigação e exploração de diferentes situações-problemas por parte dos alunos.

Em vista dos argumentos elaborados pelas autoras, de que o uso do material concreto estaria justificado por facilitar a aprendizagem, tornar a aprendizagem significativa e pelo cenário de investigação matemática criado, conclui-se que o uso dos materiais geométricos desenvolve o pensamento e o raciocínio geométrico, em razão das habilidades adquiridas com o desenvolver das aulas utilizando o material.

A identificação de objetos geométricos, suas relações e propriedades é o desenvolvimento do raciocínio espacial. Esse pensamento geométrico consiste em um conjunto de processos que permitem construir representações mentais de objetos geométricos e suas propriedades (SMOLE *et al.*, 2008).

A formação deste pensamento geométrico, segundo Nacarato e Santos (2014), é possibilitada quando se leva em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, que eles trazem de suas experiências sociais, isto é, o processo de entendimento dos

conceitos depende que, os estudos iniciem de ideias espontâneas que os alunos já trazem consigo. Diante disso, qualquer que seja o método de ensino matemático, é imprescindível que envolva a compreensão do pensamento matemático de cada aluno e, nesse caso, o pensamento geométrico. Os autores atribuem ao professor a criação de um ambiente que propicie significações, tendo em vista as individualidades de cada aluno.

3. PLANEJAMENTO DA AULA

Neste capítulo será descrito o plano de aula que abordou a construção dos sólidos geométricos com material concreto em uma turma de 3º ano do Ensino Médio.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018) esse conteúdo está incluído em:

- Unidade Temática: Geometria e Medidas
- Objetos de Conhecimento: Figuras geométricas espaciais (poliedros e corpos redondos) reconhecimento, análise de características e planificações.
- Competências: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
- Habilidades: (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

O plano de aula foi desenvolvido para ser aplicado em 4 etapas, que estão descritas a seguir, onde foi levado em consideração a disponibilidade dos horários da turma em que foi aplicada esta aula.

Etapa 1

Esta etapa tem duração de 1 hora e 30 minutos, com os seguintes objetivos:

- Associar objetos às diferentes formas de representação no plano bidimensional e saber nomeá-los;
- Reconhecer figuras planas.

Para introduzir o conteúdo de geometria espacial, a turma será dividida em grupos de 5 a 6 componentes e realiza-se uma retomada do conteúdo sobre geometria plana, já estudado no Ensino Fundamental, a fim de diagnosticar possíveis dúvidas. Após a retomada do conteúdo de geometria plana, apresentam-se objetos que possuem formato semelhante ao de poliedros. Será solicitado aos alunos que observem se existem semelhanças e diferenças entre eles. Então, será proposto aos grupos que escolham um desses objetos, sem que os demais tenham acesso a essa escolha, e escrevam suas características em uma folha de papel, trocando-a, posteriormente, com outro grupo. Após, será conduzido que o grupo indique o objeto escolhido pelo outro grupo, analisando apenas a descrição feita por eles. Tais características podem ser registradas a partir das respostas às perguntas, tais como:

- ✓ O objeto apresenta faces triangulares?
- ✓ O objeto possui faces paralelas?
- ✓ As faces que compõem o objeto são semelhantes entre si?

Essa atividade permite explorar o conhecimento prévio dos alunos acerca dos conteúdos de: ponto, plano, retas, relação entre ponto e reta, alguns postulados, teoremas e relações entre figuras planas e figuras espaciais, auxiliando também na observação de regularidades, o que será feito ao longo do estudo para identificar relações e deduzir fórmulas.

Etapa 2

Esta etapa tem duração de 3 horas, com os seguintes objetivos:

- Identificar e analisar os sólidos geométricos, suas características e propriedades.
- Reconhecer os poliedros de Platão.
- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de área e volume em situações do cotidiano.
- Distinguir os sólidos geométricos entre poliedros e corpos redondos.

A abordagem do estudo da geometria espacial se dará da seguinte forma:

- 1º) Definição de geometria espacial;
- 2º) Apresentação dos sólidos geométricos em acrílico e exploração de suas características e questionamentos;
- 3º) Destacar os poliedros de Platão;
- 4º) Separar os sólidos geométricos da seguinte forma: poliedros, pirâmides e corpos redondos. Com a finalidade de aprimorar a compreensão e organizar o estudo da geometria espacial.

Nesse encontro os alunos serão comunicados que irão aprender sobre o conteúdo de geometria espacial e será realizada uma explicação e demonstração dos sólidos geométricos em acrílico. Após todas as explicações e questionamentos será distribuído material impresso aos alunos sobre o conteúdo de geometria espacial. A turma será novamente organizada em grupos de 5 a 6 componentes e isso se repetirá a cada encontro. Nessa etapa, os grupos construirão somente o cubo e os prismas retos de base triangular e hexagonal, todos regulares. Em seguida serão distribuídos moldes de polígonos triangulares, quadrangulares e hexagonais. Os grupos farão todos os modelos dos polígonos e terão a possibilidade de copiar os moldes em mesmo tamanho, ampliar a imagem ou reduzir, conforme a própria vontade, utilizando cartolina e com o auxílio da professora durante toda a realização da atividade. Para as faces laterais, farão retângulos de acordo com o polígono da base. Espera-se que os grupos relacionem a base com o número de retângulos que deverão ser construídos.

Após os alunos realizarem todas as construções, anotações e todos os questionamentos serem respondidos, será apresentada a Relação de Euler ($V + F = A + 2$) que relaciona o número de vértices, faces e arestas, juntamente será apresentado um texto contendo informações sobre Leonhard Euler.

Em seguida, serão apresentadas, pela professora, outras planificações de figuras espaciais, onde os grupos, anteriormente separados, farão associação das planificações com os sólidos em acrílico. Nessa atividade, acredita-se que os alunos poderão aperfeiçoar a visão geométrica tridimensional de um objeto e proporcionar a conexão entre os conceitos de geometria plana e espacial. Destacar-se-á também nessa atividade, os poliedros de Platão, que são: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Em seguida será solicitado aos grupos que façam anotações acerca de quais prismas foram obtidos com as devidas construções com

material concreto e registrar o número de faces, arestas e vértices dos sólidos construídos, assim como, dos poliedros de Platão em acrílico.

Para completar essa atividade, os alunos serão questionados sobre o método utilizado para o cálculo do volume de uma tora de madeira mais conveniente ao vendedor e ao comprador. Logo após, será requerido que justifiquem as suas respostas, promovendo um debate com toda a turma.

Etapa 3

Esta etapa tem duração de 2 horas e 15 minutos, com os seguintes objetivos:

- Identificar e analisar pirâmides, suas características e propriedades;
- Construir pirâmides através de material concreto;
- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de área e volume.

Para o estudo das pirâmides, serão confeccionados polígonos de base triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal, todos regulares. No momento, os alunos serão orientados a encontrar o centro da base e nele fixar um canudo com fita adesiva de modo que este fique ortogonal à base, de maneira que percebam que o canudo representa a altura da pirâmide reta. Em seguida, serão conduzidos a montar a pirâmide, para isso deverão confeccionar triângulos para fechar as laterais da pirâmide, de acordo com o polígono da base e a altura, pois já teriam fixado o canudo para representar a altura da pirâmide. Após as montagens das pirâmides, os grupos receberão uma tabela para ser preenchida sobre os elementos dos sólidos construídos. Espera-se que, com essa atividade os alunos também percebam que o número de lados do polígono da base corresponde ao número de faces laterais, ou seja, que os triângulos ao redor da base, vai depender da quantidade de arestas da base da pirâmide.

Para calcular a área das pirâmides triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais regulares, os alunos irão utilizar todo o seu conhecimento em cálculo de geometria plana e o Teorema de Pitágoras, e com o auxílio do professor, deduzir fórmulas gerais para calcular área dos triângulos equiláteros, isósceles, quadrado, pentágono e o hexágono. Nessa atividade, os alunos poderão exercitar a capacidade de visualizar que um triângulo equilátero pode ser dividido em dois triângulos retângulos iguais, e assim utilizar o teorema de Pitágoras para deduzir uma fórmula

geral para calcular o apótema da pirâmide, o apótema da base, a altura da pirâmide, a área da base e a área lateral, lembrando aos alunos que o apótema da base equivale a um terço da altura do triângulo da base.

Para o triângulo isósceles utilizaremos o mesmo processo usado para o triângulo equilátero, lembrando que o apótema da pirâmide vai corresponder à altura inteira do triângulo, visto que esse triângulo pertence as faces laterais da pirâmide, pois qualquer tipo de pirâmide sempre terá ao redor da base triângulos isósceles, com exceção do tetraedro pois esse possui somente triângulos equiláteros, tanto na sua base quanto nas laterais, portanto o apótema da base equivale um terço da altura do triângulo da base, enquanto que apótema da pirâmide equivale a altura inteira do triângulo lateral.

Já o hexágono, ele será dividido em seis triângulos equiláteros e utilizaremos o mesmo procedimento feito anteriormente para deduzir as fórmulas gerais para o triângulo equilátero, só lembrando que o apótema da base corresponde à altura inteira de um dos triângulos formados e a sua área total fica multiplicada por seis, pois equivale aos seis triângulos equiláteros que foi dividido o hexágono e assim deduzir as fórmulas gerais.

Para o pentágono, ele será dividido em cinco triângulos isósceles e utilizaremos o mesmo procedimento feito anteriormente para deduzir as fórmulas gerais para triângulo isósceles, só lembrando que o apótema da base corresponde à altura inteira de um dos triângulos formados e a sua área total fica multiplicada por cinco, pois equivale aos cinco triângulos isósceles que foi dividido o pentágono e assim deduzir as fórmulas gerais.

Para calcular área da base quadrada, basta relacionar os lados ($\text{lado} \times \text{lado} = l^2$) e para o cálculo do apótema da base, poderão visualizar o segmento de reta que liga o centro da base ao ponto médio de um dos lados, podendo perceber que o apótema é igual a metade do lado do quadrado e assim relacionar essas fórmulas mentalmente, sem necessidade da forma escrita.

Essa atividade permite ao aluno ter uma visão geral de todos os componentes que formam uma pirâmide, tais como faces, arestas, vértice da pirâmide, vértices da base, centro da base, altura da pirâmide, ponto médio, entre outros. Além disso, os alunos também poderão fazer relações entre os apótemas e a altura da pirâmide e assim compreender o triângulo retângulo formado com esses três segmentos de retas.

Para o cálculo do volume das pirâmides serão utilizados prismas retos, de diferentes bases construídos com papelão, cujas áreas das bases e suas alturas são equivalentes às das pirâmides que serão relacionadas. Será retirada uma das bases do prisma reto regular e a base da pirâmide, assim, os alunos preencherão com areia a pirâmide. Logo em seguida, farão o derramamento dessa areia no prisma que contém a área da base e a altura igual à da respectiva pirâmide, até completar o enchimento do prisma. Após será feito o registro das suas conclusões acerca do processo. Executada a tarefa em grupo, estes farão um debate sobre os resultados obtidos, comparando o volume da pirâmide com o volume do respectivo prisma, até chegar à fórmula matemática sobre o volume de uma pirâmide de base qualquer.

Etapa 4

Esta etapa tem duração de 1 hora e 30 minutos, com os seguintes objetivos:

- Distinguir os sólidos geométricos entre poliedros e corpos redondos.
- Identificar e analisar os sólidos geométricos, suas características e propriedades.
- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de área e volume em situações do cotidiano.
- Compreender os axiomas ou postulados para validar resultados por meio de demonstrações matemáticas.

Para abordar as formas geométricas espaciais denominadas corpos redondos (cilindro, cone e esfera), primeiramente há de se identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Com esse propósito, serão questionados a respeito dos conceitos que eles têm envolvendo o número irracional π . Por exemplo:

- ✓ Qual é o valor do número π ?
- ✓ Como obter esse número?
- ✓ Qual é a quantidade de casa decimais do número π ?

Esses questionamentos podem desencadear uma discussão e levar os alunos a refletirem sobre e manifestar como eles percebem esses conceitos. Ao concluírem as reflexões e questionamentos, será esclarecido que os corpos redondos são formas geométricas espaciais que apresentam pelo menos uma superfície não plana. Depois,

serão encorajados a citarem exemplos de objetos do dia a dia que lembram os corpos redondos. Será explicado aos alunos que é possível obter um cilindro a partir da revolução de um retângulo. Para isso, será distribuído a cada um deles, um palito e um retângulo, e fixar o retângulo no palito. Ao girar o palito com certa velocidade, é possível visualizar um cilindro. Essa atividade será também desenvolvida para a construção do cone e da esfera, obtidos a partir da revolução de um triângulo retângulo e da revolução de um semicírculo, respectivamente.

Logo após, os grupos receberão planificação em papel do cilindro e do cone, sendo orientados e estimulados a fazerem relação com o cilindro e o cone em acrílico. Com o auxílio necessário e acompanhamento, poderão deduzir suas fórmulas gerais e aplicá-las na resolução de problemas.

Espera-se que ao final de todas as interações, discussões e esclarecimento de dúvidas, os grupos possam alcançar os objetivos almejados. Ao término dessas atividades, farão alguns exercícios em folha impressa que será distribuída a eles. Para o cálculo do volume, será aplicado o postulado do princípio de Cavalieri, segundo Dante L. R. (2008, p. 370):

Se dois sólidos geométricos de mesma altura forem cortados em planos paralelos ao da base, em qualquer altura dos sólidos, sendo a área de intersecção com os dois sólidos, sempre for a mesma, então esses sólidos terão o mesmo volume. (DANTE, 2008, p. 370)

Para a comprovação do postulado, os alunos irão utilizar placas de papelão de mesma espessura. Após, também irão comprovar este postulado enchendo com areia alguns sólidos geométricos.

Finalizadas todas as etapas da proposta didática, sobre a construção dos sólidos geométricos com material concreto, os alunos são convidados a responder um questionário sobre a prática do estudo da geometria espacial através da construção dos sólidos geométricos.

4. APLICAÇÃO DA AULA E ANÁLISE DOS DADOS

O presente capítulo mostra a aplicação e os resultados da pesquisa sobre a construção dos sólidos geométricos com material concreto. Esta proposta didática teve a participação de 20 alunos e o intuito deste estudo é solidificar o conceito da geometria plana, vista no Ensino Fundamental, com a geometria espacial. Demonstrando o quão importante e indispensável é o aluno sair do abstrato e fazer uso do material concreto para fortalecer os conceitos da geometria plana e posteriormente entender a geometria espacial, com suas características, visão e percepção dos objetos em três dimensões.

Esta pesquisa foi dividida em quatro etapas, que são: 1ª etapa - retomada do conteúdo de geometria plana e a apresentação de objetos com forma similar aos sólidos geométricos; 2ª etapa - história da geometria e seus principais estudiosos, apresentação dos sólidos geométricos em acrílico para análise de suas características, construção de prismas retos com material concreto e apresentação do Teorema de Euler; 3ª etapa - construção e estudo das pirâmides com material concreto; 4ª etapa - construção e estudo dos corpos redondos (sólidos de revolução) com material concreto.

Etapa 1

No primeiro encontro foi realizada uma retomada do conteúdo de geometria plana, a fim de reconhecer os conhecimentos prévios dos alunos acerca do assunto. Neste momento, não foram percebidas dificuldades, em razão de que os alunos souberam reconhecer e nomear os polígonos apresentados, calcularam a área e seus perímetros, em um grande grupo no quadro com a professora.

Em seguida, foram formados 4 grupos de 4 a 6 alunos cada. Após, foram apresentados aos grupos objetos do dia a dia que se assemelham aos sólidos geométricos, como podemos observar na Figura 4. Em primeiro momento, questionei os alunos sobre a relação dos objetos com os sólidos, algumas das respostas foram: *“a bola de árvore de natal é uma esfera” “aquela caixa do cereal é um paralelepípedo”*, entre outras respostas.

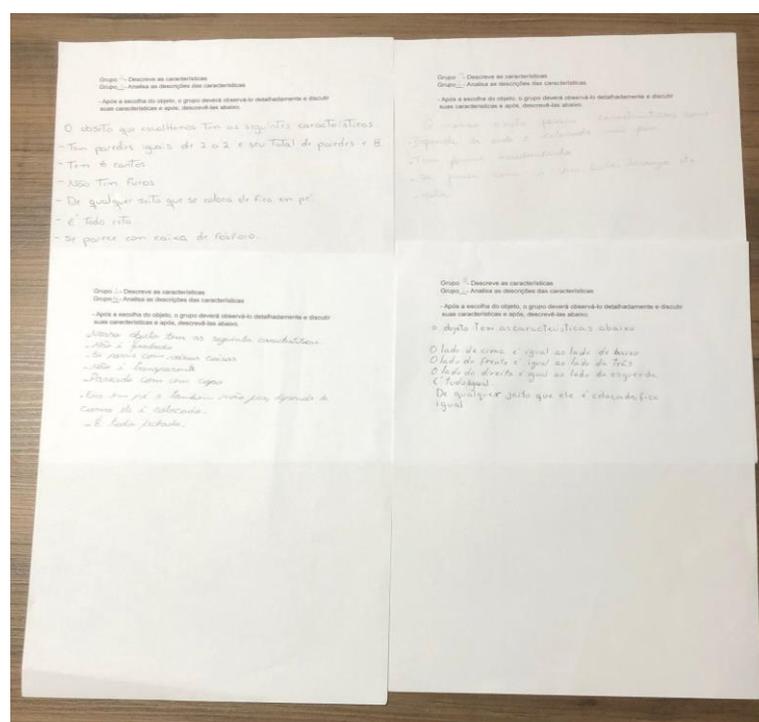
Figura 4 - Objetos semelhantes a sólidos geométricos



Fonte: Autora (2022).

Após essa observação e debate inicial, cada grupo sorteou um objeto em segredo dos demais grupos, com a finalidade de que em uma folha fornecida pela professora, pudesse descrever as características do objeto em específico. Pode-se analisar o registro dos alunos na Figura 5.

Figura 5 - Descrições feitas pelos grupos sobre os objetos analisados



Fonte: Autora (2022).

Posteriormente, essas folhas foram trocadas entre os grupos para que pudessem a partir das descrições descobrir de qual objeto se tratava, além de que deveriam analisar as descrições e discuti-las. As descrições e trocas foram realizadas da seguinte forma:

- O grupo 1 descreveu as características do rolo de papel higiênico e o grupo 4 analisou as respostas.
- O grupo 2 descreveu as características da caixa de cereal e o grupo 3 analisou as respostas.
- O grupo 3 descreveu as características da caixa de presente e o grupo 1 analisou as respostas.
- O grupo 4 descreveu as características da bolinha de árvore de natal e o grupo 2 analisou as respostas.

Essa atividade rendeu muita discussão entre dois grupos, visto que discordaram de uma das características atribuída a um objeto sorteado, o rolo de papel higiênico. O primeiro grupo descreveu *“É todo fechado”*. Ao ler a descrição, o segundo grupo, que analisou a descrição do primeiro, considerou inadequada essa colocação, visto que o rolo do papel higiênico não possui bases: *“o rolo de papel não possui base, ele é oco”*, citou o grupo 4. Após, o grupo 1 reconheceu o erro.

Por fim, todos os integrantes dos grupos conseguiram entender as características atribuídas a cada objeto.

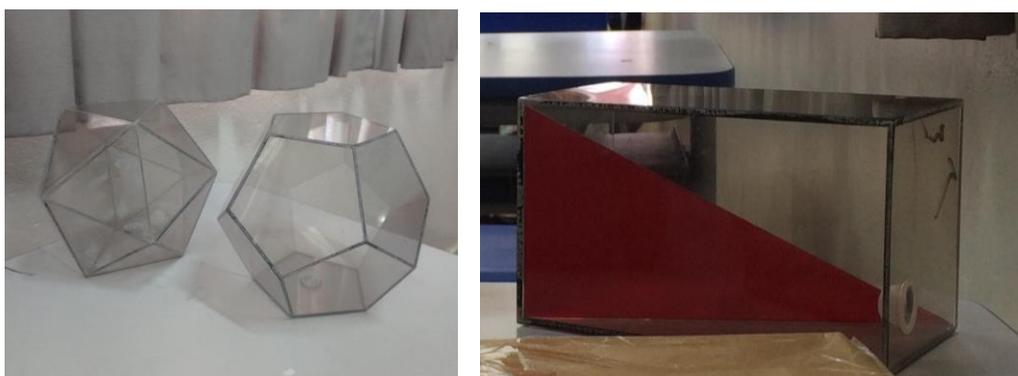
Etapa 2

Para dar continuidade ao conteúdo de geometria espacial, os alunos foram questionados se já tinham ouvido falar sobre geometria espacial e se sabiam do que se tratava. Um aluno respondeu *“sim, faço curso no Senai e essas figuras a gente vê lá”*, outro respondeu *“pensei em alguma coisa relacionada ao universo”*. A partir de então, foi explicado que a geometria espacial é a área da matemática que se encarrega de estudar os sólidos geométricos em três dimensões, ou seja, que possuem comprimento, largura e altura. Na sequência, alguns dos grandes matemáticos foram citados, entre eles Tales, Pitágoras e Euclides (considerado o pai da geometria) que desenvolveram o estudo do espaço e das formas geométricas. Então, foram apresentados sólidos geométricos em acrílico, ressaltando que existem dois tipos desses sólidos: os poliedros que são formados por faces poligonais (como

prismas, pirâmides e outros) e os não poliedros, que são chamados de corpos redondos e possuem pelo menos uma superfície arredondada, compostos pelo cilindro, cone e a esfera.

Nessa etapa, também foram demonstrados os poliedros de Platão em acrílico (Figuras 6), destacando que são todos regulares, ou seja, possuem arestas e faces congruentes, dando ênfase ao fato de existir somente cinco sólidos com tais características.

Figura 6 - Sólidos em acrílico: icosaedro e dodecaedro e paralelepípedo



Fonte: Autora (2022).

Concluídas as explicações e questionamentos sobre os sólidos geométricos, foi relatado a eles que iríamos estudar os sólidos geométricos da seguinte forma: primeiramente, os prismas e outros poliedros e, após, as pirâmides e os corpos redondos, a fim de facilitar a abordagem e a compreensão do conteúdo sobre geometria espacial.

Ao final das discussões e questionamentos sobre o assunto, foi entregue aos alunos uma apostila sobre o grande tema. Essa apostila continha um resumo sobre a história da geometria e uma breve biografia dos grandes matemáticos relacionados à área. Além disso, a apostila apresentava definições e exemplos com imagens sobre geometria espacial. Também sintetizava a identificação do teorema de Euler e curiosidades sobre esse matemático. Ademais, trazia definições e imagens dos poliedros de Platão, assim como assuntos relacionados ao matemático, tabelas e exercícios básicos.

Seguidamente, os alunos foram orientados que daríamos início às construções de sólidos. Os sólidos escolhidos para as construções foram o cubo e os prismas retos

de bases triangulares e hexagonais. Logo, os grupos, já formados na etapa anterior, se reuniram e começaram as produções.

Foram entregues moldes de polígonos produzidos pela professora. Os alunos tinham a responsabilidade de copiar, em cartolina, o tamanho e forma do molde recebido, além de reduzir ou ampliar o tamanho, conforme a escolha do grupo, sendo uma obrigatoriedade produzir 2 moldes de cada modelo, em razão de que serviriam para as bases inferior e superior dos sólidos. Após, produziram as laterais dos prismas. Para o cubo, copiaram as bases já feitas. Já para os prismas triangulares e hexagonais, não houve o estabelecimento de uma medida padrão, podendo o grupo decidir o comprimento dos retângulos e, em consequência, a altura que o prisma teria.

Depois de prontos os polígonos que serviriam de base e laterais, os alunos deram início à montagem dos sólidos, como mostra a Figura 7, utilizando cola e fita adesiva fornecidas pela professora. Ao mesmo tempo que produziam os sólidos, foram orientados a observar e registrar as características dos prismas, tais como: a quantidade de faces, arestas, vértices, tipos de faces, altura dos prismas e polígonos que constituem as bases. No decorrer das montagens e anotações, houve um obstáculo, um dos grupos apresentou uma dificuldade, os alunos contaram o número de arestas antes da montagem dos prismas, logo o número que chegaram era o dobro do que deveriam. Após discussão e exemplificação da professora, ficou estabelecido que os alunos concretizaram o entendimento de que cada aresta é a junção de dois lados do polígono.

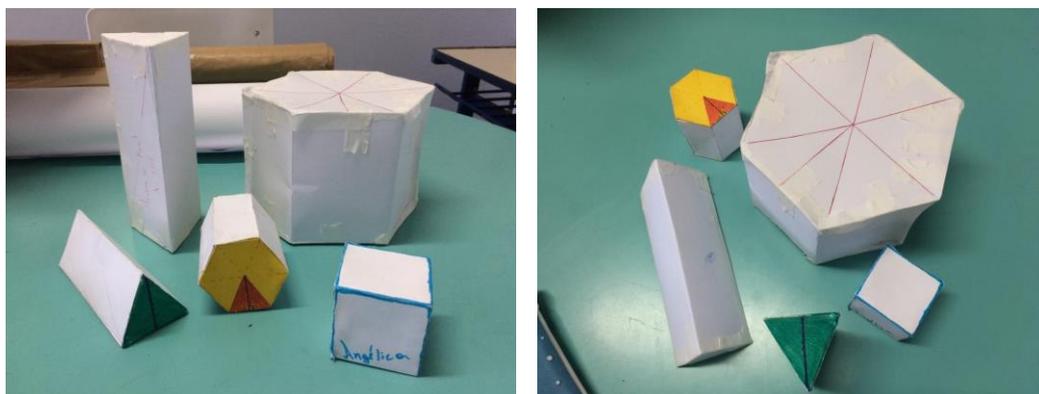
Figura 7 - Alunos construindo os sólidos geométricos



Fonte: Autora (2022).

Em seguida, os quatro grupos de alunos entregaram os sólidos geométricos (Figura 8) que montaram durante a aula. Não apresentaram mais dificuldades, de acordo com as respostas dos alunos ao questionamento verbal da professora.

Figura 8 - Sólidos geométricos feitos em cartolina (vista lateral) e Sólidos geométricos feitos em cartolina (vista superior)



Fonte: Autora (2022).

Logo depois, foi iniciada uma discussão envolvendo a venda de toras de madeira, muito utilizadas em fogões à lenha e lareiras na região em que a escola se localiza, na serra gaúcha, devido ao frio intenso. Após serem questionados, sobre qual método os vendedores utilizam para quantificar e assim vender a madeira, os alunos responderam: “*depende da grossura da tora*”, “*só medir o seu comprimento*”, “*multiplica a área da base pelo comprimento da tora*”. Essa introdução ao assunto utilizando um objeto que faz parte do cotidiano dos alunos desde a infância fez com que eles se interessassem mais pela posterior parte teórica e também se sentissem mais envolvidos com o tema.

A seguir, a professora solicitou que os alunos pegassem a apostila fornecida em aula anterior. Nesse momento, toda a turma acompanhou a leitura sobre o matemático Euler e as definições do seu teorema. Exemplos do teorema foram colocados no quadro e construídos por todo o grande grupo.

Após foram apresentadas planificações de figuras espaciais, distintas das construídas por eles, e solicitado aos grupos para fazerem associações aos sólidos geométricos em acrílico. Essas relações foram realizadas de maneira coerente, pois os grupos, com a atividade prévia, desenvolveram a atenção para compreender as particularidades dos sólidos geométricos.

Nessa atividade, os alunos aperfeiçoaram suas visões geométricas tridimensionais proporcionando a conexão entre os conceitos da geometria plana e da geometria espacial.

Em seguida, os alunos foram orientados a preencher a Tabela 1 a seguir, fornecida pela professora, com objetivo de que completassem as colunas e linhas utilizando os sólidos que foram produzidos por eles próprios.

Tabela 1 - Descrições dos sólidos geométricos e Relação de Euler

Poliedro	Vértice (V)	Arestas (A)	Faces (F)	RELAÇÃO DE EULER $V - A + F = 2$
CUBO				
PRISMA RETO DE BASE TRIANGULAR REGULAR				
PRISMA RETO DE BASE HEXAGONAL REGULAR				

Fonte: Elaborado pela autora (2022)

Todos os alunos completaram a tabela com a informações sobre o número de vértices, o número de arestas e o número de faces, além de que calcularam a relação de Euler de forma adequada, como mostra a Figura 9. Foi realizada a correção da tabela em grande grupo.

Figura 9 - Tabelas preenchidas pelos alunos

The image shows three overlapping student worksheets. Each worksheet contains a table titled 'SÓLIDOS GEOMÉTRICOS E RELAÇÃO DE EULER' with columns for 'Poliedro', 'Vértices (V)', 'Arestas (A)', 'Faces (F)', and 'RELAÇÃO DE EULER V - A + F = 2'. The tables are filled with handwritten data for various polyhedra.

Poliedro	Vértices (V)	Arestas (A)	Faces (F)	RELAÇÃO DE EULER V - A + F = 2
Cubo	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Esfera	2	2	2	$2 - 2 + 2 = 2$

Poliedro	Vértices (V)	Arestas (A)	Faces (F)	RELAÇÃO DE EULER V - A + F = 2
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Esfera	2	2	2	$2 - 2 + 2 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$

Poliedro	Vértices (V)	Arestas (A)	Faces (F)	RELAÇÃO DE EULER V - A + F = 2
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$
Prisma	6	9	5	$6 - 9 + 5 = 2$

Fonte: Autora (2022).

Etapa 3

Na próxima etapa da aula, a turma novamente se organizou em grupos. Pirâmides em acrílico foram apresentadas aos alunos para que pudessem observá-las e movimentá-las. Após, foram entregues moldes de polígonos de bases triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais, todos regulares, para que os integrantes dos grupos pudessem copiar, ampliar e reduzir os modelos.

Foi fornecido aos alunos canudos de plásticos e fita adesiva, e os grupos foram orientados a encontrar o centro de cada polígono desenhado e recortado em cartolina e nele fixar um canudo com fita adesiva de modo que este ficasse ortogonal à base, ou seja, que formasse um ângulo de 90° em relação a base, de maneira a perceberem que o canudo representava a altura da pirâmide reta.

Em seguida, foram conduzidos a montar a pirâmide, como na Figura 10, para isso confeccionaram triângulos em cartolina para fechar as laterais da pirâmide, de acordo com o polígono da base e a sua altura.

Figura 10 - Alunos construindo as pirâmides em cartolina



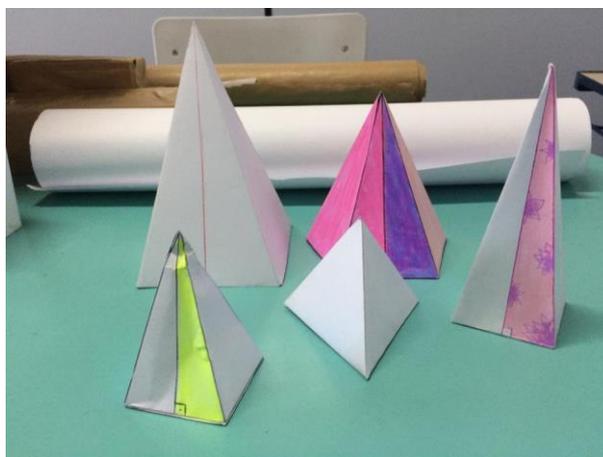
Fonte: Autora (2022).

Finalizadas todas as construções das pirâmides, como mostra a Figura 11, os grupos foram questionados sobre as fases da execução das construções. Um dos grupos relatou:

“tivemos problema com os triângulos laterais, pegamos o tamanho da altura da pirâmide (canudo) pra fazer os triângulos que vão ao redor, aí a gente percebeu o erro, depois que estava cortado os triângulo, aí vimos que a altura do triângulo que vai ao redor vai ser sempre maior que a altura do canudo”
(Resposta de um Grupo)

os demais grupos não relataram nenhum problema.

Figura 11 - Pirâmides feitas em cartolina pelos alunos



Fonte: Autora (2022).

A seguir, todos os questionamentos foram esclarecidos em discussão com o grande grupo e a professora. Com a finalidade de corroborar no entendimento dos alunos, foram fornecidas folhas impressas contendo uma síntese acerca do estudo

das pirâmides, além de uma tabela para ser preenchida sobre os elementos dos sólidos construídos.

Após, foi solicitado que os alunos começassem os cálculos de área. Para calcular a área das pirâmides construídas de bases triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal, utilizaram os seus conhecimentos prévios em geometria plana e o teorema de Pitágoras. Foram instigados e instruídos a deduzir as fórmulas gerais, através do teorema de Pitágoras, as quais, foram aplicadas para fazer os cálculos necessários para cada uma das pirâmides construídas, tais como o apótema da base da pirâmide, o apótema da pirâmide, altura da pirâmide, a área de sua base, a área lateral, a área total e o seu volume e fazer relações com os seus elementos e classificações.

Depois, os alunos foram orientados a dar início aos cálculos de volume das pirâmides. Para isso, foi fornecido um novo material: areia. Com a utilização da areia e dos prismas retos de bases e alturas proporcionais às das pirâmides, os alunos puderam calcular os volumes. Cada grupo retirou uma das bases do prisma reto escolhido e a base da pirâmide correspondente (ou seja, com a mesma base).

Após, cada um colocou areia dentro da pirâmide e, em seguida, transferiu a areia para o prisma e assim repetiu até encher totalmente o prisma. Finalizado todo o processo de transferência da areia da pirâmide para o prisma, os grupos registraram os resultados obtidos neste experimento e realizou-se um grande debate sobre o assunto.

Etapa 4

Para o estudo dos corpos redondos, em primeiro momento, foram realizados questionamentos acerca do número irracional pi (π). As respostas dadas foram, como: *"é uma letra grega"*, *"é a divisão do perímetro pelo diâmetro"*, *"tem valor 3,14"*, *"é um ângulo de 180°"*, *"tem infinitas casas decimais"*, *"não é um número exato"*, *"tem muitas casas depois da vírgula"*, entre outras, e assim os grupos foram dando suas contribuições para a definição do número pi.

Finalizado o debate sobre o número pi, foram apresentados aos alunos os corpos redondos em acrílico, cilindro, cone e esfera, conforme podemos observar na Figura 12.

Figura 12 - Corpos redondos (cilindro, cone e esfera) em acrílico



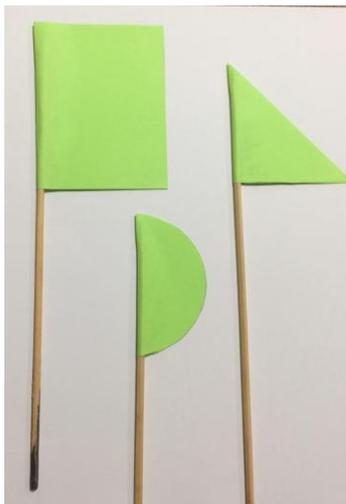
Fonte: Autora (2022).

Utilizou-se os sólidos em acrílico para que os alunos observassem e descrevessem verbalmente algumas de suas características, além de relacioná-las com formas encontradas na natureza e também com objetos do dia a dia. As contribuições dos alunos foram: *"bola de futebol"*, *"cone de sinalização"*, *"rolo de macarrão"*, *"copo de água"*, *"funil de vinho"*, *"tronco de árvore"*, *"lua"*, *"lata de cerveja"*, *"são arredondados"* e assim cada grupo foi contribuindo para relacionar esses sólidos geométricos com algo do seu cotidiano.

Na sequência, os grupos receberam recortes de cartolina no formato de um retângulo, um triângulo retângulo e um semicírculo, para fixar em um palito de churrasco, os quais podem ser vistos na Figura 13 a seguir, e foram orientados a rotacionar rapidamente o palito e ver quais as formas que surgiram com essas rotações.

Em primeiro momento, nem todos os alunos tiveram essa visão, mas com alguma ajuda, logo perceberam e concluíram que esses sólidos são gerados a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo, por isso também se chamam sólidos de revolução.

Figura 13 - Retângulo, triângulo e semicírculo fixados no palito para rotacionar



Fonte: Autora (2022).

Em seguida os grupos receberam moldes com a planificação do cilindro e do cone e foram orientados a fazer a relação com o cilindro e o cone em acrílico. Com o auxílio necessário e acompanhamento, perceberam que o cilindro é composto por duas circunferências congruentes de raio r e a superfície lateral corresponde a um retângulo de dimensões h (altura do cilindro) $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base). Com o auxílio necessário desenvolveram suas fórmulas gerais e posteriormente, aplicaram na resolução de problemas.

Para o cone perceberam que ele é composto por uma circunferência de raio r e a superfície lateral corresponde a um setor circular de raio g (geratriz) e comprimento $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base). Novamente, com auxílio, descreveram suas fórmulas. Finalizada essa etapa, os grupos montaram o cilindro e do cone, Figura 14, com base em um molde que lhes foi entregue anteriormente.

Figura 14 - Corpos redondos em acrílico e cone e cilindro feitos em cartolina



Fonte: Autora (2022).

Em seguida os alunos utilizaram placas de papelão de mesma espessura para calcular o volume de dois sólidos de formatos diferentes, mas de mesma altura e com secções horizontais de área iguais, para comprovar e justificar o postulado de Cavalieri (Figuras 15 e 16). A comprovação do postulado do Princípio de Cavalieri, também foi comprovado utilizando areia para encher dois sólidos de alturas iguais e secções paralelas de áreas iguais. Ao término dessas atividades, os alunos resolveram exercícios em folha impressa que foi distribuída a eles.

Figura 15 - Placas de papelão em formato quadrado de mesma espessura e de áreas iguais para comprovar o Princípio de Cavalieri



Fonte: Autora (2022).

Figura 16 - Placas de papelão em formato triangular de mesma espessura e de áreas iguais para comprovar o Princípio de Cavalieri



Fonte: Autora (2022).

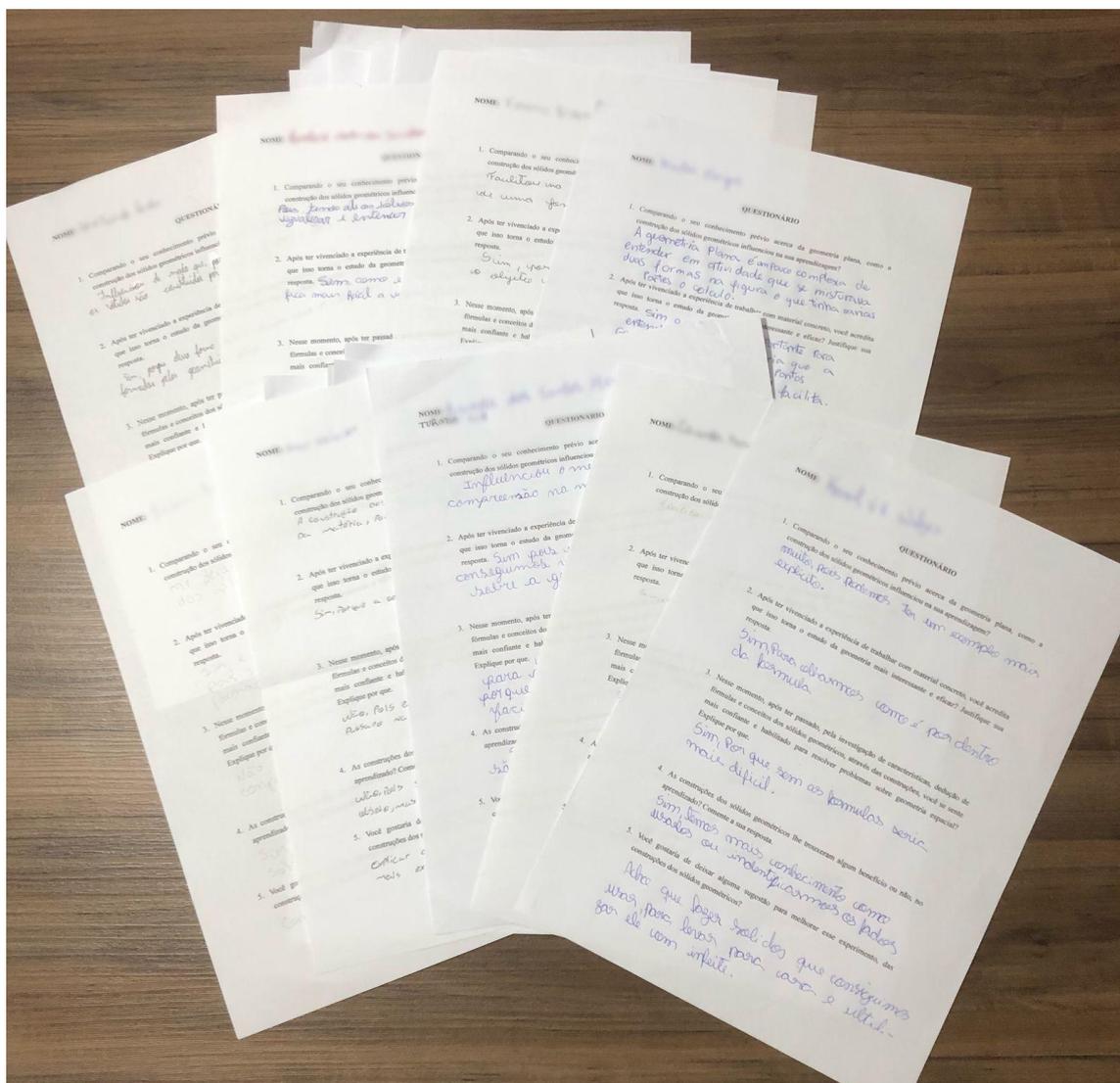
Finalizadas todas as etapas do experimento, os alunos foram convidados a responder um questionário, elaborado pela professora, sobre o experimento da construção dos sólidos geométricos com material concreto, como podemos ver logo abaixo.

Questionário:

1. Comparando o seu conhecimento prévio acerca da geometria plana, como a construção dos sólidos geométricos influenciou na sua aprendizagem?
2. Após ter vivenciado a experiência de trabalhar com material concreto, você acredita que isso torna o estudo da geometria mais interessante e eficaz? Justifique sua resposta.
3. Nesse momento, após ter passado pela investigação de características, dedução de fórmulas e conceitos dos sólidos geométricos, através das construções, você se sente mais confiante e habilitado para resolver problemas sobre geometria espacial? Explique por quê.
4. As construções dos sólidos geométricos lhe trouxeram algum benefício ou não, no aprendizado? Comente a sua resposta.
5. Você gostaria de deixar alguma sugestão para melhorar esse experimento, das construções dos sólidos geométricos?

Após os alunos responderem o questionário em folhas impressas, conforme mostra a Figura 17, as respostas são analisadas a seguir.

Figura 17 - Questionário final respondidos pelos alunos que realizaram o experimento



Fonte: foto da autora (2022).

A primeira pergunta do questionário interrogava os alunos sobre como a construção dos sólidos geométricos influenciou na aprendizagem, comparando com o conhecimento prévio sobre geometria plana. O aluno 3A respondeu o seguinte: "A construção dos sólidos ajudou o entendimento da matéria, pois fica mais visível". Já o aluno 4D relatou: "Acredito que ajudou pois, tendo ali os sólidos fisicamente ficou mais fácil visualizar e entender faces e vértices". Por fim, o aluno 1B argumentou que: "Influenciou de modo que, possibilita a percepção de como os sólidos são constituídos por figuras planas".

Sabe-se que os alunos apresentam diversas dificuldades e domínios no entendimento dos conteúdos. Muitos apresentam facilidade para entender imagens,

outros se adaptam melhor ao que escutam, já outros precisam ler e escrever para compreender. À vista disso, percebe-se que a visualização dos sólidos facilita a aprendizagem, em razão de que o conteúdo deixa de ser apenas teórico e presente em imagens de livros e passa a ser prático e relacionado com o cotidiano dos alunos. Além disso, estas outras formas de facilitação da aprendizagem citadas também foram contempladas nas aulas, visto que muitas vezes se discutiu os temas em grande grupo e os alunos foram incentivados a ler e escrever sobre tal.

A segunda questão indagou: Após ter vivenciado a experiência de trabalhar com material concreto, você acredita que isso torna o estudo da geometria mais interessante e eficaz? Justifique sua resposta. O aluno 4B respondeu: *“Sim, é mais fácil de entender, pois se acompanha o processo de formação da estrutura do sólido”*. Já o aluno 4D, escreveu: *“Sim o material é importante para entender melhor a matéria que a geometria mostra alguns pontos difíceis e já com o material facilita”*. Logo, entende-se que a aprendizagem se torna mais interessante e eficiente quando os alunos se envolvem ativamente com o que estudam. É inquestionável também que estimular a autonomia dos alunos para execução de projetos torna-os mais envolvidos e curiosos com o estudo.

Na terceira pergunta do questionário, os alunos foram interrogados: Nesse momento, após ter passado pela investigação de características, dedução de fórmulas e conceitos dos sólidos geométricos, através das construções, você se sente mais confiante e habilitado para resolver problemas sobre geometria espacial? O aluno 1D referiu: *“Sim com a atividade de construção dos sólidos melhorou o entendimento sobre geometria espacial e também pela forma planificada que melhora o cálculo”*. O aluno 1B respondeu: *“Sim, porque com isso é possível perceber que não há apenas uma forma de resolver os problemas sobre o tema, uma vez que se entende a constituição dos sólidos”*.

Com isso, compreende-se que ao mostrar mais de um caminho, o teórico, o visual e o prático, para o estudo e aprendizagem, os alunos se sentem mais confiantes e habilitados não só no assunto em específico, geometria, mas também em todo o estudo da matemática.

A quarta pergunta questionava se as construções dos sólidos geométricos trouxeram algum benefício ou não na aprendizagem e pedia para os alunos comentarem a respeito. O aluno 2B respondeu: *“Sim, a construção dos sólidos reforçou como a geometria plana e geometria espacial estão intimamente*

relacionadas". Por sua vez, o aluno 2D disse: "*Trouxe muitos benefícios, por que eu consegui aprender de uma forma diferente da que a gente tem que aprender nunca entendi bem o que é geometria agora eu sei a plana e a espacial nem gostava de matemática e agora achei legal*". Diante disso, justifica-se que a forma em que o tema foi trabalhado traz benefícios aos alunos na construção do conhecimento.

Por fim, a última questão perguntava: Você gostaria de deixar alguma sugestão para melhorar esse experimento, das construções dos sólidos geométricos? O aluno 1D respondeu: "*Eu ia gostar que mostrasse exemplos diferentes tipo esculturas*". Já o aluno 1B relatou: "*Construir mais sólidos e, talvez, construir com outros materiais, exemplo: plástico, madeira, papel cartão, papelão, etc*". O aluno 2C comentou: "*la ser legal fazer uma maquete das pirâmides do egipto*".

Desta forma, fica claro que os alunos têm interesse em aliar o estudo matemático com outras disciplinas, como arte. Portanto, seria de grande benefício fazer da aula experimental um grande projeto multidisciplinar. Os alunos poderiam replicar ou inventar esculturas, incentivando a criatividade, o raciocínio lógico, o estudo matemático, o estudo histórico e o estudo artístico.

Conseqüentemente, as respostas dos objetos de estudo, os alunos, ao questionário analisadas justificam a pesquisa, visto que o projeto apresenta inúmeros benefícios na construção de uma experiência e aprendizagem significativa.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Primeiramente, a pesquisa cumpriu o objetivo geral, proporcionando uma experiência de elaboração dos sólidos geométricos a partir de material concreto com um grupo de 20 alunos do último ano do ensino médio de uma escola pública, no interior do Rio Grande do Sul.

Em seguida, a pesquisa apresentava como um dos objetivos específicos proporcionar o fortalecimento de conteúdos estudados no ensino fundamental, o qual foi cumprido, visto que a partir de tabelas, questionários e descrições, os alunos mostraram-se capacitados para identificar figuras geométricas, classificá-las e diferenciá-las.

Após, havia a finalidade de analisar o ponto de vista dos alunos sobre a experiência desenvolvida, assim como seus pontos positivos e negativos, além de avaliar o nível de interesse e as ideias dos participantes sobre o assunto principal, a geometria. O cumprimento desse objetivo se deu a partir da averiguação do questionário respondido pelos alunos.

Todos os objetivos da pesquisa foram cumpridos, uma vez que os alunos mostraram domínio em geometria plana, após a experiência, além de serem capazes de classificar e diferenciar os sólidos geométricos sem auxílio. Além disso, ao final, os alunos mostraram desenvolvimento na capacidade de resolver problemas matemáticos em geral e não só relacionados à geometria.

Comparativamente, a pesquisa apresentou resultados ativos e passivos significativos, ou seja, houve efeitos imediatos, como o aumento do interesse, da criatividade e da participação, e houve efeitos prolongados, como o aumento da média dos alunos que participaram da pesquisa. À vista disso, é evidente que a pesquisa traz inúmeros benefícios aos alunos.

Além disso, a turma em que o experimento foi realizado mostrou mais autonomia para realizar exercícios matemáticos posteriormente, em razão de que os alunos discutiam as questões em grupos, assim como faziam no experimento, auxiliando uns aos outros. Com isso, era perceptível que os alunos estavam mais interessados pelas aulas de matemática e pela aprendizagem.

Ademais, os alunos sentiram mais liberdade para trazer sugestões de ideias de aulas de matemática.

Ao desenvolver o projeto, as expectativas em relação à pesquisa envolviam despertar o interesse e a curiosidade dos alunos, incentivar a autonomia, estimular o raciocínio lógico e melhorar a relação entre alunos e professora e também entre alunos da turma. Ao final da pesquisa, posso afirmar que todas as expectativas foram alcançadas e os resultados pessoais, envolvendo satisfação e o reconhecimento também foram atingidos.

Com a finalização de todas as etapas do projeto, percebo que esta é uma pesquisa com grande potencial e que deve ser reaplicada em outros momentos. No entanto, analisando criticamente, mudanças podem ser feitas. A principal implica em dar mais sustentabilidade ao projeto, pois foram utilizadas diversas cartolinas para o projeto. Em uma próxima oportunidade, gostaria de incentivar a utilização de materiais recicláveis, como caixas, embalagens de produtos e caixas de papelão. Além disso, outra mudança pertinente, seria de que os objetos que se assemelham a sólidos geométricos utilizados na Etapa 1 poderiam ser trazidos pelos alunos, incentivando a identificação dos mesmos antes mesmo do início das atividades.

Destaca-se novamente que os objetivos qualitativos da pesquisa foram alcançados, visto que, a proposta é proporcionar práticas concretas, onde o aluno necessita de experimentar, investigar, construir, medir, manipular os sólidos, visualizar suas características e padrões, relacionar com outros objetos, deduzir fórmulas para aplicá-las nos cálculos de área e volume dos sólidos geométricos e proporcionar experiências matemáticas significativas, assim como solucionar problemas relacionados à geometria espacial.

Portanto, averiguou-se através dessa pesquisa que, a aprendizagem através das experiências concretas promove um aprendizado motivador e significativo no estudo da geometria espacial, visto que, o aluno precisa visualizar e manusear os objetos para formular conceitos e associá-los aos já adquiridos anteriormente.

REFERÊNCIAS

BAUER, Caroline S.; ALVES, Ana Cristina Z.; OLIVEIRA, Simone de. História Antiga. Porto Alegre: Grupo A, 2019. E-book. ISBN 9788595029958. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595029958/>. Acesso em: 10/01/2023.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2000.

BOYER, Carl B. História da matemática. São Paulo: Editora Blucher, 2012. E-book. ISBN 9788521216117. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521216117/>. Acesso em: 10/01/2023.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO DO BRASIL. Base Nacional Comum Curricular, 2018. 536, 537 e 540 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 05/10/2022.

DANTE, L. R. Matemática - volume único. 1 ed. São Paulo: Ática, 2008. 6 un, 29 cap, 370 p.

KUENZER, Acácia. Ensino Médio: Construindo uma proposta para os que vivem do trabalho, 4º ed, São Paulo: Cortez, 2005.

MACHADO JÚNIOR, A. G. Modelagem matemática no ensino-aprendizagem: ação e resultados. Orientador: Adilson Oliveira do Espírito Santo. Dissertação de mestrado (Mestrado em educação em ciências e matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2005. 11 p. Disponível em: <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/1780>. Acesso em: 01/10/2022.

NACARATO, Adair M.; SANTOS, Cleane Aparecida dos. Aprendizagem em Geometria na educação básica. Belo Horizonte: Grupo Autêntica, 2014. E-book. ISBN 9788582174586. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582174586/>. Acesso em: 10/01/2023.

RESULTADOS 2019 - Ideb. Apresentação coletiva de imprensa. Inep. Ministério da Educação. Saeb. Censo escolar. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/documentos/2020/Apresentacao_Coletiva_Imprensa_Saeb_2019.pdf . Acesso em 20/06/2023.

SEVERINO, A. J. Metodologia do Trabalho Científico. 24 ed. São Paulo: Cortez, 2017.

SMOLE, Kátia C S.; DINIZ, Maria I. S. V.; PESSOA, Neide; e outros Cadernos do ensino médio de matemática: jogos de matemática de 1º a 3º ano. v.3 (Cadernos do mathema). Grupo A, 2008. E-book. ISBN 9788536317281. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536317281/>. Acesso em: 23/05/2023.

SMOLE, Kátia C S.; DINIZ, Maria I. S V. Materiais manipulativos para o ensino de formas geométricas. V.5 (Mathemoteca). Grupo A, 2016. *E-book*. ISBN 9788584290796. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788584290796/>. Acesso em: 23/05/2023.