

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

MARIA EDUARDA BERRO SABIN DOS SANTOS

**DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES E FORMAS
CANÔNICAS DE JORDAN**

**Itaqui
2022**

MARIA EDUARDA BERRO SABIN DOS SANTOS

**DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES E FORMAS
CANÔNICAS DE JORDAN**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura em Matemática-
Licenciatura como requisito parcial para a
obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Elisa Regina Cara

**Itaqui
2022**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S332d Santos, Maria Eduarda Berro Sabin dos
Diagonalização de operadores e formas canônicas de Jordan /
Maria Eduarda Berro Sabin dos Santos.
76 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade
Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2022.
"Orientação: Elisa Regina Cara".

1. Operador Linear. 2. Diagonalização de Operadores. 3.
Teorema Espectral. 4. Forma de Jordan. I. Título.

MARIA EDUARDA BERRO SABIN DOS SANTOS

**DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES E FORMAS
CANÔNICAS DE JORDAN**

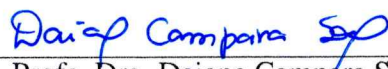
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura em Matemática-
Licenciatura como requisito parcial para a
obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 13 de agosto de
2022.

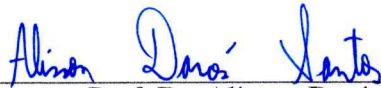
Banca examinadora:



Prof^a. Dr^a. Elisa Regina Cara
Orientadora



Profa. Dra. Daiane Campara Soares
Universidade Federal do Pampa



Prof. Dr. Alisson Darós Santos
Universidade Federal do Pampa

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo principal apresentar a teoria envolvida na Diagonalização de Operadores e Formas Canônicas de Jordan. Tal teoria nos fornece ferramentas Matemáticas que potencializam e facilitam os processos de inúmeros desenvolvimentos abstratos na área das exatas. Para isso, no decorrer do trabalho apresentamos os conceitos básicos da Álgebra Linear, desde os Espaços Vetoriais até os Autovalores e Autovetores de um Operador Linear. Adentramos na Diagonalização de Operadores Reais e Complexos e, em seguida, apresentamos alguns operadores denominados especiais: normal, autoadjunto, simétrico, hermitiano, isometria, dentre outros. A diagonalização de tais operadores é discutida através do Teorema Espectral, que é dividido em duas versões, a real e a complexa. Em seguida, apresentamos os conceitos necessários para se obter a Forma de Jordan de um operador linear que não é diagonalizável. Para finalizar o trabalho, exemplificamos como se obtém a Forma de Jordan de alguns operadores.

Palavras-chave: Operador Linear. Diagonalização de Operadores. Teorema Espectral. Forma de Jordan.

ABSTRACT

The academic work aims to present the theory involved in the Diagonalization of Operators and Jordan Canonical Forms. Such theory provides us with Mathematical tools that enhance and facilitate the processes of numerous abstract developments in the area of exact sciences. Thus, in the course of the work, the basic concepts of Linear Algebra are presented, from the Vector Spaces to the Eigenvalues and Eigenvectors of a Linear Operator. Undertaking the Diagonalization of Real and Complex Operators and then we present some so-called particular operators: normal, self-adjoint, symmetric, hermitian, isometry, among others. The Diagonalization of resembling operators is discussed through the Spectral Theorem, which is divided into two versions, the real and the complex. Additionally, we present the concepts necessary to obtain the Jordan Form of a linear operator that is not diagonalizable. To finish the study, we will epitomize how to obtain the Jordan Form of some operators.

Keywords: Linear Operator, Diagonalization of Operators, Spectral Theorem, Jordan Form..

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
2 ESPAÇOS VETORIAIS E TRANSFORMAÇÕES LINEARES.....	10
2.1 Espaços Vetoriais.....	10
2.1.1 Subespaços Vetoriais.....	11
2.1.2 Combinação Linear	13
2.1.3 Dependência e Independência Linear	14
2.1.4 Bases e Dimensão	15
2.2 Transformações Lineares	17
2.2.1 Matriz Associada à Transformação Linear	20
3 AUTOVALORES, AUTOVETORES E DIAGONALIZAÇÃO DE OPERA- DORES.....	23
3.1 Autovalores e Autovetores	23
3.1.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz.....	25
3.1.1.1 O Polinômio Característico.....	25
3.1.2 Polinômio Característico de uma Transformação Linear	27
3.2 Diagonalização de Operadores em Espaços Vetoriais Reais e Complexos	28
4 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO	33
5 OPERADORES EM ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO	41
5.1 Alguns Operadores Especiais.....	42
5.2 O Teorema Espectral e a Diagonalização de Operadores Especiais.....	46
6 FORMAS CANÔNICAS DE JORDAN.....	54
6.1 Introdução	54
6.2 Subespaços Invariantes e o Polinômio Minimal.....	55
6.2.1 Subespaços Invariantes	56
6.2.2 O Polinômio Minimal	57
6.3 Formas Canônicas de Jordan.....	59
6.3.1 Operadores Nilpotentes.....	59
6.3.2 Formas Canônicas de Jordan	61
6.3.2.1 Obtenção da Forma de Jordan.....	63
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	73

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75
--	-----------

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, um dos ramos que mais potencializou aplicações, e contribuiu significativamente para avanços tecnológicos e científicos, é o de Álgebra Linear. Como cita Carnesecca (2019), as suas aplicabilidades são amplas, em diversos campos como, criptografia, programação linear, circuitos elétricos, modelos econômicos lineares, entre outros.

Contudo, apesar da antiguidade dos seus conteúdos e métodos dentro da Matemática, a Álgebra Linear, enquanto componente curricular, tem uma história ainda recente e pouco investigada. Segundo Aydin (2013), ela não era reconhecida como tal até os anos de 1930. Uma das obras mais importantes que influenciou nesse processo foi o livro de Bartel van der Waerden, intitulado *Moderne Algebra*.

Um dos conceitos importantes na Álgebra Linear, o conceito de Matrizes, tem seu surgimento datado de 1850 com James Joseph Sylvester, conhecido como o criador de Matrizes. O desenvolvimento da Teoria de Matrizes, surgiu da ideia de relacionar simples pares ordenados de números reais (a, b) a conceitos mais abstratos. Sendo conveniente para o estudo das equações e transformações lineares (BAUMGART, 1992).

Segundo Baumgart (1992), para Sylvester a noção de Matriz estava associada ao problema de encontrar raízes múltiplas de um polinômio, não sendo utilizada a representação em forma de tabela. Outro matemático que ficou conhecido por contribuir significativamente no desenvolvimento dessa teoria foi o britânico Arthur Cayley (1821 - 1895), que em um artigo publicado em 1858, usou matrizes na forma tabular para representar formas quádricas e sistemas lineares.

Outro conceito básico e muito importante é o de autovalores e autovetores, os quais são especiais devido às suas características peculiares e ampla aplicabilidade. É interessante observar que a ideia implícita de tal conceito, surgiu no estudo do movimento rotacional e, mais tarde, foi usada para classificar vários tipos de superfícies e para descrever soluções de certas equações diferenciais. No início do século XX, a teoria foi aplicada à matrizes e transformações matriciais, e atualmente, tem aplicações à áreas diversas como computação gráfica, vibrações mecânicas, fluxo do calor, dinâmica populacional, mecânica quântica, economia, dentre outras (ANTON e RORRES, 2012).

As aplicabilidades a partir do domínio e compreensão da significância da Diagonalização de Operadores, segundo Weber (2019), são de interesse porque matrizes diagonais são fáceis de manusear, e isso acaba facilitando ainda mais as potencialidades que o

conhecimento carrega. Em particular, a diagonalização de operadores pode ser aplicada na identificação de cônicas não degeneradas e resolução de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes (CARNESECCA, 2019).

Sabemos que muitos sistemas podem ser representados por matrizes e que a manipulação delas possibilita análises, cálculos e melhorias nesses sistemas. Considerando, por exemplo, que algumas dessas matrizes não sejam simples de se manipular, faz sentido buscarmos matrizes equivalentes que possam ser manipuladas mais facilmente. Imagine que essas matrizes, em determinados casos, não sejam simples de serem manipuladas. Dessa maneira, buscar por uma representação matricial mais simples desses sistemas, possibilita um ganho de tempo no processamento e no custo operacional a ser implementado. Uma das formas de obter essa simplificação consiste em encontrarmos uma matriz diagonal que seja equivalente à original, e este processo é denominado diagonalização de matrizes. O que motiva a obtenção dessa matriz equivalente diagonal são as suas características (ANTON e RORRES, 2012).

Tendo em vista todas as particularidades expostas aqui e no intuito de aprimorar conhecimentos relacionados, propomos o seguinte tema de pesquisa: Sendo as matrizes diagonais as mais simples do ponto de vista das operações matriciais, queremos investigar quando é possível que um operador linear qualquer seja representado por uma matriz diagonal. E mais, se não for possível diagonalizar a matriz associada à qualquer operador linear, iremos então investigar se é possível representá-lo por uma matriz “o mais próximo possível” de uma matriz diagonal.

Neste contexto, são abordados neste trabalho os conceitos de Diagonalização de Operadores e Formas Canônicas de Jordan, a qual nada mais é, do que uma das muitas formas de se representar um operador linear. Esta representação se dá através de uma matriz semelhante à original, e neste caso em específico, a matriz obtida é quase diagonal, o qual significa que os únicos elementos não-nulos são aqueles da diagonal principal ou imediatamente abaixo (ou acima) dessa diagonal.

Para atingirmos o objetivo geral do trabalho que é: Apresentar os conceitos envolvidos na diagonalização de operadores em espaços vetoriais reais e complexos, bem como as Formas Canônicas de Jordan, precisamos desenvolver conceitos importantes que são apresentados na decorrer dos capítulos.

O tema justifica-se pelo fato desse trabalho aprofundar os conceitos teóricos estudados teórico dos conteúdos estudados nos componentes curriculares obrigatórios do Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura, da Unipampa Campus Itaqui. Além

disso, a Álgebra Linear como um todo é um pré-requisito muito importante para o ingresso em cursos de Pós-Graduação tanto em Matemática quanto em Matemática Aplicada.

Diante disso, este trabalho fundamenta-se em materiais já publicados, como livros, artigos, dissertações e teses, dando a ele um caráter bibliográfico. As pesquisas bibliográficas, segundo Gil (2002), possibilitam uma vasta investigação sobre o assunto. Além disso, como também são classificadas como pesquisas exploratórias, pois proporcionam o aprimoramento de ideias e a descoberta de intuições. Tal pesquisa objetiva contribuir para a proximidade em torno de um determinado problema, e dessa forma, tornando-o mais compreensível e auxiliando na elaboração de conjecturas e/ou hipóteses. Portanto, a escolha de abordagem deste trabalho se deu devido à pesquisa bibliográfica proporcionar ao pesquisador o acesso à materiais bem elaborados e diferentes aspectos da temática explorada.

O presente trabalho está dividido em capítulos como descritos a seguir. No segundo capítulo apresentamos os conceitos base da Álgebra Linear, que são os espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinação linear, dependência e independência linear, transformações lineares, bem como a representação matricial dessas transformações. No terceiro capítulo, são descritos os conceitos de autovalores e autovetores de operadores lineares e o processo de diagonalização desses operadores. No quarto capítulo, apresentamos os conceitos de produto interno e espaços com produto interno. No quinto capítulo, definimos alguns operadores lineares denominados de especiais e também apresentamos duas versões do Teorema Espectral. No sexto capítulo são apresentados conceitos importantes para a obtenção da forma de Jordan de um operador linear, tais como, operadores nilpotentes, subespaços invariantes e polinômio minimal. Finalizamos o trabalho com algumas considerações finais a cerca da realização desta pesquisa.

2 ESPAÇOS VETORIAIS E TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, vamos apresentar e definir os conceitos que serão necessários para a compreensão do processo de diagonalização de operadores lineares. Esses conceitos serão utilizados e aprofundados durante a execução desse projeto.

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em Boldrini *et al.* (1980), Axler (1997) e Anton e Rorres (2012).

2.1 Espaços Vetoriais

Atualmente, existem inúmeros matemáticos que desenvolvem os conceitos de Espaços Vetoriais, mas, o primeiro matemático a dar a definição abstrata para um espaço vetorial foi Giuseppe Peano (Itália, 1858-1932) em seu livro *Calcolo Geometrico* de 1888.

Definição 1. *Um espaço vetorial real é um conjunto não vazio V de objetos, chamados vetores, sobre os quais estão definidas duas operações, chamadas de soma e multiplicação por escalar (número real), sujeitas às propriedades listadas a seguir.*

Sejam os vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} em V e os escalares $c, d \in \mathbb{R}$:

1. A soma de \mathbf{u} e \mathbf{v} , denotada por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, está em V .
2. A adição é comutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. A adição é associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe um vetor nulo, $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.
5. Para cada vetor \mathbf{v} em V , existe um vetor simétrico (oposto) $-\mathbf{v}$ em V tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
6. O múltiplo escalar de \mathbf{v} por c , denotado por $c\mathbf{v}$, está em V .
7. $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$.
8. $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.
9. $c(d\mathbf{v}) = (cd)\mathbf{v}$.
10. Existe o elemento neutro da multiplicação, o 1, tal que $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Se na Definição 1, ao invés de termos como escalares números reais, tivermos números complexos, V será chamado *espaço vetorial complexo*. De agora em diante trataremos um espaço vetorial real apenas por espaço vetorial. Quando se tratar de um espaço vetorial complexo, o mesmo será especificado.

Exemplo 1. \mathcal{P}_n é um espaço vetorial.

O conjunto \mathcal{P}_n ($n \geq 0$) dos polinômios de grau menor ou igual a n consiste em todos os polinômios da forma

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n,$$

onde os coeficientes a_0, \dots, a_n e a variável t são números reais. Se todos os coeficientes forem iguais a zero, p é chamado de polinômio nulo.

Seja $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n$, então a soma $p + q$ é definida por

$$(p + q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n.$$

O múltiplo escalar $c \cdot p$ é o polinômio definido por

$$(cp)(t) = c \cdot p(t) = c \cdot a_0 + (c \cdot a_1)t + \cdots + (c \cdot a_n)t^n.$$

Essas definições satisfazem as propriedades 1 e 6 pois $p + q$ e $c \cdot p$ são polinômios de grau menor ou igual a n . As propriedades 2, 3 e 7-10 seguem das propriedades de números reais. Na propriedade 4, o polinômio nulo atua como o vetor nulo. Finalmente, $(-1)p$ age como o oposto de p , de modo que a propriedade 5 é satisfeita. Portanto, \mathcal{P}_n é um espaço vetorial.

2.1.1 Subespaços Vetoriais

Definição 2. Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W , não vazio, será um **subespaço vetorial** de V se:

- (i) $\mathbf{0} \in W$;
- (ii) Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$;
- (iii) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in W$ tivermos $a\mathbf{u} \in W$.

As condições da Definição 2 garantem que ao operarmos em W (adição e multiplicação por escalar), não obteremos um vetor fora de W . Assim, W é um espaço vetorial, pois as operações ficam bem definidas, e por ser um subconjunto de um espaço vetorial, as propriedades (1-10) da Definição 1 não precisam ser verificadas.

Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços, o conjunto formado pelo

vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo 2. *Seja V um espaço vetorial. Então o conjunto $W = \{\mathbf{0}\}$ é conhecido como subespaço vetorial nulo.*

Solução: De fato:

(i) $\mathbf{0} \in W$;

(ii) $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$;

(iii) $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0} \in W$ então $a\mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$.

Exemplo 3. *O conjunto de todas as matrizes simétricas $n \times n$ é um subespaço das matrizes $M(n, n)$ (matrizes quadradas $n \times n$).*

Solução: De fato, a soma de duas matrizes simétricas é simétrica e um múltiplo escalar de uma matriz $n \times n$ simétrica é simétrica. Além disso, a matriz nula $n \times n$ é simétrica. Analogamente, o conjunto das matrizes triangulares superiores, triangulares inferiores e diagonais são subespaços de $M(n, n)$.

Como espaços vetoriais são conjuntos, gostaríamos de saber se a **união e intersecção** dos subespaços vetoriais preservam a propriedade de espaço vetorial. Veremos através do próximo exemplo que a união não preserva mas a intersecção preserva a propriedade.

Exemplo 4. *Dados $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$, subespaços de \mathbb{R}^2 . Mostre que $U \cup W$ não é subespaço de \mathbb{R}^2 .*

Solução: De fato, tomando $\mathbf{u} = (1, 1) \in U \cup W$ e $\mathbf{w} = (1, -1) \in U \cup W$, temos que $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (2, 0) \notin U \cup W$.

Teorema 1. (Intersecção de Subespaços) *Se W_1, W_2, \dots, W_n forem subespaços de um espaço vetorial V , então a intersecção desses subespaços também será um subespaço de V .*

Demonstração: Ver em Boldrini *et al.* na página 110.

Exemplo 5. *Seja $V = M(n, n)$ o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas $n \times n$. Sejam $W_1 = \{\text{matrizes triangulares superiores}\}$ e $W_2 = \{\text{matrizes triangulares inferiores}\}$. Então, $W_1 \cap W_2 = \{\text{matrizes diagonais}\}$, que é subespaço de V .*

Observemos que o principal problema quando consideramos a união de subespaços é que se tomamos um vetor em cada subespaço, a soma deles pode não pertencer à união. Seria, então, natural considerarmos o conjunto soma definido a seguir.

Definição 3. Dados U e W subespaços de um espaço vetorial V , definimos a **soma** de U e W , denotada por $U + W$, como o conjunto $U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w}; \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$.

Dessa forma, quando somamos um elemento de um subespaço com um elemento do outro, automaticamente, a soma destes elementos está na soma dos subespaços.

Exemplo 6. Sejam $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$. Mostre que $U + W = \mathbb{R}^2$, e conseqüentemente, $U + W$ é um subespaço de \mathbb{R}^2 .

Solução: De fato, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$(x, y) = \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in W},$$

o que mostra que todo elemento de \mathbb{R}^2 se escreve como a soma de um elemento de U e um elemento de W .

Portanto \mathbb{R}^2 está contido em $U + W$, e como por definição $U + W$ está contido em \mathbb{R}^2 , concluímos que $U + W = \mathbb{R}^2$.

Definição 4. Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . O espaço vetorial V é dito **soma direta** de U e W , e representado por $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Exemplo 7. Considere novamente os subespaços $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$. Vimos que $\mathbb{R}^2 = U + W$. Como $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, segue que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

2.1.2 Combinação Linear

Definição 5. Seja V um espaço vetorial e sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores de V . Diremos que um vetor \mathbf{v} de V é uma **combinação linear** de v_1, v_2, \dots, v_n se existirem números reais a_1, a_2, \dots, a_n tais que

$$\mathbf{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Definição 6. Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores de um espaço vetorial V . Consideremos o subespaço vetorial W formado por todas as combinações lineares de v_1, v_2, \dots, v_n . Este subespaço é chamado **subespaço gerado** por v_1, v_2, \dots, v_n e dizemos que v_1, v_2, \dots, v_n **geram** W ou que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é um **conjunto gerador** de W . Para indicarmos que W é o subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_n , escrevemos $W = [v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Exemplo 8. Os polinômios $1, t, t^2, \dots, t^n$ geram o espaço vetorial \mathcal{P}_n , pois cada polinômio p em \mathcal{P}_n pode ser escrito como $p = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$, que é uma combinação linear de $1, t, t^2, \dots, t^n$.

2.1.3 Dependência e Independência Linear

Em geral, pode haver mais de uma maneira de expressar um vetor de um espaço vetorial V como combinação linear de vetores de um conjunto gerador. Por exemplo, $\mathbb{R}^3 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, onde $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 1)$. Assim, temos que:

$$(4, 2, 1) = 1\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 1\mathbf{v}_3 + 1\mathbf{v}_4 \quad \text{ou} \quad (4, 2, 1) = -1\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4.$$

Em seguida, apresentaremos condições sob as quais cada vetor de V pode ser escrito de uma única maneira como combinação linear dos elementos de um conjunto gerador.

Definição 7. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (L.I.)**, ou que os vetores v_1, \dots, v_n são L.I., se a equação

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \mathbf{0}$$

é satisfeita somente quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente (L.D.)**, ou que os vetores v_1, \dots, v_n são L.D.

Se um dos vetores v_1, \dots, v_n é o vetor nulo, digamos $v_1 = \mathbf{0}$, então os vetores são L.D., pois

$$1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 1 \cdot \mathbf{0} + 0 + \dots + 0 = 0$$

e o coeficiente de v_1 não é 0. Por outro lado, qualquer vetor não nulo \mathbf{v} é, por si só, L.I., pois se $a\mathbf{v} = 0$, então $a = 0$.

Exemplo 9. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são L.I., pois a equação

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = \mathbf{0},$$

equivalente a,

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

é satisfeita somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

2.1.4 Bases e Dimensão

Definição 8. Um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores de V será uma **base** de V se:

- (i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente;
- (ii) $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera V .

Exemplo 10. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ geram o \mathbb{R}^3 e são linearmente independentes. Assim, esses vetores formam a **base canônica** do \mathbb{R}^3 .

Observação 1. Dizemos que um espaço vetorial que não pode ser gerado por um número finito de vetores é de **dimensão infinita**, ao passo que um que pode, é de **dimensão finita**. Neste trabalho consideraremos apenas espaços vetoriais de dimensão finita.

Proposição 1. Um conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ em V é uma base de V se, e somente se, todo vetor $\mathbf{v} \in V$ puder ser escrito unicamente na forma

$$\mathbf{v} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n,$$

onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Ver em Axler (1997) na página 27.

Definição 9. A **dimensão** de um espaço vetorial V de dimensão finita é definida por ser o tamanho de qualquer base do espaço vetorial, e é denotada por **dim** V .

Quaisquer duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo tamanho.

Exemplo 11. Considere os seguintes subespaços vetoriais:

- (i) $V = \mathbb{R}^2$, $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta_2 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ são bases de V . Então, $\dim V = 2$.
- (ii) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
- (iii) Se $V = M(2, 2)$ então $\dim V = 4$.
- (iv) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Proposição 2. Se V é de dimensão finita, então todo conjunto de vetores geradores em V com tamanho $\dim V$ é uma base de V .

Demostração: Ver em Axler (1997) na página 32.

Proposição 3. *Se V é de dimensão finita, então toda lista de vetores linearmente independentes em V , com tamanho $\dim V$, é uma base de V .*

Demostração: Ver em Axler (1997) na página 32.

Exemplo 12. *Considere o conjunto de vetores $\{(5,7), (4,3)\}$. Este conjunto de dois vetores em \mathbb{R}^2 é L.I. Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, a Proposição 3 implica que $\beta = \{(5,7), (4,3)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .*

Teorema 2. (Teorema da Dimensão) *Se U_1 e U_2 são subespaços de um espaço vetorial de dimensão finita, então*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Demostração: Ver em Axler (1997) na página 33.

Definição 10. *Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\mathbf{v} \in V$ onde $\mathbf{v} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Chamamos os escalares a_1, \dots, a_n de **coordenadas** de \mathbf{v} em relação à base β e denotamos por*

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 13. *Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ em relação à base $\beta = \{(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)\}$.*

Solução: Inicialmente, escrevemos o vetor \mathbf{v} como combinação linear dos vetores da base β e após encontramos o valor de cada um dos escalares a_1, a_2, a_3 :

$$\mathbf{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \Rightarrow (5, -1, 9) = a_1(1, 2, 1) + a_2(2, 9, 0) + a_3(3, 3, 4).$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 5 \\ 2a_1 + 9a_2 + 3a_3 = -1 \\ a_1 + 4a_3 = 9 \end{cases}$$

Resolvendo por Eliminação Gaussiana, obtemos o sistema triangular:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 5 \\ 5a_2 - 3a_3 = -11 \\ -\frac{1}{5}a_3 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ e $a_3 = 2$.

Portanto, o vetor de coordenadas é $[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2.2 Transformações Lineares

No estudo de espaços vetoriais é comum que espaços distintos se relacionem entre si. Essa interação ocorre através de funções que, em se tratando de espaços vetoriais, são chamadas de transformações lineares.

Dessa forma, as funções nas quais estamos interessados na Álgebra Linear são as àquelas cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, preservam as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar.

Definição 11. *Sejam V e W espaços vetoriais. Uma **transformação linear** de V em W é uma função $T : V \rightarrow W$ que possui as seguintes propriedades:*

- (i) $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$, para quaisquer \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 em V ;
- (ii) $T(a\mathbf{v}) = aT(\mathbf{v})$, para quaisquer $\mathbf{v} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

As propriedades (i) e (ii) são equivalentes à seguinte propriedade:

$$T(\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + aT(\mathbf{v}_2), \quad (1)$$

para quaisquer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

Uma função $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear se, e somente se, para todos os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ e todos os escalares $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$T(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_r\mathbf{v}_r) = a_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_rT(\mathbf{v}_r). \quad (2)$$

Exemplo 14. *Mostre que a função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $T(x, y) = x + y$ é uma transformação linear.*

Solução: De fato, sejam $v_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$. Temos que

$$v_1 + av_2 = (x_1, y_1) + a(x_2, y_2) = (x_1 + ax_2, y_1 + ay_2).$$

Assim, pela definição, segue que

$$\begin{aligned} T(v_1 + av_2) &= T(\overbrace{(x_1 + ax_2)}^x, \overbrace{(y_1 + ay_2)}^y) \\ &= x_1 + ax_2 + y_1 + ay_2 \\ &= (x_1 + y_1) + a(x_2 + y_2) \\ &= T(v_1) + aT(v_2). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear em \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

Observação 2. Decorre da Definição 11 que uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W , isto é, $\mathbf{0} \in V$, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \in W$. Isto é útil para detectar transformações não lineares. Se $T(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, então T não é linear. Contudo, se $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ não significa que a transformação seja linear.

Teorema 3. Seja $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de um espaço vetorial V . Sejam $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ vetores de um espaço vetorial W . Então existe uma única transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Demonstração: Ver Boldrini *et al.* (1980) na página 151.

Exemplo 15. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Solução: Neste caso, temos $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ que é a base canônica do \mathbb{R}^2 . Assim, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, segue que as suas coordenadas na base α são

$$(x, y) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) \Rightarrow a_1 = x, a_2 = y.$$

Logo,

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Aplicando T em ambos os lados da igualdade

$$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1)$$

$$T(x, y) = x(2, -1, 0) + y(0, 0, 1)$$

$$T(x, y) = (2x, -x, 0) + (0, 0, y)$$

$$T(x,y) = (2x, -x,y) ,$$

obtendo uma expressão para T como desejado.

Definição 12. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ é chamado **núcleo** de T , sendo denotado por $N(T)$. Isto é $N(T) = \{\mathbf{v} \in V; T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$.*

Proposição 4. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, então $N(T)$ é um subespaço de V .*

Demonstração: Ver em Axler (1997) na página 42.

Definição 13. *Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, diremos que T é **injetora** se dados $\mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V$ com $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ tivermos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$. Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.*

Proposição 5. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{\mathbf{0}\}$.*

Demonstração: Ver em Axler (1997) na página 43.

Exemplo 16. *A transformação linear dada por $T(x,y) = (x - y, x + y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é injetora pois $N(T) = \{(0,0)\}$.*

Definição 14. *A transformação $T : V \rightarrow W$ é **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W , ou seja $T(V) = W$. Em outras palavras, T será sobrejetora se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.*

Definição 15. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. A **imagem** de T é o conjunto de vetores $\mathbf{w} \in W$ tais que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ou seja,*

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W; T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}.$$

Proposição 6. *Seja $T : V \rightarrow W$, então $Im(T)$ é um subespaço de W .*

Demonstração: Ver em Axler (1997) na página 44.

Exemplo 17. *Obtenha a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (3x - 5y, 8z - 2x)$.*

Solução: Obtendo o conjunto de geradores para $Im(T)$:

$$(3x - 5y, 8z - 2x) = (3x, -2x) + (-5y, 0) + (0, 8z) = x(3, -2) + y(-5, 0) + z(0, 8).$$

Logo, $Im(T) = [(3, -2), (-5, 0), (0, 8)]$. Agora vamos encontrar uma base para $Im(T)$, verificando se os vetores geradores são L.I.:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + \frac{5}{3}L_1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{3}{10}L_2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 8L_2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{3}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $Im(T) = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e $\dim Im(T) = 2$.

Observação 3. A transformação do Exemplo 17 é sobrejetora pois $Im(T) = \mathbb{R}^2 = W$.

Teorema 4. (Teorema do Núcleo e da Imagem) Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, onde V tem dimensão finita. Então

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V.$$

Demonstração: Ver em Axler (1997) página 45.

Corolário 1. Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

Demonstração: Ver em Axler (1997) página 46.

2.2.1 Matriz Associada à Transformação Linear

Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ uma base de W . Então, $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

A transposta da matriz de coeficientes desse sistema, denotada por $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é chamada **matriz de T** em relação às bases β e β' .

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 18. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Sejam $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Encontre $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

Solução: Inicialmente, calculamos o valor de T aplicada aos vetores da base β e após encontramos as coordenadas em relação à base β' :

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1) \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema 5. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W , respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(T) &= \text{posto de } [T]_{\beta}^{\alpha} \\ \dim N(T) &= \text{nulidade de } [T]_{\beta}^{\alpha} \\ \dim N(T) &= n^{\circ} \text{ de colunas de } [T]_{\beta}^{\alpha} - \text{posto de } [T]_{\beta}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver em Boldrini *et al.* página 162.

Exemplo 19. Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente. Determine $\dim \text{Im}(T)$ e $\dim N(T)$ da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

dada por $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: De acordo com o Teorema 5, não precisamos saber explicitamente quem é $T(x, y)$, basta termos $[T]_{\beta}^{\alpha}$ para determinarmos $\dim \text{Im}(T)$ e $\dim N(T)$. Aplicando Elimi-

nação Gaussiana em $[T]_{\beta}^{\alpha}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, posto de $[T]_{\beta}^{\alpha} = 2$ e assim, $\dim \text{Im}(T) = 2$ e $\dim \text{N}(T) = 2 - 2 = 0$.

No próximo capítulo apresentaremos um dos objetivos principais do trabalho, que é a digonalização de operadores.

3 AUTOVALORES, AUTOVETORES E DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Neste capítulo definiremos alguns dos conceitos mais importantes para o desenvolvimento do trabalho. Para isso, no que segue, \mathbb{F} denotará o conjunto dos números reais \mathbb{R} ou o conjunto dos números complexos \mathbb{C} . Além disso, V denotará um espaço vetorial não nulo de dimensão finita sobre \mathbb{F} . Os resultados apresentados podem ser encontrados em Boldrini *et al.* (1980), Axler (1997), Anton e Rorres (2012) e Lang (2020).

3.1 Autovalores e Autovetores

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, $T : V \rightarrow V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ tais que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

Definição 16. *Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$, de um espaço vetorial nele mesmo, é chamada de **operador linear**.*

Definição 17. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ em V e $\lambda \in \mathbb{F}$ tais que $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, λ é **autovalor** de T e \mathbf{v} um **autovetor** de T associado a λ .*

Observe que λ pode ser o número 0, embora \mathbf{v} não possa ser o vetor nulo. Dependendo do sinal e da magnitude do autovalor λ , a operação $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ comprime ou expande \mathbf{v} pelo fator λ , invertendo o sentido do vetor no caso em que λ for negativo.

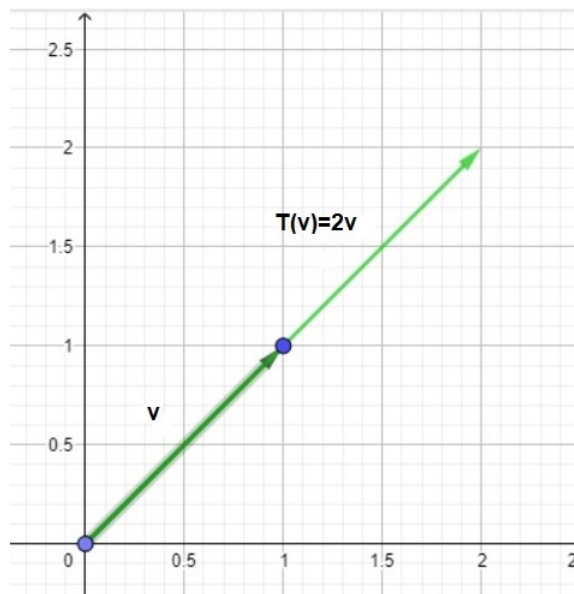
Exemplo 20. *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = 2(x, y)$. Encontre os autovalores e autovetores de T .*

Solução: Podemos expressar matricialmente o operador dado como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2. O operador linear deste exemplo é chamado de **dilatação ou expansão linear**, o qual ilustramos na Figura 1, para a qual escolhemos o autovetor $\mathbf{v} = (1, 1)$. Dessa forma, como representado na Figura 1, $T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$.

Figura 1 – Dilatação ou Expansão Linear.



Fonte: Autora

Teorema 6. *Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ e um autovetor \mathbf{v} associado a um autovalor λ , qualquer vetor $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}$ ($\alpha \neq 0$) também é autovetor de T associado a λ .*

Demonstração: Ideia da demonstração na página 183 de Boldrini *et al.* (1980).

O conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor λ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de V , isto é, $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ é subespaço de V .

Definição 18. *O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ é chamado o **subespaço associado ao autovalor λ** .*

As noções de autovetor e autovalor de uma transformação linear (ou matriz) são fundamentais, por exemplo, em Física Atômica, pois os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes. Também o estudo de fenômenos de vibração, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de Física levam à procura de autovalores e autovetores de matrizes. Além disso, esses conceitos são também utilizados na resolução de sistemas de equações diferenciais, determinação de estabilidade de soluções estacionárias de sistemas de equações não lineares, e muitas situações físicas e biológicas são descritas por um sistema de equações diferenciais.

Outra aplicação importante é na classificação de cônicas e quádricas. Nela, autovalores e autovetores são usados para normalizar formas quádricas. Mais especificamente,

eles são usados para encontrar mudanças de referencial que permitam identificar quais as figuras geométricas que representam certas equações no plano e no espaço.

3.1.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada $A_{n \times n}$, estaremos entendendo por **autovalor** e **autovetor** de A o autovalor e autovetor associados à transformação linear $T_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$, associada à matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$ de A , e um autovetor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, são soluções da equação $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Veremos na próxima subseção que dada uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ e fixada uma base β podemos reduzir o problema de encontrar autovalores e autovetores para T à determinação de autovalores e autovetores para a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$.

3.1.1.1 O Polinômio Característico

Seja A uma matriz de ordem n . Os autovalores e autovetores correspondentes de A são aqueles que satisfazem a equação $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ou ainda $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Escrevendo esta equação na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamando de B a primeira matriz acima, podemos reescrever a equação matricial acima por $B \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $\det B \neq 0$, sabemos que o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução, que é a solução nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores \mathbf{v} (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det B = 0$, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satis-

fazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n .

Assim, os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $P(\lambda)$ é chamado **polinômio característico** da matriz A .

A seguir apresentamos mais exemplos para a fixação do processo de obtenção de autovalores e autovetores através do polinômio característico.

Exemplo 21. Calcule os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Inicialmente, calculamos os autovalores:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda).$$

Logo, $P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, o que resulta em $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Então, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Agora procuramos os autovetores associados a estes autovalores.

(i) $\lambda_1 = 1$: Resolvendo a equação $(A - 1I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Então, temos $x = y$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são os vetores da forma $\mathbf{v} = (x, x)$, $x \neq 0$.

(ii) $\lambda_2 = -2$: Resolvendo a equação $(A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Então, temos $x = 4y$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são os vetores da forma $\mathbf{v} = (4y, y)$, $y \neq 0$.

Exemplo 22. Calcule os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Solução:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix} = (\sqrt{3} - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4.$$

Como $P(\lambda) = 0$ não admite raiz real, a matriz A não admite autovalores e nem autovetores reais.

Se estivermos trabalhando com um espaço vetorial complexo, isto é, quando os escalares são números complexos, o polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4$ tem as raízes $\lambda = \sqrt{3} + i$ e $\lambda = \sqrt{3} - i$. Os autovetores associados são do tipo $\mathbf{v} = (x, -ix)$, $x \neq 0$ e $\mathbf{v} = (x, ix)$, $x \neq 0$, respectivamente.

Observação 4. Através do Exemplo 22 ilustramos o fato de que toda transformação linear sobre espaços vetoriais complexos sempre admite autovalores, uma vez que seu polinômio característico sempre admite raiz.

3.1.2 Polinômio Característico de uma Transformação Linear

Considere a transformação linear $T : V \rightarrow V$. Seja β uma base de V , então temos as seguintes equivalências

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow [T]_{\beta}^{\beta}[\mathbf{v}]_{\beta} = \lambda[\mathbf{v}]_{\beta} \Leftrightarrow \left[[T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right] [\mathbf{v}]_{\beta} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det \left([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) = 0.$$

A última condição é dada por $P(\lambda) = 0$, onde $P(\lambda)$ é o polinômio característico

da matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ (matriz da transformação linear em relação a base β).

Definição 19. O polinômio $P(\lambda)$ será chamado **polinômio característico da transformação T** e suas raízes serão os autovalores de T .

O fator fundamental na definição anterior é a independência da base β escolhida. De fato,

$$\begin{aligned} \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det(A[T]_{\beta}^{\beta}A^{-1} - \lambda AIA^{-1}) = \det\left[A\left([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I\right) \cdot A^{-1}\right] \\ &= \det(A) \cdot \det\left([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I\right) \cdot \det(A^{-1}) = \det\left([T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I\right) = P(\lambda). \end{aligned}$$

Exemplo 23. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$. Obtenha os autovalores e autovetores dessa transformação.

Solução: Seja α a base canônica de \mathbb{R}^2 . Logo, a matriz de T em relação à base α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o polinômio característico de T é dado por $P(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I)$. Os autovalores e autovetores são calculados da forma usual.

Definição 20. A **multiplicidade algébrica** de um autovalor é a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.

Definição 21. A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do subespaço V_{λ} de autovetores associados a λ .

3.2 Diagonalização de Operadores em Espaços Vetoriais Reais e Complexos

Nosso objetivo será encontrar uma base do espaço vetorial V na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível. Como veremos, a melhor situação é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada a um operador.

Teorema 7. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Demonstração: Ver em Boldrini *et al.* (1980) na página 200.

Corolário 2. *Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T .*

O Corolário anterior quer dizer que se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Dada uma transformação linear qualquer $T : V \rightarrow V$, se conseguirmos obter uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ formada por autovetores de T , então, como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_n \\ T(\mathbf{v}_2) &= 0\mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ T(\mathbf{v}_n) &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n, \end{aligned}$$

a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i , isto é,

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Não precisamos ter necessariamente os λ_i distintos, basta que tenhamos a quantidade de autovetores associados de acordo com a multiplicidade algébrica de cada autovalor. Um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores L.I. a ele associados.

Por outro lado, se $\gamma = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base de V tal que

$$[T]_{\gamma}^{\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

note que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ são necessariamente autovetores de T com autovalores a_1, \dots, a_n , res-

pectivamente. De fato, da definição de $[T]_{\gamma}^{\gamma}$ temos:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= a_1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \dots + 0\mathbf{u}_n = a_1\mathbf{u}_1 \\ T(\mathbf{u}_2) &= 0\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + 0\mathbf{u}_n = a_2\mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n = a_n\mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

Assim, demonstramos o seguinte resultado:

Teorema 8. *Um operador $T : V \rightarrow V$ admite uma base β em relação à qual sua matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal, se e somente se, essa base β for formada por autovetores de T .*

O Teorema 8 nos remete a seguinte definição:

Definição 22. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador diagonalizável** se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T .*

Exemplo 24. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por*

$T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$, cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha, se possível, uma base β de autovetores e $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Solução: Como $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ são os autovalores de T e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pelo Corolário 2, podemos garantir que existe uma base de autovetores.

De fato, dois autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (4, 1)$, respectivamente. Como eles são L.I., formam uma base de \mathbb{R}^2 . Ou seja, admite uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ formada por autovetores de T .

Calculemos agora $[T]_{\beta}^{\beta}$:

$$T(1, 1) = (1, 1) = a_{11}(1, 1) + a_{21}(4, 1) = 1(1, 1) + 0(4, 1)$$

$$T(4, 1) = (-8, -2) = a_{12}(1, 1) + a_{22}(4, 1) = 0(1, 1) - 2(4, 1).$$

Dessa forma, segue que

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz de T em relação à base de autovetores é uma matriz diagonal.

Exemplo 25. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtenha, se possível, uma base β de autovetores e $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Solução: Como

$$P(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda),$$

segue que os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

Associado a $\lambda_1 = 3$ conseguimos apenas um autovetor L.I., por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$. Associado a $\lambda_2 = -1$ temos o autovetor L.I. $\mathbf{u} = (-1, -20, 16)$. Neste caso, temos apenas dois autovetores L.I. para T , e portanto não existe uma base de \mathbb{R}^3 constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, T não é diagonalizável.

Exemplo 26. Seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique se T é diagonalizável.

Solução: Temos que $\det([T] - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 2 + 3i$ e $\lambda_2 = 2 - 3i$.

Os autovetores associados a λ_1 e λ_2 são respectivamente, $\mathbf{v}_1 = (1, i)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$. Assim, existe uma base de \mathbb{C}^2 formada por autovetores de T e, conseqüentemente, T é diagonalizável. Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a base de autovetores.

Dessa forma, a matriz de T em relação à base β é

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 + 3i & 0 \\ 0 & 2 - 3i \end{bmatrix}.$$

Exemplo 27. Consideremos o operador $T : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ cuja matriz em relação à base

canônica é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique se T é diagonalizável.

Solução: O polinômio característico de T é

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2.$$

Dessa forma, os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 + i$ e $\lambda_{4,5} = 1 - i$. Observe que T possui dois autovalores com multiplicidade algébrica 2.

Os autovetores associados aos autovalores são da forma:

- (i) Para $\lambda_1 = 1$, o autovalor associado é $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0, 1)$.
- (ii) Para $\lambda_{2,3} = 1 + i$, o autovalor associado é $\mathbf{v} = (0, y, (1 + i)y, w, iw)$, o qual pode ser decomposto em: $\mathbf{v} = y(0, 1, 1 + i, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1, i)$. Assim, temos dois autovetores L.I. associados ao autovalor de multiplicidade algébrica 2, respectivamente: $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1 + i, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1, i)$.
- (iii) Para $\lambda_{4,5} = 1 - i$, o autovalor associado é $\mathbf{v} = (0, y, (1 - i)y, w, -iw)$, o qual pode ser decomposto em: $\mathbf{v} = y(0, 1, 1 - i, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1, -i)$. Assim, temos dois autovetores L.I. associados ao autovalor de multiplicidade algébrica 2, respectivamente: $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 1 - i, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_5 = (0, 0, 0, 1, -i)$.

Dessa forma, temos uma base de \mathbb{C}^5 formada por autovetores de T . Então, T é diagonalizável. Seja $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ a base de autovetores.

Portanto, a matriz de T em relação à base β é

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - i \end{bmatrix}.$$

4 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Neste capítulo iremos estudar espaços vetoriais com produto interno. Para isso, no que segue, \mathbb{F} denotará o conjunto dos números reais \mathbb{R} ou o conjunto dos números complexos \mathbb{C} . Além disso, V denotará um espaço vetorial não nulo de dimensão finita sobre \mathbb{F} . Inicialmente, faremos algumas considerações acerca dos números complexos, para em seguida, definirmos produto interno. Os resultados apresentados podem ser encontrados em Axler (1997), Anton e Rorres (2012), Lang (2020) e Holt (2016).

Considere um número complexo $\lambda = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, então o valor absoluto de λ é definido por

$$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

e o complexo conjugado de λ é definido por

$$\bar{\lambda} = a - bi.$$

Assim, temos que

$$|\lambda|^2 = \lambda \cdot \bar{\lambda}.$$

Definição 23. *Um produto interno num espaço vetorial V de \mathbb{F} é uma função que associa um número $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{F}$ a cada par de vetores em V de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} de V e qualquer escalar $a \in \mathbb{F}$.*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se, e só se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Lembre-se que todo número real é igual ao seu complexo conjugado. Dessa forma, se considerarmos um espaço vetorial real, o primeiro axioma acima será da forma $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Definição 24. *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial V com um produto interno em V .*

Como os axiomas de produto interno real têm por base as propriedades do produto escalar, esses axiomas de espaço com produto interno estão automaticamente satisfeitos se definirmos o produto interno de dois vetores $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ em \mathbb{R}^n

por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Esse produto interno costuma ser denominado **produto interno euclidiano** (ou **produto interno canônico**) em \mathbb{R}^n , para distingui-lo de outros produtos internos que possam ser definidos em \mathbb{R}^n . Dizemos que o espaço \mathbb{R}^n com o produto interno euclidiano é o **espaço euclidiano de dimensão n**.

Um **produto interno euclidiano** em \mathbb{F}^n é definido por

$$\langle (w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = w_1 \bar{z}_1 + \dots + w_n \bar{z}_n,$$

para todo $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{F}^n$.

Vejam os em seguida outro exemplo de espaço vetorial em \mathbb{F} com produto interno.

Exemplo 28. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ de todos os polinômios com coeficientes em \mathbb{F} e grau no máximo m . Definimos o produto interno em $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ como

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \overline{q(x)} dx, \quad (3)$$

para $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

Exemplo 29. Suponha que $p(x) = x^2 - 3x + 2$ e $q(x) = 2x^2 + 4x - 1$ pertencem a \mathcal{P}_2 e que $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Calcule $\langle p, q \rangle$ usando o produto interno.

Solução: Temos que

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(4)q(4) = (6)(-3) + (0)(5) + (6)(47) = 264.$$

Exemplo 30. Sejam f e g funções contínuas em $C[-1, 1]$. Então $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ define um produto interno em $C[-1, 1]$.

Exemplo 31. Sejam $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = 5x^2 - 3$. Calcule $\langle f, g \rangle$ usando o produto interno definido no Exemplo 30.

Solução: O produto interno de $f(x)$ e $g(x)$ é

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 + 4x) \cdot (5x^2 - 3) dx = \int_{-1}^1 (5x^4 + 20x^3 - 3x^2 - 12x) dx = 0.$$

Os produtos internos podem ser usados para definir noções de comprimento e distância. Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores no espaço euclidiano real de dimensão n , a **norma** e a

distância podem ser expressas em termos do produto escalar por:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

e

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})}$$

.

Para $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, a norma de \mathbf{z} é definida por

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$

Pensando nisso, seguem as definições generalizadas para espaços vetoriais $V \in \mathbb{F}$:

Definição 25. *Seja $V \in \mathbb{F}$. Então a **norma** (ou **comprimento**) de um vetor \mathbf{v} em V é definido por*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

e a **distância** entre dois vetores é denotada por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}$$

Exemplo 32. *Seja $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$, então a norma de p é dada por*

$$\|p\| = \sqrt{\int_0^1 |p(x)|^2 dx}.$$

Teorema 9. *Se \mathbf{u} e \mathbf{v} forem vetores num espaço com produto interno real V e k um escalar, então*

- (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, com igualdade valendo se, e só se, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- (ii) $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$.
- (iii) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.
- (iv) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$, com igualdade valendo se, e só se, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
- (v) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).
- (vi) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (desigualdade triangular).

Demonstração: (v) e (vi) ver em Axler (1997) páginas 104 e 105.

Definição 26. Dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dizem ser *ortogonais* se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Note que a ordem dos vetores não importa pois $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se, e somente se, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Teorema 10. Se \mathbf{u}, \mathbf{v} são vetores *ortogonais* em V , então

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Demonstração: Suponha que \mathbf{u}, \mathbf{v} são ortogonais em V . Temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

como desejado. □

Proposição 7. Igualdade do paralelogramo: Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, então

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

Demonstração: Temos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2), \end{aligned}$$

como desejado. □

Definição 27. Uma lista de vetores é chamada de *ortonormal* se os vetores nele são pares ortogonais e cada vetor possui norma 1. Em outras palavras, uma lista (e_1, \dots, e_m) de vetores em V é *ortonormal* se $\langle e_j, e_k \rangle = 0$, quando $j \neq k$ e $\langle e_j, e_k \rangle = 1$, quando $j = k$ para $(j, k = 1, \dots, m)$.

Proposição 8. Se (e_1, \dots, e_m) é uma lista ortonormal de vetores em V , temos

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2 \quad \forall a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}.$$

Demonstração: Como cada e_j tem norma 1, isso se dá facilmente após repetidas aplicações do Teorema 10. □

Teorema 11. *Suponha que (e_1, \dots, e_n) é base ortonormal de V . Temos*

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n$$

e

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle|^2$$

para todo $\mathbf{v} \in V$.

Demonstração: Ver em Axler (1997) página 107.

Agora, vamos explorar a utilidade de bases ortonormais, e como encontrá-las. O próximo resultado apresenta um método para transformar uma lista de vetores linearmente independentes numa lista de vetores ortonormais com a mesma dimensão da lista original. O algoritmo usado na demonstração é chamado de **processo de Gram-Schmidt**.

Proposição 9. Gram-Schmidt: *Se (v_1, \dots, v_m) é uma lista de vetores linearmente independentes em V , então existe uma lista ortonormal de vetores (e_1, \dots, e_m) em V tal que*

$$[v_1, \dots, v_j] = [e_1, \dots, e_j] \text{ para } j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Demonstração: Suponha que (v_1, \dots, v_m) é uma lista de vetores linearmente independentes em V . Para construir os e 's, iniciamos fazendo $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Isso satisfaz (4) para $j = 1$. Nós escolhemos e_2, \dots, e_m indutivamente, como segue. Suponha que $j > 1$ e uma lista ortonormal (e_1, \dots, e_{j-1}) tenha sido escolhida de modo que

$$[v_1, \dots, v_{j-1}] = [e_1, \dots, e_{j-1}]. \quad (5)$$

Considere,

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}\|}. \quad (6)$$

Note que, $v_j \notin [v_1, \dots, v_{j-1}]$, por ser linearmente independente e assim, $v_j \notin [e_1, \dots, e_{j-1}]$. Na expressão anterior não dividimos por 0, assim e_j está bem definido. Dividindo um vetor por sua norma produzimos um novo vetor com norma 1; assim $\|e_j\| = 1$.

Seja $1 \leq k \leq j$. Então

$$\begin{aligned} \langle e_j, e_k \rangle &= \left\langle \frac{v_j - \langle e_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}\|}, e_k \right\rangle \\ &= \frac{\langle v_j, e_k \rangle - \langle v_j, e_k \rangle}{\|v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}\|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim (e_1, \dots, e_j) é uma lista de vetores ortonormais. De (6), podemos ver que $v_j \in [e_1, \dots, e_j]$. Combinando esta informação com (5), concluímos que $[v_1, \dots, v_j] \subset [e_1, \dots, e_j]$.

As duas listas acima são linearmente independentes (os v 's por hipótese e os e 's pela ortonormalidade). Assim, ambos os subespaços acima possuem dimensão j , e dessa forma devem ser iguais, completando a demonstração. \square

Os próximos corolários respondem a questão da existência de bases ortonormais.

Corolário 3. *Todo espaço com produto interno de dimensão finita tem uma base ortonormal.*

Demonstração: Ver em Axler, p. 109.

Em alguns casos, além de precisarmos saber se uma base ortonormal existe, também precisamos saber quando uma lista ortonormal de vetores pode ser estendida a uma base ortonormal. Através do próximo corolário, o processo de Gram-Schmidt mostra que uma extensão é sempre possível.

Corolário 4. *Toda lista ortonormal de vetores em V pode ser estendida a uma base ortonormal de V .*

Demonstração: Ver em Axler, p. 109.

O próximo corolário mostra que a existência de qualquer base em relação a qual T tem uma matriz triangular superior implica a existência de uma base ortonormal com esta propriedade. Este resultado é verdadeiro em ambos espaços vetoriais reais e complexos (embora em um espaço vetorial real, a hipótese vale apenas para alguns operadores).

Podemos denotar o conjunto de todos os operadores lineares de um espaço vetorial V nele mesmo por $\mathcal{L}(V)$.

Corolário 5. *Suponha $T \in \mathcal{L}(V)$. Se T tem uma matriz triangular superior em relação a alguma base de V , então T tem uma matriz triangular superior com relação a alguma base ortonormal de V .*

Demonstração: Ver em Axler, p. 110.

O próximo corolário é uma importante aplicação do corolário anterior. Este resultado é também chamado de Teorema de Schur.

Corolário 6. *Suponha que V é um espaço vetorial complexo com $T \in \mathcal{L}(V)$. Então T tem uma matriz triangular superior com relação à alguma base ortonormal em V .*

Demonstração: Ver em Axler, p. 111.

Exemplo 33. *Considere a base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 onde $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, -1)$ e $u_3 = (-1, 2, 3)$. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar β em uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 .*

Solução: Como estamos trabalhando com um espaço vetorial real, o produto interno euclidiano equivale ao produto escalar. Dessa forma, utilizando o processo de Gram-Schmidt queremos obter uma base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ de vetores ortonormais. Iniciemos fazendo $w_1 = u_1$ e $e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$. Assim, temos:

$$w_1 = (1, 1, 1), \quad e_1 = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Para obtermos o segundo vetor ortonormal, devemos fazer:

$$w_2 = u_2 - \left[\frac{u_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \right] \cdot w_1, \quad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}.$$

Assim segue que,

$$w_2 = (-1, 0, -1) - \left[\frac{(-1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} \right] \cdot (1, 1, 1) = (-1, 0, -1) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = (-1, 2, -1).$$

Logo, o segundo vetor ortonormal é dado por

$$e_2 = \frac{(-1, 2, -1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right).$$

Para obtermos o terceiro vetor ortonormal, fazemos

$$w_3 = u_3 - \left[\frac{u_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \right] \cdot w_2 - \left[\frac{u_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \right] \cdot w_1, \quad e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}.$$

Substituindo os vetores na expressão anterior e calculando os produtos escalares,

segue que $w_3 = (-2, 0, 2)$, donde concluimos que

$$e_3 = \frac{(-2, 0, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Portanto,

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal de vetores de \mathbb{R}^3 .

A seguinte definição é importante para resultados que trataremos no próximo capítulo.

Definição 28. *Se U é um subconjunto de V , então o **complemento ortogonal** de U , denotado por U^\perp , é o conjunto de todos os vetores em V que são ortogonais a qualquer vetor em U :*

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

5 OPERADORES EM ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Neste capítulo definiremos alguns operadores lineares, conhecidos como operadores especiais. Para isto, apresentaremos exemplos e resultados importantes, como os Teoremas Espectrais. Antes disso, precisamos de dois conceitos importantes que são o de funcional linear e a adjunta de uma transformação linear. Os resultados apresentados podem ser encontrados em Axler (1997), Anton e Rorres (2012), Lang (2020) e Holt (2016).

Definição 29. Um *funcional linear* em V é um operador linear de V para escalares em \mathbb{F} .

Exemplo 34. O operador $\varphi : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}$ definida por

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$$

é um funcional linear em \mathbb{F}^3 .

Exemplo 35. O operador $\varphi : \mathcal{P}_6(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(p) = \int_0^1 p(x)(\cos x) dx$$

é um funcional linear em $\mathcal{P}_6(\mathbb{R})$.

Observação 5. Se $v \in V$, então a função que leva u para $\langle u, v \rangle$ é um funcional linear em V .

Definição 30. Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$. A *adjunta* de T , denotada por T^* , é um operador que parte de W para V definido como segue. Fixe $w \in W$. Considere um funcional linear em V que mapeia $v \in V$ para $\langle Tv, w \rangle$. Seja T^*w o único vetor em V de modo que este funcional linear é dado tomando produtos internos com T^*w . Em outras palavras, T^*w é o único vetor em V tal que

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle \quad (7)$$

para todo $v \in V$.

Exemplo 36. Dada a transformação linear, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1)$$

Encontre a sua adjunta.

Solução: Temos que T^* será uma função em $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para calcularmos T^* , fixemos um ponto $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3), T^*(y_1, y_2) \rangle &= \langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2) \rangle \\ &= \langle (x_2 + 3x_3, 2x_1), (y_1, y_2) \rangle \\ &= x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_1y_2 \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3), (2y_2, y_1, 3y_1) \rangle \end{aligned}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Isso mostra que

$$T^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1).$$

A seguinte definição é importante para os casos em que consideramos espaços vetoriais complexos.

Definição 31. A *transposta conjugada* de uma matriz $m \times n$ é dada por uma matriz $n \times m$ obtida pela troca das linhas e colunas, e em seguida tomar o complexo conjugado de cada entrada.

Exemplo 37. A transposta conjugada da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+4i & 7 \\ 6 & 5 & 8i \end{bmatrix}$$

é representada por

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3-4i & 5 \\ 7 & -8i \end{bmatrix}.$$

5.1 Alguns Operadores Especiais

Nesta seção, apresentaremos alguns operadores especiais, conhecidos como auto-adjuntos, normais e isometrias.

Definição 32. Um operador é chamado *autoadjunto* se $T = T^*$.

A definição de operador autoadjunto quer dizer que este tipo de operador é igual ao seu adjunto, ou seja, dados $u, v \in V$, então

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle. \quad (8)$$

Exemplo 38. Se T é um operador em \mathbb{R}^2 , cuja matriz com relação a base canônica é

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Então T é autoadjunto se, e somente se, $b = 3$. Isto quer dizer que T é autoadjunto se sua matriz $[T]$ é igual a sua transposta conjugada $[T]^T$. Dessa forma, $[T]$ é uma matriz simétrica em \mathbb{R} ou hermitiana em \mathbb{C} .

Exemplo 39. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$. Mostre que T é um operador autoadjunto.

Solução: Seja $[T]_\alpha$ a matriz de T em relação à base canônica do \mathbb{R}^2 , dada por

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como $[T]_\alpha = ([T]_\alpha)^T$, então T é autoadjunto. Observe que $[T]_\alpha$ é uma matriz simétrica.

Proposição 10. Todo autovalor de um operador **autoadjunto** é real.

Demonstração: Suponha que T é operador autoadjunto em V . Seja λ autovalor de T , e seja v um vetor não nulo em V , tal que $Tv = \lambda v$. Então

$$\begin{aligned} \lambda \|v\|^2 &= \langle \lambda v, v \rangle \\ &= \langle Tv, v \rangle \\ &= \langle v, Tv \rangle \\ &= \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Assim, $\lambda = \bar{\lambda}$, o que significa que λ é real, como queríamos provar. \square

Definição 33. Se A é a matriz que representa o operador T , então A^* representa o operador adjunto. Um operador será autoadjunto se $A = A^* = A^T$.

Definição 34. Um operador num espaço com produto interno é chamado **normal** se ele comuta com seu adjunto. Em outras palavras, $T \in \mathcal{L}(V)$ é normal se

$$TT^* = T^*T.$$

Todo operador autoadjunto é normal. Agora, nem todo operador normal é autoadjunto. Por exemplo, considere o operador normal em \mathbb{F}^2 cuja matriz em relação à base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Claramente este operador não é autoadjunto, pois $A \neq A^T$.

Exemplo 40. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x, -y + 2z, -2y - z)$. Mostre que T é um operador normal.

Solução: Seja $[T]$ a matriz de T em relação à base canônica do \mathbb{R}^3 . Assim, temos que

$$[T] \cdot [T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = [T]^T \cdot [T].$$

Portanto, T é normal.

Proposição 11. Um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é normal se, e somente se,

$$\|Tv\| = \|T^*v\|$$

para todo $v \in V$.

Demonstração: Ver em Axler (1996), página 131.

O próximo corolário diz que um operador normal e seu adjunto possuem os mesmos autovetores.

Corolário 7. Suponha que $T \in \mathcal{L}(V)$ é um operador normal. Se $v \in V$ é um autovetor de T com autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$, então v é também um autovetor de T^* com autovalor $\bar{\lambda}$.

Demonstração: Suponha que $v \in V$ é um autovetor de T com autovalor λ . Assim, $(T - \lambda I)v = 0$. Como T é normal, então $T - \lambda I$ também o é. Usando a Proposição 11, temos

$$0 = \|(T - \lambda I)v\| = \|(T - \lambda I)^*v\| = \|(T^* - \bar{\lambda}I)v\|$$

e, então v é autovetor de T^* com autovalor $\overline{\lambda}$, como desejado. \square

Como todo operador autoadjunto é normal, então o próximo resultado se aplica, em particular, a operadores autoadjuntos.

Corolário 8. *Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é normal, então os autovetores de T correspondentes à autovalores distintos, são ortogonais.*

Demonstração: Suponha que $T \in \mathcal{L}(V)$ é um operador normal e α, β são autovalores distintos de T , com autovetores correspondentes u, v , respectivamente. Assim, $Tu = \alpha u$ e $Tv = \beta v$. Do Corolário 7, segue que $T^*v = \overline{\beta}v$. Assim,

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)\langle u, v \rangle &= \langle \alpha u, v \rangle - \langle u, \overline{\beta}v \rangle \\ &= \langle Tu, v \rangle - \langle u, T^*v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha \neq \beta$, a equação acima implica que $\langle u, v \rangle = 0$. Assim, u e v são ortogonais. \square

Definição 35. *Se $T^{-1} = T^*$ (inversa = adjunta), o operador T é chamado de **isometria**. Neste caso, vale que:*

$$\langle T(u), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle, \quad (9)$$

para todo $u, w \in V$.

Se T é isometria, e A é sua matriz em relação a uma base, sua matriz inversa A^{-1} será igual a transposta A^T .

Em seguida, veremos algumas particularidades que os operadores especiais têm em \mathbb{R} e \mathbb{C} , ou seja, dependendo do espaço vetorial que estão definidos, eles recebem diferentes nomenclaturas. Isso está resumido na Tabela 1.

Tabela 1 – Tipos especiais de operadores em espaços vetoriais reais e complexos

Tipo de Operador	\mathbb{R}	\mathbb{C}
Normal	Normal	Normal
Autoadjunto	Simétrico	Hermitiano
Isometria	Ortogonal	Unitário

Definição 36. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita e munido de um produto interno. Um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ é dito **ortogonal** quando preserva a norma de cada vetor; isto é,*

$$\|T(v)\| = \|v\|,$$

para todo $v \in V$.

Exemplo 41. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Esse operador é ortogonal, pois $[T]^{-1} = [T]^T$.

Exemplo 42. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual e $\theta \in \mathbb{R}$. Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ é ortogonal.

Solução: Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor qualquer. Mostremos que $\|T(x, y)\| = \|(x, y)\|$. De fato,

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\| &= \sqrt{(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

Portanto, T é um operador ortogonal.

Na próxima seção apresentaremos um resultado que é considerado um dos mais importantes da teoria de operadores lineares, que é o chamado Teorema Espectral.

5.2 O Teorema Espectral e a Diagonalização de Operadores Especiais

Antes de tratarmos sobre o Teorema Espectral, vamos relembrar alguns conceitos importantes:

- (1) Uma matriz diagonal é uma matriz formada por zeros em todas as entradas, exceto possivelmente ao longo da diagonal;
- (2) Um operador em V tem uma matriz diagonal com relação a alguma base se e somente se existe uma base de V consistindo de autovetores do operador (Teorema 8).

Os operadores mais interessantes são aqueles para os quais existe uma base **ortonormal** de V com relação a qual o operador tem uma matriz diagonal. Estes são precisamente os operadores $T \in \mathcal{L}(V)$ tais que existe uma base ortonormal de V consistindo de

autovetores de T .

Nosso objetivo nessa seção é provar o Teorema Espectral, que caracteriza estes operadores como operadores normais quando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e como operadores autoadjuntos quando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. O Teorema Espectral é provavelmente a ferramenta mais útil para o estudo de operadores em espaços com produto interno.

Como a conclusão do Teorema Espectral depende de \mathbb{F} , ele será dividido em duas versões, chamadas de Teorema Espectral Complexo e Teorema Espectral Real. Apresentaremos primeiramente o caso complexo.

Teorema 12. (Teorema Espectral Complexo) *Suponha que V é um espaço vetorial com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então V tem uma base ortonormal consistindo de autovetores de T se e somente se T é normal.*

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que V possui uma base ortonormal formada por autovetores de T . Com relação a esta base, T possui uma matriz diagonal. A matriz de T^* (com relação a esta mesma base) é obtida tomando a transposta conjugada da matriz T ; então T^* também tem uma matriz diagonal. Quaisquer duas matrizes diagonais comutam entre si; assim, T comuta com T^* , o que significa que T deve ser normal, como desejado.

Agora, vamos supor que T é normal. Assim, existe uma base ortonormal $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ de V , com relação a qual T tem uma matriz triangular superior (Corolário 6). Então, podemos escrever

$$[T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Mostraremos que esta matriz é na verdade, uma matriz diagonal, o que significa que (e_1, \dots, e_n) é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .

De (10) temos que

$$\|Te_1\|^2 = |a_{11}|^2$$

e assim

$$\|T^*e_1\|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2.$$

Como T é normal, $\|Te_1\| = \|T^*e_1\|$ (veja a Proposição 11). Então as duas equações acima implicam que todas as entradas na primeira linha da matriz (10), exceto possivelmente a primeira entrada a_{11} , são iguais a 0.

De (10), também podemos concluir que

$$\|Te_2\|^2 = |a_{22}|^2$$

e como $a_{1,2} = 0$, como mostrado anteriormente, temos

$$\|T^*e_2\|^2 = |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2.$$

Como T é normal, $\|Te_2\| = \|T^*e_2\|$. Então as duas equações acima implicam que todas as entradas na segunda linha da matriz (10), exceto possivelmente a entrada a_{22} , são iguais a 0.

Continuando este procedimento de forma recorrente, vemos que todas as entradas fora da diagonal principal na matriz (10) são 0. Portanto, a matriz é diagonal. \square

Observação 6. *Como todo operador autoadjunto é normal, o Teorema Espectral Complexo implica que todo operador autoadjunto em um espaço vetorial complexo, de dimensão finita com produto interno, tem uma matriz diagonal com relação a alguma base ortonormal.*

A seguir apresentamos um exemplo de como utilizar o Teorema Espectral Complexo para garantir que o operador normal dado é diagonalizável.

Exemplo 43. *Considere um operador normal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ cuja matriz (com respeito à base canônica) é*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que o operador é diagonalizável.

Solução: Como o operador dado é normal, o Teorema Espectral Complexo nos garante a existência de uma base ortonormal de autovetores. Dessa forma, encontremos essa base para diagonalizarmos o operador. Inicialmente, calculamos os autovalores:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = P(\lambda).$$

Logo, $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, o que resulta em $\lambda = 2 + 3i$ ou $\lambda = 2 - 3i$. Então, os autovalores de A são $\lambda_1 = 2 + 3i$ e $\lambda_2 = 2 - 3i$. Agora procuramos os autovetores associados a estes autovalores.

(i) $\lambda_1 = 2 + 3i$: Resolvendo a equação $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} -3xi - 3y = 0 \\ 3x - 3yi = 0 \end{cases}.$$

ou ainda,

$$\begin{cases} -xi - y = 0 \\ x - yi = 0 \end{cases}.$$

Então, temos $x = iy$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 2 + 3i$ são os vetores da forma $\mathbf{v} = (iy, y)$, $y \neq 0$. Escolhendo $y = 1$, temos $\mathbf{v}_1 = (i, 1)$.

(ii) $\lambda_2 = 2 - 3i$: Resolvendo a equação $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} 3xi - 3y = 0 \\ 3x + 3yi = 0 \end{cases}.$$

ou ainda,

$$\begin{cases} xi - y = 0 \\ x + yi = 0 \end{cases}.$$

Então, temos $y = xi$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2 = 2 - 3i$ são os vetores da forma $\mathbf{v}_2 = (-iy, y)$, $y \neq 0$. Escolhendo $y = 1$, temos $\mathbf{v}_2 = (-i, 1)$.

Como os autovetores $\mathbf{v}_1 = (i, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-i, 1)$ são ortogonais, devemos normalizá-los para obtermos uma base ortonormal de autovetores. Para isto, basta dividirmos cada um dos vetores por sua respectiva norma. Neste caso, $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}$. Assim,

$$\beta = \left\{ \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

é uma base ortonormal de \mathbb{C}^2 consistindo de autovetores de T . Dessa forma, a matriz de T em relação à base β é uma matriz diagonal. Assim, concluímos que T é diagonalizável

e

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{bmatrix}.$$

Necessitaremos de dois lemas para a demonstração do Teorema Espectral Real, que será apresentado em seguida.

Lema 1. *Suponha que $T \in \mathcal{L}(V)$ é autoadjunto. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha^2 < 4\beta$, então*

$$T^2 + \alpha T + \beta I$$

é inversível.

Demonstração: Ver em Axler (1997), página 134.

Lema 2. *Suponha que $T \in \mathcal{L}(V)$ é autoadjunto. Então T possui um autovalor.*

Demonstração: Ver em Axler (1997), página 135.

Teorema 13. (Teorema Espectral Real) *Suponha que V é um espaço vetorial real com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então V tem uma base ortonormal consistindo de autovetores de T se, e somente se T é autoadjunto.*

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que V tem uma base ortonormal consistindo de autovetores de T . Com relação a esta base, T tem uma matriz diagonal. Essa matriz é igual a sua transposta conjugada. Assim, $T = T^*$ e T é autoadjunto, como desejado.

Reciprocamente, suponhamos que T é autoadjunto. Queremos mostrar, por indução na dimensão de V , que V tem uma base ortonormal consistindo de autovetores de T . Para iniciar, note que o resultado desejado claramente acontece se $\dim V = 1$. Agora, assumamos que $\dim V > 1$ e que o resultado desejado ocorre em espaços vetoriais menor dimensão.

A ideia da demonstração é tomar qualquer autovetor u de T com norma 1, então adicionar a ele uma base ortonormal de autovetores de $T|_{\{u^{\perp}\}}$ (autovetores de T pertencentes a u^{\perp}). O mais importante é verificar que $T|_{\{u^{\perp}\}}$ é autoadjunto.

Seja λ qualquer autovalor de T (como T é autoadjunto, sabemos do Lema 2 que ele tem um autovalor) e seja $u \in V$ o autovetor correspondente com $\|u\| = 1$. Seja U o subespaço unidimensional de V consistindo de todos os múltiplos escalares de u . Note que um vetor $v \in V$ está em U^{\perp} se e somente se $\langle u, v \rangle = 0$.

Suponha que $v \in U^\perp$. Então, como T é autoadjunto, temos

$$\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0,$$

e então, $Tv \in U^\perp$. Assim, $Tv \in U^\perp$ sempre que $v \in U^\perp$. Em outras palavras, U^\perp é invariante sobre T . Assim podemos definir um operador $S \in \mathcal{L}(U^\perp)$ por $S = T|_{U^\perp}$. Se $v, w \in U^\perp$, então

$$\langle Sv, w \rangle = \langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = \langle v, Sw \rangle,$$

o que mostra que S é autoadjunto. Assim, pela nossa hipótese de indução, existe uma base ortonormal de U^\perp consistindo de autovetores de S . Claramente, todo autovetor de S é um autovetor de T (pois $Sv = Tv$ para todo $v \in U^\perp$). Assim, adicionando u a uma base ortonormal de U^\perp consistindo de autovetores de S resulta em uma base ortonormal de V consistindo de autovetores de T , como desejado. \square

Exemplo 44. Considere um operador autoadjunto $T \in \mathbb{R}^3$ cuja matriz (com respeito à base canônica) é

$$A = \begin{bmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Mostre que o operador é diagonalizável.

Solução: Como o operador dado é autoadjunto, o Teorema Espectral Real nos garante a existência de uma base ortonormal de autovetores. Dessa forma, encontremos essa base para diagonalizarmos o operador. Inicialmente, calculamos os autovalores:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 14 - \lambda & -13 & 8 \\ -13 & 14 - \lambda & 8 \\ 8 & 8 & -7 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 21\lambda^2 + 297\lambda - 3645 = \\ &= -(\lambda - 9)(\lambda + 15)(\lambda - 27) = P(\lambda). \end{aligned}$$

Logo, $P(\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 21\lambda^2 + 297\lambda - 3645 = 0$, o que resulta em $\lambda = 9$ ou $\lambda = -15$ ou $\lambda = 27$. Então, os autovalores de A são $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -15$ e $\lambda_3 = 27$. Agora procuramos os autovetores associados a estes autovalores.

(i) $\lambda_1 = 9$: Resolvendo a equação $(A - 9I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & -13 & 8 \\ -13 & 5 & 8 \\ 8 & 8 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} 5x - 13y + 8z = 0 \\ -13x + 5y + 8z = 0 \\ 8x + 8y - 16z = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos autovetores da forma $\mathbf{v}_1 = (x, x, x)$, $x \neq 0$ associados a $\lambda_1 = 9$. Escolhendo $x = 1$, obtemos $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$.

(ii) $\lambda_2 = -15$: Resolvendo a equação $(A + 15I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 29 & -13 & 8 \\ -13 & 29 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} 29x - 13y + 8z = 0 \\ -13x + 29y + 8z = 0 \\ 8x + 8y + 8z = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos autovetores da forma $\mathbf{v}_2 = (x, x, -2x)$, $x \neq 0$ associados a $\lambda_2 = -15$. Escolhendo $x = 1$, obtemos $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -2)$.

(iii) $\lambda_2 = 27$: Resolvendo a equação $(A - 27I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{bmatrix} -13 & -13 & 8 \\ -13 & -13 & 8 \\ 8 & 8 & -34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} -13x - 13y + 8z = 0 \\ -13x - 13y + 8z = 0 \\ 8x + 8y - 34z = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos autovetores da forma $\mathbf{v}_3 = (x, -x, 0)$, $x \neq 0$ associados a $\lambda_2 = 27$. Escolhendo $x = 1$, obtemos $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0)$.

Os autovetores obtidos são ortogonais entre si, mas não são ortonormais. Dessa forma, devemos normalizá-los. Temos que:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}; \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{6}; \quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}.$$

Logo, os autovetores normalizados são:

$$\mathbf{v}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad \mathbf{v}'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right); \quad \mathbf{v}'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Logo, $\beta = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ forma uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 consistindo de autovetores de T e com relação a essa base, a matriz de T é uma matriz diagonal da forma

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

Observação 7. A grande importância das duas versões do Teorema Espectral é que elas garantem que se um operador $T : V \rightarrow V$ é normal (Teorema Espectral Complexo) ou autoadjunto (Teorema Espectral Real), ele sempre terá uma base ortonormal formada por autovetores de T . E assim, o operador sempre será diagonalizável.

6 FORMAS CANÔNICAS DE JORDAN

Neste capítulo apresentaremos uma forma de representar um operador linear por uma matriz que é quase diagonal, denominada Forma Canônica de Jordan. Para o desenvolvimento dos conceitos necessários, utilizamos principalmente as bibliografias: Hoffman e Kunze (1970), Boldrini *et al.* (1980) e Almeida (2011).

6.1 Introdução

Vimos no Capítulo 3 que nem todo operador é diagonalizável. Por exemplo, $T : V \rightarrow V$ onde V é um espaço vetorial real de dimensão dois, cuja matriz em relação a uma base α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

não é diagonalizável. Isso ocorre pois o seu polinômio característico $\lambda^2 + 1$, não possui raízes reais. Dessa forma, este operador não possui autovalores reais, e portanto não possui autovetores.

Contudo, se o espaço vetorial V supracitado for complexo e considerarmos a mesma matriz, o polinômio característico passará a ter duas raízes distintas, $\lambda = \pm i$, e assim, o operador será diagonalizável. De fato, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = i$ é $\mathbf{v}_1 = (1, i)$ e um autovetor associado a $\lambda_2 = -i$ é $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$. Se considerarmos β a base destes autovetores, então

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Através desse exemplo, vemos que o espaço vetorial (real ou complexo) no qual trabalhamos desempenha um papel importante para o operador ser diagonalizável ou não. Vimos no Capítulo 5, que os operadores normais e autoadjuntos sempre são diagonalizáveis. Entretanto, mesmo considerando operadores definidos em espaços vetoriais complexos, nem todo operador linear é diagonalizável.

Considere o operador $T : V \rightarrow V$, onde V é um espaço vetorial complexo de di-

mensão 4 e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde α é uma base de V . O polinômio característico de T é

$$p(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 1)^2,$$

e assim, os autovalores são $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1$ (com multiplicidade algébrica 2). Não será possível encontrar dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_3 = 1$, e assim, T não é diagonalizável.

Para estes casos, quando $T : V \rightarrow V$ for um operador linear não diagonalizável e V um espaço vetorial complexo, poderemos achar uma base β de V , tal que $[T]_{\beta}^{\beta}$ assumirá uma forma especial, chamada **Forma Canônica de Jordan**. Esta forma é obtida por blocos do tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & \lambda_i \\ 0 & & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

com os autovalores λ_i colocados na diagonal. Para a construção das Formas Canônicas de Jordan, precisamos de alguns resultados preliminares, os quais serão apresentados nas próximas duas seções.

6.2 Subespaços Invariantes e o Polinômio Minimal

Nesta seção trataremos dos subespaços invariantes, os quais possuem propriedades importantes para a obtenção das Formas de Jordan. Além disso, apresentaremos o conceito de polinômio minimal de um operador linear, bem como a sua relação com o polinômio característico.

6.2.1 Subespaços Invariantes

Definição 37. *Seja V um espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se W é um subespaço de V , dizemos que W é um **subespaço vetorial invariante pelo operador T** ou **T -invariante** se para cada vetor $w \in W$ tivermos $T(w) \in W$, isto é, $T(W) \subseteq W$.*

Exemplo 45. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Temos que V é invariante pelo operador T , assim como, o subespaço vetorial nulo. Além disso, $Im(T)$ e $N(T)$ também são invariantes por T .*

Observação 8. *Considere um subespaço W que é invariante pelo operador T . Então T produz um operador linear T_W sobre o espaço vetorial W se restringirmos o seu domínio de definição a W . O operador linear T_W é definido por $T_W(w) = T(w)$, para $w \in W$, mas T_W é diferente de T , uma vez que seu domínio é W e não V .*

De agora em diante, usaremos a notação T -invariante para expressarmos um subespaço que é invariante pelo operador T .

Proposição 12. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial e sejam $W \subseteq V$ um subespaço de V e $\lambda \in \mathbb{F}$. Temos:*

- (1) *Os subespaços vetoriais de V , $N(T)$ e $Im(T)$ são T -invariantes.*
- (2) *Se λ for um autovalor de T , então $Aut_T(\lambda)$ é T -invariante de V .*
- (3) *Se W é um subespaço T -invariante, então a restrição de T a W é um operador linear em $\mathcal{L}(W, W)$.*
- (4) *W é $(T - \lambda I)$ -invariante se e só se W for T -invariante.*

Demostração: Ver em Almeida (2011), página 12.

Proposição 13. *Se $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que $V = W_1 \oplus W_2$ e W_1, W_2 subespaços T -invariantes, então a matriz $[T]_\beta$, com $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ e β_i é uma base de W_i , será da forma:*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} [T_1]_{\beta_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\beta_2} \end{pmatrix},$$

onde as matrizes $[T_i]_{\beta_i}$ são referentes às restrições de T a cada W_i .

Neste caso dizemos que o operador T é a soma direta dos operadores T_i , com $i = 1, 2$ e escrevemos $T = T_1 \oplus T_2$.

Demostração: Ver em Almeida (2011), página 14.

Teorema 14. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V é um espaço vetorial n -dimensional tal que $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, onde cada W_i é um subespaço de V T -invariante, seja também $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_r$ uma base de V , onde β_i é uma base de W_i , para cada $i = 1, \dots, r$. Então a matriz $[T]_\beta$ se escreve da seguinte maneira:*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} [T_1]_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_r]_{\beta_r} \end{pmatrix},$$

onde cada matriz $[T_i]_{\beta_i}$ é a matriz da restrição de T a cada subespaço W_i .

Demostração: Ver em Almeida (2011), página 15.

Corolário 9. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V é um espaço vetorial. Se $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_r$. Então $p_T(x) = p_{T_1}(x) \cdots p_{T_r}(x)$.*

Demostração: Ver em Almeida (2011), página 15.

6.2.2 O Polinômio Minimal

Nesta subseção, apresentaremos o conceito de polinômio minimal de um operador linear, bem como resultados importantes que nos auxiliam na obtenção desse polinômio, como o Teorema de Cayley-Hamilton.

Definição 38. *Seja $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então $p(A)$ é a matriz*

$$p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Quando $p(A) = 0$, dizemos que o polinômio **anula** a matriz A .

Definição 39. *Seja A uma matriz quadrada. O **polinômio minimal** de A é um polinômio*

$$m(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$$

tal que:

(i) $m(A) = 0$, isto é, $m(x)$ anula a matriz A .

(ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A .

Observação 9. Observe que o coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é sempre 1 ($a_k = 1$).

Teorema 15. Teorema de Cayley-Hamilton: Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, α uma base de V e $p(x)$ o polinômio característico de T . Então

$$p([T]_{\alpha}^{\alpha}) = \mathbf{0}.$$

Demonstração: Seja

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Então, o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p([T]_{\alpha}^{\alpha}) &= \left(a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \left(d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - \left(bc \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observação 10. A demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton para o caso geral pode ser vista em Almeida (2011), página 16.

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio minimal porque ele satisfaz a condição (i) da Definição 39.

Proposição 14. O polinômio minimal $m(x)$ de T é um divisor do polinômio característico $p(x)$ de T .

Demonstração: Ver em Almeida (2011), página 17.

Teorema 16. *As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.*

Demonstração: Ver em Almeida (2011), página 18.

Os teoremas 15 e 16 juntos nos dizem como achar o polinômio minimal de um operador linear $T : V \rightarrow V$. O polinômio minimal deve ser de grau menor ou no máximo igual ao do polinômio característico (Teorema de Cayley-Hamilton) e ainda deve ter as mesmas raízes (Teorema 16).

Por exemplo, seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e α uma base de V . Suponhamos que o polinômio característico de T seja $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 5)$. Então, o seu polinômio minimal será um dos polinômios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x - 3)(x - 1)(x + 5) \\ p_2(x) &= (x - 3)^2(x - 1)(x + 5) \\ p_3(x) &= (x - 3)(x - 1)^2(x + 5) \\ p_4(x) &= (x - 3)(x - 1)^3(x + 5) \\ p_5(x) &= (x - 3)^2(x - 1)^2(x + 5) \\ p_6(x) &= (x - 3)^2(x - 1)^3(x + 5). \end{aligned}$$

Como o polinômio minimal é o de menor grau que anula $[T]_{\alpha}^{\alpha}$, verificamos primeiramente se $p_1([T]_{\alpha}^{\alpha}) = \mathbf{0}$. Em caso afirmativo, $p_1(x)$ será o polinômio minimal. Se $p_1([T]_{\alpha}^{\alpha}) \neq \mathbf{0}$, testamos $p_2([T]_{\alpha}^{\alpha})$ e assim sucessivamente. Na pior das hipóteses o polinômio minimal será $p(\lambda)$ ou seja, o polinômio característico.

6.3 Formas Canônicas de Jordan

Nessa seção veremos uma das formas mais simples de representação matricial de um operador linear T , conhecida como a Forma Canônica de Jordan.

Vejamos então, alguns dos conceitos mais importantes necessários para a obtenção dessa representação.

6.3.1 Operadores Nilpotentes

Definição 40. *Um operador $T : V \rightarrow V$ é chamado de **nilpotente**, se existir um inteiro positivo m , tal que $T^m = 0$. O menor índice com esta propriedade, será denotado como*

índice de nilpotência.

Exemplo 46. O operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representado pela matriz na base canônica

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é nilpotente, com índice de nilpotência $m = 3$, pois $[T]^3 = \mathbf{0}$.

Teorema 17. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um espaço vetorial de dimensão finita. Então T pode ser decomposto, de maneira única, em uma soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível.

Demonstração: Ver em Almeida (2011), página 19.

Proposição 15. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice $m \geq 1$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Se $v \in V$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então:

- (1) $\lambda = 0$ é o único autovalor de T .
- (2) O conjunto $\{v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)\}$ é L.I.
- (3) Existe um subespaço T -invariante W de V tal que $V = U \oplus W$, onde $U = [v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)]$.
- (4) A restrição $T|_W : W \rightarrow W$ é um operador nilpotente, com índice de nilpotência $m' \leq m$.

Demonstração: Ver em Almeida (2011), página 21.

Teorema 18. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos t, m_1, m_2, \dots, m_t e vetores $v_1, \dots, v_t \in V$ tais que

- (1) $m = m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_t$
- (2) O conjunto $\beta = \{v_1, T(v_1), \dots, T^{m_1-1}(v_1), \dots, v_t, T(v_t), \dots, T^{m_t-1}(v_t)\}$ é uma base de V .
- (3) $T^{m_i}(v_i) = 0$, para cada $i = 1, \dots, t$.

Demonstração: Ver em Almeida (2011), página 24.

6.3.2 Formas Canônicas de Jordan

Observação 11. Suponha que $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice m , sabemos que $\beta = \{v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)\}$ é L.I, para algum $v \in V$. Se $\dim V = m$ então será perfeito, pois o conjunto β formará uma base de V e a matriz de T com relação a esta base será do tipo

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m \times m} .$$

Observação 12. Suponha agora que $p_T(x) = (x - \lambda)^n$, daí pelo Teorema de Cayley-Hamilton, teremos $p_T(T) = (T - \lambda I)^n = 0$ e, portanto o operador linear $(T - \lambda I)$ será nilpotente. Se seu índice de nilpotência for n então, usando a Observação 10, existirá uma base β de V , tal que a matriz de $(T - \lambda I)$ com relação a esta base será da forma

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = [T - \lambda I]_{\beta} = [T]_{\beta} - \lambda [I]_{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} + \lambda [I]_{\beta}$$

daí, a matriz de T na base β será da seguinte forma

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n} .$$

Observação 13. Para um operador linear nilpotente $T : V \rightarrow V$, sejam t, m_1, \dots, m_t e β como no enunciado do Teorema 18. Então a matriz de T na base β é formada por blocos de Jordan $m_i \times m_i$ associados ao autovalor 0, do tipo

$$J_{m_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$$

ou seja, $[T]_\beta$ será da seguinte forma

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_t}(0) \end{pmatrix}$$

onde os 0's indicam matrizes nulas

Definição 41. Chamamos de **Bloco de Jordan** $r \times r$ em λ , a matriz $J_r(\lambda) \in M_r(\mathbb{F})$ que tem λ na diagonal principal e 1 em toda diagonal abaixo da principal, ou seja, é a matriz do tipo

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}.$$

Teorema 19. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$, onde, para cada $i = 1, 2, \dots, r$, temos:

- (1) $\dim U_i = m_i$;
- (2) o subespaço U_i é T -invariante;
- (3) a restrição do operador $(T - \lambda_i I)$ a U_i é nilpotente.

Demonstração: Ver em Almeida (2011), página 27.

Com o auxílio do Teorema 19, podemos construir a Forma de Jordan de um operador linear.

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$, $r \geq 1$,

$m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$. Pelo Teorema 19, temos $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, onde as propriedades (1), (2) e (3) enunciadas no mesmo, são satisfeitas.

Para cada $i = 1, \dots, r$, considere $T|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$. Mais uma vez pelo Teorema 19, temos que $(T|_{U_i} - \lambda_i I_{m_i})$ é nilpotente.

Pelas Observações 11, 12 e 13, segue que existe uma base β_i de U_i e números t_i , $m_{i_1} \geq m_{i_2} \geq \dots \geq m_{i_{t_i}}$, tais que

$$[T_i]_{\beta_i} = \begin{pmatrix} J_{m_{i_1}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_{i_2}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_{i_{t_i}}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

onde, para cada $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, t_i$,

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_{ij} \times m_{ij}}$$

é o bloco de Jordan correspondente. Como a soma $U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ é direta, segue que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_r$ é base de V . Portanto,

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [T_2]_{\beta_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & [T_r]_{\beta_r} \end{pmatrix}$$

A matriz acima é chamada de **Forma de Jordan** associada a T .

6.3.2.1 Obtenção da Forma de Jordan

O nosso objetivo agora é ver como determinar a forma de Jordan de um operador arbitrário T . Para cada autovalor λ_i , de T vamos calcular a Forma Canônica de Jordan do operador nilpotente $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$, onde $U_i = N(T - \lambda_i I)^{k_i}$. Essa matriz possui o primeiro bloco de Jordan de tamanho (ordem) $k_i \times k_i$, e possivelmente outros blocos menores ou iguais em diagonal; a quantidade desses blocos e seus respectivos tamanhos depende logicamente do operador T . A questão que queremos discutir aqui é: Como determinar

essa quantidade e esses tamanhos (ou ordens)?

Observe primeiramente que os números k_i são índices de nilpotência de $(T - \lambda_i I)$, isto é, o menor inteiro tal que $(T - \lambda_i I)^{k_i} = 0$ em U_i e $k_i \leq m_i$. Logo, considerando o polinômio

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1 I)^{k_1} (\lambda - \lambda_2 I)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_l I)^{k_l}$$

temos que $p(\lambda)$ tem coeficiente principal igual a 1, tem grau menor ou igual ao polinômio característico de T e $p(T) = 0$, porque se $v \in V$, $v = v_1 + \dots + v_l$ com $v_i \in U_i$,

$$p(T) = (T - \lambda_2 I)^{k_2} \dots (T - \lambda_l I)^{k_l} \overbrace{(T - \lambda_1 I)^{k_1}}{=0} v_1 + \dots + (T - \lambda_1 I)^{k_1} \dots \underbrace{(T - \lambda_l I)^{k_l}}_{=0} v_l = 0.$$

Observe também que se diminuirmos um desses k_i não temos mais essa propriedade $p(T) = 0$, portanto $p(\lambda)$ é o polinômio minimal de T , isto é, o polinômio de menor grau com coeficiente principal = 1 e tal que $p(T) = 0$.

Um fato importante é que os expoentes do polinômio minimal de T , definem a ordem de pelo menos um dos blocos de Jordan associados ao autovalor λ_i .

Uma outra observação importante é que na “diagonal” abaixo da diagonal principal da Forma de Jordan do operador nilpotente $(T - \lambda_i I)_{/U_i}$ os 0's aparecem na posição de intersecção dos blocos de Jordan. Dessa forma, se olharmos para as colunas nulas dessa matriz, temos tantas colunas nulas quantos forem os seus blocos (a última coluna dessa matriz é nula, que corresponde ao último bloco). Portanto, para determinarmos o número de blocos correspondentes a λ_i devemos calcular o número de colunas nulas, mas esse número é exatamente a dimensão de $N(T - \lambda_i I)$.

Definição 42. A dimensão de $N(T - \lambda_i I)$ é chamada de multiplicidade geométrica de λ_i .

Temos portanto informações sobre a ordem do maior bloco de Jordan e sobre o número de blocos existentes para cada λ_i . Falta somente informações sobre a ordem dos demais blocos. Para isto chamaremos de N a dimensão do espaço vetorial V e consideremos:

$$A = (T - \lambda_i I),$$

$$d_j = \dim N(T - \lambda_i I)^j$$

e

$$n_j = \text{número de blocos de Jordan de ordem } j \times j.$$

Observe que devemos calcular as dimensões d_j até obtermos o primeiro inteiro k tal que $d_k = d_{k+1}$, que é o índice de nilpotência do autovalor λ_i , a partir desse índice temos, $d_j = d_k, j \geq k$. Além disso temos que

$$d_0 = \dim N(I) = 0.$$

Sabemos que o número de blocos é igual a multiplicidade geométrica, logo

$$d_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_N,$$

que são todas as ordens possíveis.

Agora, quando calculamos A a “diagonal” de 1’s escorrega para a “diagonal” imediatamente abaixo, isto significa que nos blocos de Jordan de ordens ≥ 2 aumenta uma coluna de zeros em cada um, logo

$$d_2 = n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_N.$$

Com o mesmo raciocínio concluímos para os subsequentes, isto é,

$$\begin{aligned} d_3 &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + 3n_N = n_1 + 2n_2 + 3(n_3 + \dots + n_N) \\ &\vdots \\ d_{N-1} &= n_1 + 2n_2 + \dots + (N-2)n_{N-2} + (N-1)(n_{N-1} + n_N) \\ d_N &= n_1 + 2n_2 + \dots + Nn_N \\ d_{N+1} &= d_N. \end{aligned}$$

Os d_i 's são conhecidos (já foram calculados), vamos resolver para os n_i 's. Subtraindo cada equação da anterior obtemos:

$$d_1 - d_0 = n_1 + \dots + n_N$$

$$d_2 - d_1 = n_2 + \dots + n_N$$

$$\vdots$$

$$d_N - d_{N-1} = n_N$$

$$d_{N+1} - d_N = 0$$

Subtraindo cada equação da subsequente, segue que

$$-d_0 + 2d_1 - d_2 = n_1$$

$$\vdots$$

$$-d_{N-1} + 2d_N - d_{N+1} = n_N.$$

Obtemos portanto a relação

$$n_j = -d_{j-1} + 2d_j - d_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

que fornece o número de blocos de Jordan de ordem $j \times j$ correspondentes ao autovalor λ_i .

Vejamos a seguir alguns exemplos de como obter a Forma Canônica de Jordan.

Exemplo 47. *Suponhamos que $\lambda_1 = 5$ seja autovalor de um operador T que satisfaz as seguintes condições:*

- multiplicidade algébrica = 10
- multiplicidade geométrica = 6, isto é, $d_1 = \dim N(A - 5I) = 6$
- índice de nilpotência = 3, isto é, $d_j = d_3 = 10$ para $j \geq 3$.
- e $d_2 = 9$.

Obtenha a Forma de Jordan correspondente.

Solução: Com as informações fornecidas, podemos tirar as seguintes conclusões:

- O bloco tem o valor 5 na diagonal (5 é o autovalor).
- A ordem é 10×10 (10 é a multiplicidade algébrica).
- O maior bloco de Jordan é 3×3 (3 é o índice de nilpotência).
- Possui 6 blocos de Jordan (6 é a multiplicidade geométrica).

Falta somente as ordens dos blocos e a quantidade de cada um deles. Para isto usamos a fórmula e obtemos:

$$n_1 = -d_0 + 2d_1 - d_2 = 0 + 12 - 9 = 3.$$

$$n_2 = -d_1 + 2d_2 - d_3 = -6 + 18 - 10 = 2.$$

$$n_3 = -d_2 + 2d_3 - d_4 = -9 + 20 - 10 = 1.$$

Logo, a Forma de Jordan do operador T é:

$$J_T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 48. Seja $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z, w) = (8x - y, 4x + 12y, 9z + 2w, 2z + 6w).$$

Obtenha a sua forma de Jordan.

Solução: Com relação a base canônica α temos, que a matriz de T é dada por

$$[T]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Donde segue que

$$\det(T - \lambda I) = (10 - \lambda)^3(5 - \lambda).$$

Logo, o polinômio característico de $[T]_{\alpha}$ é $p(\lambda) = (10 - \lambda)^3(5 - \lambda)$.

Assim, as possibilidades para o polinômio minimal são:

$$p_1(x) = (x - 10)(x - 5)$$

$$p_2(x) = (x - 10)^2(x - 5)$$

$$p_3(x) = (x - 10)^3(x - 5)$$

Verifiquemos qual destes é o polinômio minimal de T :

$$\begin{aligned}
 p_1([T]) &= ([T] - 10I)([T] - 5I) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo, $p_1(x)$ não é o polinômio minimal de T . Dessa forma, vamos testar $p_2(x)$:

$$\begin{aligned}
 p_2([T]) &= ([T] - 10I)^2([T] - 5I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo, $p_2(x)$ é o polinômio minimal de T . Assim, a forma de Jordan terá um bloco de ordem 2, a saber $J_2(10)$ pois 10 tem multiplicidade 2 em $p_2(x)$.

Portanto,

$$J_T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

é a Forma Canônica de Jordan.

Observação 14. *No exemplo anterior, não precisamos calcular as ordens e quantidade dos blocos de Jordan restantes, pois o polinômio minimal nos forneceu informações sufi-*

cientes para obtermos J_T .

Exemplo 49. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar a sua forma de Jordan.

Solução: O polinômio característico de A é $p(\lambda) = (\lambda - 2)^5$.

Logo, os candidatos a polinômio minimal são:

$$p_1 = (x - 2)$$

$$p_2 = (x - 2)^2$$

$$p_3 = (x - 2)^3$$

$$p_4 = (x - 2)^4$$

$$p_5 = (x - 2)^5.$$

Iniciemos verificando $p_1(x)$:

$$p_1(A) = (A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $p_1(x)$ não é o polinômio minimal de A . Assim, devemos testar se $p_2(x)$ é o

polinômio minimal:

$$p_2(A) = (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Logo, $p_2(x)$ não é o polinômio minimal de A . Testando $p_3(x)$ temos:

$$p_3(A) = (A - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $p_3(x)$ é o polinômio minimal de A . Assim, o índice de nilpotência é 3, de forma que $d_j = d_3$, $j \geq 3$. Com isso concluímos que a matriz A possui um bloco de Jordan de ordem 3.

Agora, calculemos os d'_i s para verificarmos quantos blocos de Jordan de cada tamanho a matriz vai ter.

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que: $\text{posto}(A - 2I) = 3$, n° de colunas = 5 e assim,

$$d_1 = \dim N(A - 2I) = 5 - 3 = 2,$$

pelo Teorema 5.

Como, $\dim N(A - 2I) = 2$, segue que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 2.

Logo, a forma de Jordan tem dois blocos.

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que: $\text{posto}(A - 2I)^2 = 1$, n° de colunas = 5, e assim, pelo Teorema 5, segue que

$$d_2 = \dim N(A - 2I)^2 = 5 - 1 = 4.$$

$$(A - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que: $\text{posto}(A - 2I)^3 = 0$, n° de colunas = 5.

Logo, pelo Teorema 5 segue que

$$d_3 = \dim N(A - 2I)^3 = 5 - 0 = 5.$$

Agora podemos calcular quantos blocos de cada ordem a matriz vai ter:

- Blocos de ordem 1:

$$n_1 = -d_0 + 2d_1 - d_2 = 0 + 4 - 4 = 0.$$

- Blocos de ordem 2:

$$n_2 = -d_1 + 2d_2 - d_3 = -8 + 8 - 5 = 1.$$

- Blocos de ordem 3:

$$n_3 = -d_2 + 2d_3 - d_4 = -4 + 10 - 5 = 1,$$

confirmando a conclusão obtida através do cálculo do polinômio minimal.

Portanto, a forma de Jordan é do tipo

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Faz-se necessário, no meio de todo levantamento bibliográfico a qual o presente trabalho se baseia, ressaltar a significância de todo o desenvolvimento dos conhecimentos listados no decorrer do mesmo.

A Matemática, nas suas mais diversas ramificações, potencializa os desenvolvimentos nos mais diversos âmbitos. As demonstrações, a matemática pura, as definições que precedem isso, impulsiona cada vez mais, novas pesquisas, e novos conceitos no meio científico, que elevam todo o dia a importância do estudo da Matemática.

No presente trabalho, foi desenvolvido e apresentado do início ao fim, definições cruciais para chegar no objetivo final que é o processo para obter-se a diagonalização de operadores e a Forma Canônica de Jordan. Muitos conceitos importantes em Álgebra Linear são a base para se atingir esses objetivos. Dessa forma, iniciamos com os conceitos de Espaços Vetoriais e Transformações Lineares.

Na sequência, definimos os conceitos de Autovalores e Autovetores, os quais são primordiais para a Diagonalização de Operadores, que veio em seguida. Mostramos que nem todo operador linear, seja ele definido em espaços vetoriais reais ou complexos pode ser diagonalizado, ou seja, ser representado por uma matriz diagonal com seus autovalores formando essa diagonal.

Com os conceitos de produto interno e espaços com produto interno, foi possível definir e exemplificar alguns operadores lineares chamados de especiais. Tais operadores são os normais, autoadjuntos, e isometrias, com as suas nomenclaturas específicas se definidos em espaços vetoriais reais ou complexos (ortogonais, simétricos, hermitianos, unitários). Em seguida, apresentamos um dos teoremas mais importantes da Álgebra Linear, que é o Teorema Espectral nas suas versões real e complexa. Tal teorema nos apresenta resultados que garantem a diagonalização de operadores normais e autoadjuntos. Utilizamos esse teorema para exemplificarmos a diagonalização desses operadores especiais.

Como citado anteriormente, nem todo operador pode ser diagonalizado. Dessa forma, buscamos obter uma matriz que represente esses operadores que não são diagonalizáveis de uma forma quase diagonal. Essa matriz quase diagonal é chamada Forma Canônica de Jordan. Para a obtenção dessa matriz são necessários alguns conceitos como Subespaços Invariantes, Polinômio Minimal, Operadores Nilpotentes.

Assim, atingimos o objetivo de apresentar o processo de Diagonalização de Ope-

radores e as Formas Canônicas de Jordan. A realização deste trabalho contribuiu para a construção de novos conhecimentos que, com certeza, farão muita diferença nos meus objetivos futuros, que são, inicialmente, ingressar em um curso de mestrado. Pude rever conceitos básicos e, principalmente, aprender novos conceitos que não são trabalhados em componentes tradicionais de Álgebra Linear.

Para finalizar, cabe dizer que é de extrema relevância ressaltar os diversos pontos positivos que o domínio deste processo traz e potencializa conquistas futuras nas mais diversas áreas, além de impulsionar o meu próprio conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. G. F. **A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações.** (Dissertação de Mestrado) Universidade Estadual da Paraíba - Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, Junho, 2011.

AYDIN, S. **Some analysis on a first course in linear algebra.** Turkish Online Journal of Science Tecnology, vol. 3, pp. 139-144, 2013.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

AXLER, S. **Linear Algebra Done Right.** 2ª ed. New York: Springer-Verlag, 1997.

BAUMGART, J. K. **História da Álgebra: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** São Paulo: Atual, 1992.

BOLDRINI, José Luiz *et al.* **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

CARNESECCA, A. C. **Diagonalização de matrizes e suas aplicações.** Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos. Junho, 2019.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2002.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1971.

HOLT, J. **Álgebra Linear com Aplicações.** São Paulo: LTC, 2016.

LANG, S. **Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2020.

WEBER, Daniel Lauri Costa; MORGADO, Michelle Ferreira Zanchetta **Aplicação de Diagonalização de Operadores.** 10ª Mostra de Projetos da Área de Matemática. UNESP, 2019.