

**UNIPAMPA – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**ALEXANDRE URBANO HOFFMANN**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA EM UMA HASTE  
EM QUEDA LIVRE CHOCANDO-SE TRANSVERSALMENTE CONTRA UM  
APOIO RÍGIDO**

**Alegrete  
2014**



**ALEXANDRE URBANO HOFFMANN**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA EM UMA HASTE  
EM QUEDA LIVRE CHOCANDO-SE TRANSVERSALMENTE CONTRA UM  
APOIO RÍGIDO**

Dissertação apresentada à banca avaliadora do curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Wang Chong

**Alegrete**

**2014**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

H699m Hoffmann, Alexandre Urbano  
Modelagem matemática de propagação de trinca em uma haste  
em queda livre chocando-se transversalmente contra um apoio  
rígido. / Alexandre Urbano Hoffmann.  
105 p.  
  
Dissertação(Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa,  
MESTRADO EM ENGENHARIAS, 2014.  
"Orientação: Prof. Dr. Wang Chong".  
  
1. Solução analítica. 2. Resposta dinâmica ao choque. 3.  
Dureza. 4. Coeficiente de flexibilidade. 5. Propagação de  
trinca. I. Título.

**ALEXANDRE URBANO HOFFMANN**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA EM UMA HASTE  
EM QUEDA LIVRE CHOCANDO-SE TRANSVERSALMENTE CONTRA UM  
APOIO RÍGIDO**

Dissertação, apresentada ao curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Engenharia, da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Tecnologia de materiais.

Dissertação defendida e aprovada em: dia, mês e ano.  
Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Wang Chong  
Orientador

Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* – UNIPAMPA

---

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz  
Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica/PROMEC – UFRGS

---

Prof. Dr. Luis Eduardo Kostaski.  
Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* – UNIPAMPA



À memória de meus entes queridos, dedico-lhe essa conquista como gratidão e homenagem.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por iluminar meu caminho, e por dar força e perseverança para enfrentar os vários obstáculos que transpuseram meu caminho durante a longa jornada do curso de Pós-graduação.

Aos meus pais, Antônio e Helena, que sempre estiveram me apoiando e incentivando para que persistisse no aperfeiçoamento intelectual.

A minha esposa Raquel, e aos meus filhos, Kaue Antônio e Henrique Aquiles, que sempre estiveram ao meu lado nos momentos difíceis, e entenderam que minha dedicação ao curso sempre foi em benefício da nossa família.

Ao Professor do Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia da Unipampa, Wang Chong, pela compreensão, disposição e auxílio no desenvolvimento desta dissertação, como orientador.

A todos os outros Professores do Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia da Unipampa, que de alguma forma me ajudaram no transcorrer do curso, e na realização deste.

**MUITO OBRIGADO!**



## RESUMO

A modelagem da propagação de trinca é sempre um assunto importante para a segurança de componentes estruturais. Contudo, este assunto é muito complexo, devido à propagação de trinca sofrer influência de vários fatores, tais como: propriedades mecânicas dos materiais, tipo de carregamento e plastificação na região da trinca etc. Quando o componente estrutural é submetido a uma carga de impacto, a situação se complica muito, devido ao tempo da ação de impacto ser extremamente curto. Inicialmente este trabalho desenvolveu uma solução para o carregamento dinâmico de uma barra em queda livre chocando-se transversalmente contra um apoio rígido. Através desta solução podemos obter os dados como: deslocamento, velocidade, aceleração, momento fletor e força cortante em qualquer instante ao longo do seu comprimento. Pela análise do resultado numérico obtido, denotamos que a solução em forma de série pode ser truncada no quinto item, pois os termos subsequentes não tem influência relevante no resultado. Podemos constatar com auxílio dos gráficos, que a tensão máxima na superfície da barra não ocorre na seção da trinca, até certo tempo ocorrido. Em seguida o presente trabalho relacionou a tensão de escoamento e a tensão última do material, com a dureza. Através do método de Palmeri e Cicirello, foi modelada a propagação de trinca, na seção da barra localizada sobre o apoio. Os resultados obtidos mostram que a maior contribuição à força motriz na propagação de trinca é da energia cinética; a maior contribuição à resistência a propagação de trinca é dada pelo trabalho feito pela mola elástica de rotação, representando a trinca. Quando a força motriz é menor que a resistência, a trinca cessa sua propagação. Porém o resultado revelou algumas necessidades para melhorar a modelagem, especificando: a maneira de obter o coeficiente de flexibilidade da haste contendo trinca, e o tratamento dos dados sobre a aceleração instantânea.

**Palavras-chave:** Solução analítica fechada, resposta dinâmica ao choque, viga de Euler Bernoulli, dureza, coeficiente de flexibilidade, propagação de trinca.



## ABSTRACT

Modeling crack propagation is always an important issue for the safety of structural components. This matter is very complex, due to crack propagation be influenced by several factors such as: mechanical properties of materials, type of loading, lamination in the crack region etc. When the structural component is subjected to an impact load, the situation is further complicated, for the impact of action time is extremely short. Initially this work developed a solution for the dynamic loading of a free falling bar crashing transversally against a rigid support. Through this solution data as displacement, velocity, acceleration, bending moment and shear force at any point along its length can be obtained. By analyzing the numerical result, we denote the solution in serial form can be locked in the fifth term, for subsequent terms has no relevant influence on the result. We can see with the help of graphics, the maximum stress on the surface of the bar does not occur in the crack section until certain time has passed. Then this work has related yield stress and ultimate strength of the material with hardness. Through Palmeri and Cicirello's method, crack propagation was modeled, in the bar section located over the support. The results show that the major contribution to the driving force in the crack propagation is the kinetic energy; the largest contribution to the crack propagation resistance is given by the work done by the spring elastic rotation, which represents the crack. When the driving force is less than the resistance crack propagation ceases. Still the results showed the need to improve the modeling, specifying: a way to get the stem flexibility coefficient containing the crack, and the processing of data concerning the instantaneous acceleration.

**Keywords:** Closed analytical solution, dynamic response, shock, Euler Bernoulli beam, hardness, flexibility coefficient, crack propagation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Moinho de hastes cilíndricas e de bolas.....	25
Figura 2 – Moinho de hastes cilíndricas. ....	26
Figura 3 – Barras no interior do moinho.....	26
Figura 4 – Viga sofrendo deflexão. ....	35
Figura 5 – Diagrama de corpo livre de um ponto da viga sofrendo deflexão.....	36
Figura 6 – Viga deformada após o choque com a base rígida.....	41
Figura 7 – Relação de $dn$ com $n$ .....	56
Figura 8 – Momento fletor no instante $t=25,0$ ms. ....	58
Figura 9 – Momento fletor no instante $t=25,2$ ms. ....	58
Figura 10 – Momento fletor, tempo = 25,4 ms.....	59
Figura 11 – Momento fletor, tempo = 25,6 ms.....	59
Figura 12 – Momento fletor, tempo = 25,8 ms.....	60
Figura 13 – Momento fletor, tempo = 26,0 ms.....	60
Figura 14 – Tensão na superfície superior com variação de tempo entre 25,4 ms e.....	62
Figura 15 – Tensão cisalhante média na superfície superior.....	62
Figura 16 – Tensão normal na superfície no apoio.....	63
Figura 17 – Deflexão da ponta da barra livre vs tempo.....	64
Figura 18 – Deflexão da ponta da barra livre vs tempo.....	64
Figura 19 – Deflexão da ponta da barra livre vs tempo.....	65
Figura 20 – Curvas representando dois perfis de dureza. ....	67
Figura 21 – Gráfico de Tensão x Deformação.....	73
Figura 22 – Gráfico de tensão verdadeira ( $\sigma$ ) versus deformação verdadeira ( $\epsilon$ ). ....	73
Figura 23 – Surgimento de uma trinca na haste. ....	81
Figura 24 – Layout da trinca na região fraturada.....	93
Figura 25 – Perfil para cálculo de energia plástica, com uma trinca de profundidade ‘a’.....	93
Figura 26 – Região plástica na ponta de uma trinca.....	94
Figura 27 – Barra circular submetida a um par de momentos.....	96
Figura 28 – Coeficiente de Flexibilidade.....	98
Figura 29 – Perfil de dureza.....	99
Figura 30 – Perfis de deslocamento, velocidade e aceleração; $\zeta = x/L$ ,.....	100
Figura 31 – Fluxograma de modelagem de propagação de trinca.....	101
Figura 32 – Diferença entre os deslocamentos no instante $t_0$ e $t_1$ .....	102

Figura 33 – Velocidade nos instantes $t_0$ e $t_1$ . .....	103
Figura 34 – Deslocamentos em relação à propagação de trinca.....	103
Figura 35 – Relação entre de Força Motriz x Deslocamento.....	104
Figura 36 – Perfis de velocidade x propagação.....	105

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Condições de contorno para uma viga fixa-livre.....	45
--	----



## LISTA DE SIMBOLOS

$\pi$	– Pi
$\rho$	– Densidade
$E$	– Modulo de Young do material
$\sigma_y$	– Tensão normal eixo y
$\sigma_z$	– Tensão normal eixo z
$\sigma_x$	– Tensão normal eixo x
$M(x,t)$	– Momento fletor
$V(x,t)$	– Força cortante
$f(x,t)$	– Força externa por unidade de comprimento
$A(x)$	– Área da seção transversal
$I_x$	– Momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo y
$w_0(x)$	– Deslocamento lateral
$\dot{w}_0(x)$	– Velocidade inicial
$\omega$	– É denominada frequência natural de vibração
$\beta$	– Condições de contorno
$h$	– Altura de queda
$W_n(x)$	– É o enésimo modo normal ou função característica
$q_n(t)$	– Coordenada generalizada no enésimo modo
$V_0(x)=-V_0$	– Velocidade no instante do impacto
$H_0$	– Dureza superficial
$H_C$	– Dureza no centro da haste
$H_V$	– Dureza Vickers
$S_m$	– Ponto de inflexão
$R$	– Raio
$\bar{\sigma}$	– Tensão verdadeira
$\bar{\varepsilon}$	– Deformação verdadeira
$k$	– Constante determinada pela tensão de escoamento do material

$n$	– Expoente que corresponde ao coeficiente de encruamento do material
$\sigma_u$	– Tensão última
$\sigma_n$	– Tensão normal
$F$	– Força
$A_0$	– Área transversal inicial
$A$	– Área transversal atual
$m$	– Coeficiente de Meyer's
$\varepsilon_u$	– Deformação última verdadeira
$\varepsilon_{ei}$	– Limite de deformação elástica
$\varepsilon_{eu}$	– Deformação elástica
$w_d$	– Densidade de energia
$s$	– Distância radial
$G_C$	– Tenacidade à fratura do material
$\gamma_P$	– Energia plástica
$\gamma_S$	– Energia consumida, durante a quebra das ligações atômicas
$dU_p$	– Energia necessária para que ocorra a propagação da trinca
$G$	– Taxa de liberação de energia
$K_I, K_{II}, K_{III}$	– Fatores de intensidade de tensões
$\mu$	– Módulo de elasticidade transversal
$u(z)$	– Deflexão (positiva no sentido para baixo)
$\varphi(z)$	– Função de inclinação
$q(z)$	– Carga transversal sobre a haste (positivo se para baixo)
$\tilde{q}(\zeta)$	– Equivalente adimensional da equação governante.
$\tilde{I}(\zeta)$	– Momento de inércia adimensional
$\tilde{u}(\zeta)$	– Deslocamento adimensional
$\tilde{g}$	– Gravidade adimensional
$\tilde{a}(\zeta)$	– Aceleração adimensional
$\tilde{\varphi}(\zeta)$	– Função de inclinação da linha elástica
$\tilde{M}(\zeta)$	– O momento fletor adimensional

$\tilde{V}(\zeta)$	– Força cortante adimensional
$\tilde{q}^{[m]}(\zeta)$	– É o primitivo de ordem m da carga
$\alpha_j$	– Parâmetro de flexibilidade da j-ésima trinca
$H(\zeta)$	– Função generalizada chamada de Heaviside
$\delta(\zeta)$	– Função Dirac
$U$	– Energia de deformação
$\Delta U(\Delta t)$	– Variação de energia de deformação elástica
$\Delta W_k(\Delta t)$	– Trabalho realizado pela força de gravidade
$E_k$	– Parcela de energia cinética
$r_p$	– Raio da zona plástica na fronteira da trinca
$Y(a)$	– Parâmetro de correção geométrico para fator de intensidade de tensão
$\Delta G_I$	– Força motriz de propagação de trinca
$v(z, t_i) \Delta G_I$	– Perfil de velocidade no instante $t_i$ ,
$\ddot{u}(z, t_i) \Delta G_I$	– Perfil de aceleração no instante $t_i$
$C_f$	– Coeficiente de flexibilidade
$\Delta G_I$	– Parâmetro de correção geométrico para fator de intensidade de tensão
$k_\phi$	– Rigidez de rotação
$w(t_0)$	– Deslocamento
$\dot{w}(t_0)$	– Velocidade
$\ddot{w}(t_0)$	– Aceleração
$E_k(t_0)$	– Energia cinética
$U(t_0)$	– Energia de deformação



## SUMÁRIO

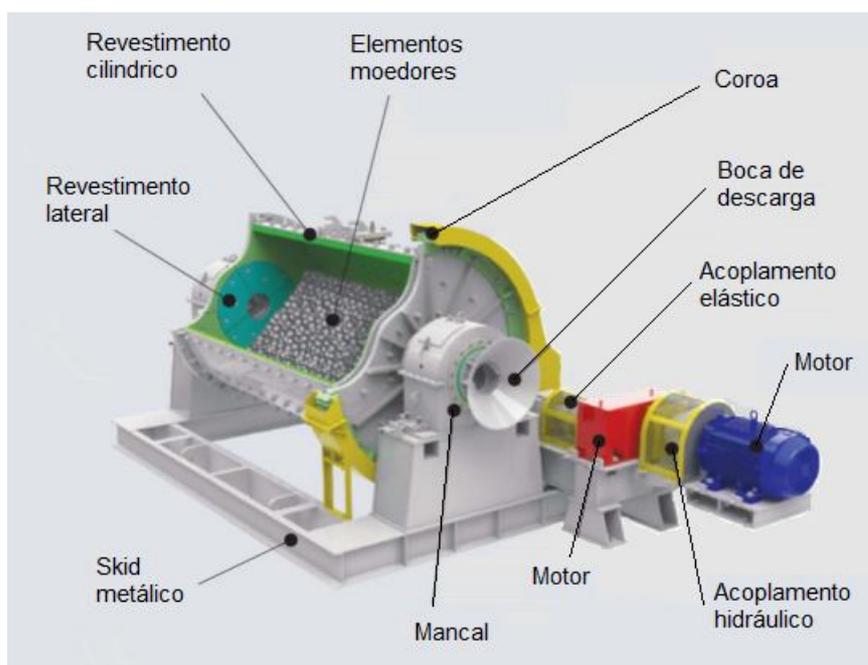
1	INTRODUÇÃO.....	25
1.1	Objetivo geral.....	28
1.2	Objetivos específicos.....	28
1.3	Justificativas.....	28
2	CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA.....	31
2.1	Introdução.....	31
2.2	Mecânica da fratura.....	31
2.3	Conceitos básicos sobre vibrações.....	33
2.4	Vibração livre e vibração forçada.....	34
2.5	Teoria de vibração das vigas de Euler-Bernoulli.....	35
2.6	Estudo sobre vibrações laterais em vigas.....	35
2.6.1	Equação diferencial do movimento da viga.....	35
2.6.2	Condições iniciais.....	38
2.6.3	Solução de vibração livre.....	39
2.6.4	Condições de contorno.....	41
2.6.5	Obtenção das frequências naturais do sistema.....	42
2.6.6	Ortogonalidade das funções normais.....	46
2.6.7	Vibração forçada.....	48
3	RESULTADOS DO IMPACTO CAUSADOS PELO CHOQUE.....	57
3.1	Dados conhecidos.....	57
3.2	Obtenção das curvas de distribuição de momento fletor.....	57
3.3	Obtenção dos gráficos de tensão.....	61
3.4	Obtenção das curvas de deflexão.....	63
4	PROPRIEDADES DO MATERIAL COM ENCRUAMENTO: PERFIL DE DUREZA, EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS, DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.. .....	67
4.1	Modelo matemático do perfil de dureza da seção transversal da haste.....	67
4.2	Coeficiente de encruamento do material.....	68
4.3	Relação entre tensão de escoamento, tensão última e coeficiente de encruamento com a dureza do material.....	70
4.4	Densidade de energia de deformação.....	72
4.5	Tenacidade à fratura.....	76

4.6	Taxa de liberação de energia para a propagação da trinca.....	77
5	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA VIGA DE EULER-BERNOULLI, CONTENDO TRINCAS.....	79
5.1	Modelo matemático da propagação de trinca na seção transversal da haste.....	79
5.2	Solução estática na primeira propagação de trinca no tempo $t_{i-1}=t_0$ .....	84
5.3	Solução estática com trinca no tempo $t_i(i>1)$ .....	89
5.4	Critério de propagação de trinca.....	92
5.5	Determinação da velocidade e aceleração no instante ( $t_i$ ) .....	95
5.6	Obtenção da rigidez a rotação da viga com uma trinca central de profundidade $a$ .....	96
6	RESULTADOS E ANÁLISES .....	99
	CONCLUSÃO.....	106
	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	107
	APÊNDICE A – Cálculo de <b><i>dm</i></b> .....	111

## 1 INTRODUÇÃO

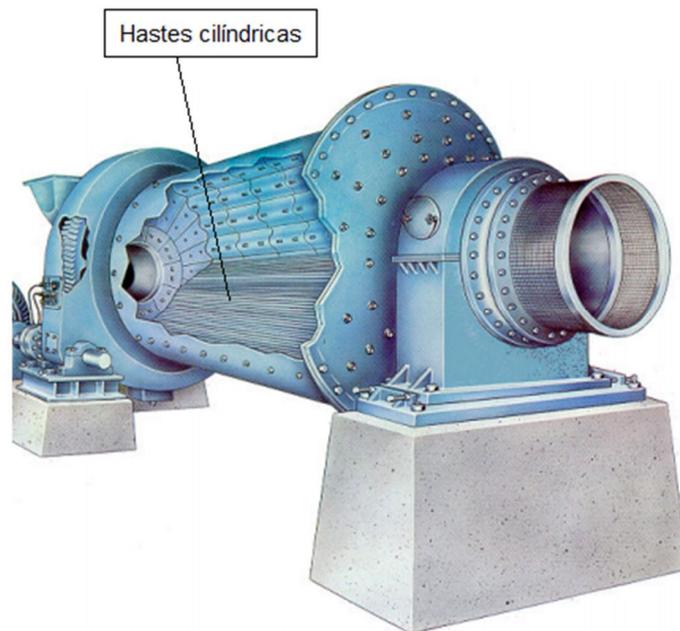
Os engenheiros de projeto se deparam com o problema de desgaste excessivo dos materiais utilizados na construção de equipamentos e de seus componentes, principalmente quando estes são submetidos as mais severas condições de trabalho. Um exemplo claro de meio agressivo, é o processo de mineração de minério de ferro onde os equipamentos e seus componentes são submetidos a choques e a abrasão. Nesta cadeia produtiva, a primeira etapa consiste em extrair as rochas da jazida através da detonação de explosivos, estas rochas possuem as mais variadas formas e tamanhos. Na segunda etapa, inicia-se o processo de cominuição, que consiste em reduzir o tamanho destas rochas para liberar e separar as partículas de minério de ferro da rocha hospedeira. Para realizar esta etapa são utilizados moinhos de hastes cilíndricas e de esferas, como é mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Moinho de hastes cilíndricas e de bolas.



Os moinhos são classificados de acordo com o meio de moagem, onde podem ser utilizadas barras e esferas de aço. A moagem é realizada por abrasão e impacto das rochas de mineral, com as superfícies internas do corpo do triturador, e pelo impacto com o meio de moagem, que esta em movimento no interior do moinho, a Figura 2 nos mostra o moinho de barras cilíndricas.

Figura 2 – Moinho de hastes cilíndricas.



O objeto de estudo deste trabalho, é uma barra de aço do conjunto de elementos moedores que em queda livre choca-se contra a rocha hospedeira de minério de ferro, realizando a sua trituração e moagem. Neste exato momento do choque, analisamos a propagação de trinca dinâmica, na seção do eixo que sofre maior esforço. São mostradas na Figura 3, as barras dispostas no interior do moinho.

Figura 3 – Barras no interior do moinho.



Para que os equipamentos tenham uma vida útil maior, e um rendimento satisfatório, se torna imprescindível que durante a fase de elaboração de projetos, além dos carregamentos estáticos, seja levado em consideração também os carregamentos dinâmicos a que serão submetidos.

Esses esforços variáveis ou flutuações induzem impactos e vibrações, que alteram o quadro geral de tensões e deformações e causam interferências em equipamentos ou em máquinas apoiadas nessas estruturas, instabilidades de operação, aceleração no desgaste, redução na vida útil, etc. A resposta dinâmica de uma estrutura ao impacto depende, essencialmente, das propriedades mecânicas como: resistência do material, rigidez, massa, amortecimento e constituição da estrutura de acordo com Vaz (2008).

Em todas estas situações, a estrutura ou os componentes do equipamento pode vir a falhar devido a esforços excessivos ou à fadiga do material, resultante da variação cíclica da tensão aplicada.

Segundo Molinari (2014), a falha dinâmica de materiais dúcteis é decorrente de uma grande gama situações, podemos citar dentre elas, a necessidade de otimização dos processos de fabricação, a falta de segurança de estruturas expostas ao impacto, cargas explosivas e processos que transmitem carregamento de choque. Naturalmente, quando submetidos à carga dinâmica o comportamento de materiais metálicos é bastante distinto daquele observado sob condições estáticas.

O desempenho do material esta relacionado com as propriedades que ele possui, embora muitas vezes esta relação entre desempenho e propriedades ocorra de formas concorrentes. Estas propriedades são expressas principalmente por propriedades físicas, mecânicas, térmicas, elétricas, magnéticas e ópticas. As propriedades dos materiais são a ligação entre a estrutura de base e composição do material com o desempenho em serviço. Podemos citar a dureza que é uma propriedade característica dos materiais, e desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de dispositivos e máquinas cada vez mais sofisticadas, Zhang (2011).

Infelizmente, com aumento da dureza outras propriedades são influenciadas, tornando o material cada vez mais frágil, de modo que as trincas possam se formar e propagar catastróficamente sem aviso. Já foram registrados inumeros desastres de engenharia, que estão relacionados diretamente a este fenômeno, cabe aos engenheiros envolvidos nos projetos estruturais, estarem cientes das técnicas já disponíveis para proteção contra o fenômeno de fratura frágil. Podemos dizer que a dificuldade central na concepção à ruptura de materiais de

elevada resistência é a presença de fendas, que modificam as tensões locais, assim, a análise cuidadosa feita pelos engenheiros é imprescindível.

No instante em que uma trinca atinge um determinado comprimento crítico, pode propagar-se catastróficamente na estrutura, mesmo com uma tensão menor que a calculada em projeto.

A área de conhecimento dentro da mecânica dos sólidos chamada de “mecânica da fratura” é responsável pelo estudo dos efeitos decorrentes da existência de defeitos e trincas em materiais utilizados na fabricação de componentes de máquinas, através dela podemos encontrar relações quantitativas entre o comprimento de trinca, resistência do material à propagação da trinca, força motriz e velocidade de propagação da trinca.

### 1.1 **Objetivo geral**

Diante desse aspecto, o presente trabalho tem como objetivo geral investigar e modelar matematicamente através da aplicação da teoria de Euler Bernoulli e da mecânica da fratura, o perfil de dureza de uma haste de aço, que resista tanto ao desgaste por abrasão, quanto ao impacto.

### 1.2 **Objetivos específicos**

Para alcançar o objetivo geral de maneira satisfatória pretende-se:

- Obter a solução matemática para o problema de impacto transversal em vigas, através da teoria de vibração e de vigas de Euler Bernoulli;
- Supor, racionalmente, a forma da distribuição de dureza em função da distância da superfície da haste (viga);
- Estabelecer as relações de tensão de escoamento, tensão última de tração e coeficiente de encruamento com a dureza do material;
- Realizar a modelagem dinâmica da propagação de trinca.

### 1.3 **Justificativas**

A indústria de mineração possui equipamentos de grande porte, construídos para suportar esforços e agressões do meio em que operam. Peças e componentes de reposição são itens fabricados à medida que ocorre o desgaste ou até mesmo o colapso dos mesmos em

operação. Para diminuir custos de fabricação e aumentar a vida útil destes componentes, é necessário investigar os fenômenos físicos inerentes ao processo. Sendo assim, o desenvolvimento de teorias e metodologias para análise destes fenômenos é de suma importância para aumentar a vida útil dos componentes submetidos a estes carregamentos.



## 2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Introdução

O processo de análise de falhas é uma etapa fundamental de projeto para o diagnóstico de falhas físicas que podem ocorrer em equipamentos e em seus componentes. Este processo é muito complexo, e baseia-se de conceitos de vários ramos da mecânica, e da aplicação das mais variadas técnicas de observação e análise dos fenômenos inerentes a estes processos. Nesta etapa, podemos identificar com clareza o principal fator que irá causar um problema e também outros fatores com um grau de relevância menor, mas que irão contribuir também para o aparecimento de falhas, Scutti (2002).

O principal tema de análise em nosso estudo é a propagação de trinca dinâmica, e os fatores que contribuem para a propagação desta falha são a variação de dureza, da carga e das propriedades do material.

Em nosso estudo, o tempo é uma variável muito importante, pois consideramos que a barra ao chocar-se com um apoio rígido sofre um enorme carregamento em apenas alguns milissegundos.

### 2.2 Mecânica da fratura

Griffith (1920), deduziu uma ligação quantitativa entre tensão de fratura e tamanho da falha, em seu trabalho publicado em (1920). Ele realizou a análise em uma fenda de forma elíptica aplicando uma análise de tensões, baseado no trabalho de Inglis (1913), publicado em (1913) para a propagação instável de uma trinca. Griffith (1920) baseou-se na primeira lei da termodinâmica, para formular uma teoria simples de fratura utilizando a equação de balanço de energia. De acordo com esta teoria, a fratura torna-se instável e, portanto, a fratura ocorre, quando a energia de deformação se acumula até certo nível, isto é, para que ocorra um incremento no crescimento de trinca a energia de deformação liberada deve ser maior ou igual à energia que é necessária para formar novas superfícies da trinca. Através deste modelo, foi possível prever corretamente a relação entre carga e tamanho da trinca em amostras de vidro. Esforços subsequentes para aplicar este modelo para os metais foram insatisfatórios, uma vez que este modelo pressupõe que o trabalho de fratura provém exclusivamente da energia de superfície do material, esta abordagem aplica-se apenas aos sólidos idealmente frágeis.

Após estudar os trabalhos de Inglis (1913), Griffith (1920) entre outros, Irwin (1956), contribuiu com o estudo de mecânica da fratura desenvolvendo a teoria de Griffith (1920) para o estudo dos metais, incluindo a energia dissipada pelo fluxo plástico no local da ponta da trinca.

Irwin (1948) desenvolveu o conceito de taxa de liberação de energia de deformação, o qual foi derivado a partir da teoria de Griffith (1920), de uma forma mais clara e prática para a solução de problemas de engenharia.

Westergaard (1939) publicou um trabalho onde demonstrou uma técnica semi-inversa para analisar as tensões e o deslocamento na frente de uma trinca. Irwin (1948) utilizou este trabalho para mostrar que a tensão e o deslocamento na frente de uma trinca, poderiam ser descritos por uma única constante relacionada com a taxa de liberação de energia de deformação na ponta da trinca, hoje conhecido como fator de intensidade de tensão.

Rice (1968) desenvolveu outro parâmetro para descrever o comportamento não linear do material à frente de uma fratura. Sua teoria tinha como principal fundamento que a deformação plástica não é linear elástica, pode ser expressa como uma integral de linha, chamada de integral J, avaliada ao longo de um contorno arbitrário em volta de uma ponta da trinca.

Para a análise de uma fratura dinâmica, procura-se levar em consideração o campo de tensões e deformações junto a um defeito em nosso caso uma trinca. Existem três variáveis importantes que devem ser levadas em consideração na análise de mecânica da fratura, são elas: a tensão aplicada, tenacidade à fratura e tamanho da falha.

Quando a energia disponível para o crescimento da trinca é suficiente para superar a resistência à propagação de trinca do material ocorre a sua propagação.

A modelagem é a parte da solução de um problema de engenharia que visa obter a descrição matemática do problema, através da aplicação das leis da física. Estas leis muitas vezes não podem ser aplicadas diretamente ao sistema real, necessitando assim, a utilização de suposições que simplifiquem estes problemas para encontrarmos a solução.

A análise de vigas submetidas a impactos transversais já foi realizada por inúmeros cientistas. Os métodos utilizados para análise foram o de superposição de modo Anderson (1953), transformada de Laplace Boley e Chao (1955), a análise de características Plass, (1958) e do método de elementos finitos Yokoyama e Kishida (1982).

### 2.3 Conceitos básicos sobre vibrações

Um dos mais frequentes problemas que nos deparamos em engenharia, é a ação de movimentos oscilatórios em máquinas e componentes industriais, provocando um deslocamento de sua posição de equilíbrio. Este tipo de deslocamento é chamado de vibração.

O fenômeno de vibração é estudado a mais de 4000 A.C, e foi observado nos primeiros instrumentos musicais desenvolvidos pelos chineses, hindus, japoneses e pelos egípcios Rao (2008).

Um dos primeiros estudos sobre estes fenômenos foram atribuídos ao filósofo e matemático grego: Pitágoras (582-502 A.C), que realizou experimentos com uma corda vibratória, utilizando um instrumento simples chamado de monocórdio.

A corda vibratória, também foi estudada por Galileu Galilei (1564-1642), que foi o primeiro a mostrar que o tom, esta relacionado com a frequência de vibração. Galileu também estabeleceu os fundamentos para os estudos de sistemas vibratórios por meio de suas observações feitas em 1583 referentes aos movimentos de uma lâmpada suspensa de uma catedral em Pisa, na Itália. Ele descobriu que o período do movimento era independente da amplitude do balanço da lâmpada. Essa propriedade é válida para todos os sistemas vibratórios que podem ser descritos por modelos lineares.

A possibilidade de uma corda vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo, sendo o deslocamento de qualquer ponto em qualquer instante, igual à soma algébrica dos deslocamentos para cada harmônica, foi provada por meio das equações dinâmicas de Daniel Bernoulli (1700-1782).

A solução analítica da corda vibratória foi apresentada por Joseph Lagrange (1736-1813). Em seu estudo, Lagrange admitiu que a corda vibratória, era composta por um número finito de partículas de massas idênticas, espaçadas igualmente e estabeleceu a existência de um número de frequências independentes igual ao número de partículas de massa. Considerando-se o número de partículas infinito, constatou-se que as frequências resultantes eram as mesmas frequências harmônicas da corda estirada.

As vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas de várias maneiras foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751. Essa abordagem ficou conhecida como Euler-Bernoulli.

Mais recentemente, temos a contribuição de Stephen Timoshenko (1878-1972), que apresentou uma teoria mais aperfeiçoada de vibração que ficou conhecida como teoria de

Timoshenko ou de vigas grossa, que considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento.

Chamamos de vibração ou oscilação, qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente depois de um intervalo de tempo. Na área da mecânica, estes movimentos ocorrem quando as peças e componentes estruturais estão submetidos à ação dinâmica de forças.

Um sistema vibratório é composto por um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia chamado de amortecedor.

Para que ocorra a vibração de um sistema, precisa ocorrer alternadamente a transferência de energia potencial para energia cinética e de energia cinética para energia potencial. Quando houver perda durante esta troca chamamos o sistema de amortecido.

Os graus de liberdade de um sistema são descritos como o número mínimo de coordenadas independentes requerido para determinar completamente as posições de todas as partes do sistema.

Um sistema vibratório pode ser descrito usando um número finito de graus de liberdade, como exemplos têm-se: um pêndulo simples, sistema massa-mola, sistema torcional e mecanismo cursor-manivela-mola. Também um sistema contínuo possui um número infinito de graus de liberdade, como exemplo pode-se citar uma viga em balanço.

Segundo Thomsom (1978), cada partícula de um corpo deformável necessita de coordenadas para descrever a sua posição, resultando daí que corpos desta natureza possuem um número infinito de graus de liberdade. Sistemas com um número finito de graus de liberdade são denominados de discretos, e os que têm um número infinito de graus de liberdade são denominados de contínuos.

## 2.4 Vibração livre e vibração forçada

A vibração livre acontece quando um sistema oscila sob a ação de forças que lhe são inerentes e na ausência da ação de qualquer força externa. No caso de vibração livre o sistema poderá vibrar com uma ou mais das suas frequências naturais, que são peculiares ao sistema dinâmico estabelecido pela distribuição de sua massa e rigidez.

Denomina-se vibração forçada, quando ela ocorre sob a excitação de forças externas. Quando a excitação é oscilatória, o sistema é obrigado a vibrar na frequência da excitação. Se

esta frequência coincide com uma das frequências naturais do sistema, acontecerá um fenômeno, se chama ressonância.

## 2.5 Teoria de vibração das vigas de Euler-Bernoulli

Para aplicarmos a teoria das vigas de Euler-Bernoulli, devemos considerar as seguintes premissas, da teoria elementar das vigas, são elas:

Existe um eixo na viga que não sofre tração ou compressão, e o eixo  $x$  será posicionado ao longo deste eixo neutro.

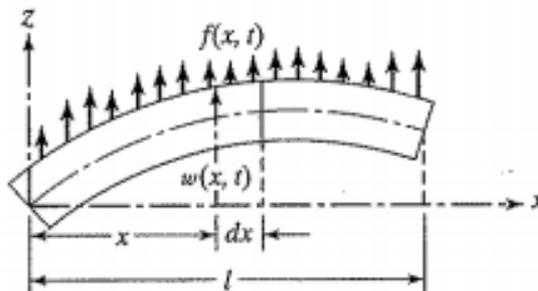
As seções transversais perpendiculares ao eixo neutro no estado não deformado da viga permaneceram planas e perpendiculares ao eixo neutro deformado, o que significa que o cisalhamento pode ser desconsiderado.

O material é linearmente elástico e as propriedades da viga são homogêneas em todas as direções.

$\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são desprezíveis quando comparadas com  $\sigma_x$ .

O plano  $xz$ , é o plano principal, veja a Figura 4.

Figura 4 – Viga sofrendo deflexão.



## 2.6 Estudo sobre vibrações laterais em vigas.

### 2.6.1 Equação diferencial do movimento da viga

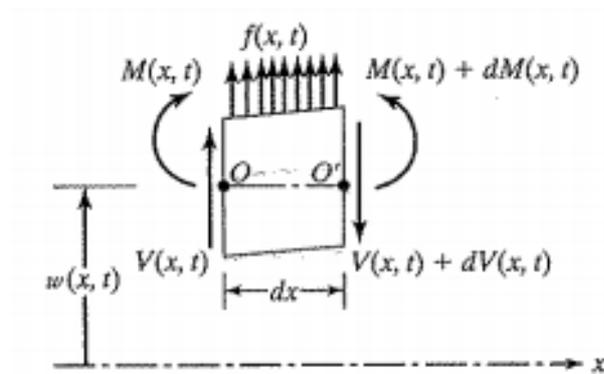
No primeiro momento foi feito um diagrama de corpo livre de um elemento da viga em estudo mostrado na Figura 5, onde  $M(x,t)$  é o momento fletor,  $V(x,t)$  é a força de cisalhamento, e  $f(x,t)$  é a força externa por unidade de comprimento da viga. Visto que a força de inércia que age sobre o elemento da viga é:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(2.1)$$

a equação de movimento da força na direção z é

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(2.2)$$

Figura 5 – Diagrama de corpo livre de um ponto da viga sofrendo deflexão.



onde:  $\rho$  é a densidade da massa, e  $A(x)$  é a área da seção transversal da viga. A equação de movimento do momento em relação ao eixo y que passa pelo ponto O na Figura 5, tem como resultado a Equação (2.3)

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad \dots(2.3)$$

anotando que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \dots(2.4)$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad \dots(2.5)$$

agora desconsiderando os termos com potências ao quadrado de  $dx$ , Equações (2.2) e (2.3) podem ser escritas como

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(2.6)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad \dots(2.7)$$

utilizando a relação  $V = \partial M / \partial x$  da Equação (2.5), a Equação (2.6) torna-se

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(2.8)$$

Sabe-se pela teoria elementar da flexão de vigas (também conhecida como teoria de Euler-Bernoulli ou teoria da viga delgada ou fina) que a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa como

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad \dots(2.9)$$

onde  $E$  é o módulo de Young do material e  $I(x)$  é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo  $y$ . A Equação (2.9) é válida somente para o regime elástico do material.

Inserindo a Equação (2.9), na Equação (2.8), obtemos a Equação (2.10) que descreve o movimento, para a vibração lateral forçada de uma viga não uniforme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad \dots(2.10)$$

A Equação (2.10), é válida para estruturas ou peças que possuam módulo de elasticidade homogêneo. Para nosso caso, apesar de que a dureza da seção transversal variar

em relação à distância da superfície da haste, o módulo de elasticidade da haste irá alterar de forma insignificante, devido ao fato de que a composição de carbono não sofrer grande variação junto da variação de dureza.

Para uma viga uniforme, a Equação (2.10) reduz-se a

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad \dots(2.11)$$

Para vibração livre,  $f(x, t) = 0$ , portanto, a Equação (2.11), torna-se

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad \dots(2.12)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \dots(2.13)$$

### 2.6.2 Condições iniciais

Uma vez que a equação de movimento envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação à  $x$ , onde são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno para determinar uma solução única para  $w(x, t)$ .

Normalmente os valores de deslocamento lateral e velocidades, iniciais, são especificados como:  $w_0(x)$  e  $\dot{w}_0(x)$  em  $t = 0$ , de modo que as condições iniciais tornam-se

$$w(x, t = 0) = w_0(x) \quad \dots(2.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = V_0(x) \quad \dots(2.15)$$

### 2.6.3 Solução de vibração livre

A solução de vibração livre pode ser determinada usando o método de separação de variáveis como

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad \dots(2.16)$$

substituindo a Equação (2.16) na Equação (2.12) e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2} = a = \omega^2 \quad \dots(2.17)$$

onde:  $a = \omega^2$  é uma constante positiva sendo assim a Equação (2.17), pode ser escrita como duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4} - \beta^4W(x) = 0 \quad \dots(2.18)$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0 \quad \dots(2.19)$$

onde:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad \dots(2.20)$$

A solução da Equação (2.19) pode ser expressa como

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \dots(2.21)$$

onde A e B são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais.

Para a solução da Equação (2.18), consideramos

$$W(x) = Ce^{sx} \quad \dots(2.22)$$

neste caso, C e s são constantes, e deduzimos uma equação auxiliar como

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad \dots(2.23)$$

as raízes da Equação (2.23) são dadas por

$$S_{1,2} = \pm\beta, \quad S_{3,4} = \pm i\beta \quad \dots(2.24)$$

por consequência, a solução da Equação (2.18) torna-se

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad \dots(2.25)$$

A Equação (2.25), também pode ser expressa como

$$W(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x) \quad \dots(2.26)$$

onde  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são, em cada caso, constantes diferentes. As constantes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  podem ser determinadas pelas condições de contorno.

As frequências naturais da viga são calculadas pela Equação (2.20), como

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad \dots(2.27)$$

onde  $l$  é o meio comprimento da viga em consideração conforme a Figura 6.

A função  $W(x)$  é conhecida como modo normal ou função característica da viga e  $\omega$  é denominada frequência natural de vibração. Para qualquer viga, haverá um número infinito de modos normais com uma única frequência natural associada ao modo normal. As constantes desconhecidas  $C_1$  a  $C_4$  na Equação (2.25) ou na Equação (2.26) e o valor de  $\beta$  na Equação (2.27) podem ser determinados pelas condições de contorno da viga como indicado no próximo subtítulo a seguir.

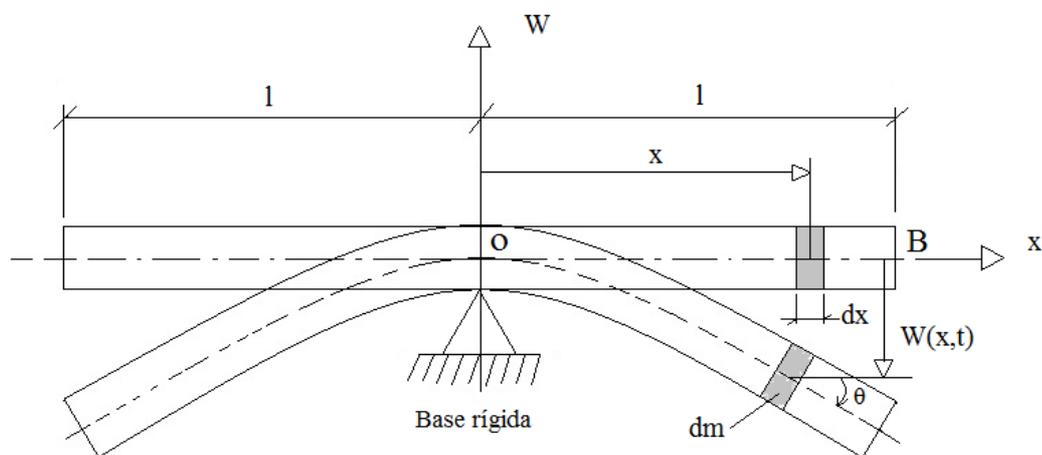
#### 2.6.4 Condições de contorno

Para o caso em estudo, ilustrado na Figura 6, realizou-se uma análise profunda dos fenômenos físicos que são originados durante o processo de trituração de minério de ferro, e claramente temos como caso extremo de solicitação a resistência do eixo durante o regime de trabalho, no exato momento em que ele cai de uma altura  $h$  e se choca com uma única rocha bem no centro de seu comprimento.

Consideramos a rocha de minério de ferro como sendo um vínculo rígido indeformável, assim no momento em que o eixo toca seu centro não ocorrem perdas de energia causadas por uma possível deformação do vínculo e através de emissão de som.

Sendo assim podemos interpretar a meia viga como engastada, devido à simetria, e dela extraíremos as seguintes condições de contorno:

Figura 6 – Viga deformada após o choque com a base rígida.



Extremidade livre  $x = l$

$$\text{Momento fletor} = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots(2.28)$$

$$\text{Força de Cisalhamento} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \dots(2.29)$$

Extremidade fixa (engastada)  $x = 0$

$$\text{Deflexão } w(x, t) = 0 \quad \dots(2.30)$$

$$\text{Inclinação} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \dots(2.31)$$

## 2.6.5 Obtenção das frequências naturais do sistema

Aplicando a primeira condição de contorno na equação

$$(w)_{x=0} = C_1 \cosh(\beta \times 0) + C_2 \sinh(\beta \times 0) + C_3 \cosh(\beta \times 0) + C_4 \sin(\beta \times 0) = 0 \quad \dots(2.32)$$

obtêm-se

$$C_1 + C_3 = 0, \quad \therefore C_1 = -C_3 \quad \dots(2.33)$$

Para que possamos aplicar a segunda condição de contorno, temos que realizar a primeira derivada da Equação (2.26), sendo assim

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \beta [C_1 \sinh(\beta \times 0) + C_2 \cosh(\beta \times 0) - C_3 \sin(\beta \times 0) + C_4 \cos(\beta \times 0)] = 0 \quad \dots(2.34)$$

isto é

$$\beta[C_2 + C_4] = 0, \quad \therefore C_2 = -C_4 \quad \dots(2.35)$$

Pela condição dada pela Equação (2.28), temos

$$\left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l} = \beta^2 [C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x - C_3 \cos \beta x - C_4 \sin \beta x]_{x=l} = 0 \quad \dots(2.36)$$

sendo assim

$$\beta^2 [C_1 \cosh(\beta l) + C_2 \sinh(\beta l) - C_3 \cos(\beta l) - C_4 \sin(\beta l)] = 0 \quad \dots(2.37)$$

Assim podemos reorganizar os termos substituindo as relações das Equações (2.33) e (2.35), obtendo-se

$$[C_1 \cosh \beta l + C_2 \sinh \beta l + C_1 \cos \beta l + C_2 \sin \beta l] = 0 \quad \dots(2.38)$$

reescrevemos em função de  $C_1$  e  $C_2$

$$C_1 (\cosh \beta l + \cos \beta l) + C_2 (\sinh \beta l + \sin \beta l) = 0 \quad \dots(2.39)$$

obtendo-se a seguinte relação

$$\frac{C_1}{C_2} = - \frac{\sinh \beta l + \sin \beta l}{\cosh \beta l + \cos \beta l} \quad \dots(2.40)$$

Para realizar a terceira derivada podemos

$$\left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=l} = \beta^3 [C_1 \sinh \beta l + C_2 \cosh \beta l + C_3 \sin \beta l - C_4 \cos \beta l] = 0 \quad \dots(2.41)$$

Utilizando as Equações (2.33) e (2.35), podemos reescrever a Equação (2.41) da seguinte forma

$$C_1 \sinh \beta l + C_2 \cosh \beta l - C_1 \sin \beta l + C_2 \cos \beta l = 0 \quad \dots(2.42)$$

colocando em evidencia os termos  $C_1$  e  $C_2$ , obtemos

$$C_1 (\sinh \beta l - \sin \beta l) + C_2 (\cosh \beta l + \cos \beta l) = 0 \quad \dots(2.43)$$

Obtemos das duas últimas Equações (2.42) e (2.43), as seguintes relações

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{\cosh \beta l + \cos \beta l}{\sinh \beta l - \sin \beta l} \quad \dots(2.44)$$

anotando que

$$\alpha = -\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sinh \beta l + \sin \beta l}{\cosh \beta l + \cos \beta l} \quad \dots(2.45)$$

assim sendo, obtemos

$$C_1 = -\alpha C_2 \quad \dots(2.46)$$

Da relação entre as Equações (2.40) e (2.44), obtemos

$$\frac{\cosh \beta l + \cos \beta l}{\sinh \beta l - \sin \beta l} = \frac{\sinh \beta l + \sin \beta l}{\cosh \beta l + \cos \beta l} \quad \dots(2.47)$$

as quais se reduzem para a Equação de autovalores

$$\cosh \beta l \cdot \cos \beta l + 1 = 0 \quad \dots(2.48)$$

Esta última Equação (2.48) é satisfeita por um número de valores  $\beta l$ , correspondendo a cada modo normal de oscilação:

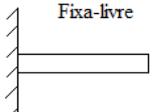
$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = \beta_n^2 \sqrt{\frac{E \pi/4 R^4}{\rho \pi R^2}} = \frac{\beta_n^2 R}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \dots(2.49)$$

Para  $n=1, 2, 3, \dots$

Os valores estes que são para o primeiro e segundo modos 1,875 e 4,695, respectivamente. Em consequência a frequência natural para o primeiro modo é

$$\omega_1 = \frac{1,875^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{3,515}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \dots(2.50)$$

Tabela 1 – Condições de contorno para uma viga fixa-livre.

Condições nas extremidades da viga	Equação de frequência	Forma modal (função normal)	Valor de $\beta_n l$
	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l$	$W_n(x) = C_n [ \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) ]$ <i>onde</i> $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1,875104$
			$\beta_2 l = 4,694091$
			$\beta_3 l = 7,854757$
			$\beta_4 l = 10,995541$

Fonte: Vibrações Mecânicas, Singiresu Rao, 4ª Edição P-284.

Substituindo  $C_1 = -C_3$ ,  $C_2 = -C_4$  e  $C_1 = -\alpha C_2$ , na Equação (2.26), tem-se

$$W(x) = -\alpha C_2 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + \alpha C_2 \cos \beta x - C_2 \sin \beta x \quad \dots(2.51)$$

organizando os termos, encontramos

$$W(x) = C_2 [ -\sin \beta x + \sinh \beta x + \alpha_n (\cos \beta x - \cosh \beta x) ] \quad \dots(2.52)$$

### 2.6.6 Ortogonalidade das funções normais

As funções normais  $W(x)$ , satisfazem a Equação (2.18)

$$c^2 \frac{d^4 W}{dx^4}(x) - \omega^2 W(x) = 0 \quad \dots(2.53)$$

Sejam  $W_i(x)$  e  $W_j(x)$  as funções normais correspondentes às frequências naturais  $\omega_i$  e  $\omega_j$  ( $i \neq j$ ), de modo que

$$c^2 \frac{d^4 W_i}{dx^4} - \omega_i^2 W_i = 0 \quad \dots(2.54)$$

e ainda

$$c^2 \frac{d^4 W_j}{dx^4} - \omega_j^2 W_j = 0 \quad \dots(2.55)$$

multiplicando a Equação (2.54) por  $W_j$  e a Equação (2.55) por  $W_i$ , subtraindo as equações resultantes uma da outra e integrando de 0 a  $l$ , temos

$$\int_0^l \left[ c^2 \frac{d^4 W_i}{dx^4} W_j - \omega_i^2 W_i W_j \right] dx - \int_0^l \left[ c^2 \frac{d^4 W_j}{dx^4} W_i - \omega_j^2 W_j W_i \right] dx = 0 \quad \dots(2.56)$$

podemos escrever na forma

$$\int_0^l W_i W_j dx = - \frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l (W_i'''' W_j - W_i W_j'''' ) dx \quad \dots(2.57)$$

onde uma 'linha' (') indica diferenciação em relação à  $x$ .

O lado direito da Equação (2.57), pode ser avaliado usando integração por partes para obter

$$\int_0^l W_i W_j dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left[ W_i W_j''' - W_j W_i''' + W_j' W_i'' - W_i' W_j'' \right] \Big|_0^l \quad \dots(2.58)$$

Podemos mostrar que o lado direito da Equação (2.58) é zero para qualquer combinação de condições de extremidade livre, fixa ou simplesmente apoiada. Em uma extremidade livre, o momento fletor e a força de cisalhamento são iguais à zero, de modo que

$$W'' = 0, \quad W''' = 0 \quad \dots(2.59)$$

para uma extremidade fixa, a deflexão e a inclinação são zero

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad \dots(2.60)$$

em uma extremidade simplesmente apoiada, o momento fletor e a deflexão são zeros

$$W'' = 0, \quad W = 0 \quad \dots(2.61)$$

Visto que cada termo no lado direito da Equação (2.58) é zero em  $x = 0$  ou  $x = l$ , para qualquer combinação das condições de contorno das Equações (2.59) a (2.61), a Equação (2.58) se reduz a

$$\int_0^l W_i W_j dx = 0 \quad \dots(2.62)$$

O que prova a ortogonalidade de funções normais para a vibração transversal em vigas.

### 2.6.7 Vibração forçada

A solução de vibração forçada de uma viga pode ser determinada com o método da superposição de modo, para que isto seja possível, consideramos que a deflexão da viga seja dada por

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \quad \dots(2.63)$$

onde  $W_n(x)$  é o  $n$ ésimo modo normal ou função característica que satisfaz a equação diferencial

$$c^2 \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 W_n(x) = 0 \quad \dots(2.64)$$

sendo assim, a Equação (2.64) toma a seguinte forma

$$EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \rho A \omega_n^2 W_n(x) = 0; \quad n=1, 2, \dots \quad \dots(2.65)$$

onde  $q_n(t)$ , é a coordenada generalizada no  $n$ ésimo modo.

Substituindo a Equação (2.63) na equação de vibração forçada, Equação (2.11), obtemos

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = f(x, t) \quad \dots(2.66)$$

em vista da Equação (2.65), a Equação (2.66) pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad \dots(2.67)$$

multiplicando toda a Equação (2.67), por  $W_m(x)$ , obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) W_m(x) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} W_m(x) = \frac{1}{\rho A} f(x,t) W_m(x) \quad \dots(2.68)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) W_m(x) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) W_m(x) \ddot{q}_n = \frac{f(x,t)}{\rho A} W_m(x) \quad \dots(2.69)$$

Observando que  $f(x, t)$  é a força externa por unidade de comprimento da viga, ou seja para o caso estudado

$$f(x, t) = -\rho A g = \text{Constante} \quad \dots(2.70)$$

então podemos transcrever a Equação (2.69) para a seguinte forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) W_m(x) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) W_m(x) \ddot{q}_n = -g W_m(x) \quad \dots(2.71)$$

integrando a Equação (2.71) de 0 até  $l$ , tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) \int_0^l W_n(x) W_m(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \int_0^l W_n(x) W_m(x) dx = -g \int_0^l W_m dx \quad \dots(2.72)$$

ela ortogonalidade, isto é

$$\omega_m^2 q_m(t) \int_0^l W_m^2 dx + \ddot{q}_m(t) \int_0^l W_m^2(x) dx = -g \int_0^l W_m dx \quad \dots(2.73)$$

trocando os índices  $m$  por  $n$ , assim temos

$$\omega_n^2 q_n(t) + \ddot{q}_n = -\frac{g}{b_n} \int_0^l W_n(x) dx \quad \dots(2.74)$$

onde

$$b_n = \int_0^l W_n^2 dx \quad \dots(2.75)$$

e anotando a constante

$$Q_n = -\frac{g}{b_n} \int_0^l W_n(x) dx \quad \dots(2.76)$$

então

$$\omega_n^2 q_n(t) + \ddot{q}_n(t) = Q_n \quad \dots(2.77)$$

ou seja

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 \left[ q_n(t) - \frac{Q_n}{\omega_n^2} \right] = 0 \quad \dots(2.78)$$

anotando

$$p_n(t) = q_n(t) - \frac{Q_n}{\omega_n^2} \quad \dots(2.79)$$

e como  $Q_n/\omega_n^2$  não é uma função dependente do tempo, temos

$$\ddot{p}_n(t) = \ddot{q}_n(t) \quad \dots(2.80)$$

consequentemente

$$\frac{d^2 p_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 p_n(t) = 0 \quad \dots(2.81)$$

A solução da Equação (2.81), é dada por

$$p_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad \dots(2.82)$$

ou seja

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{Q_n}{\omega_n^2} \quad \dots(2.83)$$

$$\dot{q}_n(t) = -\omega_n (A_n \sin \omega_n t - B_n \cos \omega_n t) \quad \dots(2.84)$$

Assim através da Equação (2.52), tem-se com a substituição  $C_2 = C_n$

$$W_n(x) = C_n [-\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)] \quad \dots(2.85)$$

então

$$Q_n = -\frac{g}{b_n} \int_0^l W_n(x) dx = \quad \dots(2.86)$$

$$= \frac{g \int_0^l C_n [-\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)] dx}{C_n^2 \int_0^l [-\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]^2 dx} = \frac{g d_n}{C_n} \quad \dots(2.87)$$

onde

$$d_n = \frac{\int_0^l [-\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)] dx}{\int_0^l [-\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]^2 dx} \quad \dots(2.88)$$

assim, obtemos a expressão de deslocamento lateral

$$\begin{aligned}
 w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n [-\text{sen } \beta_n x + \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\text{cos } \beta_n x - \text{cosh } \beta_n x)] q_n(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.89}$$

Pela condição inicial de posição  $w(x, 0) = 0$ , e segundo a Equação (2.83)

$$\left[ A_n + \frac{Q_n}{\omega_n^2} \right] = 0
 \tag{2.90}$$

e através da Equação (2.87), tem-se que

$$Q_n = \frac{g d_n}{C_n}
 \tag{2.91}$$

sendo assim, a Equação (2.90) fica na forma

$$A_n + \frac{g d_n}{C_n \omega_n^2} = 0
 \tag{2.92}$$

isolando-se  $A_n$ , temos que

$$A_n = -\frac{g d_n}{C_n \omega_n^2}
 \tag{2.93}$$

então

$$q_n(t) = -\frac{g d_n}{C_n \omega_n^2} \text{cos } \omega_n t + B_n \text{sen } \omega_n t + \frac{g d_n}{C_n \omega_n^2} = \frac{g d_n}{C_n \omega_n^2} (1 - \text{cos } \omega_n t) + B_n \text{sen } \omega_n t
 \tag{2.94}$$

Da relação que denotamos através da Equação (2.84), também lembrando a condição inicial de velocidade dada por

$$\dot{w}(x, 0) = V_0(x)
 \tag{2.95}$$

junto com a Equação(2.89), temos

$$V_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n [-sen \beta_n x + senh \beta_n x + \alpha_n (cos \beta_n x - cosh \beta_n x)] \dot{q}_n(t) \Big|_{t=0} \quad \dots(2.96)$$

isto é

$$V_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \dot{q}_n(t) \Big|_{t=0} \quad \dots(2.97)$$

multiplicando ambos os lados da Equação (2.97), por  $W_m$ , e integrando-os

$$\int_0^l V_0(x) W_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \dot{q}_n(0) W_n(x) W_m(x) dx = \dot{q}_n(0) b_m \quad \dots(2.98)$$

pela Equação (2.84), temos

$$\dot{q}_n(0) = \omega_m B_m \quad \dots(2.99)$$

sendo assim

$$\int_0^l V_0(x) W_m dx = \omega_m B_m b_m \quad \dots(2.100)$$

considerando  $V_0(x) = -V_0 = \text{constante}$ , então

$$-V_0 \int_0^l W_m dx = \omega_m B_m b_m \quad \dots(2.101)$$

ou seja

$$-V_0 C_m \int_0^l [-\text{sen } \beta_m x + \text{senh } \beta_m x + \alpha_m (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)] dx = \quad \dots(2.102)$$

$$= \omega_m B_m \int_0^l C_m^2 [-\text{sen } \beta_m x + \text{senh } \beta_m x + \alpha_m (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)]^2 dx \quad \dots(2.103)$$

ainda

$$C_m B_m = \frac{V_0 \int_0^l [\text{sen } \beta_m x - \text{senh } \beta_m x - \alpha_m (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)] dx}{\omega_m \int_0^l [\text{sen } \beta_m x - \text{senh } \beta_m x - \alpha_m (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)]^2 dx} \quad \dots(2.104)$$

$$C_m B_m = \frac{V_0 d_m}{\omega_m} \quad \dots(2.105)$$

Relembrando da relação denotada na Equação (2.89), temos

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n [-\text{sen } \beta_n x + \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)] \times \quad \dots(2.106)$$

$$\times \left[ \frac{g d_n}{C_n \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) + B_n \text{sen } \omega_n t \right]$$

ou seja

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\text{sen } \beta_n x + \text{senh } \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)] \quad \dots(2.107)$$

$$\times \left[ \frac{g d_n}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) + C_n B_n \text{sen } \omega_n t \right]$$

Levando a Equação (2.105) a Equação (2.107), obtemos

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\text{sen}\beta_n x + \text{senh}\beta_n x + \alpha_n (\text{cos}\beta_n x - \text{cosh}\beta_n x)] \times \left[ \frac{g d_n}{\omega_n^2} (1 - \text{cos}\omega_n t) + \frac{V_0 d_n}{\omega_n} \text{sen}\omega_n t \right] \quad \dots(2.108)$$

trabalhando seus termos, temos como equação final

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\text{sen}\beta_n x + \text{senh}\beta_n x + \alpha_n (\text{cos}\beta_n x - \text{cosh}\beta_n x)] \times \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} (1 - \text{cos}\omega_n t) + V_0 \text{sen}\omega_n t \right] = \sum_{n=1}^{\infty} [-\text{sen}\beta_n x + \text{senh}\beta_n x + \alpha_n (\text{cos}\beta_n x - \text{cosh}\beta_n x)] \times \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} - \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n}\right)^2 + V_0^2} \text{cos}(\omega_n t + \varphi_n) \right] \quad \dots(2.109)$$

onde

$$\text{tg}\varphi_n = \frac{V_0 \omega_n}{g} \quad \dots(2.110)$$

aceleração

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [-\text{sen}\beta_n x + \text{senh}\beta_n x + \alpha_n (\text{cos}\beta_n x - \text{cosh}\beta_n x)] \times d_n \omega_n \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n}\right)^2 + V_0^2} \text{cos}(\omega_n t + \varphi_n) \quad \dots(2.111)$$

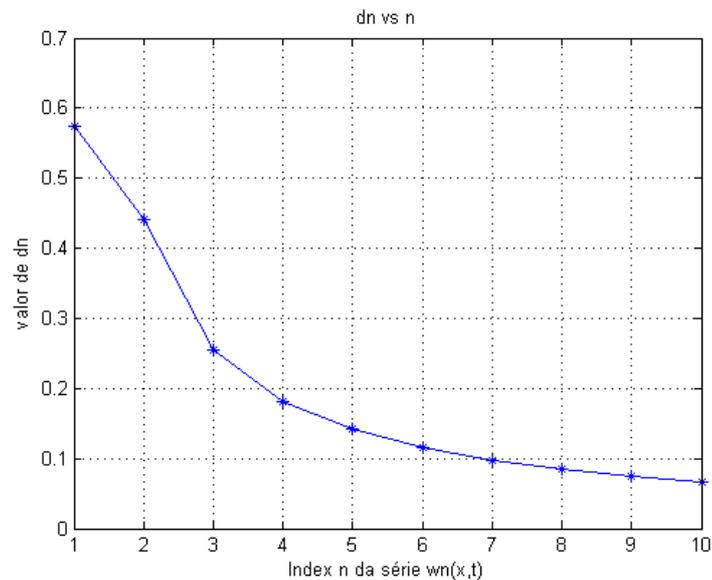
velocidade

$$v(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [-\text{sen}\beta_n x + \text{senh}\beta_n x + \alpha_n (\text{cos}\beta_n x - \text{cosh}\beta_n x)] \times \dots(2.112)$$

$$\times d_n \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n}\right)^2 + V_0^2} \text{cos}(\omega_n t + \varphi_n)$$

Esta é a expressão completa do deslocamento lateral da barra depois do choque com uma pedra. O desenvolvimento do cálculo de  $d_n$  consta no Apêndix A. O valor de  $d_n$  se aproxima de  $2/\beta_n l$  rapidamente quando  $n$  aumenta, podemos observar este fato na Figura 7. Isto implica que perfil de deslocamento  $W_n$  aproxima de zero com aumento do item  $n$ , nas séries segundo as Equações (2.109), e (2.111) e o perfil de velocidade aproxima-se de  $d_n V_0$  segundo a Equação (2.112). Por isso, na prática truncando-se a série  $n = 10$ , terá uma excelente precisão.

Figura 7 – Relação de  $d_n$  com  $n$



### 3 RESULTADOS DO IMPACTO CAUSADOS PELO CHOQUE

#### 3.1 Dados conhecidos

Os dados necessários para alimentar o programa Matlab foram:

Meio comprimento da viga:  $L = 7,25'' = 2,21 \text{ m}$ ;

Raio da haste:  $R = 2'' = 0,0508 \text{ m}$ ;

Módulo de elasticidade:  $E = 180 \text{ GPa}$ ;

Densidade da haste  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ;

Gravidade:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ;

Altura de queda:  $h = 5,0 \text{ m}$ ;

Velocidade no início do choque:  $V_0 = \sqrt{2gh} = 10,93634 \text{ m/s}$

#### 3.2 Obtenção das curvas de distribuição de momento fletor

Buscamos agora demonstrar como foi realizado o estudo do momento fletor máximo para o fenômeno físico estudado.

Pela Equação (2.9), o momento fletor é dado realizando a segunda derivada da função  $w(x, t)$ , representada pela Equação(2.109), sendo assim, temos

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = EI \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 [ \text{sen} \beta_n x + \text{senh} \beta_n x + \alpha_n (-\text{cos} \beta_n x - \text{cosh} \beta_n x) ] \times$$

$$\times \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} - \sqrt{\left( \frac{g}{\omega_n} \right)^2 + V_0^2} \text{cos}(\omega_n t + \varphi_n) \right]$$

...(3.1)

A Figura 8 até à Figura 13 ilustram a variação dos momentos fletores  $M_n(x, t)$  no intervalo de tempo 25,0 ms a 26,0 ms.

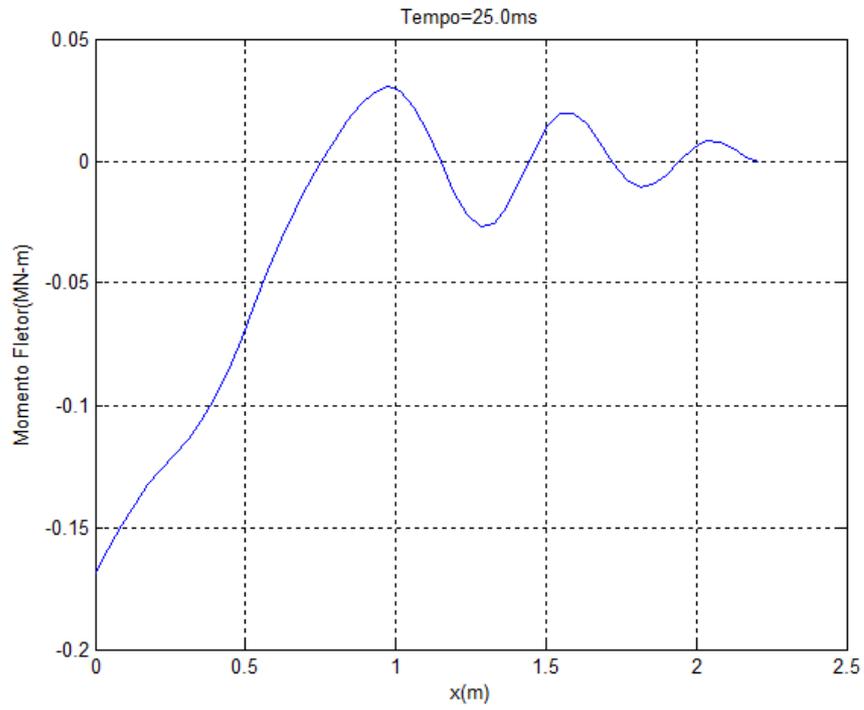
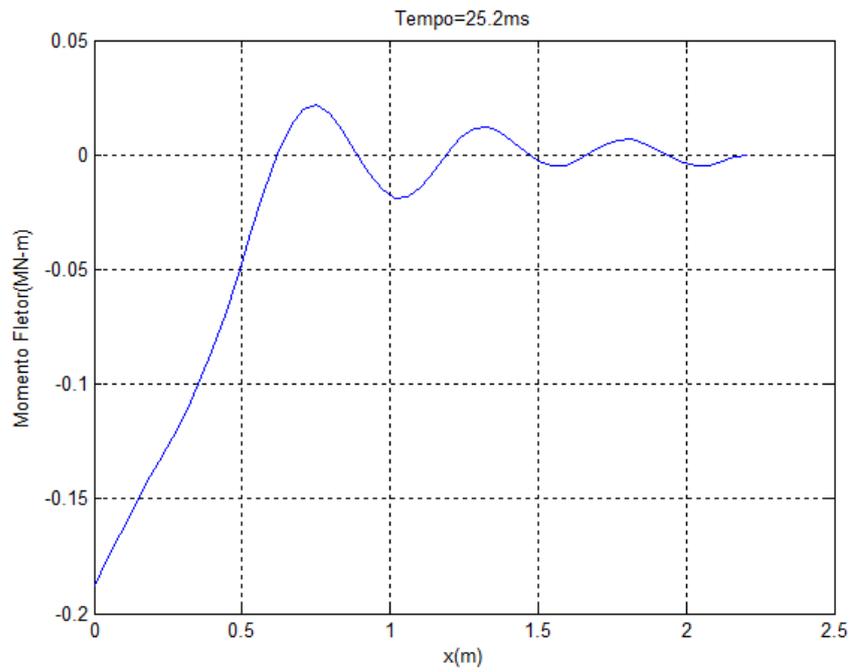
Figura 8 – Momento fletor no instante  $t=25,0$  ms.Figura 9 – Momento fletor no instante  $t=25,2$  ms.

Figura 10 – Momento fletor, tempo = 25,4 ms.

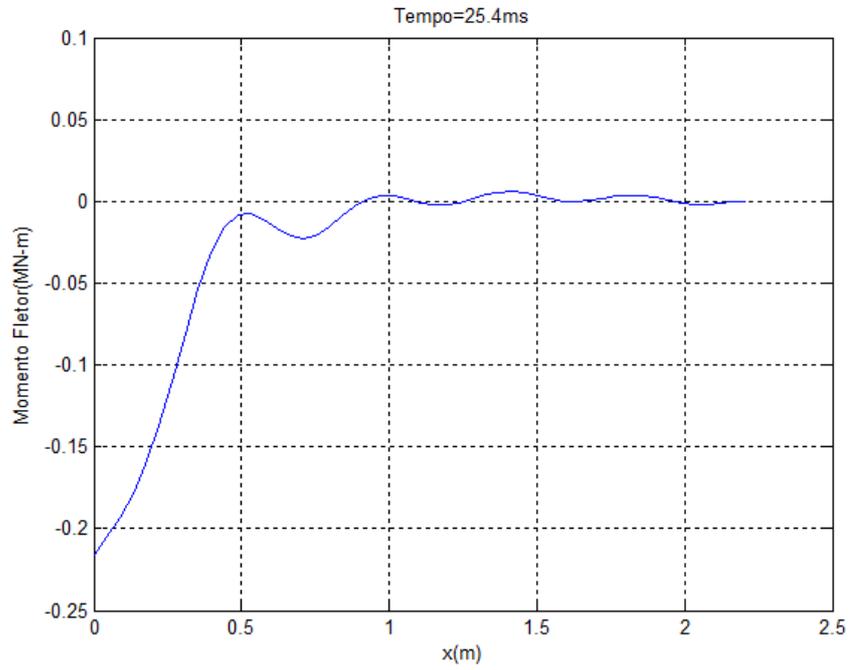


Figura 11 – Momento fletor, tempo = 25,6 ms.

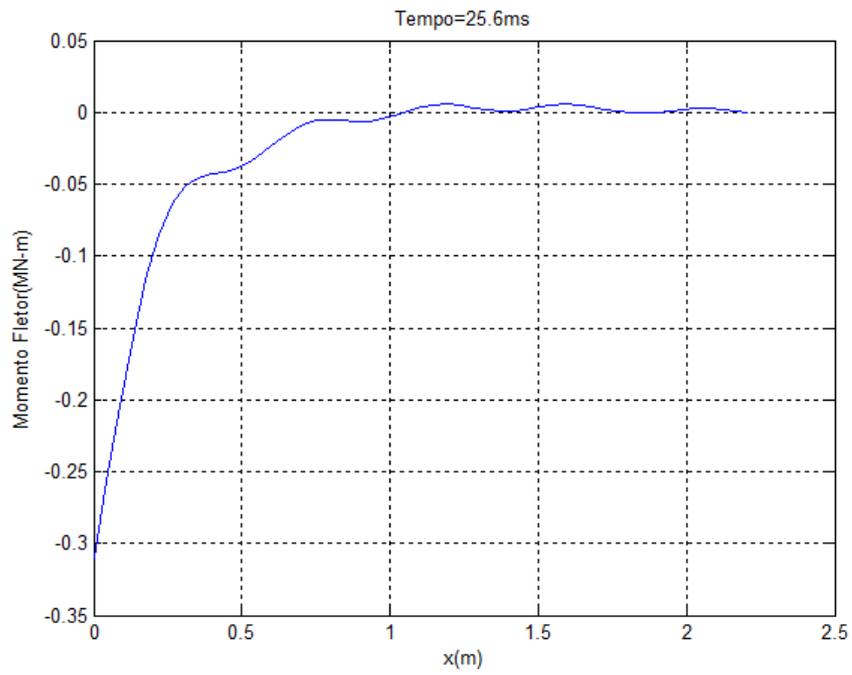


Figura 12 – Momento fletor, tempo = 25,8 ms.

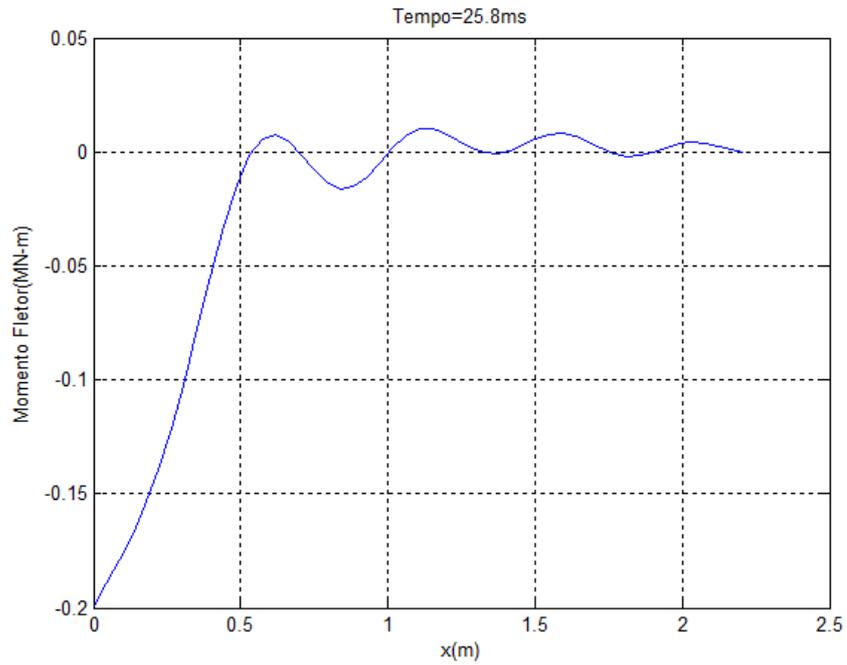
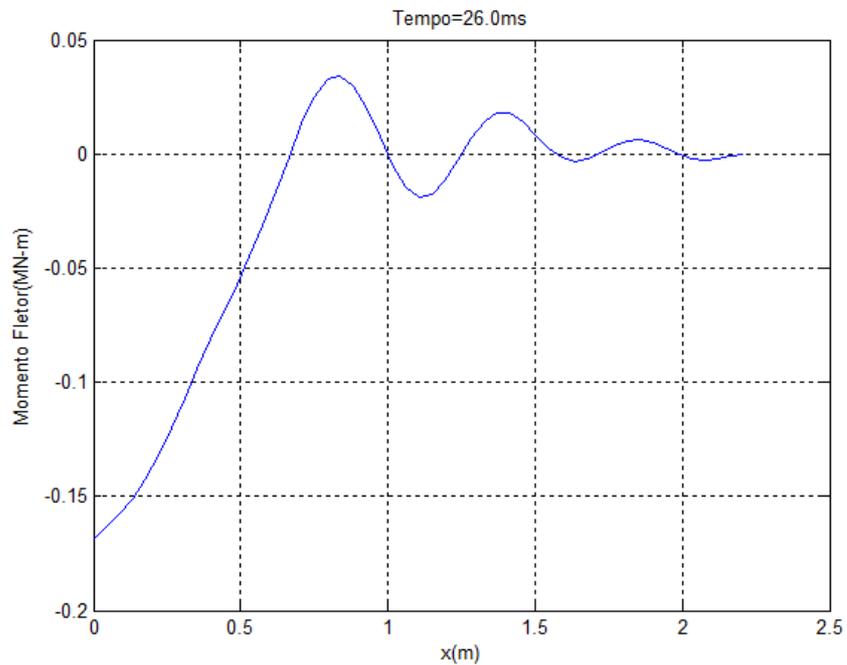


Figura 13 – Momento fletor, tempo = 26,0 ms.



Podemos observar na Figura 11, que o momento fletor atinge seu valor absoluto máximo no instante de 25,6 ms.

### 3.3 Obtenção dos gráficos de tensão

A tensão máxima de tração ocorre na superfície superior da haste, sendo representada pela Equação (3.2), substituindo a função  $w(x, t)$ , e resolvendo a segunda derivada, tem-se a Equação (3.3)

$$\sigma(x, t) = \frac{M(x, t)R}{I} = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \times \frac{R}{I} \quad \dots(3.2)$$

$$\sigma(x, t) = EI \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 [ \text{sen} \beta_n x + \text{senh} \beta_n x + \alpha_n (-\text{cos} \beta_n x - \text{cosh} \beta_n x) ] \times \\ \times \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} - \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n}\right)^2 + V_0^2} \text{cos}(\omega_n t + \varphi_n) \right] \quad \dots(3.3)$$

A força cortante, que é determinada através da Equação (3.4), onde

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad \dots(3.4)$$

Realizando a derivada da Equação (3.1), tem-se como solução a Equação (3.5), descrita abaixo

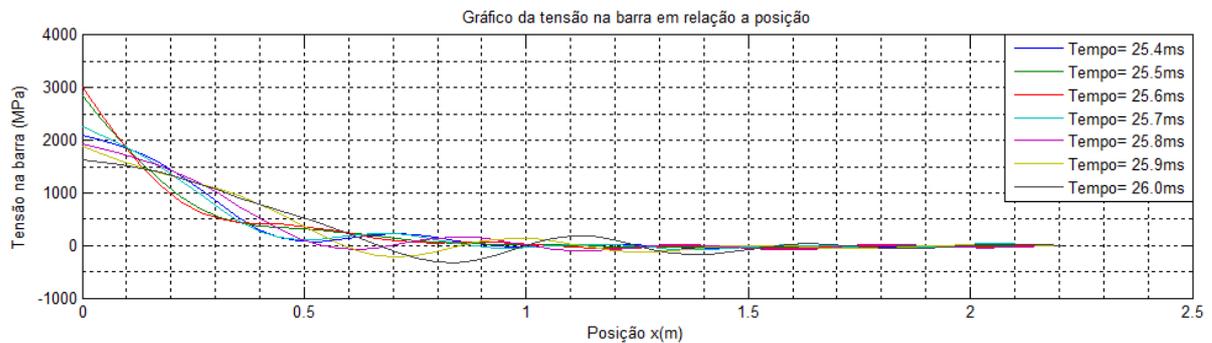
$$V(x, t) = EI \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^3 [ \text{cos} \beta_n x + \text{cosh} \beta_n x + \alpha_n (\text{sen} \beta_n x - \text{senh} \beta_n x) ] \times \\ \times \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} - \sqrt{\left(\frac{g}{\omega_n}\right)^2 + V_0^2} \text{cos}(\omega_n t + \varphi_n) \right] \quad \dots(3.5)$$

Podemos acompanhar o comportamento das curvas de tensão normal e de tensão cisalhante através de gráficos gerados no programa Matlab.

A Figura 14, apresenta a distribuição da tensão na superfície da barra, variando-se o tempo entre o intervalo de 25,4 ms até 26,0 ms. Pela figura, percebemos que a tensão normal

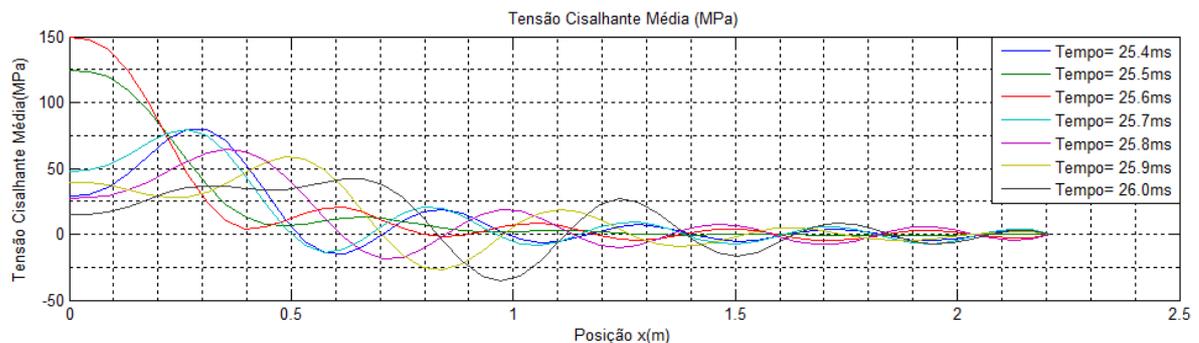
máxima está sobre o apoio, quando  $x = 0$ . Dependendo da resistência da superfície, o início da fratura pode ocorrer neste instante.

Figura 14 – Tensão na superfície superior com variação de tempo entre 25,4 ms e 26,0 ms, com altura de queda igual a 5,0 m.



Podemos verificar que no instante de tempo de 25,6 ms, a tensão na superfície da barra atinge o máximo valor, 3000 MPa. Na Figura 15, foram representadas as curvas de tensão cisalhante média ( $= V/A$ ), no mesmo intervalo de tempo, onde podemos observar que ela atinge o máximo valor, 150 MPa, no instante de 25,6 ms.

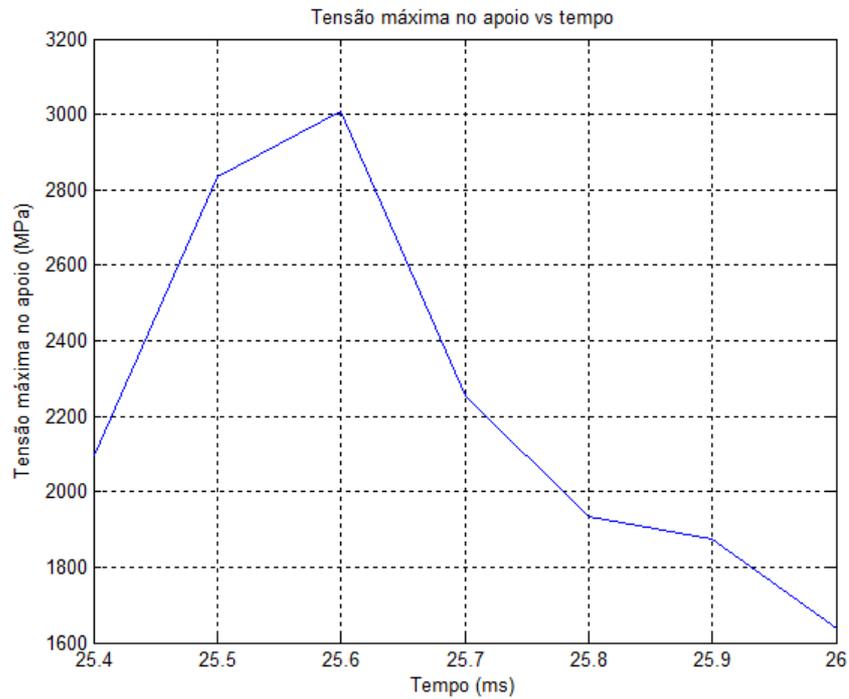
Figura 15 – Tensão cisalhante média na superfície superior.



Na verdade, a tensão não irá atingir este valor, porque a barra quebraria bem antes. Podemos interpretar que durante o intervalo de tempo entre zero até 25,6 ms, a tensão na barra aumenta com o passar do tempo e ocorre o valor máximo sobre o apoio.

Na Figura 16, está sendo demonstrada a tensão normal na superfície no apoio (MPa) em relação ao intervalo de tempo de 25,4 ms até 26,0 ms. Podemos observar que ocorre um pico máximo no exato momento em que temos o instante de 25,6 ms.

Figura 16 – Tensão normal na superfície no apoio

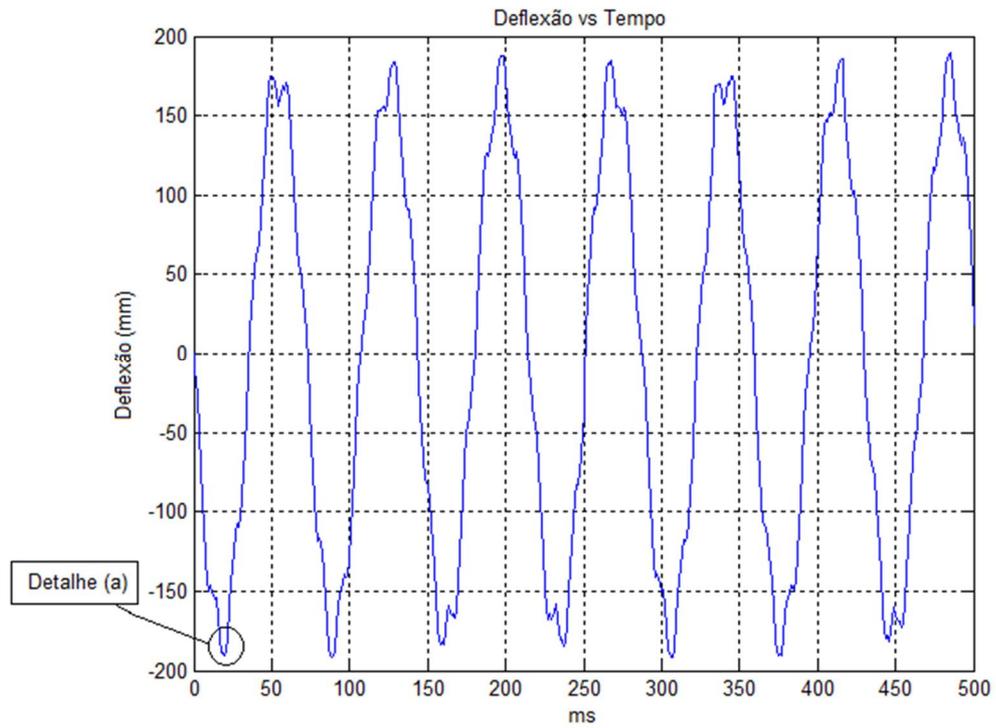


### 3.4 Obtenção das curvas de deflexão

Realizamos a análise das curvas de deflexão para a função  $w(x, t)$ , obtida pelas deduções feitas no Capítulo 2. Para a execução do cálculo, foi utilizado o programa Matlab, no qual obtemos o resultado da deflexão da ponta livre da barra, graficamente representado na Figura 17 com o intervalo de tempo entre 0 ms e 500 ms.

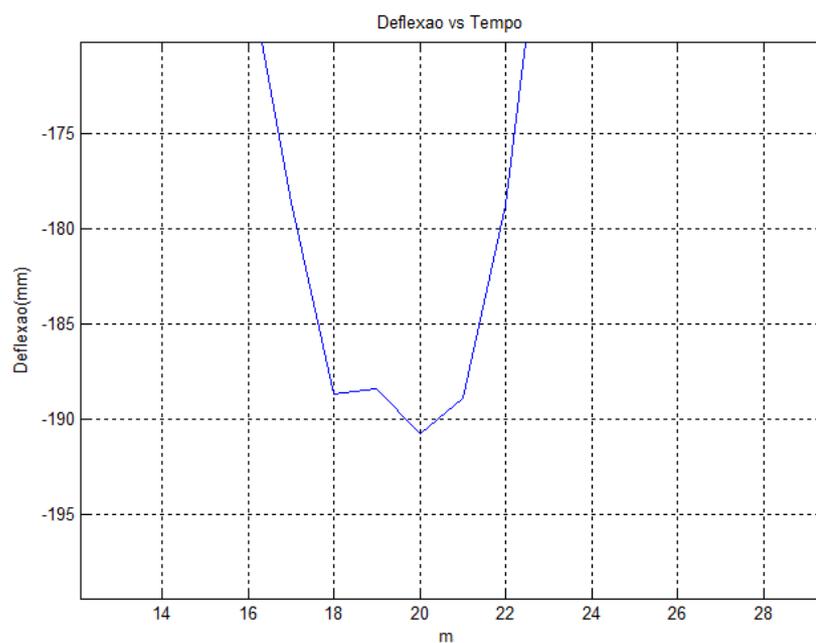
Certas propriedades do movimento oscilatório são de interesse na medida de vibração, como podemos observar na Figura 17, onde temos um valor de pico determinado da deflexão em função do tempo. Para nosso estudo, somente o primeiro pico de deslocamento é relevante, sendo que neste momento pode ocorrer o início da trinca.

Figura 17 – Deflexão da ponta da barra livre vs tempo



Para realizarmos nossa interpretação gráfica, das curvas geradas pela função  $w(x, t)$ , ampliamos o detalhe (a) do gráfico, obtendo-se a Figura 18.

Figura 18 – Deflexão da ponta da barra livre vs tempo

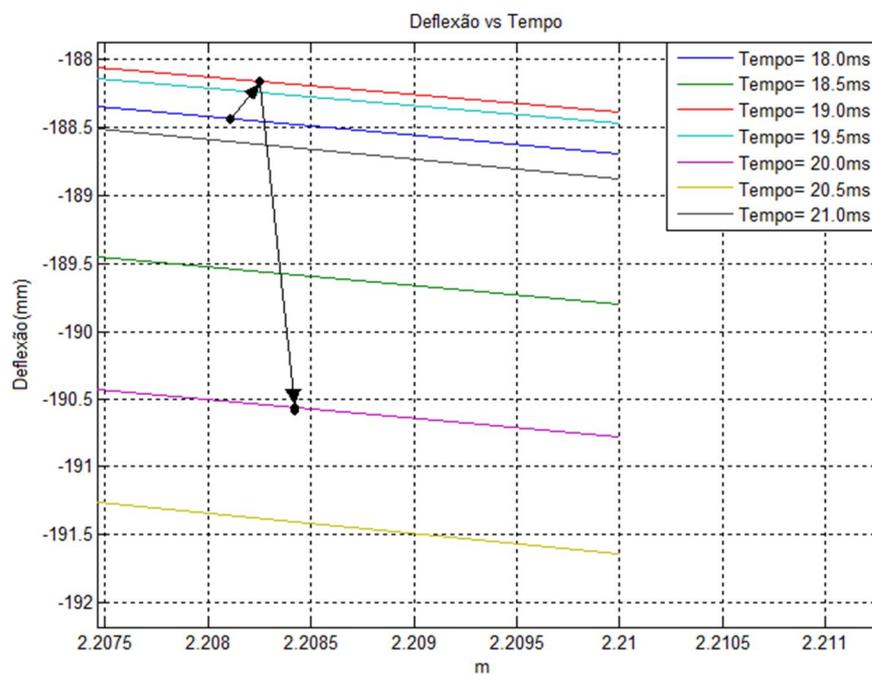


Podemos observar que o pico máximo ocorre entre os intervalos de 18 ms e 21 ms aproximadamente,

Na Figura 18, podemos observar claramente que quando ocorre a passagem de tempo de 18 ms para 19 ms, ocorre uma diminuição da deflexão mas logo em seguida no instante de 20 ms, ocorre um acréscimo da deflexão, chegando em seu valor máximo.

Podemos gerar sete curvas da deflexão, Figura 19, uma para cada tempo específico, a primeira em azul, para o tempo exato de 18 ms, para o tempo de 19 ms temos a cor vermelha e a curva de cor rosa para o tempo de 20 ms.

Figura 19 – Deflexão da ponta da barra livre vs tempo



Podemos concluir que a falha da barra somente poderá ocorrer até o instante de 25,6 ms. Pela Equação (2.109), podemos encontrar o tempo exato no qual a barra começa voltar para a sua posição de repouso.



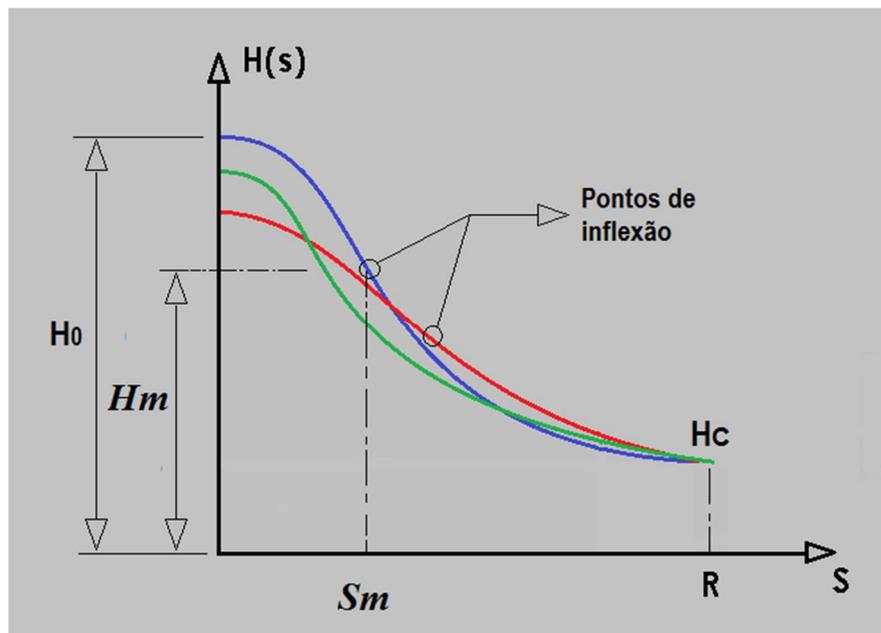
#### 4 PROPRIEDADES DO MATERIAL COM ENCRUAMENTO: PERFIL DE DUREZA, EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS, DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

##### 4.1 Modelo matemático do perfil de dureza da seção transversal da haste

Entre a superfície até o centro da haste, existe uma variação de dureza. Na superfície desejamos uma elevada dureza para suportar o atrito, mas para o centro existe uma região de transição em que observamos uma diminuição da dureza até um ponto em que o material segue com suas propriedades originais oriundas do seu processo de fabricação.

Podemos observar na Figura 20, três curvas fictícias, as quais representam os perfis de dureza que podem ocorrer na haste em questão.

Figura 20 – Curvas representando dois perfis de dureza.



Supondo que o perfil de dureza obedeça ao seguinte modelo matemático

$$H(s) = \frac{(H_0 - H_c) \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{s}{S_m} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{R}{S_m} \right)^2} \right]}{\left( 1 - e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{R}{S_m} \right)^2} \right)} + H_c \quad \dots(4.1)$$

onde  $s$  é a distância radial de um ponto considerado à superfície da haste.

As três condições que foram dadas, são:

- a) Na superfície  $s = 0$ :  $H(0) = H_0 = 850(kg/mm^2)$ .
- b) No centro da haste  $s = R$ :  $H(R) = H_c = 674(kg/mm^2)$ .
- c) No ponto  $s = s_m < R$ , ocorre a inflexão.

O valor de  $s_m$ , é responsável pelo ajuste de forma da curva de dureza. Quando o valor de  $s_m (< R)$  for pequeno, a curva de dureza cairá mais rápida e aproximando ao  $H_c$ .

#### 4.2 Coeficiente de encruamento do material

O coeficiente de encruamento  $n$  de um material é obtido durante a fase plástica, onde ocorre o fenômeno de encruamento, que podemos descrever como um aumento contínuo da tensão, isto implica na necessidade de aumentarmos a tensão para que ocorra a deformação do material, Cipriano (2008). O valor de “n” é uma constante do material, sempre inferior a um, quanto maior esse valor, mais encruado encontra-se o material, temos a seguinte relação

$$\bar{\sigma} = k\bar{\varepsilon}^n \quad \dots(4.2)$$

onde  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\varepsilon}$ , são a tensão verdadeira e deformação verdadeira respectivamente;  $k$  é uma constante que pode ser determinada pela tensão de escoamento inicial e o módulo de elasticidade; o expoente  $n$  é o coeficiente de encruamento do material. Pela Equação (4.2), podemos obter

$$\sigma_e = k\varepsilon_{ei}^n \quad \dots(4.3)$$

e

$$\sigma_u = k\varepsilon_u^n \quad \dots(4.4)$$

No ensaio de tração, a tensão nominal é definida por

$$\sigma_n = \frac{F}{A_0} = \frac{F}{A} * \frac{1}{\frac{A_0}{A}} = \frac{\bar{\sigma}}{\frac{A_0}{A}} \quad \dots(4.5)$$

onde, a tensão verdadeira ( $\bar{\sigma}$ ), é dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A} \quad \dots(4.6)$$

e  $A_0$  e  $A$  são áreas transversais, inicial e atual.

A deformação verdadeira ( $\bar{\varepsilon}$ ), é definida por

$$\bar{\varepsilon} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{A_0}{A} \quad \dots(4.7)$$

considerando que o material é incompressível no regime plástico.

Sendo assim, tem-se

$$l_0 A_0 = l A \quad \dots(4.8)$$

Podemos relacionar também

$$\frac{l}{l_0} = \frac{A_0}{A} \quad \dots(4.9)$$

pela Equação (4.7), tem-se

$$\frac{A_0}{A} = e^{\bar{\varepsilon}} \quad \dots(4.10)$$

levando a Equação (4.10) para a Equação (4.5), temos

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{e^{\bar{\varepsilon}}} = \frac{k \bar{\varepsilon}^n}{e^{\bar{\varepsilon}}} \quad \dots(4.11)$$

Sabemos que a resistência à tração do material pode ser identificada na curva nominal do ensaio  $\sigma \sim \varepsilon$  no ponto mais alto da curva. Derivando  $\sigma$ , em relação à  $\bar{\varepsilon}$ , tem-se

$$\frac{d\sigma}{d\bar{\varepsilon}} = n k \bar{\varepsilon}^{n-1} e^{-\bar{\varepsilon}} - k \bar{\varepsilon}^n e^{-\bar{\varepsilon}} = k e^{-\bar{\varepsilon}} \bar{\varepsilon}^{n-1} (n - \bar{\varepsilon}) \quad \dots(4.12)$$

então a deformação última verdadeira correspondendo à tensão última verdadeira é determinada por  $\frac{d\sigma}{d\bar{\varepsilon}}=0$ , ou seja

$$\bar{\varepsilon}_u = n \quad \dots(4.13)$$

Isto implica que o coeficiente de encruamento do material é igual à deformação última verdadeira,  $\frac{d\sigma}{d\bar{\varepsilon}}$ .

#### 4.3 Relação entre tensão de escoamento, tensão última e coeficiente de encruamento com a dureza do material

Pavlina (2008), após analisar dados de mais de 150 experimentos, de aços hipoeutetóides e também de aços não austeníticos, sugere em seu trabalho que as correlações de tensão de escoamento e tensão última com dureza, podem ser dadas através de

$$\sigma_e = -90,7 + 2,876 H_V \quad \dots(4.14)$$

$$\sigma_u = -99,8 + 3,734 H_V \quad \dots(4.15)$$

onde a tensão de escoamento  $\sigma_e$  e a tensão última  $\sigma_u$  estão na unidade MPa, e  $H_V$ , é a dureza da pirâmide de diamante conhecida também pelo nome de dureza Vickers, com unidade  $kgf/mm^2$ .

A dureza Vickers é uma forma de classificação da dureza dos materiais, neste método, é usada uma pirâmide de diamante com ângulo de diedro de  $136^\circ$  que é comprimida, com uma força arbitrária "F", contra a superfície do material. Calcula-se a área "A" da superfície impressa pela medição das suas diagonais. A carga plena é aplicada normalmente durante um

tempo de 10 a 15 segundos. As duas diagonais da endentação deixadas na superfície do material depois da remoção da carga são medidas usando-se um microscópio. Com os valores lidos calcula-se a média aritmética. A seguir calcula-se a área da superfície inclinada da endentação.

A dureza Vickers é o quociente obtido dividindo a carga (em kgf) pela área da endentação.

O encruamento do material é definido como sendo o endurecimento por deformação a frio. Quanto mais força age sobre o corpo, mais resistente ele se torna. Analisando o gráfico de tensão ( $\bar{\sigma}$ ) e deformação ( $\bar{\epsilon}$ ), quando ocorre um aumento contínuo da tensão, durante o ensaio, após o escoamento do material.

Isto ocorre devido às interações entre as discordâncias que impedem o escorregamento dos planos cristalográficos, formando barreiras para a deformação.

Podemos medir o encruamento através do coeficiente de encruamento, representado por "n". O valor de "n" é determinado por uma relação matemática empírica, considerando que a parcela da curva tensão-deformação real ou verdadeira entre o escoamento e a estricção é representada por uma equação exponencial:

Cahoon (2011), conclui em seu estudo, que as medições de dureza podem ser utilizadas para determinar a tensão de escoamento, o coeficiente de encruamento e a tensão última para uma vasta gama de materiais, tais como alumínio, bronze e aço.

A relação entre tensão última  $\sigma_u$ , coeficiente de encruamento ( $n$ ) e dureza  $H_V$ , é dada por

$$\sigma_u = \frac{H_V}{2,9} \left( \frac{n}{0,217} \right)^n \quad \dots(4.16)$$

onde  $\sigma_u$  é medida com a unidade  $kgf/mm^2$ .

Para nosso estudo, seria melhor não introduzir mais dados que necessitam serem determinados através de experimentos, exceto à dureza do perfil na seção transversal da haste. Isto implica que o coeficiente de encruamento ( $n$ ), deverá ser determinado pela dureza também.

Por isso, igualamos a Equação (4.15), com a Equação (4.16), assim obtemos

$$0,1(-99,8+3,734H_V)=\frac{H_V}{2,9}\left(\frac{n}{0,217}\right)^n \quad \dots(4.17)$$

onde a escala 0,1 é introduzida, devido à transformação de unidades:  
 $1 \text{ MPa} = 0,1 \text{ kgf/mm}^2$ .

A Equação (4.17) pode ser escrita da seguinte maneira

$$1,08286H_V-28,942=H_V\left(\frac{n}{0,217}\right)^n \quad \dots(4.18)$$

ou seja

$$n(\ln n - \ln 0,217) + \ln H_V - \ln(1,08286H_V - 28,942) = 0 \quad \dots(4.19)$$

por qual podemos obter a função do coeficiente de encruamento em relação à dureza:

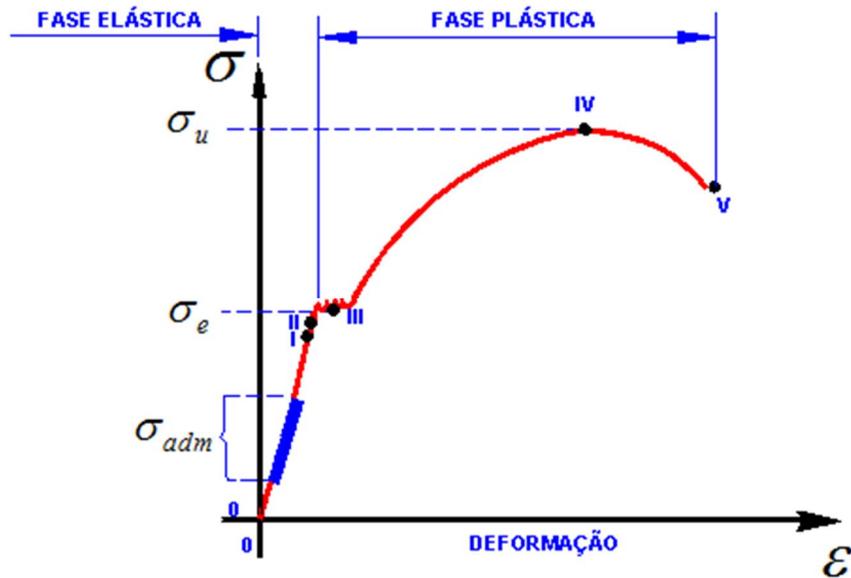
$$n = n(H_V) \quad \dots(4.20)$$

Para obter isso, necessita usar método numérico.

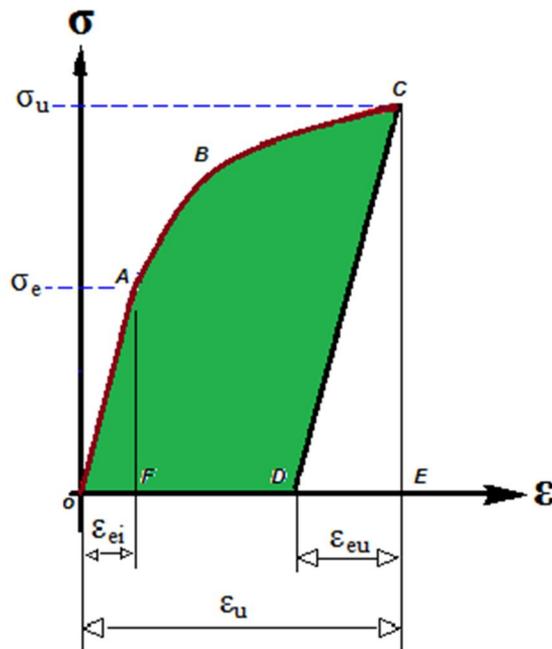
#### 4.4 Densidade de energia de deformação

Sabemos que as solicitações mecânicas aplicadas na haste, produzem tensões dentro dos limites elásticos e plásticos, conforme a Figura 21, tem-se as fases bem distintas no gráfico de tensão versus deformação.

Figura 21 – Gráfico de Tensão x Deformação



Para simplificar e facilitar a modelagem, supomos que a curva seja caracterizada como sendo exponencial como mostrada na Figura 22.

Figura 22 – Gráfico de tensão verdadeira ( $\sigma$ ) versus deformação verdadeira ( $\epsilon$ ).

Nesta figura temos os seguintes termos abreviados:

$\sigma_u$  = Tensão última verdadeira ou resistência de tração;

$\sigma_e$  = Tensão escoamento verdadeira inicial;

$\epsilon_u$  = Deformação última verdadeira;

$\epsilon_{ei}$  = Limite de deformação elástica;

$\epsilon_{eu}$  = Deformação elástica, correspondente ao descarregamento da tensão a partir de  $\sigma_u$ , até zero.

Então, as deformações são dadas através de

$$\epsilon_{ei} = \frac{\sigma_e}{E} \quad \dots(4.21)$$

$$\epsilon_{eu} = \frac{\sigma_u}{E} \quad \dots(4.22)$$

A densidade de energia de deformação absorvida é calculada pela área sob a curva de  $\sigma \sim \epsilon$ , ou seja, a área OABCDO, da Figura 22, ou também podemos encontrá-la realizando a seguinte integração

$$w_d = \int_A \sigma d\epsilon - \frac{1}{2} \sigma_u \epsilon_{eu} \quad \dots(4.23)$$

a equação constitutiva

$$\bar{\sigma} = k \bar{\epsilon}^n \quad \dots(4.24)$$

onde,  $n = \bar{\epsilon}_u$ , e  $k$ , é determinado por

$$\sigma_e = k \epsilon_{ei}^n \quad \dots(4.25)$$

então

$$\bar{\sigma} = \sigma_e \left( \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{ei}} \right)^n \quad \dots(4.26)$$

mas como

$$\sigma_e = E \varepsilon_{ei} \quad \dots(4.27)$$

então

$$\bar{\sigma} = \sigma_e \left( \frac{E \bar{\varepsilon}}{\sigma_e} \right)^n \quad \dots(4.28)$$

trabalhando a Equação (4.28), obtemos

$$\bar{\sigma} = \sigma_e^{1-n} (E \bar{\varepsilon})^n \quad \dots(4.29)$$

Para o material que atinge  $\bar{\sigma}_u$ , e descarrega em zero, o trabalho absorvido por unidade de volume unitário é a área sombreada da curva  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ , isto é

$$w_d = \frac{1}{2} \sigma_e \varepsilon_{ei} + \int_{\varepsilon_{ei}}^{\varepsilon_u} \sigma d\varepsilon - \frac{1}{2} \sigma_u \varepsilon_{eu} = \frac{1}{2E} (\sigma_e^2 - \sigma_u^2) + \int_{\varepsilon_{ei}}^{\varepsilon_u} \sigma_e \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ei}} \right)^n d\varepsilon \quad \dots(4.30)$$

$$w_d = \frac{1}{2E} (\sigma_e^2 - \sigma_u^2) + \frac{\sigma_e}{(n+1) \varepsilon_{ei}^n} [\varepsilon_u^{n+1} - \varepsilon_{ei}^{n+1}] = \frac{1}{2E} (\sigma_e^2 - \sigma_u^2) + \frac{\sigma_e}{n+1} \left[ \varepsilon_{ei} \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{ei}} \right)^{n+1} - \varepsilon_{ei} \right] \quad \dots(4.31)$$

pela Equação (4.32), temos

$$\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{ei}} = \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots(4.33)$$

Então, a densidade de energia de deformação absorvida é dada por

$$w_d = \frac{1}{2E} (\sigma_e^2 - \sigma_u^2) + \frac{\sigma_e^2}{E(n+1)} \left[ \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \quad \dots(4.34)$$

onde  $w_d$  é em função da distância radial  $S$ , a partir da superfície da barra até o ponto em estudo,  $\sigma_u(s)$ ,  $\sigma_e(s)$ , são calculados pelas Equações (4.14) e (4.15) respectivamente.

#### 4.5 Tenacidade à fratura

Griffith (1920), em seu trabalho intitulado como; “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids”, aplicou a primeira lei da termodinâmica voltada para analisar a propagação de trinca em materiais, onde se tem por definição que, quando um sistema passa de um estado de não equilíbrio para um estado equilibrado, ocorre uma diminuição da energia líquida.

Segundo Anderson (2013), a resistência à propagação de trincas ou a tenacidade à fratura do material ( $G_C$ ), pode ser expressa como

$$G_C = 2(\gamma_P + \gamma_S) \quad \dots(4.35)$$

onde:

$\gamma_S$ , é energia consumida durante a quebra das ligações atômicas/moléculas, em uma superfície unitária;

$\gamma_P$ , é energia plástica, em uma superfície unitária.

Geralmente para materiais dúcteis, como nosso caso de estudo,  $\gamma_S$ , pode ser desprezado em relação à  $\gamma_P$ .

Podemos definir também a tenacidade à fratura do material ( $G_C$ ), como

$$G_C = \frac{dU_p}{dA} \quad \dots(4.36)$$

onde  $dU_p$ , é a energia necessária para a criação de novas áreas, ou seja, é a energia necessária para que ocorra a propagação da trinca, em quantidade de área  $dA$ .

#### 4.6 Taxa de liberação de energia para a propagação da trinca

Irwin (1956) propôs uma abordagem energia de fratura que é essencialmente equivalente ao modelo de Griffith, exceto que a abordagem de Irwin está em uma forma mais conveniente para resolver problemas de engenharia. Irwin definiu uma taxa de liberação de energia  $G$ , que é uma medida da energia disponível para realizar um incremento de extensão de trinca, Anderson (2013).

Quando o sistema de trinca é submetido ao carregamento, a energia do sistema se acumula. Define-se a taxa de liberação ou de propagação de trinca como

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad \dots(4.37)$$

Aqui o termo “taxa” não se refere à derivada ao tempo assim a taxa de mudança na energia potencial com a área fraturada. Como  $G$  é obtido pela derivada da potência, é chamada também como força motriz de propagação de trinca. Pode-se aprovar a seguinte relação no regime elástico:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad \dots(4.38)$$

onde  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ , são fatores de intensidade de tensões correspondendo os três modos de propagação de trinca: I, II e III respectivamente;  $E'$ , é o módulo de elasticidade transversal e

$$E' = \begin{cases} E & (\text{Estado de tensão plana}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{Estado de deformação plana}) \end{cases} \quad \dots(4.39)$$

Para o nosso caso de estado, apenas existe o modo I, de propagação de trinca, sendo

$$G = \frac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} \quad \dots(4.40)$$



## 5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA VIGA DE EULER-BERNOULLI, CONTENDO TRINCAS.

### 5.1 Modelo matemático da propagação de trinca na seção transversal da haste

A solução completa do movimento da viga no exato momento do choque com um apoio rígido em seu centro é expressa pela Equação (2.109), ou seja

$$w(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} - V_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right] \quad \dots(5.1)$$

onde

$$V_n = \sqrt{\left( \frac{g}{\omega_n} \right)^2 + V_0^2} \quad \dots(5.2)$$

a velocidade é dada por

$$v(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) d_n V_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad \dots(5.3)$$

Podemos obter a aceleração através de

$$a(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) d_n \omega_n V_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \dots(5.4)$$

onde

$$w_n(z) = -\sin \beta_n z + \sinh \beta_n z + \alpha_n (\cos \beta_n z - \cosh \beta_n z) \quad \dots(5.5)$$

No exato momento em que ocorre o surgimento da trinca, temos

$$w(z, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) \frac{d_n}{\omega_n} \left[ \frac{g}{\omega_n} - V_n \cos(\omega_n t_0 + \varphi_n) \right] \quad \dots(5.6)$$

$$v(z, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) d_n V_n \sin(\omega_n t_0 + \varphi_n) \quad \dots(5.7)$$

$$a(z, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) d_n \omega_n V_n \cos(\omega_n t_0 + \varphi_n) \quad \dots(5.8)$$

A equação governante da vibração da viga é dada pela Equação (2.10), ou seja

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(z, t) \right] + \rho A(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z, t) = f(z, t) \quad \dots(5.9)$$

Quando uma trinca surge, a obtenção da solução dinâmica da equação acima é muito difícil, devido ao fato de ocorrer à variação da rigidez à flexão EI junto com a propagação da trinca.

Caso soubermos a aceleração no instante  $t_i$ , podemos transformar o problema dinâmico para estático, assim

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI(z, t_i) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(z, t_i) \right] = f(z, t_i) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z, t_i) = q(z) \quad \dots(5.10)$$

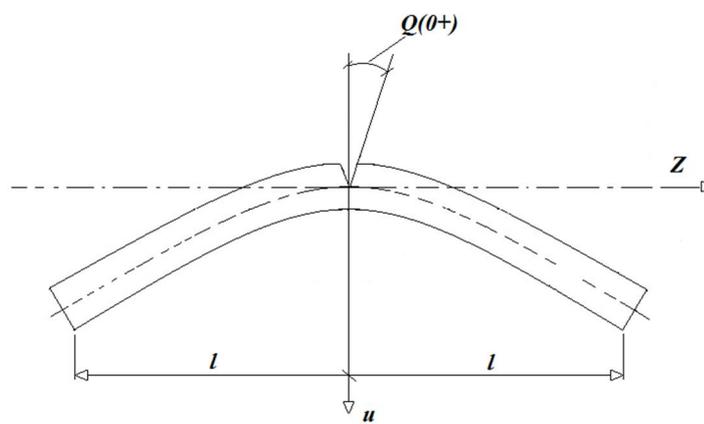
Vários pesquisadores já propuseram métodos para resolver o problema de vigas contendo trincas submetidas a cargas estáticas como Joyce e Hackett (1989), Landes e Herrera (1988) e Hahn e associados (1974).

Adotamos o método sugerido pelos pesquisadores Palmeri e Cicirello (2011), onde seu trabalho apresenta uma técnica numérica para analisar a vibração livre em vigas de seção transversal uniforme, com rachaduras. Eles definem que a partir da seção de trinca, ocorre a formação de duas partes chamadas de subestruturas, e estas estão ligadas por uma matriz flexional, tendo em vista que as forças que agem sobre o corpo derivadas da mecânica da

fratura, através de fatores de intensidade de tensão adequados foram encontradas expressões de taxa de liberação de energia de deformação.

Vamos supor que o deslocamento da haste  $u$ , é para baixo, possuindo valor positivo, e uma trinca surge no apoio bem no centro do comprimento da haste, podemos tratar o caso levando em conta a relação de simetria da haste, e tratar somente um lado da haste, consideramos este ponto como sendo  $z = 0$ , conforme a Figura 23.

Figura 23 – Surgimento de uma trinca na haste.



Assim podemos reescrever a Equação (5.10), da seguinte forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(z, t_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z, t_i) \right] = f(z, t_i) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z, t_i) = q(z) \quad \dots(5.11)$$

onde

$$q(z) = \rho Ag - \rho Aa(z, t_i) = \rho A [g - a(z, t_i)] \quad \dots(5.12)$$

tendo  $a(z, t_i) = a(z, t_0) = cte$ , como suposição, devido a dificuldade de obtenção da solução dinâmica da Equação (5.11), com propagação de trinca.

Segundo Palmieri e Cicirello (2011), todas as grandezas serão transformadas para adimensionais. Para isso, multiplica-se a Equação (5.11) por:  $l^3/EI_0$  e  $z = \zeta l$

$$\frac{l^3}{EI_0} \frac{d}{ld\zeta} \left[ \frac{d}{ld\zeta} EI(z, t_i) \frac{d}{ld\zeta} \left( \frac{d}{d\zeta} \frac{u(\zeta l)}{l} \right) \right] = \rho A [g - a(\zeta l)] \frac{l^3}{EI_0} \quad \dots(5.13)$$

anotando

$$\tilde{I}(\zeta) = \frac{I(z, t_i)}{I_0} = \frac{I(\zeta l, t_i)}{I_0} \quad \dots(5.14)$$

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{u(z)}{l} = \frac{u(\zeta l)}{l} \quad \dots(5.15)$$

onde:

$u(z)$ , deflexão (positiva no sentido para baixo);

$\phi(z)$ , função de inclinação;

$q(z)$ , é a carga transversal sobre a haste (positivo se para baixo).

$$\tilde{q}(\zeta) = q(z) \frac{l^3}{EI_0} = \rho A [g - a(z, t_i)] \frac{l^3}{EI_0} = \frac{\rho A g l^3}{EI_0} - \frac{\rho A a(\zeta l, t_i) l^3}{EI_0} = \tilde{g} - \tilde{a}(\zeta) \dots \quad \dots(5.16)$$

onde:  $0 \leq \zeta \leq 1$ , é um parâmetro correspondente à posição  $z$ ;  $I_0$ , é o momento de inércia sem trinca e

$$\tilde{g} = \frac{\rho A g l^3}{EI_0} \quad \dots(5.17)$$

$$\tilde{a}(\zeta) = \frac{\rho A a(\zeta l, t_i) l^3}{EI_0} \quad \dots(5.18)$$

então a equação governante assume a seguinte forma

$$\left[ E \tilde{I}(\zeta) \tilde{u}''(\zeta) \right]' = \tilde{q}(\zeta) \quad \dots(5.19)$$

onde:  $\tilde{q}(\zeta)$  é carga estática equivalente adimensional.

A solução encontrada pelos pesquisadores Palmeri e Cicirello (2011), é

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\zeta) = \mathcal{L}^{-1} \langle \tilde{U}(s) \rangle = & C_4 + C_3\zeta + \frac{1}{2}C_2\zeta^2 + \frac{1}{6}C_1\zeta^3 + \tilde{q}^{[4]}(\zeta) \\ & + \sum_{j=1}^n \gamma_j (\zeta - \bar{\zeta}_j) H(\zeta - \bar{\zeta}_j) \left[ C_2 + C_1\bar{\zeta}_j + \tilde{q}^{[2]}(\bar{\zeta}_j) \right] \end{aligned} \quad \dots(5.20)$$

A função de rotação da linha elástica é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\zeta) = \tilde{u}'(\zeta) = & -C_3 - C_2\zeta - \frac{1}{2}C_1\zeta^2 - \tilde{q}^{[3]}(\zeta) \\ & - \sum_{j=1}^n \gamma_j H(\zeta - \bar{\zeta}_j) \left[ C_2 + C_1\bar{\zeta}_j + \tilde{q}^{[2]}(\bar{\zeta}_j) \right] \end{aligned} \quad \dots(5.21)$$

O momento fletor adimensional  $\tilde{M}(\zeta)$  e a força cortante  $\tilde{V}(\zeta)$ , são dados por

$$\tilde{M}(\zeta) = \frac{M(\zeta l)}{EI_0} = \tilde{E}I(\zeta)\tilde{u}''(\zeta) = -C_2 - C_1\zeta - \tilde{q}^{[2]}(\zeta) \quad \dots(5.22)$$

$$\tilde{V}(\zeta) = \frac{V(\zeta l)}{EI_0} = \tilde{E}I(\zeta)\tilde{u}'''(\zeta) = -C_1 - \tilde{q}^{[1]}(\zeta) \quad \dots(5.23)$$

onde:

$C_1 \sim C_4$ , são constantes que serão determinadas por condições de contorno;

$\tilde{q}^{[m]}(\zeta)$ , é o primitivo de ordem m da carga  $\tilde{q}(\zeta)$ ;

$\alpha_j$ , é o parâmetro de flexibilidade da j-ésima trinca dado por

$$\gamma_j = \frac{EI_0}{K_j l} \quad \dots(5.24)$$

$K_j$ , é a rigidez elástica da mola rotacional correspondendo a j-ésima junta interna que será determinada na Seção 5.6.

Aqui a trinca é modelada como uma mola elástica rotacional,

$H(\zeta)$ , é a função generalizada, chamada à função de Heaviside, que tem as seguintes propriedades:

$$H(\zeta) = \delta^{[1]}(\xi) = \int_{-\infty}^{\zeta} \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \zeta < 0; \\ 1/2, & \zeta = 0; \\ 1, & \zeta > 0. \end{cases} \quad \dots(5.25)$$

$$H'(\zeta) = \delta(\zeta) \quad \dots(5.26)$$

$$\int H(\zeta) d\zeta = \zeta H(\zeta) \quad \dots(5.27)$$

onde  $\delta(\zeta)$ , é a função de Dirac

$$\delta(\zeta) = \begin{cases} 0 & \zeta \neq 0 \\ \infty & \zeta = 0 \end{cases} \quad \dots(5.28)$$

Para nosso caso, há apenas uma trinca localizada no  $\bar{\zeta}_j = 0$ .

## 5.2 Solução estática na primeira propagação de trinca no tempo $t_{i-1} = t_0$

Os primitivos da carga  $\tilde{q}(\zeta)$  podem ser obtidos por integrações, assim

$$\tilde{q}^{[1]}(\zeta) = \int \tilde{q}(\zeta) d\zeta = \int (\tilde{g} - \tilde{a}(\zeta)) d\zeta = \tilde{g}\zeta - \int \tilde{a}(\zeta) d\zeta \quad \dots(5.29)$$

notando a Equação (5.17) para o instante  $t_0$ , tem-se

$$\tilde{a}(\zeta) = -\frac{\rho A a(\zeta l, t_0) l^3}{EI_0} = -\frac{\rho A l^3}{EI_0} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\zeta l) d_n \omega_n [V_n \cos(\omega_n t_0 + \varphi_n)] \quad \dots(5.30)$$

o sinal negativo ocorre devido que  $u(x)$ , é positivo para baixo, contra  $w(x)$ , positivo para cima.

Denotamos que

$$D_n = \frac{\rho A l^3}{EI_0} d_n w_n V_n \cos(\omega_n t_0 + \varphi_n) \quad \dots(5.31)$$

então

$$\begin{aligned} -\int \tilde{a}(\zeta) d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\zeta l) D_n d\zeta = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int [-\text{sen}\beta_n \zeta l + \text{senh}\beta_n \zeta l + \alpha_n (\text{cos}\beta_n \zeta l - \text{cosh}\beta_n \zeta l)] d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{l\beta_n} \{ [\text{cos}\beta_n \zeta l + \text{cosh}\beta_n \zeta l + \alpha_n (\text{sen}\beta_n \zeta l - \text{senh}\beta_n \zeta l)] \} \end{aligned} \quad \dots(5.32)$$

$$\tilde{q}^{[1]}(\zeta) = \tilde{g}\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{l\beta_n} \left\{ \begin{aligned} &[\text{cos}\beta_n \zeta l + \text{cosh}\beta_n \zeta l + \\ &+ \alpha_n (\text{sen}\beta_n \zeta l - \text{senh}\beta_n \zeta l)] \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.33)$$

da mesma maneira, obtêm-se

$$\tilde{q}^{[2]}(\zeta) = \int \tilde{q}^{[1]}(\zeta) d\zeta = \frac{\tilde{g}\zeta^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(l\beta_n)^2} \left\{ \begin{aligned} &(\text{sen}\beta_n \zeta l + \text{senh}\beta_n \zeta l) + \\ &+ \alpha_n [-\text{cos}\beta_n \zeta l + \text{cosh}\beta_n \zeta l] \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.34)$$

$$\tilde{q}^{[3]}(\zeta) = \int \tilde{q}^{[2]}(\zeta) d\zeta = \frac{\tilde{g}\zeta^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(l\beta_n)^3} \left\{ \begin{aligned} &(-\text{cos}\beta_n \zeta l + \text{cosh}\beta_n \zeta l) + \\ &+ \alpha_n [-\text{sen}\beta_n \zeta l - \text{senh}\beta_n \zeta l] \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.35)$$

$$\tilde{q}^{[4]}(\zeta) = \int \tilde{q}^{[3]}(\zeta) d\zeta = \frac{\tilde{g}\zeta^4}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(l\beta_n)^4} \left\{ \begin{aligned} &(-\text{sen}\beta_n \zeta l + \text{senh}\beta_n \zeta l) + \\ &+ \alpha_n [\text{cos}\beta_n \zeta l - \text{cosh}\beta_n \zeta l] \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.36)$$

pelas condições de contorno naturais:  $\tilde{V}(1)=0$ , e pela Equação (5.23), tem-se

$$-C_1 - \tilde{q}^{[1]}(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -\tilde{q}^{[1]}(1) \quad \dots(5.37)$$

pelas Equações (5.34) e (2.44), tem-se

$$\tilde{q}^{[1]}(1) = \tilde{g} \Rightarrow C_1 = -\tilde{g} \quad \dots(5.38)$$

pela condição de contorno natural,  $\tilde{M}(1)=0$  e pela Equação (5.22), tem-se

$$-C_2 - C_1 - \tilde{q}^{[2]}(1) = 0 \quad \dots(5.39)$$

através das Equações (5.34) e (2.45), tem-se

$$\tilde{q}^{[2]}(1) = \frac{\tilde{g}}{2} \quad \dots(5.40)$$

então

$$C_2 = -C_1 - \tilde{q}^{[2]}(1) = \tilde{g} - \frac{\tilde{g}}{2} = \frac{\tilde{g}}{2} \quad \dots(5.41)$$

pela condição de contorno essencial  $\tilde{\varphi}(0)=0$ , e pela Equação (5.21), tem-se

$$-C_3 - \tilde{q}^{[3]}(0) - \gamma_1 \frac{1}{2} [C_2 + \tilde{q}^{[2]}(0)] = 0 \quad \dots(5.42)$$

pela Equação (5.34), tem-se

$$\tilde{q}^{[2]}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n (-2) d_n}{(l\beta n)^2} \quad \dots(5.43)$$

pela Equação (5.35), tem-se

$$\tilde{q}^{[3]}(0)=0 \quad \dots(5.44)$$

então temos

$$\begin{aligned} -C_3 - \frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] &= 0 \\ C_3 &= -\frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] \end{aligned} \quad \dots(5.45)$$

pela condição de contorno essencial,  $\tilde{u}(0)=0$  e pela Equação (5.20), tem-se

$$C_4 + \tilde{q}^{[4]}(0) = 0 \quad \dots(5.46)$$

então pela Equação (5.36), temos

$$C_4 = -\tilde{q}^{[4]}(0) = 0 \quad \dots(5.47)$$

assim obtemos

$$\begin{aligned} C_1 &= -\tilde{g} \\ C_2 &= -\tilde{g}/2 \\ C_3 &= -\gamma_1/2 \left[ \tilde{g}/2 + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \quad \dots(5.48)$$

levando  $C_1 \sim C_4$ , as Equações (5.20)~(5.22), obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\zeta) &= \frac{\gamma_1 \zeta}{2} \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]} \right] + \frac{\tilde{g}}{4} \zeta^2 + \frac{1}{6} (-\tilde{g} \zeta^3) + \frac{\tilde{g} \zeta^4}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\zeta l) D_n}{(l \beta_n)^4} + \gamma_1 \zeta H(\zeta) \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] \\ \tilde{u}(\zeta) &= \frac{\tilde{g} \zeta^2}{24} (6 - 4\zeta + \zeta^2) + \frac{\gamma_1 \zeta}{2} [2H(\zeta) - 1] \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\zeta l) D_n}{(l \beta_n)^4} \end{aligned} \quad \dots(5.49)$$

$$\tilde{\varphi}(\zeta) = \frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] - \frac{\tilde{g}}{2} \zeta + \frac{\tilde{g} \zeta^2}{2} - \tilde{q}^{[3]}(\zeta) - \gamma_1 H(S) \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] \quad \dots(5.50)$$

$$\tilde{\varphi}(0^+) = \frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] - \gamma_1 \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] = -\frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] \quad \dots(5.51)$$

$$\tilde{M}(\zeta) = -\frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{g} \zeta - \tilde{q}^{[2]}(\zeta) \quad \dots(5.52)$$

$$\tilde{M}(0) = -\frac{\tilde{g}}{2} - \tilde{q}^{[2]}(0) = -\left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right] \quad \dots(5.53)$$

Temos como relação entre as funções de  $\zeta$  adimensionais com as funções de  $z$ .

$$u(z) = \tilde{u}(\zeta) l \quad \dots(5.54)$$

$$M(z) = \frac{\tilde{M}(\zeta) EI_0}{l} \quad \dots(5.55)$$

Podemos denotar que o trabalho feito pela mola rotacional é dividido por dois, pois se aplica a metade da haste, é dado por

$$\frac{1}{2} M(0) \varphi(0) = \frac{1}{2} \frac{EI_0}{l} \tilde{M}(0) \tilde{\varphi}(0^+) = \frac{1}{2} \frac{EI_0}{l} \left\{ \gamma_1 \left[ \frac{\tilde{g}}{2} + \tilde{q}^{[2]}(0) \right]^2 \right\} \quad \dots(5.56)$$

A energia de deformação é dada por

$$U = \frac{1}{2EI_0} \int_0^l M^2(z) dz = \frac{1}{2EI_0} \int_0^1 l \tilde{M}^2(\zeta) d\zeta \cdot \left( \frac{EI_0}{l} \right)^2 = \frac{EI_0}{2l} \int_0^1 \tilde{M}^2(\zeta) d\zeta \quad \dots(5.57)$$

### 5.3 Solução estática com trinca no tempo $t_i (i > 1)$

A equação governante ainda mesma como a Equação (5.19)

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} (E\tilde{I}u''(\zeta)) = \tilde{q}(\zeta) \quad \dots(5.58)$$

onde, a carga estática equivalente adimensional é dada por

$$\tilde{q}(\zeta) = \tilde{g} - \tilde{a}(\zeta, t_{i-1}) \quad \dots(5.59)$$

Pela qual já possuímos os valores discretos  $\tilde{q}(\zeta_j)$  em pontos  $\zeta_j$  que são distribuídos no intervalo  $[0, 1]$  regularmente e assim, temos

$$E\tilde{I}(\zeta) = \frac{1}{1 + \gamma_1 \delta(\zeta)} \quad \dots(5.60)$$

anotando que

$$E\tilde{I}u''(\zeta) = \tilde{f}_M(\zeta) = -\tilde{M}(\zeta) \quad (\text{momento fletor}) \quad \dots(5.61)$$

então, com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \tilde{M}(1) &= 0 \\ \tilde{V}(1) &= \left. \frac{d\tilde{M}}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = 0 \end{aligned} \quad \dots(5.62)$$

podemos obter a solução em valores discretos pelo módulo ode 45 do Matlab

$$\tilde{f}_M(\zeta_j) = \tilde{q}^{[2]}(\zeta_j) + C_{1(\zeta_j)} + C_2 = -\tilde{M}(\zeta_j) \quad \dots(5.63)$$

Para obter  $\tilde{u}(\zeta)$ , e a inclinação da barra  $\tilde{\varphi}(\zeta)=-\tilde{u}'(\zeta)$ , ainda precisamos resolver a equação diferencial

$$E\tilde{I}(\zeta)\tilde{u}''(\zeta)=\tilde{f}_M(\zeta) \quad \dots(5.64)$$

ou seja

$$\tilde{u}''(\zeta)=(1+\gamma_1\delta(\zeta))\tilde{f}_M(\zeta)=\tilde{f}_M(\zeta)+\gamma_1\tilde{f}_M(\zeta)\delta(\zeta) \quad \dots(5.65)$$

essa equação pode ser dividida em duas equações, com a seguinte forma

$$\tilde{u}_1''(\zeta)=\tilde{f}_M(\zeta) \quad \dots(5.66)$$

$$\tilde{u}_2''(\zeta)=\gamma_1\tilde{f}_M(\zeta)\delta(\zeta) \quad \dots(5.67)$$

onde

$$\tilde{u}(\zeta)=\tilde{u}_1(\zeta)+\tilde{u}_2(\zeta) \quad \dots(5.68)$$

a Equação (5.67), pode ser resolvida, pois

$$\tilde{u}_2'(\zeta)=\gamma_1\tilde{f}_M(0)H(\zeta) \quad \dots(5.69)$$

onde,  $H(\zeta)$  é a função de HEAVISIDE

$$\tilde{u}_2(\zeta)=\gamma_1\tilde{f}_M(0)\zeta H(\zeta)=\gamma_1\tilde{f}_M(0)\zeta \quad \dots(5.70)$$

ainda pode-se obter

$$\tilde{u}_2'(0)=\gamma_1\tilde{f}_M(0)H(0)=\frac{1}{2}\gamma_1\tilde{f}_M(0) \quad \dots(5.71)$$

e

$$\tilde{u}_2(0)=0 \quad \dots(5.72)$$

Para resolver a Equação (5.66), precisamos duas condições de contorno,  $\tilde{u}'_1(0)$  e  $\tilde{u}_1(0)$ . Mas possuímos duas condições de contorno:  $\tilde{u}(0)=0$  e  $\tilde{\varphi}(0)=-\tilde{u}'(0)=0$ , ou seja

$$\tilde{u}_1(0)+\tilde{u}_2(0)=0 \Rightarrow \tilde{u}_1(0)=-\tilde{u}_2(0)=0 \quad \dots(5.73)$$

$$\tilde{u}'_1(0)+\tilde{u}'_2(0)=0 \Rightarrow \tilde{u}'_1(0)=-\tilde{u}'_2(0)=-\frac{1}{2}\gamma_1\tilde{f}_M(0)$$

então podemos obter o ângulo de inclinação da barra, através da Equação (5.74), abaixo

$$\tilde{\varphi}(\zeta)=-\tilde{u}'(\zeta)=-\left(\tilde{f}_M^{[1]}(\zeta)+C_3\right)-\gamma_1\tilde{f}_M(0)H(\zeta)=-\tilde{f}_\varphi(\zeta)-\gamma_1\tilde{f}_M(0)H(\zeta) \quad \dots(5.74)$$

$$\tilde{u}(\zeta)=\left(\tilde{f}_M^{[2]}(\zeta)+C_3(\zeta)+C_4\right)+\gamma_1\tilde{f}_M(0)\zeta=\tilde{f}_u(\zeta)+\gamma_1\tilde{f}_M(0)\zeta \quad \dots(5.75)$$

onde

$$\tilde{f}_\varphi(\zeta)=\tilde{f}_M^{[1]}(\zeta)+C_3 \quad \dots(5.76)$$

e

$$\tilde{f}_u(\zeta)=\tilde{f}_M^{[2]}(\zeta)+C_3\zeta+C_4 \quad \dots(5.77)$$

que possuem os valores discretos obtidos pelo ode45 do Matlab.

Podemos determinar o trabalho feito pela meia mola rotacional através da

$$\frac{1}{2}M(0)\varphi(0^+) = \frac{1}{2} \frac{EI_0}{l} \tilde{M}(0) \tilde{\varphi}(0^+) = \frac{1}{2} \frac{EI_0}{l} \tilde{f}_M(0) \cdot \left[ \tilde{f}_\varphi(0) + \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{f}_M(0) \right] \quad \dots(5.78)$$

#### 5.4 Critério de propagação de trinca

Supondo que no instante  $t_{i-1}$ , a viga contém uma trinca de comprimento  $a$ , e exatamente no instante  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ , a trinca já tenha propagado, por unidade de área,  $da$ .

A variação de energia de deformação elástica é dada por

$$\Delta U(\Delta t) = U(t_i) + \frac{1}{2} M(0, t_i) \varphi(0, t_i) \quad \dots(5.79)$$

onde, os valores obtidos são sempre em relação à configuração do tempo anterior  $t = t_{i-1}$ .

Devemos lembrar que este cálculo deve levar em consideração somente a metade da viga, devido ao fato da simetria.

Temos agora o trabalho realizado pela força de gravidade, que é dado por

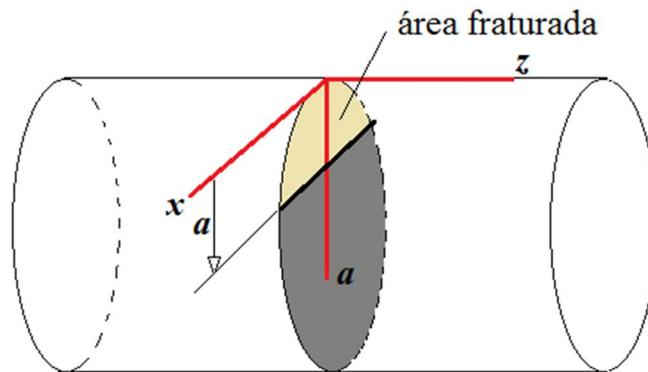
$$\Delta W_k(\Delta t) = \int_0^l (\rho A dz g) \cdot [u(z, t_i)] = \rho A g l^2 \int_0^1 u(\zeta, t_i) d\zeta \quad \dots(5.80)$$

A parcela de energia cinética no instante  $t_{i-1}$ , é dada por

$$E_k(t_{i-1}) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A dz v^2(z, t_{i-1}) \quad \dots(5.81)$$

Abaixo calculamos  $G_C$ , pela equação (4.36). Devemos ter consciência que  $G_C$  não é constante para o nosso caso, porque a dureza varia conforme a distância de um ponto em consideração à superfície, conseqüentemente, a quantidade de plasticidade também varia com a distância. Supondo que a trinca inicie na superfície e propaga-se até uma profundidade  $a$ , como mostra a Figura 24.

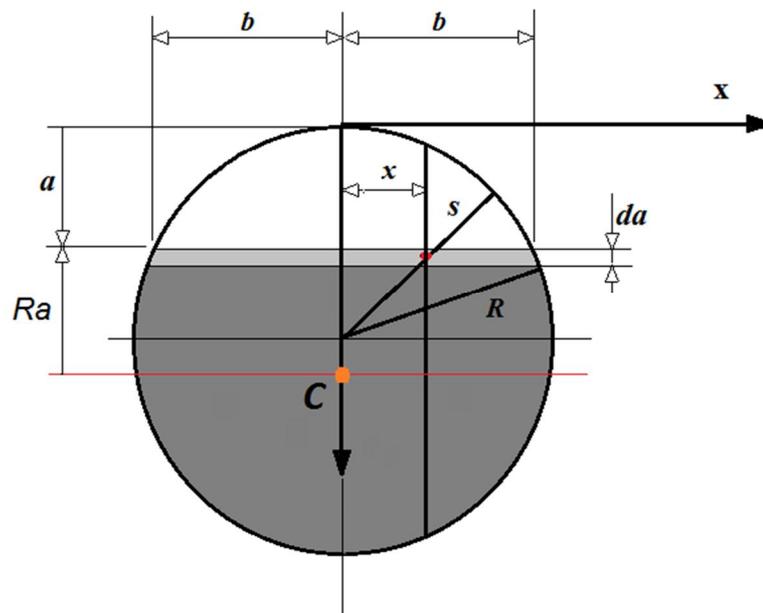
Figura 24 – Layout da trinca na região fraturada



A resistência à propagação de uma a área elementar  $dA=2b \cdot da$ , é o consumo da energia plástica, é representada por

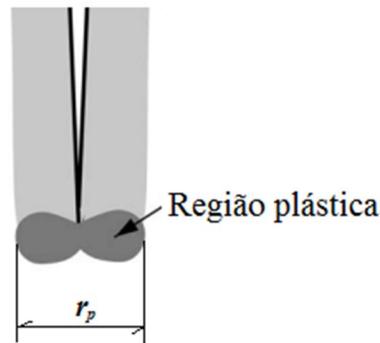
$$\Delta G_c(a, \Delta t) = \frac{\int_V w_d(s) dV}{dA} = \frac{\int_{-b}^b w_d(s) dx da r_y}{2b \cdot da} = \frac{1}{b} \int_0^b w_d(s) \frac{1}{6\pi} \left( \frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2 dx \quad \dots(5.82)$$

Figura 25 – Perfil para cálculo de energia plástica, com uma trinca de profundidade 'a'.



onde  $r_y$ , o raio da zona plástica na fronteira da trinca é dado por: (Anderson), conforme a Figura 26.

Figura 26 – Região plástica na ponta de uma trinca.



$$r_y = \frac{r_p}{2} = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad \dots(5.83)$$

O fator de intensidade de tensão tipo I, é dado segundo James e Mills (1988), em seu estudo sobre propagação de trincas em perfis de roscas de elementos fixadores. Neste estudo, foram encontradas várias soluções para  $k$ , levando-se em conta a forma da seção de trinca, circular ou semicircular. Os resultados obtidos são decorrentes de duas formas de análise: pelo modo experimental e o outro através de (FEM). O trabalho mostra que houve uma grande coesão de resultados entre vários pesquisadores, gerando então uma equação polinomial para descrever o fator de intensidade de tensão

$$k_I(a) = Y(a) \sigma \sqrt{\pi a} = Y(a) \sqrt{\pi a} \frac{MR_a}{I_a} \quad \dots(5.84)$$

$$Y(a) = 1,04 - 3,64 \left( \frac{a}{2R} \right) + 16,86 \left( \frac{a}{2R} \right)^2 - 32,59 \left( \frac{a}{2R} \right)^3 + 28,41 \left( \frac{a}{2R} \right)^4 \quad \dots(5.85)$$

onde  $M$ , é o momento fletor na seção da trinca, e  $R_a$  é a distância da fronteira da trinca até o centroide  $C$ , da área intacta na seção da trinca,  $I_a$ , é o momento de inércia da área intacta em relação com o eixo que passa no seu centroide  $C$

$$\Delta G_c(a, \Delta t) = \frac{M^2(0, t_i) R_a^2}{6b I_a^2} \int_0^b w_d(s) \left( \frac{Y(a)}{\sigma_e(s)} \right)^2 a dx = \left( \frac{MR_a Y(a)}{I_a} \right)^2 \frac{a}{6b} \int_0^b \frac{w_d(s)}{\sigma_e^2(s)} dx \quad \dots(5.86)$$

a força motriz de propagação de trinca é dada por

$$\Delta G_I = \Delta W_k - \Delta U - \Delta E_k \quad \dots(5.87)$$

onde a variação de energia cinética é dada por

$$\Delta E_k = E_k(t_i) - E_k(t_{i-1}) \quad \dots(5.88)$$

pelo equilíbrio de energia na propagação da trinca, tem-se

$$\Delta G_I = \Delta G_c(a, \Delta t) \quad \dots(5.89)$$

isto é

$$\Delta W_k - \Delta U - (E_k(t_i) - E_k(t_{i-1})) = \Delta G_c \quad \dots(5.90)$$

então a energia cinética no instante  $t_i$

$$E_k(t_i) = \Delta W_k - \Delta U + E_k(t_{i-1}) - \Delta G_c \quad \dots(5.91)$$

esta energia deve ser maior ou igual à zero.

Verificamos que o lado esquerdo da Equação (5.91) não é negativo, assim podemos confirmar a propagação da trinca. Caso contrário, se for negativo, a trinca não ira se propagar.

### 5.5 Determinação da velocidade e aceleração no instante ( $t_i$ )

Quando a trinca surgir, a solução do Capítulo 2, não é mais válida. Como o tempo no choque é muito curto, o perfil de velocidade em relação à abcissa  $z$ , não deve ser alterado significativamente, então supomos que a velocidade no instante  $t_i$ , possui um perfil de distribuição parecido com a Equação (5.7), assim

$$v(z, t_i) = C [\operatorname{sen} \beta_1 z - \operatorname{senh} \beta_1 z - \alpha_1 (\operatorname{cos} \beta_1 z - \operatorname{cosh} \beta_1 z)] \quad \dots(5.92)$$

onde adotamos o primeiro item do somatório da Equação (5.7),  $n=1$ , e  $C$ , é uma constante a ser determinada.

Assim energia cinética no instante  $t_i$ , pode ser obtida através de

$$E_k(t_i) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A v^2(z, t_i) dz = C^2 E_k(t_{i-1}) \quad \dots(5.93)$$

pela Equação (5.91), obtemos

$$C = \sqrt{\frac{\Delta W_k(\Delta t) - \Delta U(\Delta t) + E_k(t_{i-1}) - \Delta G_c(a, \Delta t)}{E_k(t_{i-1})}} \quad \dots(5.94)$$

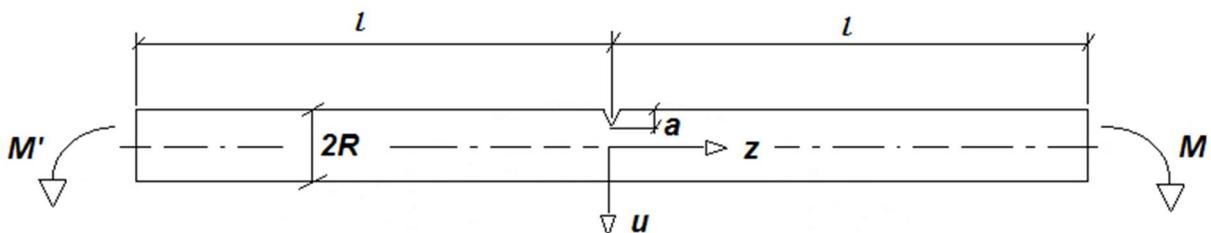
Como suposição, adotamos a aceleração como constante durante toda a análise do problema.

$u(z, t_i)$ , é obtido pelo método sugerido por Palmeri e Cicirello (2011), na Seção (3.1) com a aplicação da força de inércia constante.

### 5.6 Obtenção da rigidez a rotação da viga com uma trinca central de profundidade $a$

Para obter a rigidez rotacional da barra com uma trinca de profundidade  $a$ , supomos que a fenda da trinca divide a haste em duas seções, estas por sua vez vão estar ligadas através de uma mola rotacional, substituindo a trinca. Supondo que a barra receba um par de momentos fletores em suas extremidades conforme a Figura 27, a taxa de liberação de energia de deformação é calculada pela Equação (5.95)

Figura 27 – Barra circular submetida a um par de momentos.



$$J(a) = \frac{K_I^2}{E'} = \frac{1}{E'} \left( Y(a) \sqrt{\pi a} \frac{MR}{I} \right)^2 = \frac{1}{E'} \left( Y(a) \sqrt{\pi a} \frac{R}{I} \right)^2 M^2 \quad \dots(5.95)$$

onde,  $Y(a)$ , é o fator de correção, aplicado ao fator de intensidade de tensão, é dado por

$$Y(a) = 1,04 - 3,64 \left( \frac{a}{2R} \right) + 16,86 \left( \frac{a}{2R} \right)^2 - 32,59 \left( \frac{a}{2R} \right)^3 + 28,41 \left( \frac{a}{2R} \right)^4 \quad \dots(5.96)$$

segundo Kissa e Gurel (2007), a relação entre a energia de deformação e a área pode dada através

$$J = \frac{\partial U}{\partial A} \quad \dots(5.97)$$

Segundo o teorema de Castigliano, o deslocamento angular causado pela trinca na direção de  $a$  pode ser denotado como

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \int_A J(a, x) dA \quad \dots(5.98)$$

onde  $A$ , é a área trincada representada pela Figura 25.

Assim podemos expressar o coeficiente de flexibilidade  $C_f$ , através da relação entre o as funções provenientes da forma da trinca, e do fator de intensidade de tensão como

$$C_f = \frac{\partial \varphi}{\partial M} = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \int_A J(a) dA = \frac{2\pi \left( \frac{R_a}{I_a} \right)^2}{E'} \int_A Y^2(a) a dA = \frac{4\pi \left( \frac{R_a}{I_a} \right)^2}{E'} \int_0^a Y^2(a) a b da \quad \dots(5.99)$$

onde

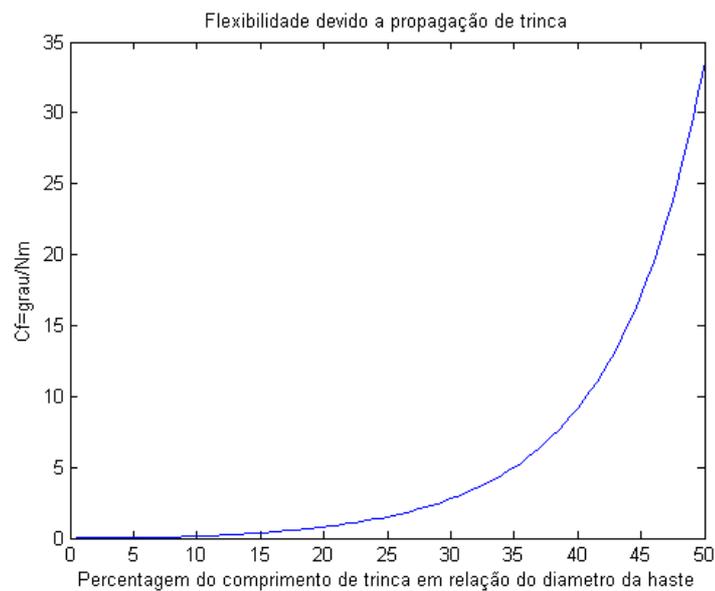
$$b = \sqrt{R^2 - (R-a)^2} \quad \dots(5.100)$$

$b$ , é a distância do ponto de análise,  $R$ , é o raio da haste e  $a$ , é a profundidade da trinca. Em consequência a rigidez da mola rotacional, é dado por

$$K_j = \frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{1}{C_f} \quad \dots(5.101)$$

O coeficiente de flexibilidade com propagação de trinca esta sendo mostrado pela Figura 28, onde podemos perceber que o coeficiente é muito pequeno até a propagação de trinca atingir 20% do diâmetro da haste; somente após 40% da propagação o coeficiente obterá um aumento acelerado.

Figura 28 – Coeficiente de Flexibilidade.



## 6 RESULTADOS E ANÁLISES

Utilizando os mesmos dados, na Seção 3.1, como segue:

Meio comprimento da viga,  $L = 7,25'' = 2,21$  m, raio da haste,  $R = 2'' = 0,0508$  m, módulo de elasticidade,  $E = 180$  GPa, densidade da haste,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, gravidade,  $g = 9,81$  m/s, altura de queda,  $h = 20$  pés = 6,096 m, e velocidade no início do choque,  $V_0 = \sqrt{2gh} = 10,93634$  m/s

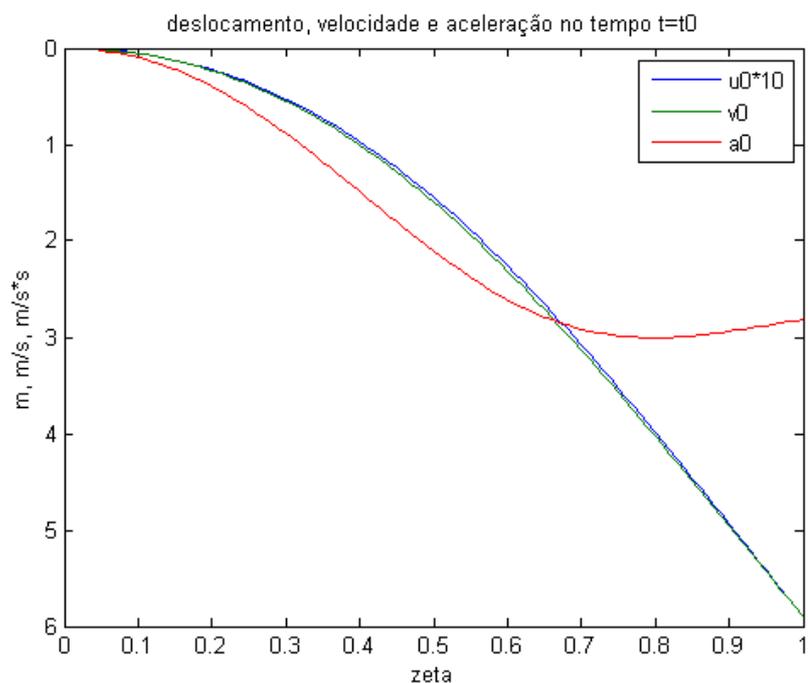
Selecionamos o seguinte perfil de dureza:  $H_0 = 434$ ,  $H_c = 345$ ,  $S_m = 0,02145$  que é mostrado na Figura 29. A sua tensão de escoamento na superfície é de 1966,8 Mpa, segundo a Equação (4.14).

Para atingir esta tensão de escoamento na superfície superior, na seção de suporte, onde este sujeito o surgimento de uma trinca, podemos encontrar o tempo necessário  $t_0$ , que é igual 0,1031s, segundo a Equação (3.3). Neste momento, os perfis de deslocamento, velocidade e aceleração são mostrados na Figura 29 e Figura 30, onde o deslocamento foi ampliado 10 vezes. Percebemos com esta amplificação o perfil do deslocamento quase idêntico ao perfil da velocidade, isto implica que o perfil de velocidade pode ser multiplicado por uma constante.

Figura 29 – Perfil de dureza

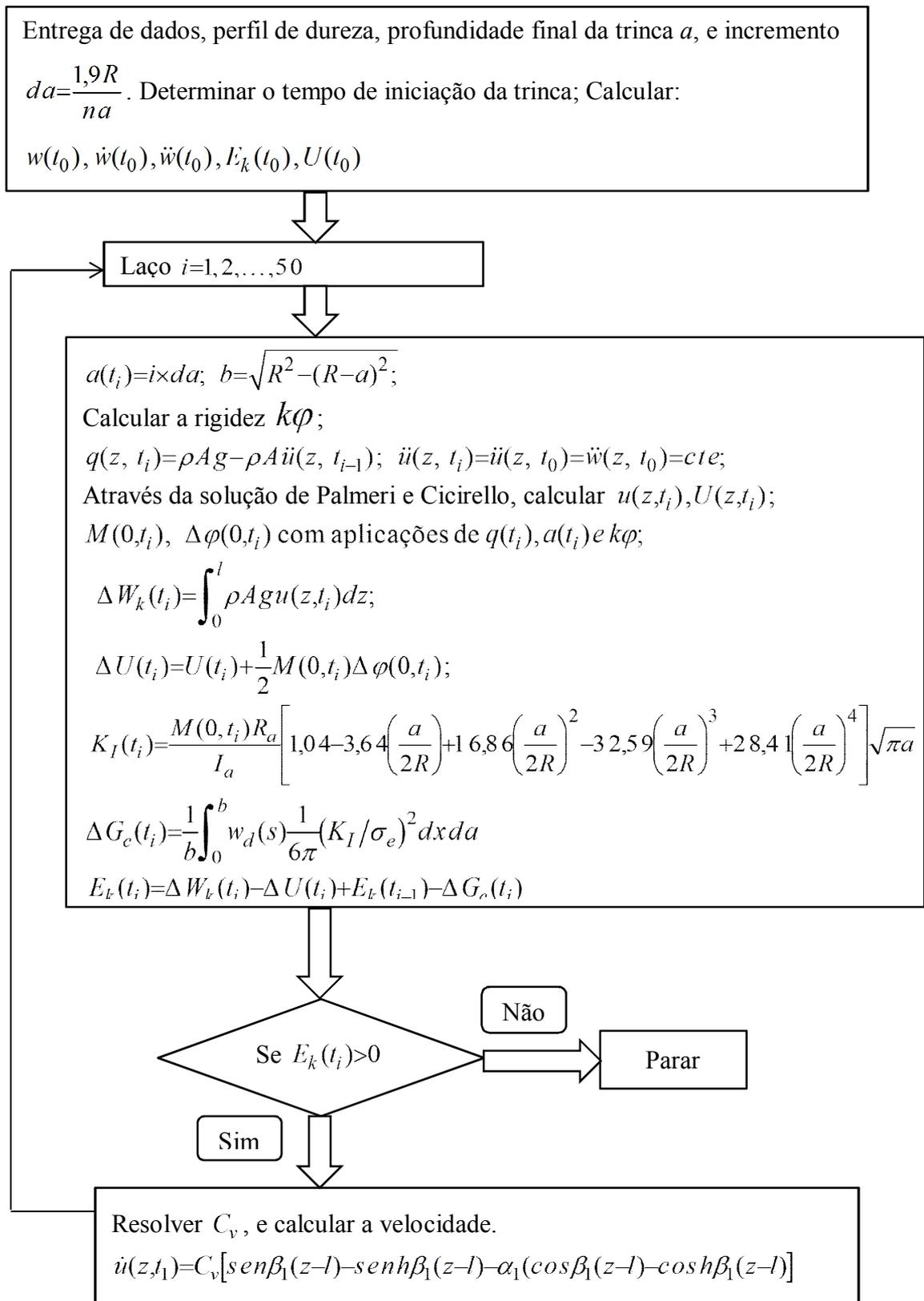


Figura 30 – Perfis de deslocamento, velocidade e aceleração;  $\zeta = x/L$ , sendo adimensional e  $L$ , é a metade do comprimento da barra



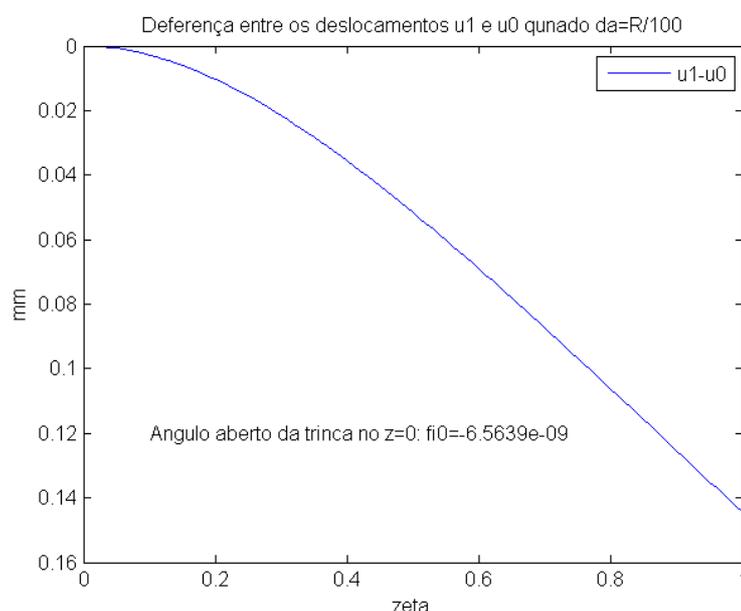
Buscando uma forma clara e concisa de demonstrar a resolução do problema, utilizamos um fluxograma para mostrar os passos seguidos para a realização da programação numérica, como mostra a Figura 31.

Figura 31 – Fluxograma de modelagem de propagação de trinca.



A Figura 32, mostra a diferença dos deslocamentos nos instantes  $t_0$  e  $t_1$ , que é um valor muito pequeno, devido o ângulo aberto da trinca no  $z = 0$  (apoio), ser muito pequeno  $\varphi_0 = 6.5639 \times 10^{-9} = M_0 \times C_f$ , que é diretamente ligado com a força de inércia e o coeficiente de flexibilidade que ainda é muito pequeno, na primeira propagação da trinca. Neste instante o coeficiente  $C_f = 1.1418 \times 10^{-11}$ , e  $M_0 = 1149,8 \text{ Nm}$ .

Figura 32 – Diferença entre os deslocamentos no instante  $t_0$  e  $t_1$ .



A Figura 33, mostra as velocidade nos tempos  $t_0$  e  $t_1$  podemos observar que a velocidade no instante  $t_1$  tem um aumento considerável em relação à no  $t_0$ , devido ao surgimento da trinca que fragilizou a rigidez na seção da trinca.

A Figura 34, mostra os deslocamentos da primeira e da nona propagação de trinca (cada propagação é igual a 0,5% do diâmetro), percebemos que a diferença na extremidade da haste é muito pequena ficando apenas em 11,6 mm aproximadamente, isto não deveria ser correto. As causas possíveis são: (1) a forma de obtenção do coeficiente de flexibilidade não esta coerente com realidade; (2) a suposição que a aceleração é constante durante a propagação de trinca esta incorreta.

Figura 33 – Velocidade nos instantes  $t_0$  e  $t_1$ .

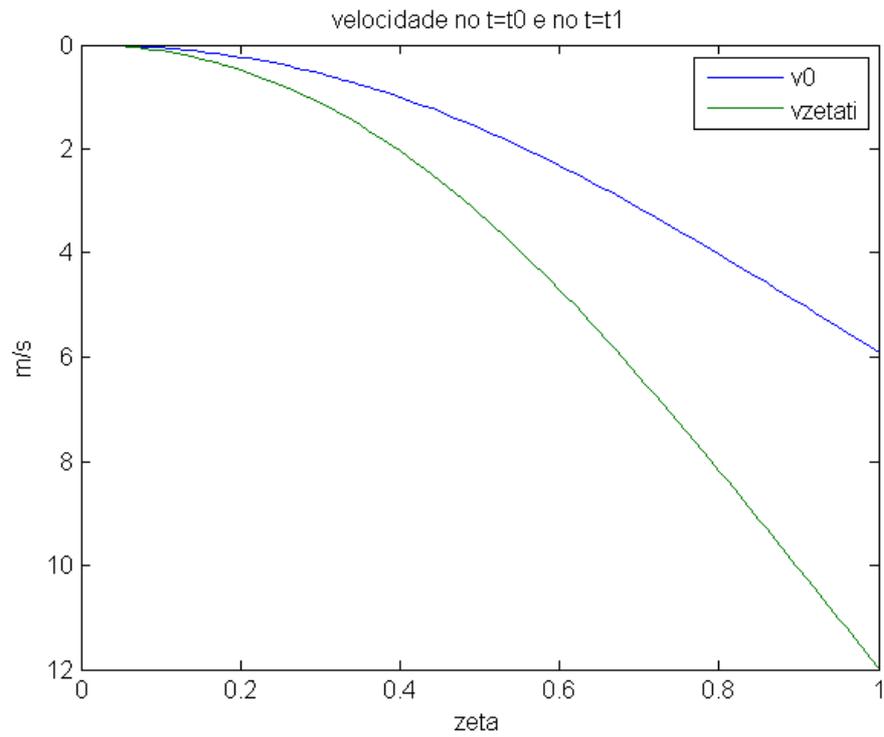
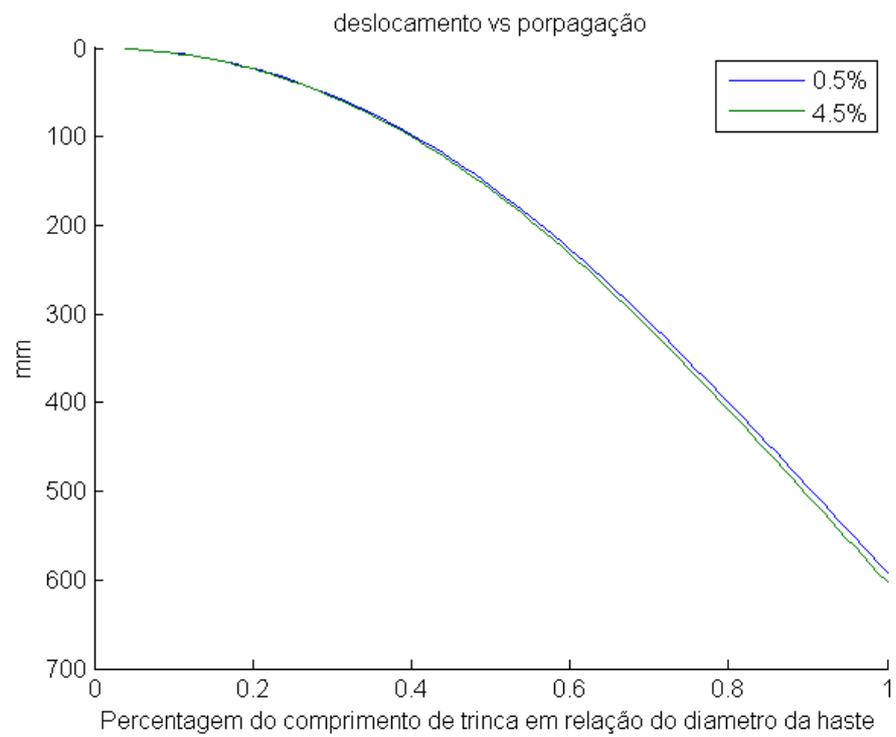


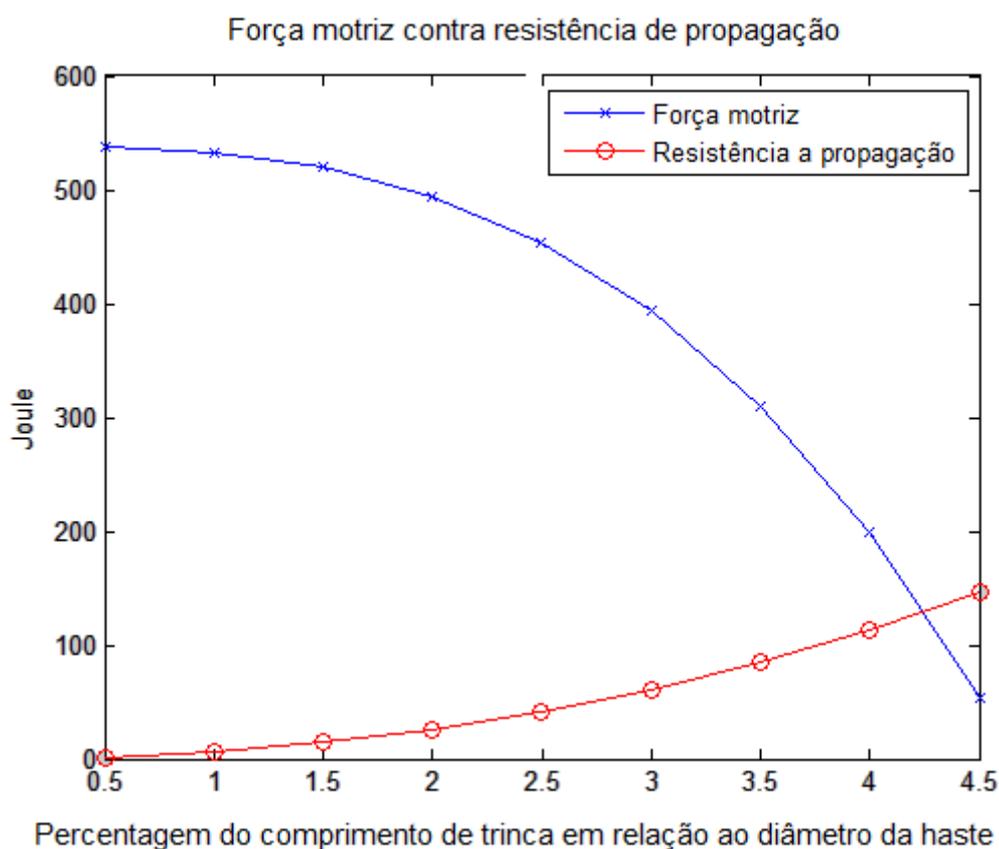
Figura 34 – Deslocamentos em relação à propagação de trinca.



A Figura 35, mostra evolução da força motriz (a energia cinética + o trabalho feito por força de gravidade) e da resistência à propagação de trinca (a variação de energia de deformação elástica da haste + energia absorvida pela mola rotacional elástica + energia consumida pela plastificação ao redor da trinca). Claramente a força motriz está diminuindo e à resistência está aumentando. Quando a resistência é maior que a força motriz, a trinca cessa a sua propagação, depois de 4,25%.

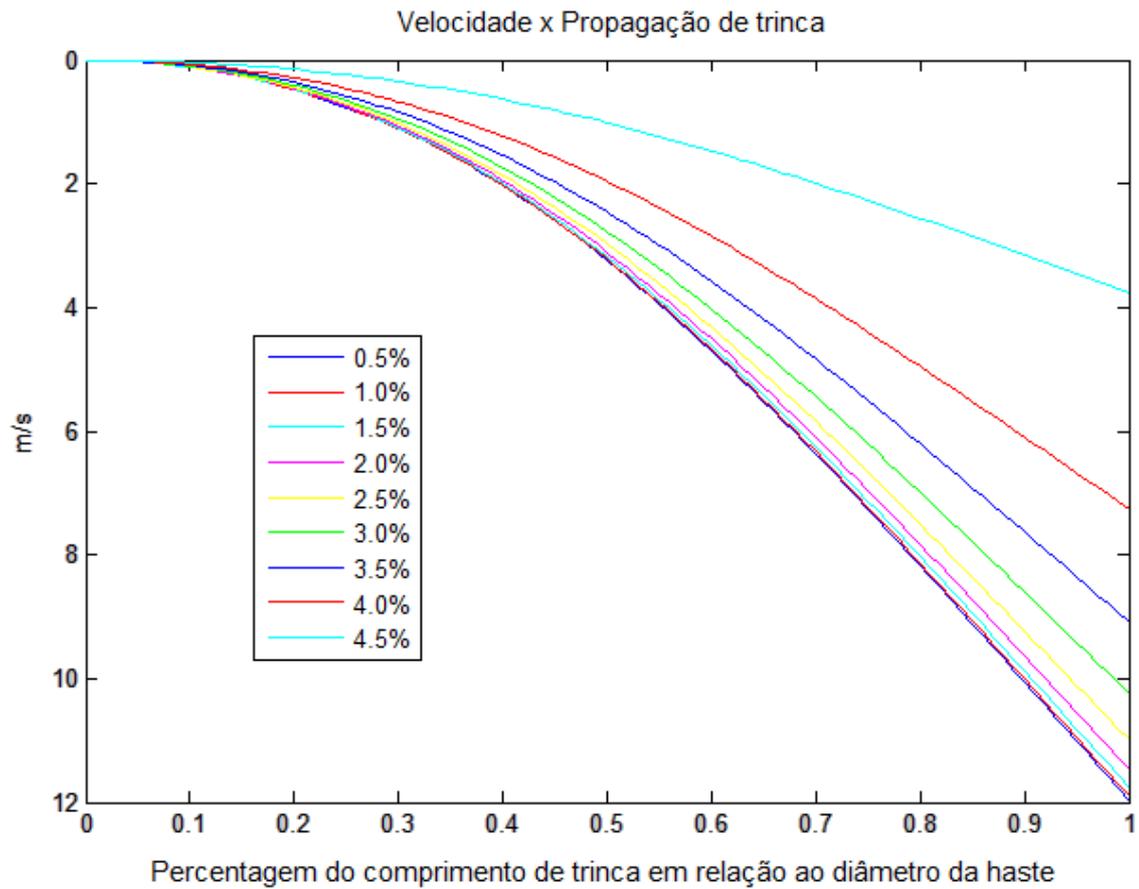
Pelo resultado obtido, descobrimos que a principal contribuição à força motriz é a energia cinética, isto é consistente com a realidade; e a principal contribuição à resistência a propagação é a energia absorvida pela mola rotacional. A soma das porções da variação de energia de deformação e a do trabalho feito pela força de gravidade é muito pequena (menos que 1%), em relação ao trabalho feito pela mola rotacional. Isto não é um resultado esperado. A razão ainda está ligada a suposição que a aceleração é constante e ao coeficiente de flexibilidade não estar coerente. Este deverá ser resolvido em trabalho futuro.

Figura 35 – Relação entre de Força Motriz x Deslocamento



A Figura 36, abaixo mostra as velocidades acompanhando a propagação de trinca, podemos perceber que a velocidade diminui com a propagação da trinca, devida o aumento do consumo de energia plástica e de energia absorvida pela mola elástica rotacional, simulando a trinca.

Figura 36 – Perfis de velocidade x propagação.



## CONCLUSÃO

A modelagem da propagação de trinca é sempre um assunto importante para a segurança de componentes estruturais. Contudo, este assunto é muito complexo, devido a propagação de trinca sofrer influência de vários fatores, como: propriedades mecânicas dos materiais, tipo de carregamento, plastificação na região da trinca etc. Quando o componente estrutural é submetido a uma carga de impacto, a situação se complica muito, devido ao tempo da ação de impacto ser extremamente curto.

Este trabalho inicialmente resolveu a solução dinâmica de uma barra em queda livre chocando-se transversalmente contra um apoio rígido. A solução encontrada é fechada e em forma de série. Através desta solução podemos obter a distribuição de deslocamento, velocidade, aceleração, momento fletor e força cortante em qualquer instante. Pelo resultado numérico obtido, truncando-se a série no quinto item, não ocasionará um erro notável. A tensão máxima na superfície não ocorre na seção da trinca, até certo tempo ocorrido.

A tensão de escoamento e a tensão última do material, podem ser relacionadas com a dureza através das Equações (4.14), (4.15) e (4.16). O coeficiente de encruamento pode ser relacionado com o a dureza, através da resolução da Equação (4.19) efetivamente, pois todos os coeficientes obtidos desta equação estão menores que 0,3, sendo um limite reconhecido.

Através do método de Palmeri e Cicirello, foi modelado a propagação de trinca, iniciado na seção de apoio. Pelo resultado obtido, a maior contribuição à força motriz na propagação de trinca é da energia cinética; a maior contribuição à resistência a propagação de trinca é dada pelo trabalho feito pela mola elástica de rotação, representando a trinca. Quando a força motriz é menor que a resistência, a trinca cessa sua propagação.

Porém o resultado revelou algumas necessidades para melhorar a modelagem, especificando: a maneira de obter o coeficiente de flexibilidade da haste contendo trinca, e a forma de tratar a aceleração.

Contudo a solução dinâmica encontrada em forma de série é de suma importância para determinar a iniciação de trinca. O tratamento da trinca como uma mola rotacional dado pelo método de Palmeri e Cicirello, ainda pode ser uma maneira válida para ser aplicada em simulação de propagação de trinca, com um coeficiente de flexibilidade confiável e um tratamento adequado para a aceleração.

## SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Em decorrência deste trabalho surgiram os seguintes pontos para trabalhos futuros:

1. Utilizar um software de elementos finitos confiável, como ANSYS LS-DYNA ou ABAQUS, para validar a solução obtida em série;
2. Buscar outra maneira para obter o coeficiente de flexibilidade da mola rotacional na viga representando a trinca;
3. Utilizar algoritmo de incremento temporal para resolver a equação dinâmica da viga a fim de tratar a questão da aceleração adequadamente.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, T. L., **Fracture mechanics, fundamentals and applications**. Taylor e Francis Group, 3ª ed. Boca Raton, US, Julho de 2013.

BROEK, D., **The practical use of fracture mechanics**. Kluwer Academic Publisher, Galena, Ohio, Fevereiro de 1988.

CAHOON, J. R., BROUGHTON, W. H. and KUTZAK, A. R. **The determination of yield strength from hardness measurements**. Journal Metallurgical Transactions, Volume 2, Páginas 1971 – 1979, 02 Julho 1970.

CIPRIANO, G. L., **Determinação do coeficiente de encruamento de metais através da morfologia de impressões de dureza na escala macroscópica**. 2008, Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR.

DATSKO, J., HARTWIG, L., MCCLORY, B. **On the tensile strenght and hardness relation for metals**. Journal of Materials Engineering and Performance. Volume 10(6), Páginas 718 – 722, Dezembro de 2001.

D.C. Miller, **Anecdotal history of the science of sound**, Nova York: Macmillan, 1935.

HAHN, G. T., HOAGLAND, A. R., ROSENFELD, A.R., SEJNOHA, R. **Rapid crack propagation in a high strength steel**. Journal Metallurgical Transactions, Volume 5, Páginas 475 – 482. Fevereiro de 1974.

INGLIS, C.E., **Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners**. Transactions of the Institute of Naval Architects, Vol. 55, pp. 219–241/1913.

IRWIN, G.R., **Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys**. Sagamore Research Conference Proceedings, Vol. 2, pp. 289–305/1956.

IRWIN, G.R., **Fracture dynamics**. Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland, OH, pp. 147–166/1948.

J. T. CANNON E S. DOSTROVSKY. **The evolution of dynamics: vibration theory from 1687 to 1742**, Nova York: Springer-Verlang, 1981.

JAMES, L. A., MILLS, W. J., **Review and synthesis of stress intensity factor solutions applicable to cracks in bolts.** Westinghouse Hanford Company, Richland, WA 99352, U.S.A. Engineering Fracture Mechanics Volume 30, Nº 5, 1988, pp. 641-654.

JONES, N., **Structural impact.** Reino Unido. Published By the Press Syndicate of the University of Cambridge, 2003.

JOYCE, J. A., HACKETT, E. M., **An advanced procedure for j-r curve testing using a drop tower,** Nonlinear Fracture Mechanics: Volume I--Time-Dependent Fracture, ASTM STP 995, A. Saxena, J. D. Landes, and J. L. Bassani, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1989, pp. 298-317.

KISA, M., GUREL, M. A. **Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections.** International Journal of Engineering Science 45 ed. Páginas 364–380. Março de 2007.

LANDES, J. D., HERRERA. R., **Calculation of J from test records for the growing crack J.D.** Engineering Science and Mechanics, The University of Tennessee 310 Perkins Hall. International Journal of Fracture, 1988, Volume 36: R15-R20.

MOLINARI, A., MERCIER, S., JACQUES, N. **Dynamic failure of ductile materials** Organizing Committee of The 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Published by Elsevier Ltd. ICTAM2012, Procedia IUTAM, Volume 10, 2014, pp. 201 – 220.

PALMERI, A., CICIRRELO, A. **Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler–Bernoulli and Timoshenko beams.** International Journal of Solids and Structures. 48 ed., Páginas 2184 – 2195. Abril de 2011.

PAVLINA, E.J; VAN TYNE, C.J. **Correlation of yield strength and tensile strength with hardness for steels.** Journal of Materials Engineering and Performance. Volume 17(6), Páginas 888 – 893, Dezembro 2008.

RAO, SINGIRESU S., **Vibrações mecânicas/Singiresu S. Rao;** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RICE, J.R. AND ROSENGREN, G.F., **Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 1–12/1968.

SCUTTI, J. J., MCBRINE, W., J., ALTRAN CORPORATION, **Introduction to failure analysis and prevention**. Failure Analysis and Prevention. Published by ASM Handbook, Volume 11, 2002, pp. 14 – 65/2909.

SERVER, W., L. **Impact three-point bend testing for notched and precracked**. Specimens Journal of Testing and Evaluation, ASTM, Vol. 6, N°. 1, Jan. 1978, Páginas. 29-34.

THOMSON, Willian T, **Teoria da vibração com aplicações**, Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

VAZ, J. D. C., **Análise do comportamento dinâmico de uma viga de Euler-Bernoulli escalonada com apoios elasticamente variáveis**, Itajubá, 113p. Dissertação (Mestrado em Projeto e Fabricação), Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 2008.

ZHANG, P., LI, S. X., ZHANG, Z.F. **General relationship between strength and hardness**. Journal Materials Science and Engineering A. A 529, Páginas 62 – 73. Agosto de 2011.

WESTERGAARD, H.M., **Bearing pressures and cracks**. Journal of Applied Mechanics, Vol. 6, pp. 49–53/1939.

### APÊNDICE A – Cálculo de $d_m$ .

Sendo assim trabalhando os termos do numerador do  $d_m$ , obtemos:

$$Num. d_m = \int_0^l [\text{sen}\beta_m x - \text{senh}\beta_m x - \alpha_m (\text{cos}\beta_m x - \text{cosh}\beta_m x)] dx \quad \dots(\text{A.1})$$

Pela propriedade de integração temos:

$$Num. d_m = \left[ \int_0^l (\text{sen}\beta_m x) dx - \int_0^l (\text{senh}\beta_m x) dx - \alpha_m \int_0^l (\text{cos}\beta_m x) dx + \alpha_m \int_l^l (\text{cosh}\beta_m x) dx \right] \quad \dots(\text{A.2})$$

Para a integração do primeiro termo, e aplicando os limites para cada caso, obtemos:

$$\int_0^l (\text{sen}\beta_m x) dx = -\frac{\text{cos}\beta_m x}{\beta_m} \Big|_0^l = \left( -\frac{\text{cos}\beta_m l}{\beta_m} \right) + \frac{1}{\beta_m} \quad \dots(\text{A.3})$$

Para o segundo termo, obtemos:

$$\int_0^l (\text{senh}\beta_m x) dx = \frac{\text{cosh}\beta_m x}{\beta_m} \Big|_0^l = \left( \frac{\text{cosh}\beta_m l}{\beta_m} \right) - \frac{1}{\beta_m} \quad \dots(\text{A.4})$$

Para o terceiro termo, obtemos:

$$-\alpha_m \int_0^l (\text{cos}\beta_m x) dx = -\alpha_m \frac{\text{sen}\beta_m x}{\beta_m} \Big|_0^l = -\alpha_m \left( \frac{\text{sen}\beta_m l}{\beta_m} \right) \quad \dots(\text{A.5})$$

Para o quarto termo, obtemos:

$$\alpha_m \int_0^l (\cosh \beta_m x) dx = \alpha_m \frac{\sinh \beta_m x}{\beta_m} \Big|_0^l = \left( \alpha_m \frac{\sinh \beta_m l}{\beta_m} \right) \quad \dots(\text{A.6})$$

Feita as integrações e aplicado os limites para cada termo, podemos reescrever a parcela do numerador da equação da seguinte maneira:

$$d_m = \frac{\left[ \left( \frac{\cos \beta_m l}{\beta_m} \right) + \frac{1}{\beta_m} - \left( \frac{\cosh \beta_m l}{\beta_m} \right) + \frac{1}{\beta_m} - \left( \alpha_m \frac{\sin \beta_m l}{\beta_m} \right) + \left( \alpha_m \frac{\sinh \beta_m l}{\beta_m} \right) \right]}{\int_0^l [\sin \beta_m x - \sinh \beta_m x - \alpha_m (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)]^2 dx} \quad \dots(\text{A.7})$$

Separando somente o denominador obtemos a seguinte expressão:

$$\int_0^l [\sin \beta_m x - \sinh \beta_m x - \alpha_m (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)]^2 dx \quad \dots(\text{A.8})$$

Elevando-se o termo dentro dos colchetes ao quadrado, e reagrupando-se os termos, obtemos:

$$\int_0^l \left[ \begin{aligned} & (\sin \beta_m x)^2 - (2 \sinh \beta_m x \cdot \sin \beta_m x) - (2 \sin \beta_m x \cdot \alpha_m \cos \beta_m x) + \\ & (2 \sin \beta_m x \cdot \alpha_m \cosh \beta_m x) + (\sinh \beta_m x)^2 + (2 \sinh \beta_m x \cdot \alpha_m \cos \beta_m x) - \\ & (2 \sinh \beta_m x \cdot \alpha_m \cosh \beta_m x) + (\alpha_m \cos \beta_m x)^2 \\ & - (2 \alpha_m \cos \beta_m x \cdot \alpha_m \cosh \beta_m x) + (\alpha_m \cosh \beta_m x)^2 \end{aligned} \right] dx \quad \dots(\text{A.9})$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte maneira,

$$\left[ \int_0^l (\text{sen}\beta_m x)^2 dx - \int_0^l (2\text{sen}h\beta_m x \cdot \text{sen}\beta_m x) dx - \int_0^l (2\text{sen}\beta_m x \cdot \alpha_m \text{cos}\beta_m x) dx + \right. \\
 \left. \int_0^l (2\text{sen}\beta_m x \cdot \alpha_m \text{cosh}\beta_m x) dx + \int_0^l (\text{sen}h\beta_m x)^2 dx + \int_0^l (2\text{sen}h\beta_m x \cdot \alpha_m \text{cos}\beta_m x) dx - \right. \\
 \left. \int_0^l (2\text{sen}h\beta_m x \cdot \alpha_m \text{cosh}\beta_m x) dx + \int_0^l (\alpha_m \text{cos}\beta_m x)^2 dx - \right. \\
 \left. \int_0^l (2\alpha_m \text{cos}\beta_m x \cdot \alpha_m \text{cosh}\beta_m x) dx + \int_0^l (\alpha_m \text{cosh}\beta_m x)^2 dx \right] \dots(\text{A.10})$$

Para a resolução destas integrações foram utilizadas as identidades trigonométricas relacionadas abaixo:

$$(\text{sen}\beta_m x)^2 = \frac{1 - \text{cos}2\beta_m x}{2} \dots(\text{A.11})$$

$$(\text{cos}\beta_m x)^2 = \frac{1 + \text{cos}2\beta_m x}{2} \dots(\text{A.12})$$

$$(2\text{sen}\beta_m x \cdot \text{cos}\beta_m x) = \text{sen}2\beta_m x \dots(\text{A.13})$$

$$(\text{cosh}\beta_m x)^2 = 1 + (\text{sen}h\beta_m x)^2 \dots(\text{A.14})$$

$$(\text{sen}h\beta_m x) = \left( \frac{e^{+\beta_m x} - e^{-\beta_m x}}{2} \right) \dots(\text{A.15})$$

$$(\text{cosh}\beta_m x) = \left( \frac{e^{+\beta_m x} + e^{-\beta_m x}}{2} \right) \dots(\text{A.16})$$

Para as integrações por partes como:

$$\int_0^l (\operatorname{sen} h\beta_m x \cdot \operatorname{sen} \beta_m x) dx \quad \dots(\text{A.17})$$

$$\int_0^l (\operatorname{cos} \beta_m x \cdot \operatorname{cosh} \beta_m x) dx \quad \dots(\text{A.18})$$

Foi realizada a substituição dos termos hiperbólicos pelas suas identidades trigonométricas, após foi aplicado as seguintes fórmulas para realizar as integrações:

$$\int_0^l e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \operatorname{cos} bu) + C \quad \dots(\text{A.19})$$

$$\int_0^l e^{au} \operatorname{cos} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{cos} bu + b \operatorname{sen} bu) + C \quad \dots(\text{A.20})$$

Assim obtemos para cada um dos dez termos da equação do numerador de  $C_m B_m$ , as seguintes respostas:

Para o primeiro termo, temos:

$$\int_0^l (\operatorname{sen} \beta_m x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4\beta_m} (\operatorname{sen} 2\beta_m x) \Big|_0^l = \frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_m} (\operatorname{sen} 2\beta_m l) \quad \dots(\text{A.21})$$

Para o segundo termo, temos:

$$\begin{aligned} -\int_0^l (2 \operatorname{sen} h\beta_m x \cdot \operatorname{sen} \beta_m x) dx &= \operatorname{cosh} \beta_m x \left( -\frac{\operatorname{sen} \beta_m x}{\beta_m} \right) + \operatorname{sen} h\beta_m x \left( \frac{\operatorname{cos} \beta_m x}{\beta_m} \right) \Big|_0^l = \\ &= -\operatorname{cosh} \beta_m l \left( \frac{\operatorname{sen} \beta_m l}{\beta_m} \right) + \operatorname{sen} h\beta_m l \left( \frac{\operatorname{cos} \beta_m l}{\beta_m} \right) \end{aligned} \quad \dots(\text{A.22})$$

Para o terceiro termo, temos:

$$-\int_0^l (2\operatorname{sen}\beta_m x \cdot \alpha_m \cos\beta_m x) dx = \frac{\alpha_m}{2\beta_m} (\cos 2\beta_m x) \Big|_0^l = \frac{\alpha_m}{2\beta_m} (\cos 2\beta_m l) - \frac{\alpha_m}{2\beta_m} \quad \dots(\text{A.23})$$

Para o quarto termo, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^l (2\operatorname{sen}\beta_m x \cdot \alpha_m \operatorname{cosh}\beta_m x) dx &= \frac{\alpha_m}{\beta_m} \left[ (\operatorname{sen}\beta_m x \cdot \operatorname{senh}\beta_m x) - (\cos\beta_m x \cdot \operatorname{cosh}\beta_m x) \right] \Big|_0^l = \\ &= \frac{\alpha_m}{\beta_m} \left[ (\operatorname{sen}\beta_m l \cdot \operatorname{senh}\beta_m l) - (\cos\beta_m l \cdot \operatorname{cosh}\beta_m l) \right] + \frac{\alpha_m}{\beta_m} \end{aligned} \quad \dots(\text{A.24})$$

Para o quinto termo, obtemos:

$$\int_0^l (\operatorname{senh}\beta_m x)^2 dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\operatorname{sen} 2\beta_m x) \Big|_0^l = -\frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\operatorname{sen} 2\beta_m l) \quad \dots(\text{A.25})$$

Para o sexto termo, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^l (2\operatorname{senh}\beta_m x \cdot \alpha_m \cos\beta_m x) dx &= \frac{\alpha_m}{\beta_m} \left[ (\operatorname{cosh}\beta_m x \cdot \cos\beta_m x) + (\operatorname{senh}\beta_m x \cdot \operatorname{sen}\beta_m x) \right] \Big|_0^l = \\ &= \frac{\alpha_m}{\beta_m} \left[ (\operatorname{cosh}\beta_m l \cdot \cos\beta_m l) + (\operatorname{senh}\beta_m l \cdot \operatorname{sen}\beta_m l) \right] - \frac{\alpha_m}{\beta_m} \end{aligned} \quad \dots(\text{A.26})$$

Para o sétimo termo, obtemos:

$$-\int_0^l (2\operatorname{senh}\beta_m x \cdot \alpha_m \operatorname{cosh}\beta_m x) dx = -\frac{\alpha_m}{2\beta_m} (\operatorname{cosh} 2\beta_m x) \Big|_0^l = -\frac{\alpha_m}{2\beta_m} (\operatorname{cosh} 2\beta_m l) + \frac{\alpha_m}{2\beta_m} \quad \dots(\text{A.27})$$

Para o oitavo termo, obtivemos:

$$\int_0^l (\alpha_m \cos\beta_m x)^2 dx = \alpha_m^2 \left[ \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\operatorname{sen} 2\beta_m x) \right] \Big|_0^l = \alpha_m^2 \left[ \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\operatorname{sen} 2\beta_m l) \right] \quad \dots(\text{A.28})$$

Para o nono termo, temos:

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^l (2\alpha_m \cos\beta_m x \cdot \alpha_m \cosh\beta_m x) dx = -\alpha_m^2 \left[ \left( \frac{\sinh\beta_m x}{\beta_m} \right) \cos\beta_m x + \left( \frac{\cosh\beta_m x}{\beta_m} \right) \sin\beta_m x \right]_0^l = \\
 & = -\alpha_m^2 \left[ \left( \frac{\sinh\beta_m l}{\beta_m} \right) \cos\beta_m l + \left( \frac{\cosh\beta_m l}{\beta_m} \right) \sin\beta_m l \right]
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Para o décimo termo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l (\alpha_m \cosh\beta_m x)^2 dx = \alpha_m^2 \left[ \frac{x}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\sinh 2\beta_m x) \right]_0^l = \\
 & = \alpha_m^2 \left[ \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\sinh 2\beta_m l) \right]
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Voltando para a equação original, temos:

$$\begin{aligned}
 d_m = & \frac{\left[ -\frac{2}{\beta_m} + \left( \frac{\cos\beta_m l}{\beta_m} \right) + \left( \frac{\cosh\beta_m l}{\beta_m} \right) + \frac{\alpha_m}{\beta_m} (\sin\beta_m l - \sinh\beta_m l) \right]}{\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_m} (\sinh 2\beta_m l) \right] + \left[ -\cosh\beta_m l \left( \frac{\sin\beta_m l}{\beta_m} \right) + \sinh\beta_m l \left( \frac{\cos\beta_m l}{\beta_m} \right) \right] + \\ & \left[ \frac{\alpha_m}{2\beta_m} (\cos 2\beta_m l) - \frac{\alpha_m}{2\beta_m} \right] + \frac{\alpha_m}{\beta_m} [(\sin\beta_m l \cdot \sinh\beta_m l) - (\cos\beta_m l \cdot \cosh\beta_m l)] + \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \\ & \left[ -\frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\sinh 2\beta_m l) \right] + \frac{\alpha_m}{\beta_m} [(\cosh\beta_m l \cdot \cos\beta_m l) + (\sinh\beta_m l \cdot \sin\beta_m l)] - \frac{\alpha_m}{\beta_m} + \\ & \left[ -\frac{\alpha_m}{2\beta_m} (\cosh 2\beta_m l) + \frac{\alpha_m}{2\beta_m} \right] + \alpha_m^2 \left[ \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\sinh 2\beta_m l) \right] - \\ & -\alpha_m^2 \left[ \left( \frac{\sinh\beta_m l}{\beta_m} \right) \cos\beta_m l + \left( \frac{\cosh\beta_m l}{\beta_m} \right) \sin\beta_m l \right] + \alpha_m^2 \left[ \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_m} (\sinh 2\beta_m l) \right] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Realizando as simplificações permitidas, juntando os termos idênticos e considerando a Equação (2.47) e (2.48), nossa equação fica da seguinte maneira:

$$d_m = \frac{2}{\left\{ \begin{aligned} & \left[ (\alpha_m^2 - 1) \left( \frac{\text{sen} 2\beta_m l}{4} - \text{sen} \beta_m l \cdot \cos \beta_m l \right) \right] + \\ & + \left[ (\alpha_m^2 + 1) \left( \frac{\text{sen} h 2\beta_m l}{4} - \text{sen} \beta_m l \cdot \cosh \beta_m l \right) \right] + \\ & + \alpha_m \left( \frac{\cos 2\beta_m l - \cosh 2\beta_m l}{2} + 2 \text{sen} \beta_m l \cdot \text{sen} h 2\beta_m l \right) + \alpha_m^2 \beta_m l \end{aligned} \right\}} \quad \dots(\text{A.32})$$