

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SABRINA COSTA CHICHINELLI

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM
ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL
ENTRE PLACAS PARALELAS COM
OBSTÁCULO**

**Alegrete
2022**

SABRINA COSTA CHICHINELLI

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM
ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL
ENTRE PLACAS PARALELAS COM
OBSTÁCULO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Cesar Flaubiano da Cruz Cristaldo

**Alegrete
2022**

SABRINA COSTA CHICHINELLI

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL ENTRE PLACAS
PARALELAS COM OBSTÁCULO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de bacharel em Engenharia Mecânica.

Dissertação defendida e aprovada em: 18, Março de 2022.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Cesar Flaubiano da Cruz Cristaldo

Orientador

Unipampa

Prof. Dr. Felipe Denardin Costa

Unipampa

Prof. Dr. Rafael Maroneze

Unipampa



Assinado eletronicamente por **RAFAEL MARONEZE, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/03/2022, às 14:59, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **FELIPE DENARDIN COSTA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/03/2022, às 15:21, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **CESAR FLAUBIANO DA CRUZ CRISTALDO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/05/2022, às 08:41, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0761880** e o código CRC **BC0A5337**.

AGRADECIMENTO

Ao findar de mais um ciclo, gostaria de agradecer a pessoa que mais me apoiou nessa trajetória, minha mãe, Eli Costa, uma mulher guerreira que transmite luz e sabedoria. Agradeço a minha irmã Sofia e meu pai Joldemar por estarem ao meu lado nessa caminhada, que apesar das dificuldades, nunca duvidaram da minha capacidade.

Aos meus amigos, agradeço por todos esses anos de lutas e conquistas. Sem vocês, nada disso seria possível.

Aos melhores professores que pude ter ao longo dessa jornada, obrigada! Vocês me ensinaram que uma nota não define minha capacidade e me construíram ao longo desses anos para me tornar uma Engenheira de excelência.

E por fim, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador por aceitar essa tortuosa caminhada ao meu lado em fenômenos de transferência. Todas as vezes que pensei em desistir, me fez lembrar de quem eu era e do que sou capaz.

"O futuro pertence àqueles que acreditam na
beleza de seus sonhos"
— Eleanor Roosevelt

RESUMO

O estudo dos mecanismos de transferência de calor são fundamentais para o funcionamento de máquinas, motores e aplicações na área de engenharia. Por exemplo, no caso de um radiador, o processo de troca de calor está relacionado com escoamento entre placas paralelas. Neste contexto, o uso da Mecânica dos Fluidos Computacional para o estudo de um projeto de trocador de calor torna-se uma ferramenta com baixo custo financeiro quando comparado com estudos experimentais. O presente trabalho propõe uma solução numérica de um escoamento entre placas paralelas com diferentes obstáculos geométricos. O objetivo principal é validar um código numérico que servirá como base para futuros desenvolvimentos de modelos de transferência de calor (trocadores de calor). Neste sentido, o método de volumes finitos é utilizado para a discretização das equações para um escoamento incompressível. O acoplamento pressão e velocidade é obtido através do método da compressibilidade artificial, onde a massa específica é substituída artificialmente pela pressão no termo transiente da equação da continuidade. A solução é obtida pelo método Quick Scheme. Nesta etapa do trabalho é apresentada uma solução clássica de escoamento entre duas placas paralelas com um obstáculo cilíndrico no centro do domínio e também escoamento livre com obstáculos quadrados. Os resultados mostram que o modelo reproduz a esteira de von Kármán que é um fenômeno clássico em escoamento em torno de cilindros. Portanto, o modelo poderá ser adaptado para futuras modelagens de trocadores de calor.

Palavras-chave: Compressibilidade artificial. Trocador de calor. Quick Scheme. Volumes finitos.

ABSTRACT

The study of heat transfer mechanisms are fundamental for the operation of machines, engines and applications in the engineering area. For example, in the case of a radiator, the heat exchange process is related to flow between parallel plates. In this context, the use of Computational Fluid Mechanics for the study of a heat exchanger design becomes a tool with low financial cost when compared to experimental studies. The present work proposes a numerical solution of a flow between parallel plates with different geometric obstacles. The main objective is to validate a numerical code that will serve as a basis for future developments of heat transfer models (heat exchangers). In this sense, the finite volume method is used for the discretization of the equations for an incompressible flow. The pressure and velocity coupling is obtained through the method of artificial compressibility, where the density is artificially replaced by the pressure in the transient term of the continuity equation. The solution is obtained by the Quick Scheme method. In this stage of the work, a classical solution of flow between two parallel plates with a cylindrical obstacle in the center of the domain and also free flow with square obstacles is presented. The results show that the model reproduces the von Kármán wake, which is a classic phenomenon in flow around cylinders. Therefore, the model can be adapted for future modeling of heat exchangers.

Keywords: Artificial Compressibility, Heat Exchanger, Quick Scheme, Finite Volume.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Definição-limite de massa específica de um fluido contínuo	15
Figura 2	Deformação de um fluido originalmente em repouso, sob o efeito de uma tensão de cisalhamento.	16
Figura 3	a) Linhas de corrente e b) tubo de corrente	19
Figura 4	Linhas de emissão sobre um automóvel em um túnel de vento	19
Figura 5	Desenvolvimento do perfil de velocidade devido à condição de não escorregamento.....	20
Figura 6	Desenvolvimento da camada limite de velocidade.....	21
Figura 7	Desenvolvimento da camada limite térmica.....	21
Figura 8	Desenvolvimento da camada limite de concentração.....	22
Figura 9	Trajectoria de uma partícula em regime laminar e turbulento.....	25
Figura 10	Transição de um regime laminar para turbulento em um tubo	25
Figura 11	Desenvolvimento do perfil da velocidade em um cano circular	26
Figura 12	Perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido	28
Figura 13	Trocador de calor de aletas de placas e seus componentes.....	29
Figura 14	Evaporador automotivo de aletas múltiplas.....	29
Figura 15	Geometrias da superfície do trocador de placas: (a) aletas retangulares planas, (b) triangular simples, (c) ondulada, (d) tira deslocada/compensada, (e) perfurada e (f) veneziana.	30
Figura 16	Diagrama esquemático da matriz de placas colineares.....	31
Figura 17	Padrão de fluxo para uma razão de espessura de $t/H = 0,3$ para três diferentes números de Reynolds.	33
Figura 18	Padrões de fluxo de transição de um fluxo laminar para turbulento.....	34
Figura 19	Linhas aerodinâmicas para números de Reynolds baixos. a) Fluxo médio de simulação em linha instável em $Re=797$; b) Fluxo constante de simulação em linha simetrizada em $Re=804$	35
Figura 20	Sistema usado para a dedução das equações de conservação da massa	38
Figura 21	Balço de massa para o volume de controle.....	41
Figura 22	Tensor de tensões.....	42
Figura 23	Volumes de controle discretos dentro do domínio.....	48
Figura 24	Esquema de um único volume de controle e seus respectivos vizinhos	49
Figura 25	Esquema de um único volume de controle e seus respectivos vizinhos	51
Figura 26	Grade escalonada: os pontos azuis são da grade original, os pontos vermelhos e amarelos são os locais de avaliação das velocidades u e v , respectivamente	52
Figura 27	Escoamento em torno de um cilindro	54
Figura 28	Esquema de uma malha numérica	56
Figura 29	Escoamento em torno de cilindro para diferentes números de Reynolds: a) $Re = 10$, b) $Re = 20$, c) $Re = 40$, d) $Re = 200$, e) $Re = 500$, f) $Re = 700$	58
Figura 30	Comparação do presente modelo com resultados da literatura do comprimento máximo de vórtice para diferentes números de Reynolds	59
Figura 31	Evolução temporal do campo de temperatura e velocidade	59
Figura 32	Escoamento bidimensional com dois obstáculos quadrados	60
Figura 33	Balço de massa para o volume de controle.....	65

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Objetivos Gerais.....	12
1.2 Objetivos Específicos	12
1.3 Justificativa	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
2.1 Definição de um Fluido	14
2.2 Viscosidade	16
2.3 Fluidos Newtonianos e não Newtonianos.....	17
2.4 Campo de velocidade	17
2.5 Linhas de corrente, emissão, trajetória e tempo	18
2.6 Camada limite	20
2.7 Número de Péclet	22
2.8 Número de Reynolds.....	22
2.9 Escoamento viscoso e não viscoso.....	23
2.10 Escoamento interno e externo.....	23
2.11 Escoamento compressível e incompressível.....	23
2.12 Escoamento laminar e turbulento	24
2.13 Escoamento uni, bi e tridimensional	25
2.14 Escoamento entre placas planas paralelas.....	26
2.15 Aplicações	28
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	38
3.1 Conservação da massa.....	38
3.2 Conservação da quantidade de movimento.....	40
3.3 Conservação da energia.....	44
4 SOLUÇÃO NUMÉRICA	48
4.1 Método de volumes finitos	48
4.2 Método Quick Scheme.....	51
5 METODOLOGIA	54
5.1 Delimitação do problema	54
5.2 Pré-processamento	55
5.3 Solução do problema.....	56
5.4 Pós-processamento.....	56
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS	62
8 ANEXO A - CONSERVAÇÃO DA MASSA	64
9 ANEXO B - SEGUNDA LEI DE NEWTON	66
10 ANEXO C - CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	68
11 ANEXO D - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA	70
12 ANEXO E - DISCRETIZAÇÃO CONSERVAÇÃO DA MASSA	72
13 ANEXO F - DISCRETIZAÇÃO CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	73
14 ANEXO G - DISCRETIZAÇÃO CONSERVAÇÃO DA ENERGIA	75

1 INTRODUÇÃO

Um fluido é um aglomerado de moléculas que possuem uma distância entre elas muito grande comparada com o diâmetro molecular. Eles se deformam continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento, independentemente do quão pequena ela seja, sendo que a tensão é proporcional à taxa de deformação

Nos problemas de engenharia, as dimensões físicas são, em grande maioria, maiores do que um volume limite, de forma que a massa específica torna-se uma função pontual e as propriedades do fluido são consideradas continuamente variantes no espaço. Esse fluido é denominado meio contínuo, que resulta na variação suave das propriedades. Assim como a massa específica, a pressão e a temperatura são grandezas termodinâmicas importantes na análise dos fluidos. A pressão é a tensão em um ponto no fluido e a temperatura é uma medida do nível de energia interna de um fluido.

Além das grandezas termodinâmicas primárias, existem as secundárias que também são relevantes para a análise do escoamento de um fluido. Uma delas é a viscosidade, que é uma medida da resistência de um fluido ao escoamento, determinando a taxa de deformação do fluido causada pela tensão de cisalhamento. Os fluidos newtonianos, aqueles que possuem uma tensão de cisalhamento linearmente proporcional a taxa de deformação de cisalhamento, possuem uma viscosidade constante independente da taxa de cisalhamento.

Há dois métodos para analisar um campo de velocidade, o euleriano e o lagrangeano. A abordagem mais utilizada em mecânica dos fluidos é a euleriana, visto que geralmente o interesse está em analisar as propriedades de uma seção e não apenas de uma partícula específica. Os métodos para visualização de um campo de escoamento necessitam de linhas que facilitem sua compreensão, como as linhas de corrente, trajetória, emissão e de tempo. A camada limite é usada para verificar a camada de um fluido próximas a uma superfície delimitadora. Ela está associada as tensões de cisalhamento e são ditas camada limite de velocidade, térmica e de concentração, se estão associadas, respectivamente, a velocidade, a temperatura e concentração molar.

O escoamento dos fluidos possuem certas características que os definem. Um escoamento é dito viscoso se os efeitos de atrito são consideráveis, quando esses efeitos podem ser desprezados, o escoamento é chamado de invíscido. O escoamento dos fluidos também pode ser classificado como interno ou externo, isso depende do espaço em

que ele está contido, se é fechado ou aberto. Ele também pode ser compressível ou não e isso depende da variação da densidade, pois se ela é aproximadamente constante em um escoamento, ela é incompressível e se ela variar é compressível. Um escoamento também pode ser dito laminar ou turbulento, quando o movimento do fluido é altamente disposto por camadas suaves, ele é denominado de escoamento laminar e se o movimento do fluido for desordenado e houver flutuações da velocidade, ele é chamado de escoamento turbulento. Um escoamento é dito transitório quando encontra-se entre os dois regimes de escoamento. Um dos parâmetros utilizado para a definição de um regime de escoamento é o número adimensional de Reynolds, que pode ter valores padrão dependendo de sua aplicação. Além do mais, um escoamento pode ser uni, bi ou tridimensional, isso depende da distribuição de velocidade, que está associada ao número de coordenadas espaciais necessárias, uma, duas ou três dimensões.

O presente trabalho abordará sobre o escoamento entre placas planas paralelas, que estão separadas por uma distância L e são consideradas infinitas em uma dada direção, com diferentes obstáculos geométricos. Realiza-se a dedução da equação do perfil de velocidade para a validação do código numérico na condição de um escoamento completamente desenvolvido e discute sobre algumas aplicações das placas paralelas ao longo dos anos. Uma das aplicações é em trocadores de calor, que utilizam aletas em sua composição para aumentar a superfície de transferência de calor e realizar a troca de energia térmica de forma mais eficiente. O foco do presente trabalho está em geometrias simples dos trocadores de calor, que são as placas paralelas, visto que um trocador de calor pode ter aletas de diversas geometrias.

A análise de placas paralelas é realizada por meio de equações que modelam os escoamentos e são formuladas através das leis de conservação de massa, quantidade de movimento e conservação de energia. A resolução dessas equações, em duas ou três dimensões, deu-se por meio de um algoritmo numérico baseado no método de volumes finitos, utilizado para a discretização das equações para um escoamento incompressível, levando em consideração o comportamento do fluxo dependente do tempo devido a liberação de vórtices na resolução das equações e a solução é obtida pelo método Quick Scheme. O acoplamento pressão e velocidade é obtido através do método da compressibilidade artificial, onde a massa específica é substituída artificialmente pela pressão no termo transiente da equação da continuidade.

1.1 Objetivos Gerais

O objetivo geral do presente trabalho é obter uma solução numérica bidimensional de um escoamento entre placas paralelas com diferentes obstáculos com a finalidade de modelar problemas de trocadores de calor na área de engenharia.

1.2 Objetivos Específicos

A modelagem do problema de transferência de calor em um escoamento entre placas paralelas será realizada através da solução numérica das equações de Navier Stokes. O método de discretização das equações de Navier Stokes utilizado será de volumes finitos e a solução do sistema de equações resultantes é resolvido pelo método Quick Scheme. O problema físico consiste em resolver problemas de trocadores de calor para obter os seguintes resultados:

- Escoamento em torno de diferentes obstáculos;
- Campos de velocidade;
- Perfis de temperatura;
- Estudo de diferentes geometrias para trocadores de calor.

1.3 Justificativa

Considerando que estudos experimentais possuem custo financeiro elevado, a alternativa é representar tais experimentos através da modelagem matemática. Para fluidos, a modelagem consiste num conjunto de equações diferenciais que devem ser integradas. Tendo em vista que nem sempre a integração analítica dessas equações é possível, faz-se necessário obter uma solução numérica capaz de representar o modelo em questão. Uma solução numérica é obtida através da modelagem física do problema, identificando as grandezas físicas envolvidas no sistema. A partir disso, elabora-se um modelo descrito por leis de conservação adequadas ao fenômeno, como conservação de massa, momento e energia. Esses modelos servem para explicar e prever o comportamento do sistema em situações diferentes, sendo possível a realização de uma formulação matemática para posterior modelagem computacional, com as equações governantes, condições iniciais e de contorno.

Nesse contexto, o presente trabalho abordará sobre o estudo de escoamento entre placas paralelas planas, utilizando a dinâmica dos fluidos computacional, tendo em vista a vasta aplicação desse elemento em trocadores de calor em indústrias como a aeronáutica, a aeroespacial, a automobilística, entre outras.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Essa seção abordará alguns tópicos que acompanham o estudo de escoamento entre placas paralelas, como a definição de um fluido, a camada limite de um escoamento, que é a camada de fluido formada próxima à superfícies delimitadoras, as definições das características que envolvem um escoamento, a dedução da equação do perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido e as aplicações de placas paralelas.

2.1 Definição de um Fluido

A diferença entre um sólido e um fluido está no fato de que o sólido resiste à tensão de cisalhamento (ou tangencial), enquanto os fluidos se deformam continuamente sob a aplicação dela, independentemente do quão pequena ela seja. Nos sólidos, a tensão é proporcional à deformação, porém nos fluidos ela é proporcional à taxa de deformação (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Um fluido possui dois estados, líquido e gasoso. Um líquido, composto por moléculas que estão agrupadas devido a fortes forças de coesão, tende a manter o volume constante e formar uma superfície livre em um campo gravitacional, com a condição de não estar confinado na parte superior. Nos gases, as moléculas estão muito afastadas e a força coesiva é desprezível, por conta disso, é possível se expandir até preencher todo o recipiente que o confina. Além disso, um gás não forma uma superfície livre, pois não tem um volume definido e, quando é deixado sem confinamento, gera uma atmosfera que é essencialmente hidrostática (WHITE, 2011).

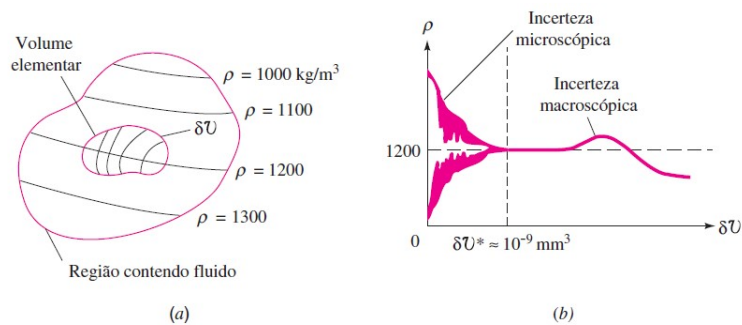
A partir de definições anteriores, é possível concluir que fluido é um aglomerado de moléculas, que possuem uma distância entre elas muito grande comparada com o diâmetro molecular. Pelo fato das moléculas não estarem fixas em uma estrutura, a massa específica, massa por unidade de volume, não possui um significado preciso, pois ocorre uma variação contínua do número de moléculas que ocupam um determinado volume. A inconsistência na distribuição da massa não tem importância se a unidade de volume for grande comparada a um cubo do espaçamento molecular, o que torna o número de moléculas dentro do volume constante, mesmo com o intercâmbio de partículas através das fronteiras. Caso a variação da unidade de volume seja muito grande, pode ocorrer uma variação na aglomeração das partículas (WHITE, 2011).

White (2011) utiliza a Fig. (1) para demonstrar a massa específica calculada por

meio da massa molecular δm dentro de um dado volume δV , onde existe um volume-limite δV^* abaixo do qual as variações moleculares e de agregações podem ser importantes. Portanto, a massa específica ρ de um fluido é melhor definida como

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1)$$

Figura 1 – Definição-limite de massa específica de um fluido contínuo



Fonte: White (2011, p. 20).

Para todos os líquidos e gases à pressão atmosférica, o volume-limite é $10^{-9} mm^3$, que em condições padrão, contém aproximadamente 3×10^7 moléculas, suficiente para definir uma massa específica aproximadamente constante, conforme a Equação 1.

Os problemas de engenharia, em sua maioria, trabalham com dimensões físicas muito maiores do que o volume-limite, de forma que a massa específica torna-se uma função pontual e as propriedades do fluido são consideradas continuamente variantes no espaço, como representado na Fig. (1a). Esse fluido é denominado meio contínuo, que resulta na variação suave das propriedades a ponto de usar cálculos diferenciais para sua análise (WHITE, 2011).

Assim como a massa específica, a pressão e a temperatura são grandezas termodinâmicas importantes na análise dos fluidos. A pressão P é a tensão em um ponto no fluido estático. Gradientes de pressão geralmente são os responsáveis pelo escoamento do fluido, porém se ele estiver a uma baixa velocidade, a intensidade real da pressão não é levada em consideração. A temperatura T é uma medida do nível de energia interna de um fluido. Pode ocorrer a variação da temperatura em um escoamento em alta velocidade, no caso de um gás, e se as diferenças de temperaturas forem grandes, a transferência de calor é relevante (WHITE, 2011).

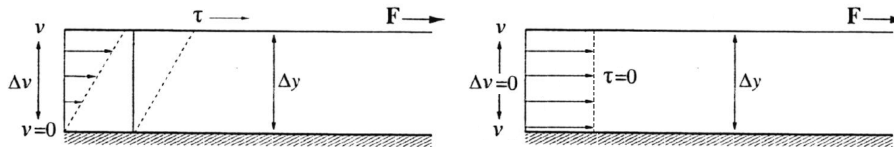
2.2 Viscosidade

As grandezas citadas na seção anterior, como massa específica, temperatura e pressão, são variáveis termodinâmicas primárias. Existem variáveis secundárias que também são relevantes para caracterizar o comportamento de um fluido, uma delas é a viscosidade.

Segundo White (2011), a viscosidade é uma medida quantitativa da resistência de um fluido ao escoamento. Ela determina a taxa de deformação do fluido gerada pela aplicação de uma tensão de cisalhamento e aumenta consideravelmente com a pressão, porém diminui com a temperatura. A Fig.(2a) mostra a taxa de deformação que um fluido sofre devido a tensão de cisalhamento. Essa taxa de deformação é proporcional a razão da variação de velocidade na direção de y .

$$\tau \propto \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{dv}{dy} \quad (2)$$

Figura 2 – Deformação de um fluido originalmente em repouso, sob o efeito de uma tensão de cisalhamento.



Fonte: Adaptado de Fortuna (2000).

A tensão de cisalhamento é proporcional ao gradiente de velocidade na direção de y e quanto maior a diferença de velocidade entre as lâminas maior será a tensão de cisalhamento. Gradiente é a variação da propriedade na direção espacial. A velocidade só varia na direção de y , se ocorrer deslocamento em x a velocidade não será alterada, ou seja, é um escoamento unidimensional. Se as lâminas possuem mesma velocidade o escoamento é dito homogêneo, veja Fig. (2b) (FORTUNA, 2000).

A constante de proporcionalidade possibilita a igualdade na Equação (2). Ela depende do fluido de trabalho e chama-se viscosidade dinâmica ou molecular (μ). Quanto mais viscoso o fluido, mais forte são as tensões de cisalhamento entre suas lâminas. Fluidos que satisfazem a Equação (3) são chamados de newtonianos (FORTUNA, 2000).

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (3)$$

Em casos que as forças de atrito atuam em conjunto com as inerciais, no número de Reynolds por exemplo, a razão entre viscosidade dinâmica e a densidade tem um nome próprio, que é a viscosidade cinemática Equação (4). Chama-se cinemática pois a unidade de massa não aparece (WHITE, 2011).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4)$$

2.3 Fluidos Newtonianos e não Newtonianos

Segundo Fox, Pritchard e McDonald (2014), os fluidos newtonianos possuem uma viscosidade constante independente da taxa de cisalhamento, mas variam com a temperatura e pressão se não estiverem em condições normais. São denominados fluidos newtonianos aqueles que seguem a lei linear da Equação (3), ou seja, a tensão de cisalhamento é linearmente proporcional a taxa de deformação de cisalhamento, como citado na seção anterior. O ar, oxigênio, nitrogênio, água, querosene, gasolina e outros líquidos a base de óleo, são fluidos newtonianos (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Fluidos que não seguem a lei linear da Equação (3) não são newtonianos, ou seja, a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional a taxa de deformação de cisalhamento. Um exemplo de fluido não newtoniano é a pasta de dente, que apesar de se comportar como um fluido quando aperta-se o recipiente em que ela está inserida, não escorre quando apenas se retira a tampa e a gira para baixo (FOX et al., 2014).

2.4 Campo de velocidade

A velocidade é uma grandeza vetorial que exige módulo e direção, tornando assim, o campo de velocidade um campo vetorial. O campo de velocidade é definido por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ e é responsável por indicar a velocidade de uma partícula fluida nos pontos x, y e z no instante de tempo t . Em geral, o campo de velocidade é uma função vetorial da posição e do tempo, portanto, pode ser representado por três componentes escalares u, v e w , tornando-se igual a $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ (FOX et al., 2014).

Há dois métodos de analisar o campo de velocidade, o euleriano e o lagrangiano. O método euleriano atenta-se ao campo de escoamento, calculando o campo de pressão do padrão de escoamento e não as variações de pressão que uma partícula sofre quando

se movimenta. O método lagrangiano, em contrapartida, está interessado em apenas uma partícula que se move no escoamento (WHITE, 2011).

A abordagem euleriana é a mais utilizada em mecânica dos fluidos, pois geralmente o interesse está em analisar as propriedades de uma seção e não apenas de uma partícula específica, mas a lagrangiana se faz útil quando é necessário delimitar o estudo do escoamento de um fluido.

2.5 Linhas de corrente, emissão, trajetória e tempo

Há alguns métodos para a visualização dos campos de escoamento e para entendê-los é necessário obter conhecimento de alguns conceitos. A mecânica dos fluidos é bastante visual, os campos de escoamento podem ser vistos de formas diferentes, como em fotografias e esboços, sendo possível obter informações qualitativas e por vezes quantitativas (WHITE, 2011).

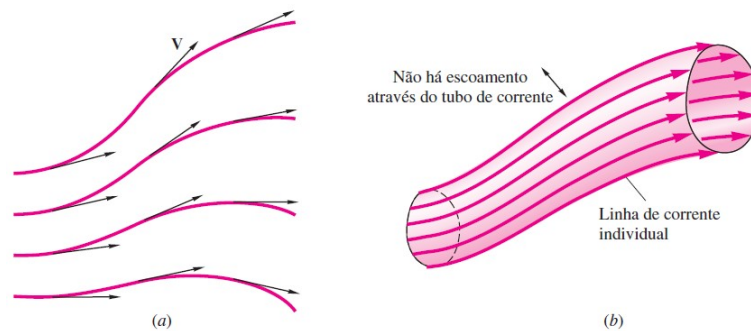
De acordo com White (2011) e Fox, Pritchard e McDonald (2014), há quatro tipos básicos de linhas para a visualização de um escoamento

- Linha de corrente: é uma linha tangente em todos os pontos do vetor velocidade em um dado instante. Não é possível haver fluxo através das linhas de corrente
- Linha de trajetória: é o caminho real percorrido por uma partícula de fluido. Para identificá-la é necessário torná-la visível e isso é realizado a partir de corantes ou fumaça;
- Linhas de emissão: é uma linha constituída por todas as partículas que passaram por um mesmo ponto fixo, sendo esse ponto, visualizado apenas a partir de corantes ou fumaça;
- Linha de filete ou tempo: é um conjunto de partículas fluidas marcadas em um dado instante.

É comum obter a linha de corrente através de cálculos matemáticos, enquanto as outras três são geradas experimentalmente. As linhas de corrente, Fig. (3a), e tempo são instantâneas, ao passo que as linhas de trajetória e emissão são dependentes do tempo. A Fig. (3b) mostra um tubo de corrente formado por um conjunto fechado de linhas de corrente (WHITE, 2011).

Em um escoamento permanente, a linha de corrente não varia de um instante a outro devido a velocidade constante de cada ponto do campo com o tempo. Ou seja,

Figura 3 – a) Linhas de corrente e b) tubo de corrente



Fonte: White (2011, p. 53).

a partícula de fluido segue sobre a mesma linha de corrente e partículas consecutivas que passam por um ponto fixo também permanecem sobre a mesma linha de corrente. Portanto, em um escoamento permanente, linhas de trajetória, emissão e corrente são iguais (FOX et al., 2014).

A Figura 4 mostra um exemplo de campo de escoamento, com linhas de emissão, corrente e trajetória, gerado por uma fumaça que é solta em cinco pontos fixos em um túnel de vento. O modelo em regime permanente permanecerá constante enquanto isso for realizado (FOX et al., 2014).

Figura 4 – Linhas de emissão sobre um automóvel em um túnel de vento

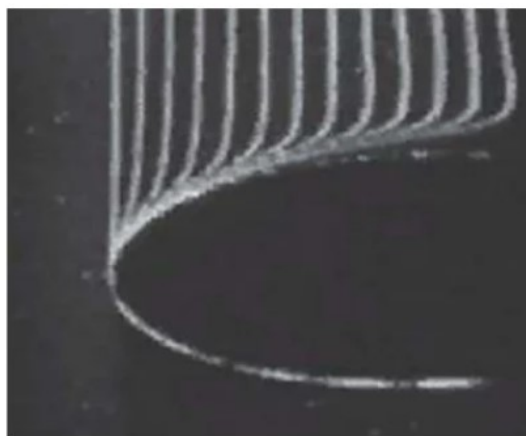


Fonte: Fox, Pritchard e McDonald (2014, p. 47).

2.6 Camada limite

O conceito de camada limite foi difundido em meados do século XX por Ludwig Prandtl (1875-1953), gerando uma nova visão para a análise de escoamentos, visto que as equações da camada limite possibilitam descrever efeitos viscosos próximos a superfícies sólidas. As equações sobre um escoamento viscoso desenvolvido por Navier (1785-1836) e Stokes (1819-1903) eram muito complicadas perante a nova proposta de Prandtl, além do mais, as equações de Prandtl seguem a condição de não escorregamento, que acontece quando um fluido tem contato direto com uma superfície sólida e não escorrega. A Fig. (5) representa o desenvolvimento de um perfil de velocidade devido à condição de não escorregamento à medida que o fluido escoava sobre um bordo de ataque arredondado (WHITE, 2011), (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Figura 5 – Desenvolvimento do perfil de velocidade devido à condição de não escorregamento



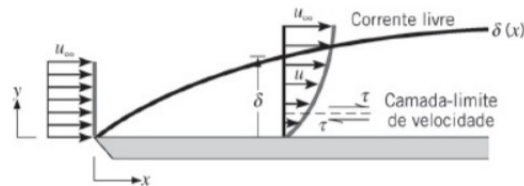
Fonte: Çengel e Cimbala (2015, p. 9).

Entender o conceito de camada limite é essencial para a análise de escoamentos, transferência de calor e de massa por convecção. Segundo Incropera, Dewitt, Bergman e Lavine (2008), as partículas de fluido ao ter contato com a superfície passam a ter velocidade nula. As partículas realizam o retardamento de outras partículas que estão em movimento em uma camada de fluido próxima e assim sucessivamente até o efeito se tornar desprezível. O efeito torna-se desprezível a uma certa distância δ (sendo δ a espessura da camada limite) da superfície e, está associado às tensões de cisalhamento que atuam paralelas à velocidade do fluido. Como a camada limite está associada a velocidade

do fluido, ela é chamada de camada limite de velocidade.

A Figura (6) é referente a camada limite de velocidade sobre uma placa plana. A medida que a distância y da superfície aumenta, a componente x da velocidade do fluido, u , tende a aumentar até obter um valor de corrente livre u_∞ .

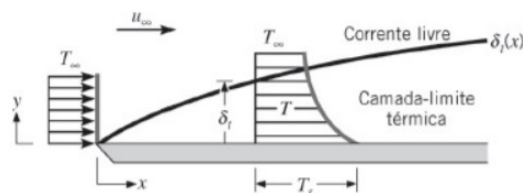
Figura 6 – Desenvolvimento da camada limite de velocidade



Fonte: Incropera et al., (2008, p. 221).

Quando há uma diferença de temperatura entre um fluido na corrente livre e a superfície, desenvolve-se outra forma de camada limite, a térmica. A Fig. (7) mostra uma placa isotérmica, onde ocorre o desenvolvimento da camada limite térmica. No início da placa, a temperatura é uniforme, ao passo que as partículas do fluido entram em contato com a placa ocorre a troca de calor e elas atingem um equilíbrio térmico. Visto que ocorre a troca de energia entre uma camada de fluido e outra, há o desenvolvimento de gradientes de temperatura, que gera a camada limite térmica, representado pelo símbolo δ_t (INCROPERA et al., 2008).

Figura 7 – Desenvolvimento da camada limite térmica

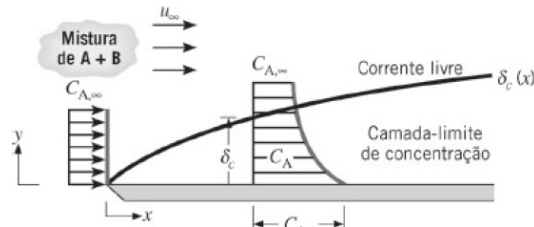


Fonte: Incropera et al., (2008, p. 222).

Quando ocorre o escoamento de uma mistura binária sobre uma superfície, acontece uma transferência de uma espécie para a outra, por convecção, se a concentração molar da espécie na superfície, $C_{A,s}$, for diferente da concentração molar na corrente livre, $C_{A,\infty}$. Esse fenômeno desenvolve a camada limite de concentração, que está demonstrada na Figura 8, δ_c , que é uma região onde há gradientes de concentração (INCROPERA et

al., 2008).

Figura 8 – Desenvolvimento da camada limite de concentração



Fonte: Incropera et al., (2008, p. 222).

2.7 Número de Péclet

O número adimensional de Péclet é a razão entre as taxas de advecção e as taxas de transferência de calor por condução, de acordo com a Eq. (5) (INCROPERA et al., 2008). Quando o número de Péclet é grande, há uma maior contribuição da convecção no escoamento em relação a condução axial, e se ele é pequeno, há uma menor contribuição, tornando a condução axial mais significativa (VELOSO, 2015).

$$\frac{VL}{\alpha} = RePr \quad (5)$$

Onde V é a velocidade, L é um comprimento característico, Re é o número de Reynolds, Pr é o número de Prandtl e α é a difusividade térmica do material.

2.8 Número de Reynolds

O número adimensional de Reynolds é a razão entre as forças de inércia e as viscosas Eq. (6). Quanto menor o número de Reynolds, maior é a ação das forças viscosas, o que torna as forças de inércia insignificantes. Enquanto as forças viscosas forem significativas, o escoamento permanece laminar. Se o número de Re for grande, as forças de inércia podem se tornar suficientes para ocorrer uma transição para o escoamento turbu-

lento (INCROPERA et al., 2008).

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (6)$$

Onde ν é a viscosidade cinemática.

2.9 Escoamento viscoso e não viscoso

A viscosidade de um fluido é uma forma de resistência interna ao escoamento, por exemplo, quando duas camadas de fluido se movem uma em relação à outra, gera-se uma força de atrito entre elas e a camada mais lenta tenta reduzir a velocidade da camada mais rápida. Quando um escoamento possui efeitos de atrito consideráveis, ele é considerado um escoamento viscoso. Em algumas regiões onde as forças inerciais e de pressão possuem mais domínio, as forças de atrito são desprezíveis, ou seja, é um escoamento não viscoso ou invíscido (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

2.10 Escoamento interno e externo

O escoamento dos fluidos também pode ser classificado como interno ou externo, isso depende do espaço em que ele está contido, se é fechado ou aberto. No escoamento interno, o fluido está totalmente limitado por paredes, como um tubo ou duto. Ao passo que no escoamento externo, o fluido não está confinado, apenas sobre uma superfície, como uma placa ou um arame (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

A viscosidade tem influência em todo o campo do escoamento, no caso dos escoamentos internos, enquanto que nos escoamentos externos, ela está restrita às camadas limites próximas das paredes e regiões de esteira a jusante dos corpos (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

2.11 Escoamento compressível e incompressível

O que define se um escoamento é compressível ou incompressível é a variação da densidade. Se em um escoamento a densidade permanecer aproximadamente constante ao longo do tempo, ele é chamado incompressível. Os líquidos são considerados substâncias

incompressíveis, porque a densidade é essencialmente constante. Um escoamento é dito compressível quando ocorre variação na densidade, deixando de ser um fator desprezível. Um exemplo é a mudança de pressão de um gás, quando aumenta-se apenas 0,01 atm, causa uma mudança de até 1% na densidade do ar (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Os escoamentos líquidos são incompressíveis com um alto nível de precisão, mas os escoamentos de gases dependem do número de Mach para serem modelados como incompressíveis. Uma mudança de densidade abaixo de 5%, ou seja, $Mach < 0,3$, pode ser considerado um escoamento incompressível. Por conta disso, é possível desconsiderar os efeitos de compressibilidade para velocidades abaixo de $100m/s$ (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). O número de Mach é dado por

$$Ma = \frac{V}{c}, \quad (7)$$

onde V é a velocidade do escoamento e c é a velocidade do som.

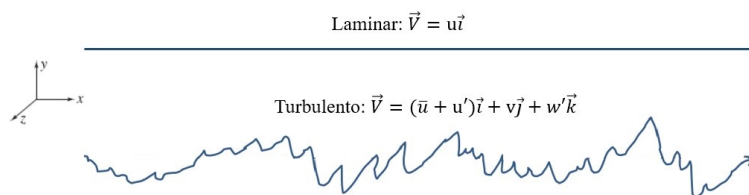
2.12 Escoamento laminar e turbulento

O escoamento dos fluidos comporta-se de duas maneiras, ordenada e caótica. Quando o movimento do fluido é altamente disposto por camadas suaves, ele é denominado de escoamento laminar. Se o movimento do fluido for desordenado e houver flutuações da velocidade, ele é chamado de escoamento turbulento. Um escoamento é dito transitório quando encontra-se entre os dois regimes de escoamento (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Segundo Fox, Pritchard e McDonald (2014), a velocidade do escoamento unidimensional laminar é dada apenas por u , enquanto a do escoamento turbulento possui uma velocidade média \bar{u} e mais três componentes, que são resultantes das flutuações aleatórias da velocidade, u' , v' e w' , como apresentado na Fig. (9).

Um dos parâmetros utilizado para a definição de um regime de escoamento é o número adimensional de Reynolds. Reynolds mostrou que a mudança de escoamento dependia de um parâmetro $\frac{\rho V d}{\mu}$, conhecido hoje pelo seu nome. Essa mudança pode ser observada pela Fig. (10), que mostra a transição de um escoamento em tubos. A partir de análise de dados, pode-se obter valores padrão do número de Reynolds para os regimes de escoamento em tubos, onde $Re_{d,critico} \approx 2300$ é o valor crítico para escoamento laminar, considerado um valor de transição e, $Re_d = 4200$ para um escoamento turbulento

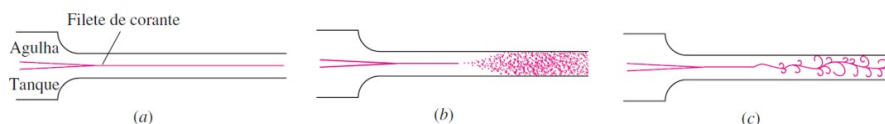
Figura 9 – Trajetória de uma partícula em regime laminar e turbulento



Fonte: Adaptado de Fox, Prithard e McDonald (2014, p. 38).

(WHITE, 2011).

Figura 10 – Transição de um regime laminar para turbulento em um tubo



Fonte: Adaptado de White (2011, p. 358).

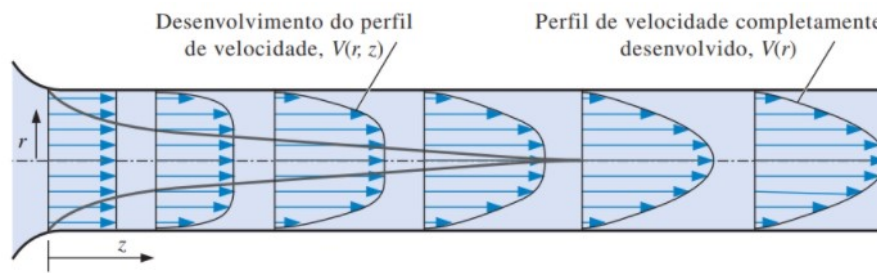
2.13 escoamento uni, bi e tridimensional

O escoamento é uni, bi ou tridimensional de acordo com a distribuição de velocidade, que depende do número de coordenadas espaciais necessárias, uma, duas ou três dimensões. Quando o escoamento de fluidos compreende uma geometria tridimensional e a velocidade pode variar em todas elas, ele é dito tridimensional, sendo $\vec{V}(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas e $\vec{V}(r, \theta, z)$ em coordenadas cilíndricas (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Para a análise de um escoamento bi ou unidimensional, utiliza-se a Fig. (11).

A velocidade do fluido é nula em qualquer ponto da superfície do cano devido à condição de não escorregamento e o escoamento é bidimensional na região de entrada, pois a velocidade varia nas direções de r e z . Ao longo do tubo, o perfil de velocidade se desenvolve completamente, ou seja, é um escoamento plenamente desenvolvido, que conseqüentemente é unidimensional, pois a velocidade varia apenas na direção radial r (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Uma observação é válida quanto a escolha do sistema de coordenadas. Por exemplo, na Figura 11, se adotado sistema de coordenadas cilíndricas, o escoamento é unidi-

Figura 11 – Desenvolvimento do perfil da velocidade em um cano circular



Fonte: Çengel, Cimbala (2015, p. 14).

mensional, mas se escolhido o sistema de coordenadas cartesianas, é bidimensional.

O modelo clássico que representa muitos problemas de engenharia é o escoamento bidimensional entre placas paralelas.

2.14 Escoamento entre placas planas paralelas

Considera-se escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas planas horizontais paralelas infinitas, Fig. (12). As placas estão separadas por uma distância L e são consideradas infinitas na direção z , sem variação de qualquer propriedade do fluido nessa direção. Adota-se escoamento permanente e incompressível. As condições de contorno para essa análise são que a componente em x da velocidade é zero na placa superior e inferior, devido a condição de não deslizamento na parede (FOX et al., 2014), ou seja

$$u = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad (8)$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad y = L \quad (9)$$

Como o escoamento é completamente desenvolvido, a velocidade não pode variar com x e depende apenas de y , ou seja, $u = u(y)$. Não há componente de velocidade na direção y ou z ($v = w = 0$) e apenas a pressão vai variar na direção de x (FOX et al., 2014). Sendo assim, a partir da Equação (16) e já levando em consideração as hipóteses adotadas, inicia-se o equacionamento para encontrar a equação do perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido.

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Integrando a equação anterior em relação a y , obtém-se

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int \frac{\partial P}{\partial x} dy,$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} y + C_1.$$

Integrando novamente em relação a y ,

$$\int \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial x} y dy + \int C_1 dy,$$

$$\mu u = \frac{y^2}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + C_1 y + C_2.$$

Utilizando a condição de contorno (8), obtém-se o valor da constante C_2

$$\mu(0) = \frac{(0)^2}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + C_1(0) + C_2,$$

$$C_2 = 0.$$

Com C_2 e a condição de contorno (9), encontra-se o valor da constante C_1

$$\mu(0) = \frac{(L)^2}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + C_1(L) + 0,$$

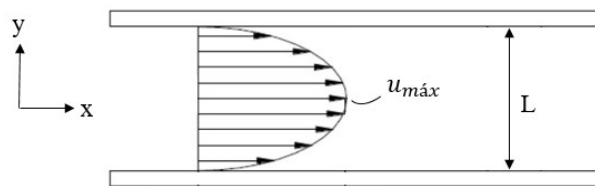
$$C_1 = -\frac{L}{2} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Com as constantes C_1 e C_2 tem-se a equação do perfil de velocidade, que é parabólico, de um escoamento completamente desenvolvido

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) y^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) Ly \quad (10)$$

A Equação (10) será útil para fins de validação do código numérico na condição de escoamento completamente desenvolvido.

Figura 12 – Perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido



Fonte: Autor (2021).

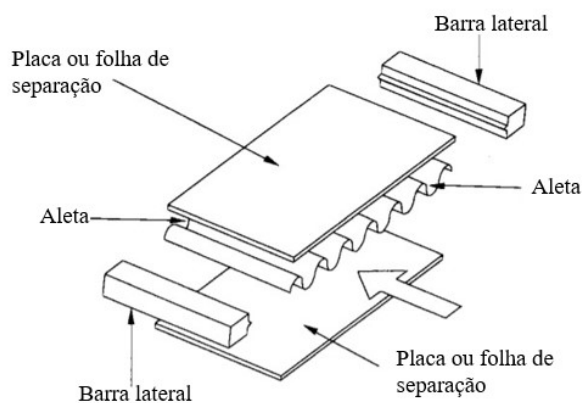
2.15 Aplicações

Uma das aplicações de placas paralelas são em trocadores de calor, sendo os compactos os mais usados devido a uma alta transferência de calor em uma área de superfície para uma relação de volume. A função de um trocador de calor é realizar a troca de energia térmica entre dois fluidos que se encontram em diferentes temperaturas. Os principais tipos de trocadores de calor são os tubulares, casco e tubo e de placas. O presente trabalho tem foco em problemas simples de trocadores de calor de geometria simples (placas paralelas).

Os trocadores de calor de placas possui aletas corrugadas ou espaçadores ensanduichados entre placas paralelas, como na Fig. (13). Por vezes, as aletas são incorporadas em um tubo plano com cantos arredondados, eliminando a necessidade de barras laterais. Outras formas de construção de aleta de placa inclui configurações de copo desenhado, tubo e centro, Fig. (14). As placas ou tubos planos tem a função de separar os dois fluxos de fluido e as aletas de formarem passagens de fluxo individuais. As passagens alternativas de fluidos são conectadas em paralelo por coletores adequados, formando dois ou mais lados de fluido do trocador. As aletas são formadas por matrizes ou rolos e são fixadas às placas através de brasagem, soldagem, colagem, ajuste mecânico ou extrusão. As aletas podem ser utilizadas em ambos os lados em trocadores de gás para gás, porém em aplicações que usam de gás para líquido, elas geralmente estão dispostas apenas do lado que contém gás, estando do lado do líquido em situações que é necessário ter resistência estrutural e uma mistura de fluxo. Além disso, aletas também podem ser utilizadas para contenção de pressão e rigidez (SHAH; SEKULIC, 2003).

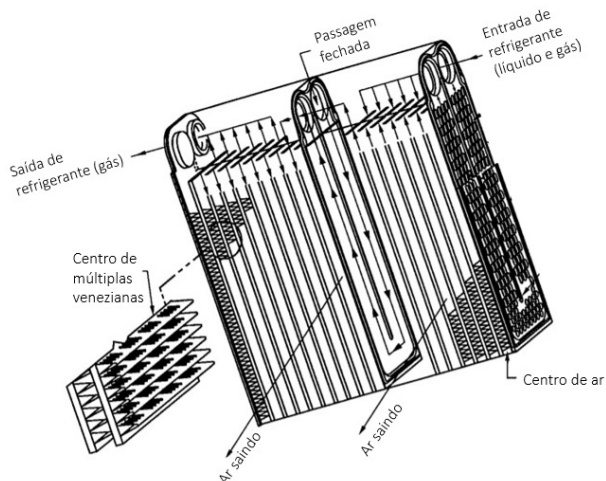
Os trocadores de placas de aletas são produzidos desde 1910 na indústria automobilística, desde 1940 na indústria aeroespacial e em aplicações de liquefação de gás desde 1950. Estão sendo amplamente utilizados hoje em dia em usinas de energia elétrica

Figura 13 – Trocador de calor de aletas de placas e seus componentes



Fonte: Adaptado de Shah, Sekulic (2003, p. 37).

Figura 14 – Evaporador automotivo de aletas múltiplas



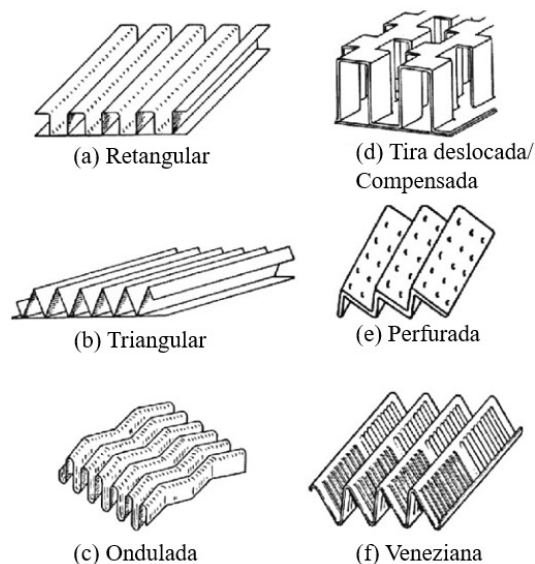
Fonte: Adaptado de Shah, Sekulic (2003, p. 39).

e propulsiva, sistemas com ciclos termodinâmicos e em sistemas eletrônicos, criogênicos, de ar condicionado e de recuperação de calor residual. Esses trocadores geralmente são projetados para operar com pressões moderadas de até 700 kPa manométrico (100 psig), embora tenha disponível no mercado para operar com uma pressão de 8300 kPa manométrico (1200 psig). A temperatura que eles podem atingir depende do tipo de material empregado em sua construção. Se feitos de metais, podem atingir até 840°C, com material cerâmico podem atingir 1150°C. Para aplicações como ventilação, o trocador é feito usando um papel tratado japonês, conhecido como higroscópico, e tem um limite de

temperatura de 50°C. (SHAH; SEKULIC, 2003).

As aletas, distribuídas entre as superfícies interrompidas, são utilizadas para aumentar a superfície de transferência de calor. As superfícies interrompidas são utilizadas para evitar o crescimento contínuo da camada limite térmica nas aletas de placa contínua, visto que se mais espessa, ela oferece uma resistência maior à transferência de calor. Além disso, elas causam um aumento na queda de pressão, fazendo com que seja necessário uma maior potência de bombeamento. O fluxo dentro dessas superfícies, dependendo do número de Reynolds e da geometria da aleta, pode ser laminar, de transição ou turbulento (ZHANG; BALACHANDAR, 1996). As aletas de placas podem ser classificadas como aletas planas e retas, triangulares e retangulares planas, planas mas onduladas e interrompidas, como de tira, veneziana, perfurada e de pinos. As aletas mais utilizadas são mostradas na Fig. (15). As variações de aletas interrompidas são muito usadas nas indústrias, visto que empregam os materiais de construção de forma mais eficiente do que aletas planas (SHAH; SEKULIC, 2003).

Figura 15 – Geometrias da superfície do trocador de placas: (a) aletas retangulares planas, (b) triangular simples, (c) ondulada, (d) tira deslocada/compensada, (e) perfurada e (f) veneziana.

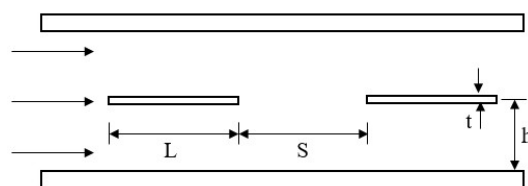


Fonte: Adaptado de (WEBB, 2014).

Cur e Sparrow (1978) estudaram, de forma experimental, as relações de transferência de calor e a queda de pressão em duas placas colineares alinhadas com a direção do fluxo situadas em um duto retangular plano, conforme Fig. (16). Eles variaram a es-

peSSura da placa e o espaçamento entre elas para um comprimento fixo, assim como o número de Reynolds. Eles verificaram, com o auxílio da técnica de sublimação de naf-taleno, uma analogia para a transferência de massa, que há um aumento no número de Nusselt em ambas placas, porém o aumento da primeira é decorrente do aumento da es-pessura da placa e números altos de Reynolds e o da segunda só depende da espessura da placa em espaçamentos S maiores. A partir disso, puderam concluir que o coeficiente de transferência de calor em placas mais espessas é maior. Também concluíram que a transferência de calor é maior com o reinício da camada limite e que a queda de pressão aumenta com espessuras maiores.

Figura 16 – Diagrama esquemático da matriz de placas colineares



Fonte: Adaptado de Cur e Sparrow (1978).

Sparrow e Liu (1979) estudaram a transferência de calor em uma série de placas planas paralelas infinitesimalmente finas, colocadas de duas formas, em linha e escalona-das. A partir de uma forma parabólica aproximada das equações de Navier-Stokes e da energia, realizaram a inclusão de efeitos de entrada e saída. Eles concluíram que quando tem um fluxo de massa e uma área de superfície fixa, as placas disposta de forma em linha apresentam uma eficácia maior, mas com um aumento da queda de pressão que é maior do que o aumento da eficácia. Para uma potência de bombeamento e área de superfície constante, a transferência de calor fornecida pela matriz escalonada excede a da matriz em linha, mas com um fluxo de massa maior. Considerando apenas o trocador de calor, a matriz escalonada foi considerada superior, mas levando em consideração que a queda de pressão em outros componentes excede a do trocador de calor, a matriz em linha pode ser melhor.

Sparrow e Hajiloo (1980) estudaram as características de transferência de calor e queda de pressão de uma matriz de placas escalonadas, alinhadas paralelamente à direção de um fluxo de ar, a partir de convecção forçada, com a técnica de sublimação de nafta-leno, realizando uma analogia a transferência de calor e massa. Para a análise, variou-se as espessuras das placas e o número de Reynolds. Os resultados obtidos foram que os

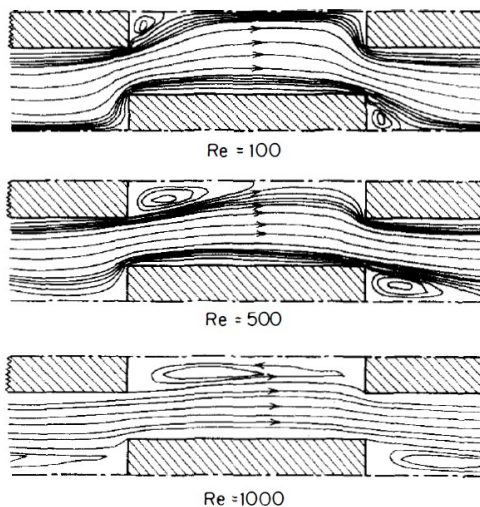
coeficientes de transferência de calor totalmente desenvolvidos aumentam com o número de Reynolds em todas as espessuras de placas avaliadas, mas de maneira diferente. As placas que tem uma espessura maior, tende a ter um coeficiente de transferência de calor mais alto, especialmente com número de Reynolds maior. Além disso, os fatores de atrito também aumentam de acordo com o aumento da espessura das placas, mas sem a dependência do número de Reynolds.

Patankar e Prakash (1981) resolveram as equações de Navier-Stokes e de energia supondo um estado estacionário e estudou-se a transferência de calor em uma série de placas de espessura fina dispostas de forma escalonada em um trocador de calor compacto. A partir desse estudo, foi possível modelar o comportamento térmico de aletas, admitindo um fluxo constante ao longo de sua direção. Eles realizaram a análise para uma série de razões de espessura e uma gama de número de Reynolds, concluindo que, as placas com uma considerável espessura leva a uma queda de pressão maior do que placas de espessura zero e que a transferência de calor não é boa o suficiente, apesar de um aumento da área de superfície e da velocidade média. A Fig. (17) mostra um dos resultados de padrão de fluxo das placas a partir da idealização de um trocador que utiliza o mesmo formato da Figura 15 (d), para uma razão de espessura de $t/H = 0,3$, onde t é a espessura da aleta e H é o espaçamento transversal entre as placas, três variações do número de Reynolds e o espaçamento das placas L/H , onde L é o comprimento da placa, é constante. No geral, a distribuição do fluxo de calor se torna mais uniforme conforme o número de Reynolds aumenta.

Mullisen e Loehrke (1986) testaram placas paralelas, dispostas em linha e escalonadas, em um túnel de vento para identificar parâmetros importantes, capazes de fornecer diretrizes para projetar superfícies de transferência de calor. Eles utilizaram o método de visualização de Schlieren, um método óptico capaz de determinar a distribuição de velocidade, temperatura e massa específica de escoamentos, para identificar o fluxo de fluido. A partir do experimento, foi possível visualizar três regimes de fluxo diferentes em placas distribuídas em linha e escalonadas, estáveis, instáveis e instável periódico, que ocorre quando a mudança de fluxo tem um padrão. Do mesmo modo, observaram que o aumento da transferência de calor ocorre devido ao efeito do reinício da camada limite e por conta do fluxo instável que ocorre em ambas distribuições de placas paralelas, devido ao número crítico de Reynolds, que diminui conforme o aumento do espaçamento e espessura das placas.

Joshi e Webb (1987) realizaram modelos analíticos capazes de estimar o coefici-

Figura 17 – Padrão de fluxo para uma razão de espessura de $t/H = 0,3$ para três diferentes números de Reynolds.

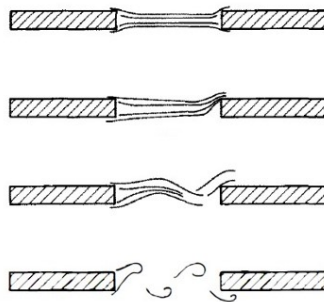


Fonte: Patankar e Prakash (1981).

ente de transferência de calor e o fator de atrito da geometria da superfície do trocador de calor do tipo tira compensada, 15 (d), baseado em análise numérica para regime laminar e um método semi empírico em região turbulenta. Também desenvolveram uma equação para prever a transição do fluxo laminar para o turbulento no canal das aletas. Utilizaram a simulação numérica para estimar de forma precisa o fator de atrito e conduziram experimentos de visualização do fluxo para estudar o fluxo nas aletas e em suas ondas, além de observar a transição do fluxo laminar para o turbulento. A parte significativa para o presente trabalho está na parte da simulação numérica realizada, que foi capaz de fornecer dados do fator de atrito relevantes em oito geometrias idealizadas em escala, com um desvio RMS (root mean square), raiz do valor quadrático médio, de 9,5% e mostrar padrões de fluxo distintos. Os padrões de fluxos são modificados de acordo com o aumento da taxa de fluxo, que demonstra um início de oscilação a montante da segunda aleta e assim sucessivamente até que a taxa de fluxo seja suficientemente alta para eliminar os vórtices, mostrando a transição de um fluxo laminar para o turbulento, conforme a Fig. (18).

Zhang e Balachandar (1996), estudaram as placas paralelas dispostas em linha e escalonadas, com o objetivo de isolar mecanismos individuais que intensificam a transferência de calor por meio da simulação numérica controlada de escoamento e transferência de calor, a partir da variação do número de Reynolds. Os mecanismos avaliados no contexto de trocadores de calor compactos de aletas paralelas, foram o reinício da camada

Figura 18 – Padrões de fluxo de transição de um fluxo laminar para turbulento

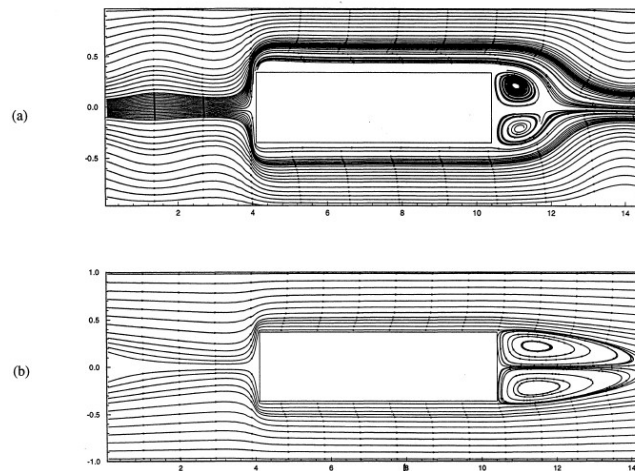


Fonte: Adaptado de Joshi e Webb (1987).

limite e a forma de liberação de vórtices na transferência de calor e fator de atrito. Eles concluíram que arranjos em linha e escalonadas aumentam a transferência de calor e o fator de atrito sobre a geometria de placa paralela contínua correspondente, que mantém mesma área de superfície de transferência de calor. No caso do reinício da camada limite, os efeitos da geometria atuam de maneiras significativas nos dois modos de arranjo, pois há um aumento nos gradientes de velocidade e temperatura, o que resulta em um aumento nos fatores j de Colburn e de atrito. O fator j de Colburn relaciona transferência de calor, momento e massa, como o número de Reynolds, que permite determinar um coeficiente de transferência desconhecido. Para números baixos de Reynolds, o fluxo é estável e acima de um número crítico o fluxo se torna instável. As transições de um fluxo estável para instável possui melhor visualização nas aletas dispostas em linha. Em ambos arranjos, o regime instável é marcado por vórtices que são gerados nas bordas de ataque da aleta. Esses vórtices causam um aumento da transferência de calor local, pois levam fluido frio em direção a superfície da aleta. Para ilustrar uma parte do que foi estudado, utiliza-se a Fig. (19), que representa as linhas de fluxo de um arranjo em linha com média de tempo obtidas através da simulação, onde o número de Reynolds era de 797 para uma simulação em linha instável e 804 para uma simulação simetrizada estável.

Saidi e Sundén (2001) analisaram de forma numérica o fluxo instantâneo e a transferência de calor em geometrias de aletas de tira compensada, Fig. (15d) em um fluxo oscilatório auto sustentado em um trocador de calor compacto gás-líquido usado para obter um resfriamento intermediário. A análise foi baseada na solução bidimensional das equações governantes do fluxo do fluido e transferência de calor. Eles concluíram, a partir de simulações, que o fluxo não é limitado na área do tipo de canal a jusante da aleta ou região de comunicação, que a velocidade tem um movimento oscilante puro e que apesar de ter

Figura 19 – Linhas aerodinâmicas para números de Reynolds baixos. a) Fluxo médio de simulação em linha instável em $Re=797$; b) Fluxo constante de simulação em linha simetrizada em $Re=804$



Fonte: Zhang e Balachandar (1996).

um aumento da transferência de calor, ela não está ligada ao aumento da transferência de momento e a queda de pressão.

Kim et al. (2011) investigaram as características de transferência de calor e queda de pressão em aletas de tira compensada, Fig. (15d), a partir de simulações numéricas. Para determinar as correlações gerais de queda de pressão e transferência de calor com várias taxas de bloqueio, eles usaram 21 tipos de geometria de aletas e diferentes tipos de fluido, como água e óleo diesel. Em aletas com taxa de bloqueio superior a 35% há uma grande queda de pressão e abaixo de 5% não são eficientes, por isso utilizou-se taxas variando de 20 a 35%. O fluxo nas aletas varia de acordo com o número de Reynolds, podendo ser laminar, de transição ou turbulento. Eles utilizaram como referência um artigo que estudou os mesmos parâmetros, porém com taxas de bloqueio menores que 20% e tendo como fluido de trabalho o ar. A partir disso, chegaram a conclusão de que a taxa de bloqueio afeta a queda de pressão e a transferência de calor nas aletas e realizaram novas correlações como funções do número de Prandtl, em diferentes regimes de escoamento. Além disso, o valor otimizado de JF , que relaciona o fator de atrito e o fator j de Colburn, foi melhor do que o selecionado pelo projeto do experimento, sendo 24% maior do que o valor de referência. Eles propuseram correlações gerais que podem ser aplicadas a diferentes fluidos e várias geometrias em aletas com esse formato. Além disso, uma geometria ideal desse formato de aleta foi sugerido com base na otimização

para um resfriador de combustível.

Chennu e Paturu (2011) realizaram experimentos numéricos para determinar o desempenho térmico-hidráulico de aletas de tira compensada de trocadores de calor compactos, Fig. (15d), a partir da dinâmica dos fluidos computacional, mais especificamente o FLUENT, a partir do método de volumes finitos. Os experimentos foram realizados com diversos parâmetros geométricos das aletas e de escoamento, como laminar, de transição e turbulento, afim de formular novas correlações para fatores como de atrito, j de Colburn e f de Fanning, através da variação do número de Reynolds. A análise dos parâmetros foi realizada em duas partes, a primeira para encontrar valores do fator f para um intervalo do número de Reynolds e a segunda para determinar o valor do fator j para o mesmo intervalo, mas em conjunto com a equação da energia. Além disso, as taxas de fluxo de massa foram determinadas através da variação do número de Reynolds de 300 a 15000. Após os experimentos, chegaram a conclusão de que o fator j e o f diminui com o aumento do número de Reynolds e que o fator principal do aumento é devido ao maior valor do diâmetro hidráulico, além disso, a zona de recirculação tende a diminuir devido à maior velocidade de fluxo nas passagens da aleta, diminuindo a transferência de calor. Eles perceberam que a partir dos vetores de velocidade analisados, o fluxo era mais laminar em um número de Reynolds de 500, enquanto que o fluxo era turbulento para o número de Reynolds de 11000, devido ao fato de que o perfil de velocidade era mais parabólico para $Re = 500$ e mais plano para $Re = 11000$. A partir dos dados, realizaram novas correlações dos fatores de j de Colburn e o f em termos de duas equações para as regiões de baixo e alto número de Reynolds e com parâmetros geométricos adimensionais. Uma limitação é quanto ao fluido de trabalho, pois as correlações apresentadas são válidas para o ar, não sendo testadas em outros meios.

Song, Cui e Liu (2017) realizaram simulações numéricas a partir do software Fluent para estudar a hidrodinâmica e as características de transferência de calor de aletas de tira compensada, Fig. (15d), em uma faixa de Reynolds de [300,10000]. Em relação a eficiência e precisão, o modelo constitutivo de fluido sob diferentes números de Reynolds é determinado a partir de comparações dos resultados numéricos com resultados do cálculo de correlações empíricas. O material da aleta utilizado foi alumínio, devido a uma melhor correlação de fluxo e características de transferência de calor. O gradiente de temperatura entre as aletas é pequeno, devido ao material utilizado. O fluxo da região de análise da simulação numérica é considerado totalmente desenvolvido, a temperatura de entrada e das superfícies das paredes são adotadas e mantidas constantes e o fluido de trabalho é o

ar. Eles utilizaram o ANSYS Workbench® para realizar o modelo das aletas. Os resultados obtidos indicam que o modelo laminar testado deve ser usado quando o número de Reynolds estiver na faixa de [300,1000] e o modelo para escoamento em transição e turbulento deve ser usado para a faixa de [1000,10000]. Os resultados do fator j de Colburn entre os resultados numéricos e os artigos de referência possui um desvio médio de 13%, enquanto que o coeficiente de atrito possui 8%, validando a confiabilidade do método de solução numérica. Além do mais, eles realizaram uma nova correlação para o modelo da aleta estudada, a partir de duas correlações utilizadas como referência.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

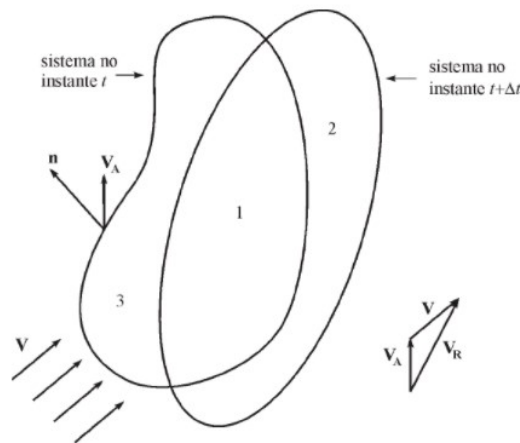
Nesta seção será feita uma breve introdução das equações governantes do escoamento. As equações que modelam os escoamentos são formuladas através de leis de conservação da massa e quantidade de movimento. Quando há transferência de calor, tem-se a conservação de energia. Utilizou-se um algoritmo numérico baseado no método de volumes finitos para resolver as equações de Navier-Stokes e a equação de energia em duas ou três dimensões. Levou-se em consideração o comportamento do fluxo dependente do tempo devido a liberação de vórtices na resolução das equações.

3.1 Conservação da massa

Considere um escoamento com velocidade V e um sistema, mostrado nos instantes t e $t + \Delta t$ na Fig. (20), com velocidade V_A do elemento de área dA (MALISKA, 2004). A variação de massa no sistema é dado pela equação

$$[m_1(t + \Delta t) + m_2(t + \Delta t)] - [m_1(t) + m_3(t)] = \Delta m|_{\text{sistema}}$$

Figura 20 – Sistema usado para a dedução das equações de conservação da massa



Fonte: MALISKA (2004).

onde m_1 , m_2 e m_3 são as massas do sistema. Dividindo por Δt , obtém-se

$$\frac{m_1(t + \Delta t) - m_1(t)}{\Delta t} - \frac{m_3(t)}{\Delta t} + \frac{m_2(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{\text{sistema}}$$

Rearranjando a equação, tem-se

$$\frac{m_3(t)}{\Delta t} - \frac{m_2(t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{sistema} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{vc}$$

A variação de massa é nula para um sistema,

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{sistema} = 0$$

onde

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{vc} = \frac{m_1(t + \Delta t) - m_1(t)}{\Delta t}$$

é a variação da massa dentro do volume de controle. Portanto

$$\dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sai} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{vc} \quad (11)$$

Onde \dot{m}_{ent} e \dot{m}_{sai} , representados pelas regiões 2 e 3 da Fig. (20), são as massas que entram e saem do volume de controle.

A partir da Equação (11) pode-se deduzir a equação da conservação da massa através da forma integral e pelo balanço de massa para um volume de controle. Segundo Maliska (2004), realizar a integração da forma conservativa da equação diferencial ou fazer o balanço são procedimentos equivalentes. Obter as equações aproximadas integrando-se a equação diferencial é preferível pelo fato de que nem todos os balanços são fáceis de deduzir.

Primeiramente, realiza-se a dedução da equação da conservação da massa pela forma integral, que se encontra no Anexo A. Após a dedução, encontra-se o seguinte resultado.

$$-\int_{\forall} \nabla(\rho \vec{V}_r) d\forall = \int_{\forall} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall$$

Dividindo a equação 38, Anexo A, pelo produto $\Delta x \Delta y$ e aplicando os limites $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se a forma diferencial da equação da conservação da massa, como na Equação (36)

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

3.2 Conservação da quantidade de movimento

É possível estudar o movimento de uma partícula individual de fluido ou um grupo de partículas conforme elas se movem através do espaço. Essa abordagem é de sistema, que possui a vantagem de que as leis físicas, como a segunda Lei de Newton, se aplicam à matéria e, portanto, diretamente ao sistema (FOX et al., 2014). A partir da Fig. (20), as quantidades de movimento no instante t e $t + \Delta t$ são avaliadas,

$$(m_1 \vec{V}_1)_t + (m_3 \vec{V}_3)_t,$$

$$(m_1 \vec{V}_1)_{t+\Delta t} + (m_2 \vec{V}_2)_{t+\Delta t}.$$

A diferença entre as equações anteriores é a variação da quantidade de movimento no sistema, que é dada por

$$(m_1 \vec{V}_1)_{t+\Delta t} + (m_2 \vec{V}_2)_{t+\Delta t} - (m_1 \vec{V}_1)_t - (m_3 \vec{V}_3)_t = \Delta(m\vec{V}) \Big|_{\text{sistema}}$$

Dividindo a equação anterior por Δt , tem-se

$$\underbrace{\frac{(m_1 \vec{V}_1)_{t+\Delta t} - (m_1 \vec{V}_1)_t}{\Delta t}}_{\frac{\Delta QM}{\Delta t} \Big|_{V.C.}} + \underbrace{\frac{(m_2 \vec{V}_2)_{t+\Delta t}}{\Delta t}}_{QM_{\text{sai}}} - \underbrace{\frac{(m_3 \vec{V}_3)_t}{\Delta t}}_{QM_{\text{entra}}} = \frac{\Delta(m\vec{V})}{\Delta t} \Big|_{\text{sistema}}$$

onde a primeira, segunda, terceira e quarta parte da equação anterior são, respectivamente, a quantidade de movimento que varia dentro do volume de controle, que sai do volume de controle, que entra no volume de controle e a que varia na unidade de tempo no sistema.

Utiliza-se a segunda Lei de Newton, Anexo B, para a variação no sistema, pois a variação da quantidade de movimento no sistema não é nula e sim um somatório de forças. A partir da dedução, chega-se ao resultado a seguir.

$$\frac{d \sum \vec{F}}{dV} = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}_R + (\rho \vec{V}_R) \cdot \nabla) \vec{V} \right] \quad (12)$$

onde dV é o volume infinitesimal e o $\sum \vec{F}$ precisa ser determinado.

Como a conservação da massa é nula na Equação (12), resta apenas os seguintes termos

$$\frac{\sum \vec{F}}{dV} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

que com suas três componentes, na forma expandida, é dada por

$$\frac{\Sigma \vec{F}_x}{dV} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_r \frac{\partial u}{\partial x} + v_r \frac{\partial u}{\partial y} + w_r \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\Sigma \vec{F}_y}{dV} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u_r \frac{\partial v}{\partial x} + v_r \frac{\partial v}{\partial y} + w_r \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

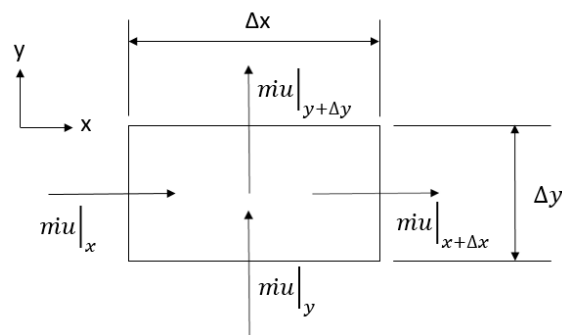
$$\frac{\Sigma \vec{F}_z}{dV} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u_r \frac{\partial w}{\partial x} + v_r \frac{\partial w}{\partial y} + w_r \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

As não linearidades da Equação de Navier-Stokes e os papéis que a velocidade tem como um transportador de quantidade se dá pela Equação (39), onde também há componentes em x, y e z (MALISKA, 2019). A seguir, tem-se a demonstração desse processo da quantidade de movimento da componente x, através do balanço, as de y e z seguem a mesma formulação.

$$QM_{ent,x} - QM_{sai,x} + \Sigma \vec{F}_x = \frac{\Delta QM_x}{\Delta t} \Big|_{VC}$$

A partir do volume de controle da Fig. (21), é possível computar quanto de vazão mássica, \dot{m} , entra e sai

Figura 21 – Balanço de massa para o volume de controle



Fonte: Autor (2021).

Onde

$$\dot{m}u|_x = u_r \Delta y = \dot{m}u|_{x+\Delta x},$$

$$\dot{m}u|_y = v_r \Delta x = \dot{m}u|_{y+\Delta y}.$$

Portanto,

$$\rho u_r \Delta y u|_x - \rho u_r \Delta y u|_{x+\Delta x} + \rho u_r \Delta x u|_y - \rho u_r \Delta x u|_{y+\Delta y} + \sum \vec{F}_x = \frac{\Delta}{\Delta t} (\rho \Delta x \Delta y u) \Big|_{VC}$$

Dividindo a equação anterior por $\Delta x \Delta y$ e aplicando limite em $\Delta x, \Delta y$ e Δt , obtém-se

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_r u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_r u) + \frac{\sum \vec{F}}{dV} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)$$

Rearranjando, obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento da componente x em sua forma conservativa, pois dentro dos sinais de derivada estão os fluxos (MALISKA, 2019).

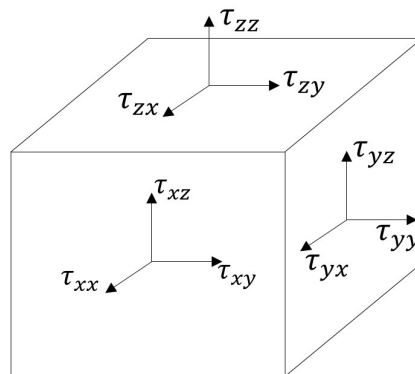
$$\frac{\sum \vec{F}_x}{dV} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_r u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_r u) \quad (13)$$

Considerando o volume de controle de forma fixa no tempo e que a velocidade relativa é igual a velocidade do escoamento, ($u_r = u; v_r = v; w_r = w$), a Equação (13) torna-se

$$\frac{\sum \vec{F}_x}{dV} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)$$

onde o somatório das forças em x, Equação (14), é determinado através do tensor de tensões, representado na Fig. (22).

Figura 22 – Tensor de tensões



$$\begin{aligned} \sum F = & \tau_{xx} \Delta y \Delta z|_{x^+} - \tau_{xx} \Delta y \Delta z|_{x^-} + \tau_{yx} \Delta x \Delta z|_{y^+} - \tau_{yx} \Delta x \Delta z|_{y^-} \\ & + \tau_{zx} \Delta y \Delta x|_{z^+} - \tau_{zx} \Delta y \Delta x|_{z^-} + B_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (14) \end{aligned}$$

onde $B_x \Delta x \Delta y \Delta z$ são as forças de campo, τ_{xx} é a tensão na área $\Delta y \Delta z$ e assim sucessivamente com as outras variáveis.

Dividindo a Equação (14) por $\Delta x \Delta y \Delta z$, tem-se

$$\frac{\sum F_x}{dV} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) + B_x$$

As equações da quantidade de movimento em suas componentes, contida no Anexo C, são realizadas a partir do tensor de tensões.

Unindo as equações encontradas às de conservação da quantidade de movimento, usando a velocidade u como exemplo, chega-se ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wu) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu + \frac{2}{3} \nabla \vec{V} \right) + B_x \quad (15) \end{aligned}$$

onde a primeira parte da Equação (15) é o termo advectivo, que é o fluxo de movimento sendo transportado pelo escoamento, e a segunda parte é o termo difusivo, que é a quantidade de movimento sendo transportada molecularmente (MALISKA, 2019).

Se $\mu = \text{constante}$ e $\nabla \vec{V} = 0$ a Equação (15) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wu) = \\ -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + B_x \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho wv) = \\ - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + B_y \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho ww) = \\ - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + B_z \end{aligned} \quad (18)$$

que são as três componentes da equação de Navier-Stokes da Conservação da Quantidade de Movimento, onde ρu , ρv e ρw são os fluxos e u , v e w são os transportados da parte advectiva das equações (16), (17) e (18).

3.3 Conservação da energia

Utiliza-se a Fig. (20) para avaliar a energia nos instantes t e $t + \Delta t$.

$$(E_3)_t + (E_1)_t$$

$$(E_1)_{t+\Delta t} + (E_2)_{t+\Delta t}$$

A diferença entre as equações anteriores é a variação da energia no sistema, que é dada por

$$(E_1)_{t+\Delta t} + (E_2)_{t+\Delta t} - (E_3)_t + (E_1)_t = \Delta E|_{sistema}$$

Utiliza-se a definição da primeira lei da termodinâmica que diz que para um sistema a variação da energia é a diferença entre o calor que entra e o trabalho que sai. A partir disso, segue-se com a dedução.

$$\Delta E|_{sistema} = Q_{ent} - W_{sai}$$

$$(E_1)_{t+\Delta t} - (E_1)_t + (E_2)_{t+\Delta t} - (E_3)_t = \dot{Q}_{ent} - \dot{W}_{sai}$$

$$\underbrace{\frac{(E_1)_{t+\Delta t} - (E_1)_t}{\Delta t}}_{\left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{V.C.}} + \underbrace{\frac{(E_2)_{t+\Delta t}}{\Delta t}}_{\dot{E}_{sai}} - \underbrace{\frac{(E_3)_t}{\Delta t}}_{\dot{E}_{entra}} = \dot{Q}_{ent} - \dot{W}_{sai}$$

$$\dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} + \dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} = \left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{V.C.}$$

É necessário saber as incógnitas Q e W para seguir com as deduções. Transformando a equação anterior nas variáveis do escoamento, tem-se que

$$\dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} = \int_A e(\rho \vec{V}_R \cdot \vec{dA})$$

$$\left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{V.C.} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dV$$

Portanto,

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} = \int_A e(\rho \vec{V}_R \cdot \vec{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dV \quad (19)$$

onde $e = \frac{E}{m}$, que é a energia por unidade de massa.

Aplicando o teorema da divergência na Equação (19), obtém-se o seguinte resultado

$$\frac{\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai}}{dV} = \rho \frac{De}{Dt} \quad (20)$$

O calor que entra pode ser de difusão e geração

$$\dot{Q}_{entra} = \dot{Q}_{dif} + \dot{Q}_{ger}$$

O calor de difusão que entra pode ser calculado através da lei de Fourier

$$\dot{Q}_{dif} = - \int_A \vec{q} \cdot \vec{dA} = - \int_V \nabla \vec{q} \cdot dV$$

onde o vetor

$$\vec{q} = q''_x \vec{i} + q''_y \vec{j}$$

é o fluxo de calor.

O calor gerado é dado por

$$\dot{Q}_{ger} = \int_{\forall} q''' d\forall$$

onde q''' significa que é calor por unidade de volume, ou seja, é um fluxo de calor. Rearranjando as equações anteriores, tem-se que

$$\dot{Q}_{entra} = \int_{\forall} (q''' - \nabla \vec{q}) d\forall$$

O volume não varia no tempo, portanto

$$\frac{\dot{Q}_{entra}}{d\forall} = q''' - \nabla \vec{q}$$

Para encontrar o trabalho que sai do sistema é necessário lembrar que ele é o negativo do trabalho que entra. Por conta disso, tem-se que

$$-\dot{W}_{sai} = \dot{W}_{entra}$$

Utilizando a Fig. (22) como referência para os cálculos de trabalho que saem de um volume de controle, obtém-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} -\dot{W}_{sai} = & \tau_{xx} \cdot u dy dz|_{x^+} - \tau_{xx} \cdot u dy dz|_{x^-} + \tau_{yx} \cdot u dx dz|_{y^+} - \tau_{yx} \cdot u dx dz|_{y^-} + \tau_{zx} \cdot u dx dy|_{z^+} \\ & - \tau_{zx} \cdot u dx dy|_{z^-} + \sum \tau_{iy} \cdot v dA + \sum \tau_{iz} \cdot w dA + [B_x \cdot u + B_y \cdot v + B_z \cdot w] dx dy dz \end{aligned} \quad (21)$$

que é a energia por unidade de tempo obtida através da multiplicação das tensões por suas respectivas componentes de velocidade. A partir das deduções realizadas no Anexo D, chega-se a Equação 22, que é a equação da conservação da energia.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

Para fins de solução, as variáveis na sua forma adimensional são dadas por:

$$x^* = \frac{x}{d}, y^* = \frac{y}{d}, u^* = \frac{u}{u_0}, v^* = \frac{v}{u_0}, p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}, t^* = \frac{t}{t_c}, T^* = \frac{T}{T_0},$$

onde d é o comprimento característico (comprimento do objeto), u_0 é a velocidade de injeção do fluido no domínio e t_c é o tempo característico. A adimensionalização das

equações resultam em constantes adimensionais: número de Reynolds Re nas equações de conservação de quantidade de movimento e número de Péclet Pe na equação da energia.

As equações de conservação apresentadas neste capítulo não possuem solução analítica na sua forma completa, portanto é necessário recorrer a soluções numéricas. Uma maneira de resolver equações diferenciais é através do método numérico. Se a solução não for possível de forma analítica, recorre-se a uma aproximação numérica da equação diferencial que fornece uma solução apenas para um número discreto de pontos, com um determinado erro. Quanto maior o número de pontos discretos, mais fácil de se obter um resultado preciso. Um desses métodos numéricos é o de volumes finitos (MALISKA, 1995).

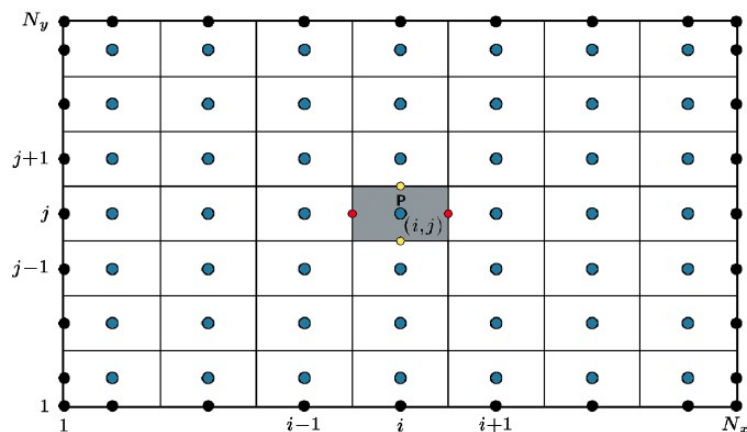
4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção será apresentado o métodos utilizado para a realização da discretização das equações que estão inclusas na solução numérica de um escoamento entre placas paralelas. Os outros métodos e técnicas utilizados como metodologia serão abordados de acordo com a proposta de continuidade do trabalho.

4.1 Método de volumes finitos

O método dos volumes finitos é utilizado para obter equações aproximadas a partir da conservação da propriedade em nível de volumes elementares. Há duas maneiras de se obter as equações aproximadas, mediante balanços da propriedade em questão nos volumes elementares ou pela integração das equações na forma conservativa, no espaço e no tempo, sobre um volume elementar. A equação é dita conservativa quando em uma equação diferencial os fluxos estão dentro do sinal da derivada e que na primeira integração aparecem os fluxos nas fronteiras do volume elementar (MALISKA, 2012). A partir

Figura 23 – Volumes de controle discretos dentro do domínio

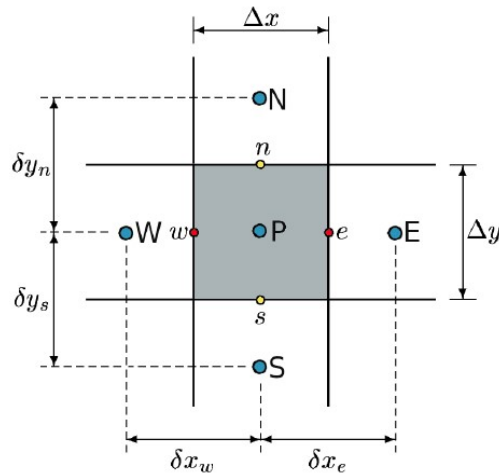


Fonte: Oliveira (2021).

da Fig. (23) é possível compreender melhor o conceito do método de volumes finitos. O domínio, nesse método, é dividido em vários volumes discretos, onde cada ponto $P_{i,j}$ está rodeado por um volume de controle. Cada volume de controle tem uma largura Δx e altura Δy , observe a Fig. (24), e cada um é delimitado por faces compartilhadas com outros

volumes de controle. A delimitação de cada face é através de pontos cardeais, norte, sul, leste e oeste, representados nas figuras pelas letras, respectivamente, $n(i, j + \frac{1}{2})$, $s(i, j - \frac{1}{2})$, $e(i + \frac{1}{2}, j)$ e $w(i - \frac{1}{2}, j)$. Além desses pontos, tem-se os pontos dos centros dos volumes de controle vizinhos de P , $N(i, j + 1)$, $S(i, j - 1)$, $E(i + 1, j)$ e $W(i - 1, j)$ e, as distâncias entre esses pontos, representados por $\delta y_n, \delta y_s, \delta x_e$ e δx_w .

Figura 24 – Esquema de um único volume de controle e seus respectivos vizinhos



Fonte: Oliveira (2021).

No presente trabalho, as equações aproximadas da conservação da massa, da quantidade de movimento e energia na direção de x e y serão obtidas a partir da integração delas em sua forma conservativa, no espaço e tempo. Portanto, a Equação (36), a partir da dedução contida no Anexo E, resulta na Equação 23.

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} (\rho^{t+\Delta t} - \rho^t) + \Delta y (\rho_e u_e - \rho_w u_w) + \Delta x (\rho_n v_n - \rho_s v_s) = 0 \quad (23)$$

Generalizando a equação da quantidade de movimento, assumindo $B = 1$, sem escoamento em z e que a parte da pressão será colocada apenas no final, seguindo a dedução do Anexo F, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \left[(\rho \phi)^{t+\Delta t} - (\rho \phi)^t \right] + \Delta y \Delta t \left[(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right] + \\ \Delta x \Delta t \left[(\rho v)_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - (\rho v)_s \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \right] = \Delta y \Delta t \left[\mu_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \mu_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} \right] + \\ \Delta x \Delta t \left[\mu_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_n} - \mu_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_s} \right] \end{aligned}$$

Onde ϕ pode ser u ou v . A parte da equação de quantidade de movimento que tem a pressão é resolvida em x e y , respectivamente, pelo mesmo processos das integrais anteriores. Portanto, as equações da quantidade de movimento na direção de x e y , respectivamente, são

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \left[(\rho u)^{t+\Delta t} - (\rho u)^t \right] + \Delta y \Delta t \left[(\rho u)_e \frac{u_E + u_P}{2} - (\rho u)_w \frac{u_P + u_W}{2} \right] + \\ \Delta x \Delta t \left[(\rho v)_n \frac{u_N + u_P}{2} - (\rho v)_s \frac{u_P + u_S}{2} \right] = -\Delta y \Delta t (P_e - P_w) + \\ \Delta y \Delta t \left[\mu_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_e} - \mu_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} \right] + \Delta x \Delta t \left[\mu_n \frac{u_N - u_P}{\delta y_n} - \mu_s \frac{u_P - u_S}{\delta y_s} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \left[(\rho v)^{t+\Delta t} - (\rho v)^t \right] + \Delta y \Delta t \left[(\rho u)_e \frac{v_E + v_P}{2} - (\rho u)_w \frac{v_P + v_W}{2} \right] + \\ \Delta x \Delta t \left[(\rho v)_n \frac{v_N + v_P}{2} - (\rho v)_s \frac{v_P + v_S}{2} \right] = -\Delta x \Delta t (P_n - P_s) + \\ \Delta y \Delta t \left[\mu_e \frac{v_E - v_P}{\delta x_e} - \mu_w \frac{v_P - v_W}{\delta x_w} \right] + \Delta x \Delta t \left[\mu_n \frac{v_N - v_P}{\delta y_n} - \mu_s \frac{v_P - v_S}{\delta y_s} \right] \quad (25) \end{aligned}$$

A equação da energia é análoga as anteriores, portanto, a partir do Anexo G, obtém-se a Equação (26)

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \left[(T)^{t+\Delta t} - (T)^t \right] + \Delta y \Delta t (T_e u_e - T_w u_w) + \Delta x \Delta t (T_n v_n - T_s v_s) - \\ \Delta y \Delta t \left[\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right] - \Delta x \Delta t \left[\frac{T_N - T_P}{\delta y_n} - \frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right] = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

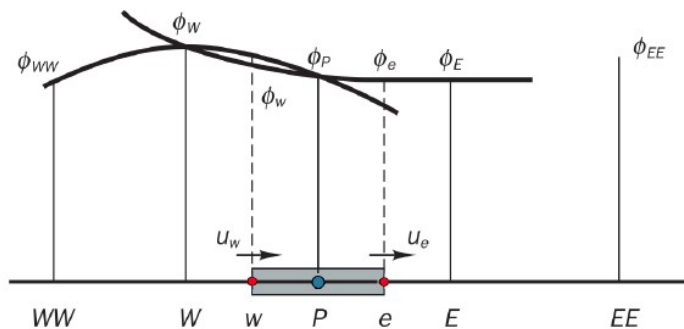
Por fim, o conjunto de equações (23), (24), (25) e (26) serão resolvidas pelo método Quick Scheme.

4.2 Método Quick Scheme

O método Quick Scheme, Quadratic Upstream Interpolation, é um método muito usado para resolver problemas de convecção baseado em uma formulação conservadora do volume de controle integral (LEONARD, 1979). Isso é garantido por conta da precisão em um erro de truncamento espacial de terceira ordem e um de primeira ordem no tempo.

É um método que considera a interpolação quadrática ponderada de três pontos na face da célula (VERSTEEG; MALALASKERA, 2007). A Fig. (30) mostra o esquema em um domínio unidimensional.

Figura 25 – Esquema de um único volume de controle e seus respectivos vizinhos



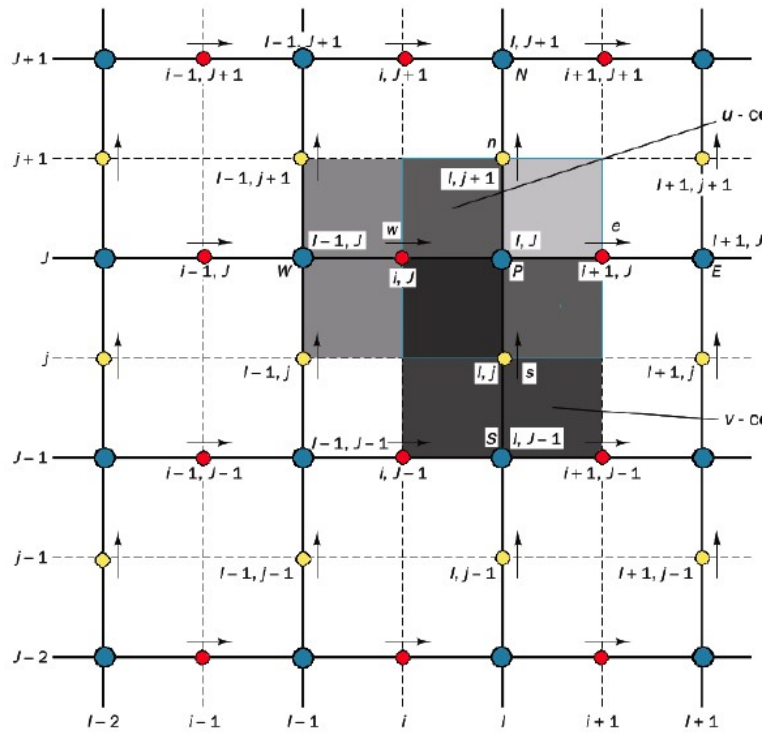
Fonte: Oliveira (2021).

A escolha de armazenar propriedades como de velocidade, pressão e temperatura em um centro geométrico de volume de controle faz com que seja possível oscilações não-físicas e dificuldade em obter uma solução convergente (RODI; MAJUMDAR; SCHÖENUNG, 1989). Por conta disso, as velocidades são estimadas em uma face de célula longa. Com um perfil de interpolação definido, as velocidades u_w e u_e podem ser formuladas a partir de uma relação com o seguinte formato $u_f = f(u_{NB})$, onde NB significa que a velocidade u é avaliada nos nós vizinhos.

Para garantir o acoplamento entre a pressão e o campo de velocidade, é necessário uma segunda e terceira grade, que são alternadas nas direções x e y em relação as grades originais e que são usadas para as componentes u e v de velocidade com a pressão calculada na grade original, conforme Fig. (26). A temperatura também é avaliada na grade original. As componentes u e v da velocidade, são, respectivamente, representadas pelos pontos (vermelho) e (amarelo). Esse procedimento é conhecido como grade escalonada,

ou seja, o esquema Quick é usado e a velocidade nas interfaces dos volumes de controle são calculadas através de uma interpolação quadrática em esquema upwind.

Figura 26 – Grade escalonada: os pontos azuis são da grade original, os pontos vermelhos e amarelos são os locais de avaliação das velocidades u e v , respectivamente



Fonte: Oliveira (2021).

$$u_w = \frac{6}{8}u_W + \frac{3}{8}u_P - \frac{1}{8}u_{WW} \quad (27)$$

$$u_e = \frac{6}{8}u_P + \frac{3}{8}u_E - \frac{1}{8}u_W \quad (28)$$

$$u_s = \frac{6}{8}u_S + \frac{3}{8}u_P - \frac{1}{8}u_{SS} \quad (29)$$

$$u_n = \frac{6}{8}u_P + \frac{3}{8}u_N - \frac{1}{8}u_S \quad (30)$$

Onde $u_w > 0$, $u_e > 0$, $u_s > 0$ e $u_n > 0$.

$$u_w = \frac{6}{8}u_P + \frac{3}{8}u_W - \frac{1}{8}u_E \quad (31)$$

$$u_e = \frac{6}{8}u_E + \frac{3}{8}u_P - \frac{1}{8}u_{EE} \quad (32)$$

$$u_s = \frac{6}{8}u_P + \frac{3}{8}u_S - \frac{1}{8}u_N \quad (33)$$

$$u_n = \frac{6}{8}u_N + \frac{3}{8}u_P - \frac{1}{8}u_{NN} \quad (34)$$

Onde $u_w < 0$, $u_e < 0$, $u_s < 0$ e $u_n < 0$. As velocidades Eqs.(27) a (34) são substituídas nas Eqs. (23), (24), (25) e (26) que resulta no sistema a ser resolvido. O desenvolvimento completo pode ser encontrado em (OLIVEIRA, 2021).

Em relação ao acoplamento pressão-velocidade foi adotado o método da compressibilidade artificial. Neste método, a massa específica da conservação da massa é substituída pela pressão multiplicada por um coeficiente de compressibilidade ($\partial\rho/\partial t = 1/\beta(\partial p/\partial t)$) e a solução é obtida para a condição de escoamento incompressível quando $1/\beta(\partial p/\partial t) \rightarrow \infty$ (KWAK; KIRIS; KIM, 2005).

5 METODOLOGIA

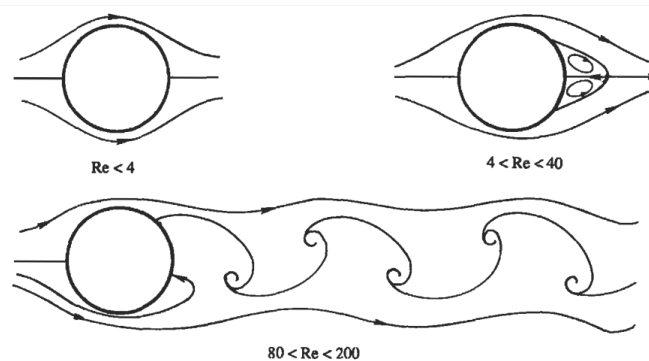
Normalmente, problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) envolvem um tratamento matemático de solução das equações demasiadamente complexos e sua solução nem sempre consegue representar o problema físico em questão. Essas dificuldades estão relacionadas principalmente pela escolha dos modelos de malha, discretização, método numérico, etc. Vale ressaltar que os modelos de CFD são obtidos através de aproximações discretas das equações de Navier Stokes que por sua vez podem estar representadas de forma simplificada. Neste sentido faz-se necessário testar o modelo com problemas clássicos que já possuem validação numérica. Cita-se como modelos clássicos: escoamento laminar entre placas paralelas, escoamento em torno de objetos cilíndricos e escoamento em cavidades retangulares.

O desenvolvimento do presente trabalho é representado por quatro etapas: delimitação do problema, pré-processamento, solução do problema e pós-processamento.

5.1 Delimitação do problema

O presente trabalho é uma proposta inicial que visa futuros estudos em trocadores de calor. Portanto, vamos reproduzir modelos com geometrias simples conhecidas na literatura. Logo, inicia-se com o escoamento em torno de um cilindro com transferência de calor. O objetivo de apresentar essa geometria justifica-se por ser um modelo clássico e que apresenta, por exemplo, a esteira de Von-Karman, conforme mostra a Fig. (27):

Figura 27 – Escoamento em torno de um cilindro



O modelo da Fig. (27) é de um escoamento livre com obstáculo cilíndrico. Nesta configuração é apresentado os resultados para um cilindro com temperatura diferente do ambiente circundante. Logo, apresenta-se as linhas de corrente, perfis de temperatura e frequência de formação de vórtices. A partir da validação do código por este modelo, estende-se o estudo para outros tipos de geometrias através da mudança do obstáculo, por exemplo, a reprodução da Fig. (19), que terá os resultados apresentados a partir das linhas de corrente.

As condições iniciais ($t = 0$) do problema estudado são $u(x, y) = u$ e $v(x, y) = 0$ em todo o domínio. A temperatura $T(x, y)$ fora do obstáculo é a temperatura ambiente T_a e a temperatura do obstáculo é T_O .

As condições de contorno ($t > 0$) do problema estudado são

$$u(x, -L_y) = 0 \quad \text{e} \quad v(x, -L_y) = u_0, \quad \text{na entrada do escoamento}$$

$$u(-L_x, y) = 0 \quad \text{e} \quad v(-L_x, y) = 0, \quad \text{velocidade da placa esquerda}$$

$$u(L_x, y) = 0 \quad \text{e} \quad v(L_x, y) = 0, \quad \text{velocidade da placa direita}$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x, L_y)} = 0, \quad \text{na saída do escoamento}$$

$$T(-L_x, y) = T_a, \quad \text{na placa esquerda}$$

$$T(L_x, y) = T_a, \quad \text{na placa direita}$$

$$T(x, -L_y) = T_a, \quad \text{na entrada do escoamento}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x, L_y)} = 0, \quad \text{na saída do escoamento}$$

u_0 é a velocidade de injeção.

5.2 Pré-processamento

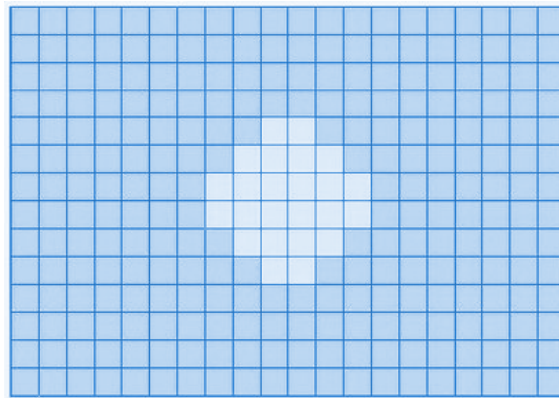
No pré-processamento, são definidos os seguintes parâmetros: região de estudo, geometria e malha do problema (discretização do domínio), critérios físicos e numéricos.

A região de estudo (domínio) consiste em duas placas paralelas com um obstáculo cilíndrico no meio do domínio. Inicialmente as placas são colocadas afastadas do objeto para simular o escoamento livre para fins de comparação com resultados conheci-

dos na literatura. O domínio computacional é representado por uma malha bidimensional cartesiana. A interface do cilindro é representada pelo conjunto de pontos discretos coincidentes com a superfície do cilindro, veja a Fig. (28). A malha cartesiana reproduz bem o problema desde que se faça um refinamento próximo à superfície do cilindro.

A discretização utilizada é o método de volumes finitos que é obtido pela integração das equações de conservação sobre um volume de controle retangular.

Figura 28 – Esquema de uma malha numérica



Fonte: Autor (2022).

5.3 Solução do problema

Na simulação, ocorre a resolução das equações de Navier Stokes que descrevem a dinâmica fluidos. Assim, é possível calcular valores das variáveis de interesse, como velocidade, pressão e temperatura. A solução das equações discretizadas é obtida pelo método Quick Scheme. O conjunto de equações é iterado até obter-se um critério de convergência para os resíduos da ordem de 10^{-5} .

5.4 Pós-processamento

No pós-processamento, é necessário analisar se o resultado reproduz o processo físico em questão. Nessa etapa, são extraídos os dados relevantes que podem ser convertidos em gráficos e comparados com problemas clássicos. No presente modelo, serão obtidos perfis de temperatura e campo de velocidades a partir de um escoamento em torno

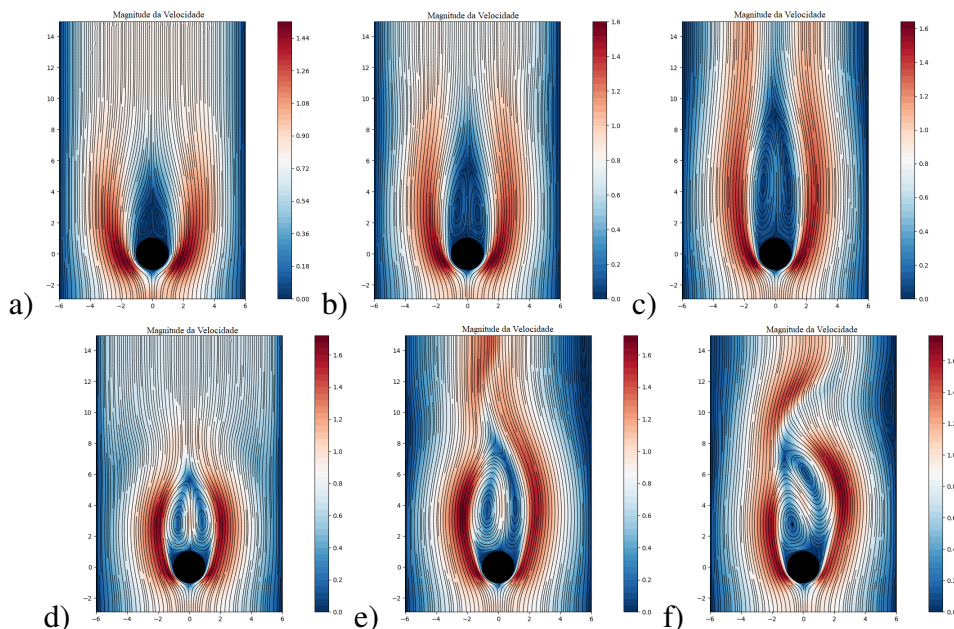
de um obstáculo cilíndrico e um quadrado.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo é apresentado os resultados para um escoamento entre duas placas paralelas com um obstáculo cilíndrico no centro e escoamento livre em torno de obstáculos quadrados. Os resultados são apresentados na sua forma adimensional.

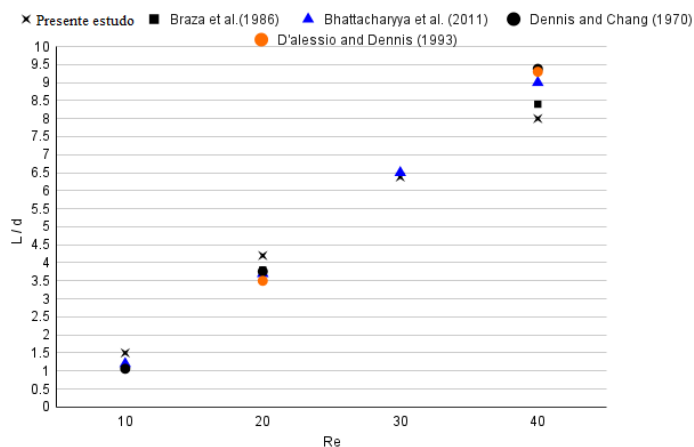
A Figura (29) mostra o escoamento para diferentes números de Reynolds. Como conhecido na literatura, para escoamento com $Re < 40$ um par de vórtices simétricos é formado, como nas Figs. (29-a), (29-b) e (29-c). A partir de $Re > 40$ o escoamento sobre a superfície do cilindro torna-se instável e os vórtices a jusante do cilindro se desprendem formando um escoamento com movimento alternado e oscilatório. Uma característica importante na condição de $Re < 40$ é o comprimento máximo dos vórtices, neste sentido, a Fig. (30) apresenta o comprimento dos vórtices com outros modelos, mostrando que o presente modelo reproduz de forma satisfatória o escoamento em torno do cilindro.

Figura 29 – Escoamento em torno de cilindro para diferentes números de Reynolds: a) $Re = 10$, b) $Re = 20$, c) $Re = 40$, d) $Re = 200$, e) $Re = 500$, f) $Re = 700$



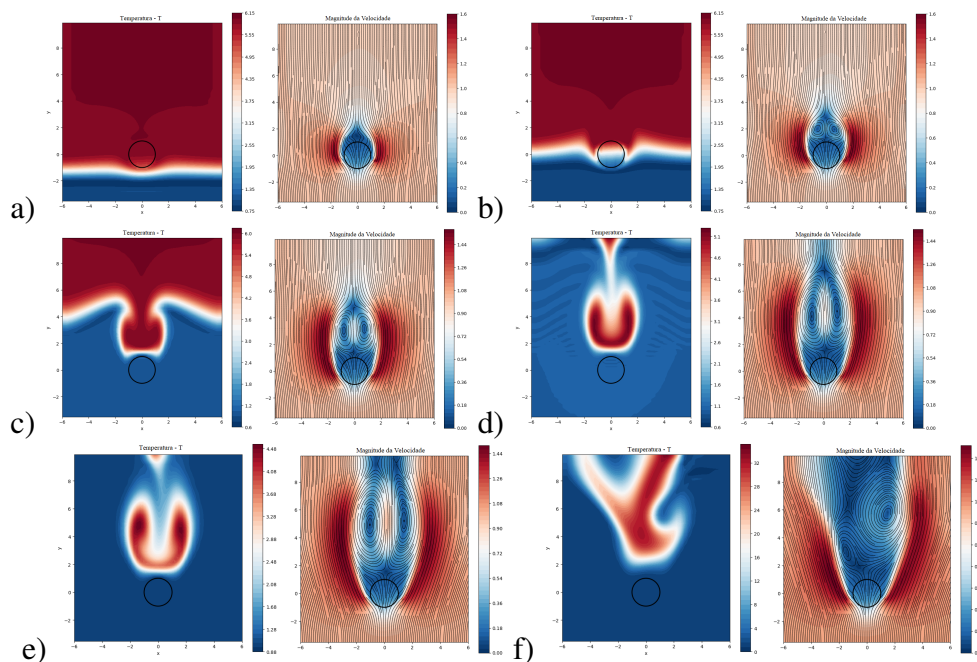
Fonte: Autor (2022).

Figura 30 – Comparação do presente modelo com resultados da literatura do comprimento máximo de vórtice para diferentes números de Reynolds



Fonte: Oliveira (2021).

Figura 31 – Evolução temporal do campo de temperatura e velocidade



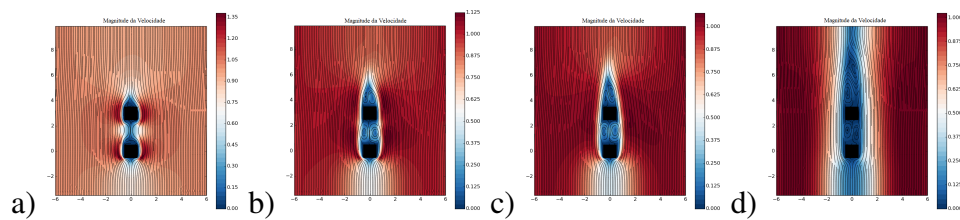
Fonte: Autor (2022).

A Figura (31) mostra o campo de temperatura e sua respectiva velocidade em diferentes tempos na condição de $Re = 90$ e $Pe = 100$.

Neste caso, tem-se uma corrente fria entrando em um ambiente de temperatura elevada, onde o cilindro tem mesma temperatura do ambiente.

Os resultados mostram a formação de vórtices simétricos nas Figs. (31-a), (31-b), (31-c) e (31-d). Na Fig. (31-e) ocorre a separação dos vórtices e inicia-se a formação alternada de vórtices na Fig. (31-f). Nos campos de temperatura nota-se que o cilindro inicialmente em alta temperatura esfria rapidamente, isso é explicado pelo fato de que é utilizado a mesma equação da fase gasosa para fase líquida. Esta aproximação pressupõe que a taxa de calor por condução é da mesma ordem da taxa de convecção na fase gasosa, portanto, é como se a a equação do calor dentro do cilindro tivesse condutividade alta.

Figura 32 – Escoamento bidimensional com dois obstáculos quadrados



Fonte: Autor (2022).

A Figura (32) apresenta o escoamento bidimensional com dois obstáculos quadrados em linha para a condição $Re = 90$ e $Pe = 1$. Os resultados mostram que entre os dois obstáculos são formados dois vórtices e uma esteira atrás do segundo obstáculo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou um modelo numérico bidimensional para escoamento entre placas paralelas com obstáculo cilíndrico e escoamento livre com obstáculos de seção quadrada. O código numérico foi validado para o modelo clássico de escoamento entre placas paralelas com obstáculo cilíndrico que para o regime de baixo Reynolds $Re < 40$, um par de vórtices simétricos é formado. Para condição de Reynolds $Re > 40$ ocorre uma instabilidade no escoamento e vórtices alternados são formados. Os campos de temperatura foram obtidos e na condição de alta condutividade térmica o cilindro é resfriado rapidamente e conseqüentemente o calor é transportado conforme a direção do escoamento mostrando que o campo de velocidade está de acordo com o transporte de calor. Neste sentido, foi possível mostrar que o código é capaz de reproduzir as principais características dos modelos clássicos de escoamento. Após a validação do código, o escoamento livre em torno de dois obstáculos foi implementado e novamente os resultados apresentam o comportamento conhecido na literatura. Portanto, o presente modelo poderá ser utilizado para reproduzir trocadores de calor.

Como sugestão de trabalhos futuros, tem-se: Dar continuidade nas simulações numéricas, a fim de obter outros parâmetros do escoamento. Variar os valores de Reynolds e Péclet para obstáculos quadrados e analisar as diferenças. Utilizar as características de um trocador de calor real para obter os parâmetros adimensionais.

REFERÊNCIAS

CHENNU, R.; PATURU, P. Development of heat transfer coefficient and friction factor correlations for offset fins using CFD. **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, v. 21, n. 8, p. 935–951, 2011. ISSN 09615539.

CUR, N.; SPARROW, E. M. Experiments on heat transfer and pressure drop for a pair of colinear, interrupted plates aligned with the flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 21, n. 8, p. 1069–1080, 1978. ISSN 00179310.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. [S.l.]: Edusp, 2000.

FOX, R. W. et al. **Introdução à Mecânica do Fluidos - 8ª Edição**. [S.l.]: LTC, 2014.

INCROPERA, F. P. et al. **Fundamentos de transferência de calor e massa - 6ª Edição**. [S.l.]: LTC, 2008.

JOSHI, H. M.; WEBB, R. L. Heat transfer and friction in the offset stripfin heat exchanger. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 30, n. 1, p. 69–84, 1987. ISSN 00179310.

KIM, M. S. et al. Correlations and optimization of a heat exchanger with offset-strip fins. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Elsevier Ltd, v. 54, n. 9-10, p. 2073–2079, 2011. ISSN 00179310. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.11.056>>.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid Mechanics - 2ª Edição**. [S.l.]: Academic Press, 2002.

KWAK, D.; KIRIS, C.; KIM, C. S. Computational challenges of viscous incompressible flows. **Computers and Fluids**, v. 34, n. 3, p. 283–299, 2005. ISSN 00457930.

LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. **Int. J. Mech. Sci.**, v. 16, p. 183–308, 1979.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica Dos Fluidos Computacional - 1ª Edição**. [S.l.]: LTC, 1995.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica Dos Fluidos Computacional - 2ª Edição**. [S.l.]: LTC, 2004.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica Dos Fluidos Computacional - 2ª Edição**. [S.l.]: LTC, 2012.

MALISKA, C. R. **Curso de convecção, Equação da Quantidade de Movimento**. 2019. <<https://www.youtube.com/watch?v=mzZndo63P8Q&list=PLIPfGy5ZylmMiZ58EeuNLDfjQn5xdQVey&index=3>>. Acesso em: 14 Ago. 2021.

MULLISEN, R. S.; LOEHRKE, R. I. A study of the flow mechanisms responsible for heat transfer enhancement in interrupted-plate heat exchangers. **Journal of Heat Transfer**, v. 108, n. 2, p. 377–385, 1986. ISSN 15288943.

OLIVEIRA, D. P. **Fluid Flow Through Porous the One Domain Approach: A Simple Model for Grains Drying**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pampa, Programa de Pós-Graduação em Stricto sensu em Engenharia, Alegrete, 2021.

PATANKAR, S.; PRAKASH, C. An analysis of the effect of plate thickness on laminar flow and heat transfer in interrupted-plate passages. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 24, n. 11, p. 1801–1810, 1981. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931081901460>>.

RODI, W.; MAJUMDAR, S.; SCHOENUNG, B. D. I. Finite volume methods for two-dimensional incompressible flows with complex boundaries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 75, p. 369–392, 1989.

SAIDI, A.; SUNDÉN, B. A numerical investigation of heat transfer enhancement in offset strip fin heat exchangers in self-sustained oscillatory flows. **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, v. 11, n. 7, p. 699–716, 2001. ISSN 09615539.

SHAH, R. K.; SEKULIC, D. P. **Fundamentals of Heat Exchanger Design**. [S.l.]: John Wiley Sons, 2003.

SONG, R.; CUI, M.; LIU, J. A correlation for heat transfer and flow friction characteristics of the offset strip fin heat exchanger. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Elsevier Ltd, v. 115, p. 695–705, 2017. ISSN 00179310. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.08.054>>.

SPARROW, E.; LIU, C. Heat-transfer, pressure-drop and performance relationships for in-line, staggered, and continuous plate heat exchangers. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 22, n. 12, p. 1613–1625, 1979. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931079900784>>.

SPARROW, E. M.; HAJILOO, A. Measurements of heat transfer and pressure drop for an array of staggered plates aligned parallel to an air flow. **Journal of Heat Transfer**, v. 102, n. 3, p. 426–432, 1980. ISSN 15288943.

VELOSO, D. L. de A. **Análise da convecção forçada laminar em dutos circulares submetidos aos efeitos da condução axial e radiação**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, João Pessoa, 2015.

VERSTEEG, K. H.; MALALASKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method - 2ª Edição**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007.

WEBB, R. L. **Plate Fin Surface Geometries**. New York: Begell House Inc., 2014. Disponível em: <https://hedhme.com/content_map/?link_id=438&article_id=298>.

WHITE, F. M. **Mecânica dos fluidos - 6ª Edição**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011.

ZHANG, L. W.; BALACHANDAR, S. A numerical study of flow and heat transfer in compact heat exchangers. **Air Conditioning and Refrigeration Center University of Illinois**, 1996.

ÇENGEL, T. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos - 3ª Edição**. [S.l.]: Grupo A, 2015.

8 ANEXO A - CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para descobrir a variação da massa dentro do volume de controle, é necessário usar a velocidade relativa (\vec{V}_r), que é responsável pelo fluxo de massa através das fronteiras do volume de controle (MALISKA, 2004).

$$\int_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA$$

O ρ é a massa específica. Com a expressão anterior, tem-se que

$$m_{em} - m_{sai} = - \int_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA$$

onde o negativo da integral serve para ajustar o equacionamento.

Utiliza-se o Teorema da Divergência para transformar a integral de área em volume,

$$\int_A \underline{y} (\underline{x} \cdot dA) = \int_A [\underline{y} \operatorname{div}(\underline{x}) + (\underline{x} \nabla) \underline{y}] dV \quad (35)$$

$$- \int_A (\rho \vec{V}_r \cdot \vec{d}_A) = - \int_V \nabla(\rho \vec{V}_r) dV$$

onde ∇ é o simbolo de divergência e \forall é o de volume na integral. A partir dessas considerações, obtém-se

$$\left. \frac{\Delta m}{\Delta t} \right|_{vc} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

que a partir da integração, tem-se a equação da conservação da massa na forma integral.

Considerando um volume de controle de forma fixa no tempo e infinitesimal tal que a propriedade pode ser considerada constante no interior do volume de controle, obtém-se a forma diferencial da equação da conservação da massa (MALISKA, 2004)

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}_r) \right] dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_r) = 0 \quad (36)$$

onde u_r , v_r e w_r são as componentes de velocidade relativa nas direções x, y e z respectivamente.

Se o volume de controle for fixo no espaço, a velocidade relativa coincide com a velocidade do escoamento e a equação da conservação da massa resulta (MALISKA, 2004)

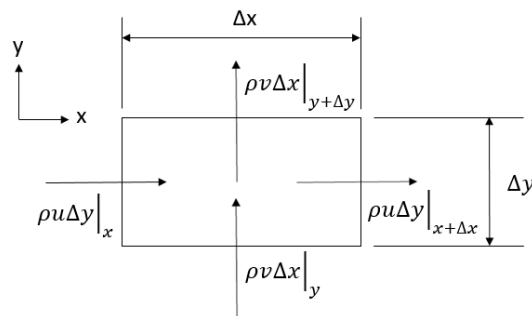
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \quad (37)$$

Alternativamente, pode-se deduzir a Equação (37) a partir do volume elementar bidimensional mostrado na Figura 33. O balanço de massa no volume elementar mostrado na figura, para regime permanente, é dado por

$$\rho u \Delta y \Big|_x - \rho u \Delta y \Big|_{x+\Delta x} + \rho v \Delta x \Big|_y - \rho v \Delta x \Big|_{y+\Delta y} = \frac{\Delta}{\Delta t} (\rho \Delta x \Delta y) \quad (38)$$

onde Δy e Δx são considerados uma área. As letras x , $x + \Delta x$, y e $y + \Delta y$ são nomenclaturas usadas para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica (MALISKA, 2004).

Figura 33 – Balanço de massa para o volume de controle



Fonte: Autor (2021).

9 ANEXO B - SEGUNDA LEI DE NEWTON

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

onde

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta QM}{\Delta t} \Big|_{sistema} = \frac{\Delta(m\vec{V})}{\Delta t} \Big|_{sistema}$$

portanto

$$Q\dot{M}_{ent} - Q\dot{M}_{sai} + \sum \vec{F} = \frac{\Delta QM}{\Delta t} \Big|_{VC} \quad (39)$$

que é a equação de conservação da quantidade de movimento para um volume de controle.

A quantidade movimento que atravessa a superfície do volume de controle ($Q\dot{M}_{ent} - Q\dot{M}_{sai}$) é representada pela seguinte relação através da integral

$$Q\dot{M}_{ent} - Q\dot{M}_{sai} = - \int_A \rho \vec{V} (\vec{V}_R \cdot \vec{d}A)$$

A integral acima possui dois termos de velocidade, \vec{V}_R a velocidade relativa ao volume de controle, que pode estar parada ou em movimento, e \vec{V} a velocidade do escoamento.

A variação da quantidade de movimento do sistema também é representada por uma integral

$$\frac{\Delta QM}{\Delta t} \Big|_{VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{V}) dV$$

Portanto, a Eq.(39) pode ser reescrita como

$$- \int_A \rho \vec{V} (\vec{V}_R \cdot \vec{d}A) + \sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{V}) dV \quad (40)$$

O primeiro termo da Equação (40) é a vazão mássica que envolve a velocidade relativa, responsável pela massa que entra ou sai do volume de controle na unidade de tempo (MALISKA, 2004).

Aplicando o teorema de divergência, Equação(35), e considerando um volume de controle de forma fixa no tempo e infinitesimal (MALISKA, 2004), a Equação(40) em sua forma diferencial é dada por

$$- \int_V \left[\vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}_R) + (\rho \vec{V}_R \cdot \nabla) \vec{V} \right] dV + \sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{V}) dV$$

que é equivalente a

$$\sum \vec{F} = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}_R + (\rho \vec{V}_R) \cdot \nabla) \vec{V} \right] dV$$

10 ANEXO C - CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\frac{\Sigma F_x}{dV} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) + B_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) + B_x = \rho \frac{Du}{Dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) + B_y = \rho \frac{Dv}{Dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) + B_z = \rho \frac{Dw}{Dt},$$

onde

$$\frac{\Sigma F_x}{dV} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \rho \frac{Du}{Dt}$$

é a derivada substantiva.

τ é o tensor de tensão que deve ser relacionado com os gradientes do escoamento estabelecendo o que se chama de equação constituinte. O comportamento do fluido depende da tensão aplicada nele, por isso é necessário saber a taxa de tensão e deformação, para utilizá-las nas equações (MALISKA, 2019). O tensor de tensão de um fluido na forma simplificada é

$$\tau_{xy} = 2k\varepsilon_{xy}^n$$

onde $n=1$ se for fluido newtoniano, $n<1$ se for pseudo plástico e $n>1$ se for um fluido dilatante. A taxa de deformação, ε_{xy} , é descrita da seguinte forma

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

e mostra como um fluido se comporta quando é submetido a uma tensão. Para fluidos newtonianos, o tensor de tensões é dado por

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \partial_{ij} \lambda \nabla \vec{V}$$

onde μ é a viscosidade absoluta, p é a pressão, δ_{ij} é o delta Kronecker que só vale quando $i = j$ e λ é o segundo coeficiente de viscosidade.

Para os fluidos newtonianos, as componentes do tensor de tensões resultam em

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

que são as tensões cisalhantes e

$$\tau_{xx} = -p + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda \nabla \vec{V},$$

$$\tau_{yy} = -p + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda \nabla \vec{V},$$

$$\tau_{zz} = -p + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \lambda \nabla \vec{V},$$

que são as tensões normais. $\nabla \vec{V}$ é o termo responsável por mostrar se o volume expande ou comprime quando se aplica uma tensão nele.

Somando as tensões normais, obtém-se a Equação (41).

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = -3p + 2\mu \nabla \vec{V} + 3\lambda \nabla \vec{V} \quad (41)$$

Dividindo a Equação (41) por 3 e isolando a pressão, tem-se que

$$p = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \vec{V}$$

onde $\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}$ é a pressão média, portanto

$$p = \bar{p} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \vec{V}$$

Normalmente, assume-se que $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ e a pressão termodinâmica é a própria pressão média das tensões normais (MALISKA, 2019)

$$p = \bar{p}$$

11 ANEXO D - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Dividindo a Equação (21) por $dx dy dz$, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{W}_{sai}}{dV} = & \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx} \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} \cdot u) + B_x u + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy} \cdot v) + \\ & \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy} \cdot v) + B_y v \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz} \cdot w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz} \cdot w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz} \cdot w) + B_z w \end{aligned}$$

E pela definição de derivada, tem-se que

$$\begin{aligned} u \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) + B_x}_{(u\rho \frac{Du}{Dt})} \right) + v \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) + B_y}_{(v\rho \frac{Dv}{Dt})} \right) + \\ w \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) + B_z}_{(w\rho \frac{Dw}{Dt})} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-\dot{W}_{sai}}{dV} \end{aligned}$$

onde

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = \rho u \frac{Du}{Dt} + \rho v \frac{Dv}{Dt} + \rho w \frac{Dw}{Dt}$$

é a energia cinética. Portanto, rearranjo a Equação (20) com as deduções realizadas, tem-se

$$\begin{aligned} \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} = \\ - \frac{\dot{W}_{sai}}{dV} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Subtraindo a energia cinética em ambos lados da equação da energia, obtém-se que

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e - \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = q''' - \nabla \vec{q} - \frac{-\dot{W}_{sai}}{dV} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{|\vec{V}|^2}{2} \right)$$

Definindo $I = e - E_{cin/m}$, energia interna, que é a subtração de uma energia pela energia

cinética por unidade de massa, obtém-se a seguinte equação da energia

$$\rho \frac{DI}{Dt} = -\nabla \vec{q} + q''' + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (42)$$

Simplificando a Equação (42), tem-se

$$\rho \frac{DI}{Dt} + \nabla \vec{q} - q''' = -p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \Phi$$

onde o termo $\mu \Phi$ é chamado de função dissipação.

$$\rho \left[\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} \right] + \nabla \vec{q} - q''' = -p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \Phi,$$

$$\vec{q} = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - q''' = -p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \Phi,$$

simplificando

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (43)$$

12 ANEXO E - DISCRETIZAÇÃO CONSERVAÇÃO DA MASSA

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dx dy dt}_1 + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dt}_2 + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dt}_3,$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dy dt = \\ &= \Delta x (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dt = \Delta x \Delta y (\rho^{t+\Delta t} - \rho^t) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dt &= (\rho_e u_e - \rho_w u_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n dy dt = \\ &= (\rho_e u_e - \rho_w u_w) (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = (\rho_e u_e - \rho_w u_w) \Delta y (t + \Delta t - t) = \\ &= \Delta y \Delta t (\rho_e u_e - \rho_w u_w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dt = \\ &= \Delta x (\rho_n v_n - \rho_s v_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = \Delta x (\rho_n v_n - \rho_s v_s) (t + \Delta t - t) = \Delta x \Delta t (\rho_n v_n - \rho_s v_s). \end{aligned}$$

13 ANEXO F - DISCRETIZAÇÃO CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dx dy dt}_1 + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} dx dy dt}_2 + \\
 & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} dx dy dt}_3 = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dy dt}_4 + \\
 & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx dy dt}_5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dy dt = \\
 & \Delta x (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt = \Delta x \Delta y \left[(\rho\phi)^{t+\Delta t} - (\rho\phi)^t \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} dx dy dt &= [(\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w] \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n dy dt = \\
 & [(\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w] (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = [(\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w] \Delta y (t + \Delta t - t) = \\
 & \Delta y \Delta t \left[(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} dy dt = \\
 & \Delta x [(\rho v)_n \phi_n - (\rho v)_s \phi_s] = \int_t^{t+\Delta t} dt = \Delta x [(\rho v)_n \phi_n - (\rho v)_s \phi_s] (t + \Delta t - t) = \\
 & \Delta x \Delta t \left[(\rho v)_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - (\rho v)_s \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy dt &= \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n dy dt = \\
& \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = \\
\Delta y \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] (t + \Delta t - t) &= \Delta y \Delta t \left[\mu_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \mu_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy dt = \\
& \Delta x \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \int_t^{t+\Delta t} dt = \\
\Delta x \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] (t + \Delta t - t) &= \Delta x \Delta t \left[\mu_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_n} - \mu_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_s} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dt &= (P_e - P_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n dy dt = (P_e - P_w)(y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = \\
& \Delta y (P_e - P_w)(t + \Delta t - t) = \Delta y \Delta t (P_e - P_w),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial P}{\partial y} dy dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial P}{\partial y} dy dt = \Delta x (P_n - P_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = \\
& - \Delta y \Delta t (P_e - P_w) + \Delta x (P_n - P_s)(T + \Delta t - t) = \Delta x \Delta t (P_n - P_s).
\end{aligned}$$

14 ANEXO G - DISCRETIZAÇÃO CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt}_1 + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(uT)}{\partial x} dx dy dt}_2 + \\
 & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(vT)}{\partial y} dx dy dt}_3 - \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dt}_4 - \\
 & \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dt}_5 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial T}{\partial t} dy dt = \\
 & \Delta x (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \Delta x \Delta y \left[(T)^{t+\Delta t} - (T)^t \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(uT)}{\partial x} dx dy dt &= (T_e u_e - T_w u_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n dy dt = \\
 (T_e u_e - T_w u_w) (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} dt &= (T_e u_e - T_w u_w) \Delta y (t + \Delta t - t) = \\
 & \Delta y \Delta t (T_e u_e - T_w u_w),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(vT)}{\partial y} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial(vT)}{\partial y} dy dt = \\
 \Delta x (T_n v_n - T_s v_s) \int_t^{t+\Delta t} dt &= \Delta x (T_n v_n - T_s v_s) (t + \Delta t - t) = \Delta x \Delta t (T_n v_n - T_s v_s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dt &= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n dy dt = \\
& \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] (y_n - y_s) \int_t^{t+\Delta t} dt = \Delta y \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] (t + \Delta t - t) = \\
& \Delta y \Delta t \left[\frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dt &= (x_e - x_w) \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dt = \\
& \Delta x \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \int_t^{t+\Delta t} dt = \Delta x \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] (t + \Delta t - t) = \\
& \Delta x \Delta t \left[\frac{T_N - T_P}{\delta y_n} - \frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \right].
\end{aligned}$$