UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CAMPUS ITAQUI-RS
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

DARGEL MERCIO RIOS

ESTUDO DO CONCEITO DE TAXA DE VARIAÇÃO: ANÁLISE DE COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

ITAQUI-RS
2016

DARGEL MERCIO RIOS

ESTUDO DO CONCEITO DE TAXA DE VARIAÇÃO: ANÁLISE DE COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para conclusão do Curso de Matemática – Licenciatura pela UNIPAMPA - Campus Itaqui-RS.

Orientador(a): Prof. Me. Leugim Corteze Romio
Co-Orientador(a): Prof. Ma. Maria Arlita da Silveira Soares

ITAQUI-RS

2016

DARGEL MERCIO RIOS

ESTUDO DO CONCEITO DE TAXA DE VARIAÇÃO: ANÁLISE DE COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para conclusão do Curso de Matemática – Licenciatura pela UNIPAMPA - Campus Itaqui/RS.

Aprovada em _____ de __________ de _______

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Me. Leugim Corteze Romio (orientador)
UNIPAMPA – Campus Itaqui-RS

____

Prof. Dr. Rita de Cássia Pistóia Mariani
UFSM – Santa Maria-RS

____

Prof. Ma. Renata da Silva Dessbesel
UTFPR- Campus Dois Vizinhos-PR

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, que me permitiu chegar até este momento.

A minha mãe, que apesar de não ter estudado, sempre fez o possível para que meus irmãos e eu pudéssemos estudar. À senhora, gratidão eterna.

Ao professor Leugim, pelos ensinamentos, conselhos e principalmente pela paciência. Em determinado momento o senhor foi fundamental para a minha permanência no curso.

A professora Arlita, pelos conhecimentos compartilhados e pelas inúmeras contribuições no decorrer de minha formação acadêmica.

Aos demais professores, pelos ensinamentos e contribuições.

Aos meus amigos, pelas conversas e momentos de descontração.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram neste processo.

RESUMO

O estudo do Cálculo no Ensino Superior requer, dos estudantes, mudanças em relação ao estudo na Educação Básica, em especial, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento dedutivo abstrato que nesta etapa, geralmente, não é evidenciado, o que pode contribuir para os altos índices de reprovações. Considerando que o estudante de Ensino Superior, em geral, precisa compreender os conceitos relacionados a Taxa de Variação e este é trabalhado na Educação Básica, objetiva-se com esta pesquisa analisar os livros didáticos do Ensino Médio de três escolas de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul, a fim de verificar como está sendo apresentado o conceito de taxa de variação, nos tópicos específicos de funções, sob a perspectiva de transição do pensamento matemático elementar para o avançado. A escolha do tema foi devida, conforme mencionado, a importância da compreensão do conceito de taxa de variação no Ensino Médio e as implicações deste conceito no Ensino Superior. Para isso, buscou-se fundamentação teórica na teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA), problematizada pelos autores Tall (1991), Dreyfus (1991) e Gray (1999). Adotou-se como metodologia de trabalho a pesquisa a qualitativa e a análise documental de Bardin (1977). A análise dos dados proporcionou uma melhor compreensão de como o conceito de taxa de variação é abordado nas obras do Ensino Médio e permitiu evidenciar a presença de alguns processos do PMA nas atividades propostas, bem como o espaço e tempo dedicados ao conceito.

Palavras-Chave: Taxa de Variação. Pensamento Matemático Avançado. Análise de livros didáticos.

ABSTRACT

The study Calculation of Higher Education requires students, changes in relation to the study in basic education, in particular as regards the development of abstract deductive thought in basic education is usually not shown, which can contribute to high rates of failures. Whereas the student of higher education in general needs to understand the concepts related to the Rate of Change and this is working in Basic Education, the objective of this research was to analyze the textbooks of high school three schools of an inside county state of Rio Grande do Sul, in order to check how it is being presented the concept of rate of change in specific topics functions under the transitional perspective of elementary mathematical thinking to advanced. The choice of subject was due, as mentioned, the importance of understanding the concept of rate of change in high school and the implications of this concept in higher education. For this, it sought theoretical foundation in the theory of Advanced Mathematical Thinking (PMA), problematized by authors Tall (1991) Dreyfus (1991) and Gray (1999). It was adopted as a working methodology to qualitative research and document analysis of Bardin (1977). Analysis of the data provided a better understanding of how the concept of rate of change is addressed in the works of high school and has highlighted the presence of some WFP processes in the proposed activities, as well as space and time dedicated to the concept.

Keywords: Rate of change. Advanced Mathematical Thinking. Textbooks Analysis.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

O Cálculo Diferencial e Integral é de fundamental importância para as diversas áreas da ciência. Segundo Mariani (2006) seus conceitos são indispensáveis para a representação e modelagem matemática de fenômenos, garantindo ferramentas importantes para a resolução de problemas de variação, cálculo de áreas sob curvas e volumes de sólidos, além de fundamentar estudos intrínsecos a própria Matemática.

Além disso, para Barufi (1999) a solução de equações diferenciais é fundamental ao desenvolvimento de modelos que representem problemas de Física, Engenharia, Química, Economia, entre outras áreas da ciência. Os modelos matemáticos, de determinados fenômenos, possuem características particulares, sendo uma delas a *taxa de variação* entre duas grandezas, uma independente e outra dependente. Para exemplificar:

> Á medida que o ar seco move-se para cima ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20 ºC e a temperatura a uma altura de 1 km for de 10 ºC, expresse a temperatura T (em ºC) como uma função da altura h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado. (STEWART, 2005, p. 26)

Como T é expresso por uma função afim, pode-se representa-la como: $T = ah + b$. Quando $T = 20$ têm-se que $h = 0$, logo $b = 20$. Para saber o valor do parâmetro a utiliza-se a informação de que $h = 1$ para $T = 10$. Assim: $10 = a.1 + 20$. O valor da taxa de variação da função é dado por -10. De modo que a função do problema torna-se: $T = -10h + 20$. Nesta situação, o parâmetro $a = -10$ representa a taxa de variação da temperatura em relação à altura e indica um decréscimo de temperatura conforme a altitude aumenta.

Compreende-se que o estudo no nível superior, além da mobilização e articulação de vários conceitos matemáticos, também, exige habilidades de abstração, generalização e dedução. Nas disciplinas de Cálculo espera-se que o estudante mobilize conhecimentos, em especial, sobre Álgebra, Geometria e funções, já estudados na Educação Básica, de maneira que a transição deste nível de ensino para o Superior não seja tão problemática. Entretanto, algumas pesquisas (BARUFI, 1999; MARIANI, 2006; REZENDE, 2003) indicam que os estudantes encontram desafios ao iniciar os estudos na disciplina de Cálculo, uma vez que esta requer uma matemática avançada. Segundo Robert e Schwarzenberger (1991 apud NASSER, SOUZA, TORRACA, 2012, p. 3) tais desafios são oriundos de mudanças qualitativas

> [...] mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado.

Percebe-se as várias mudanças exigidas pelo Cálculo, principalmente, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento dedutivo abstrato que na Educação Básica, geralmente, não é evidenciado, o que pode contribuir para os altos índices de reprovações.

O elevado índice de reprovações nas disciplinas de Cálculo tem sido tema de vários estudos como, por exemplo, os trabalhos de Barufi (1999) e Rezende (2003). Barufi (1999), em sua pesquisa, verificou nos dados do Instituto de Matemática e Estatística-IME, da USP[1], do ano de 1995, que o índice de reprovação, na disciplina de Cálculo para funções de uma variável real, foi de 66,9% e na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi de 43,8%. Rezende (2003) observou, nos cursos de Cálculo da UFF[2] no período de 1996 a 2000, um índice de reprovação variando entre 45% e 95%, sendo que para o curso de Matemática o índice de reprovação era superior a 65%.

O baixo desempenho apresentado pelos estudantes universitários, em geral, é atribuído a “lacunas” oriundas da aprendizagem de conceitos matemáticos da Educação Básica. Os dados das avaliações do SAEB[3] mostram que os estudantes apresentam dificuldades em questões que envolvem o trabalho no campo da álgebra, principalmente, no que tange ao conceito de função. Como tentativa de amenizar as dificuldades apresentadas pelos estudantes as universidades, nos últimos anos, vêm incluindo disciplinas de pré-cálculo em seus cursos superiores, além de atividades de monitoria e grupos de estudo.

De fato, existem dificuldades para a compreensão de ideias complexas do Cálculo. Conforme Mariani (2006) o estudo de determinados conceitos ocorre de forma compartimentalizada de modo que não conduz à abstração exigida no Ensino Superior. Segundo a pesquisadora, os estudantes que ingressam no Ensino Superior não compreendem, por exemplo, o conceito de função que implica diretamente no estudo de limites, derivadas e integrais. Além disso, conceitos algébricos estudados no Ensino Fundamental, como por exemplo, produtos notáveis, não são compreendidos pelos estudantes.

Entretanto, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as atividades algébricas a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental devem oportunizar à generalização de padrões e o estudo da variação de grandezas, bem como, o estudo dos conceitos de variável, função e representação gráfica e algébrica de fenômenos (BRASIL, 1998), o que contribuiria para o desenvolvimento do pensamento algébrico e minimizaria as dificuldades nos demais níveis de ensino.

---

[1] Universidade de São Paulo.
[2] Universidade Federal Fluminense.
[3] Sistema de Avaliação da Educação Básica.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) o conceito de função deve ser abordado formalmente no Ensino Médio e desempenha um papel importante no estudo de fenômenos do cotidiano que estão relacionados a diversas áreas das ciências: Física, Economia, Química, entre outros (BRASIL, 2002).

Neste sentido as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) trazem a discussão sobre características de diferentes modelos de funções é pertinente, de modo a enfatizar que, em alguns casos, a taxa de variação pode ser constante (função afim) e em outros dependerá do valor da função em cada instante, como por exemplo, em modelos de crescimento/decrescimento exponencial. Mencionando ainda que, em particular, o crescimento populacional de uma determinada bactéria pode ilustrar um modelo de crescimento exponencial (BRASIL, 2006).

Para Barufi (1999) uma das especificidades do Cálculo, ao se desenvolver o trabalho relacionado ao conceito de função, é o estudo da taxa de variação da função, enfatizando crescimento e decrescimento de curvas. Ponte (2009) destaca a variação como um dos aspectos mais importantes do conceito de função, afirmando que os estudantes devem compreender que determinados fenômenos podem ser representados por funções do tipo afim (linear ou não linear), mas que não são todos os fenômenos. Deste modo, reduzindo as possibilidades de que os estudantes cometam o equívoco de generalizar que todos os processos de mudanças possuem taxas de variação constantes.

Ao trabalhar os diferentes conceitos em sala de aula, deve-se ressaltar a importância que o livro tem para o planejamento dos professores, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior. Na Educação Básica, os livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (BRASIL, 2014), em sua maioria, trazem o conceito de taxa de variação no 1º ano, ao trabalhar os conceitos relacionados à função afim. Conforme o PNLD na seleção de conteúdos, para o trabalho no campo de funções, são considerados: “conceito de função e suas propriedades; sequências; funções afins e afins por partes; funções quadráticas; funções exponencial e logarítmica; funções trigonométricas; matemática financeira; e o *conceito de derivada*” (BRASIL, 2014, p. 84, itálico nosso).

Considerando a problemática apresentada, foi elaborada a seguinte questão de pesquisa: *De que forma o conceito de taxa de variação é apresentado em livros didáticos do Ensino Médio?*

Para responder a questão de pesquisa, objetiva-se analisar os livros didáticos do Ensino Médio de três escolas de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul, afim de verificar como está sendo apresentado o conceito de taxa de variação, nos tópicos específicos de funções, sob a perspectiva de transição do pensamento matemático elementar para o avançado. A escolha do tema funções foi devida a importância da compreensão do conceito de taxa de variação no Ensino Médio e as implicações deste conceito no Ensino Superior, em particular, no estudo do Cálculo.

Em relação à organização da pesquisa, esta foi dividida em quatro (4) capítulos, a saber: Capítulo 1, Fundamentação Teórica, em que é apresentado o aporte teórico utilizado para realização da Pesquisa; Capítulo 2: Procedimentos Metodológicos, neste espaço é descrita a metodologia adotada, com base na questão da pesquisa e nos objetivos, optou-se pela pesquisa qualitativa por meio de análise documental; Capítulo 3: Análise das Coleções de Livros Didáticos, momento em que é realizada a descrição e análise das fontes de dados da pesquisa; e, por fim, Capítulo 4: Considerações Finais, espaço em que são pontuadas algumas considerações relacionadas às coleções, bem como, futuras pesquisas que podem ser realizadas a partir desta.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Cálculo é essencial não só para a Matemática, mas também para outras áreas do conhecimento. Segundo Barufi (1999), os tópicos introdutórios de Cálculo estão presentes nos cursos de Engenharia, Matemática, Física, Química, Contabilidade, Arquitetura, entre outros.

Um modelo, segundo Stewart, pode ser entendido como

> [...] uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução dos poluentes. O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer predições sobre um comportamento futuro. (STEWART, 2005, p. 25)

Compreende-se que um modelo, além de descrever matematicamente fenômenos, expressa a relação entre duas ou mais variáveis, de modo que uma das especificidades dos cursos de Cálculo é o estudo da taxa de variação de uma função.

> A idéia fundamental é a de que a curva, localmente, pode ser bem aproximada por uma reta, onde as características de proporcionalidade constituem um elemento facilitador na análise e compreensão dos processos envolvidos. Nessa perspectiva, o Cálculo é uma ferramenta extremamente útil, pois a variação de grandezas e a necessidade de aproximações locais é uma problemática presente em praticamente todas as áreas do conhecimento. (BARUFI, 1999, p. 3)

No estudo dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral existe uma relação entre a álgebra e o pensamento matemático avançado. As primeiras ideias sobre o pensamento matemático avançado foram desenvolvidas e problematizadas na obra *Advanced Mathematical Thinking* (Pensamento Matemático Avançado, tradução nossa) de 1991 organizada por David Tall. Além de Tall (1991) outros pesquisadores, como Dreyfus (1991) e Gray (1999), também se dedicaram a pesquisar sobre os processos envolvidos no desenvolvimento do pensamento avançado.

O Quadro 1 apresenta os sentidos atribuídos, por diferentes pesquisadores, ao tema pensamento matemático avançado.

Quadro 1: Sentidos atribuídos ao tema pensamento matemático avançado

Pesquisador	Sentido	Diferenças
Gray	Relacionado ao pensamento dos profissionais da área da matemática ao imaginar, conjecturar e provar teoremas.	“[...] refere-se aos tipos de actividade cognitiva que sustentam tal pensamento”.
Tall	Envolve o uso de estruturas cognitivas elaboradas em diferentes atividades matemáticas na produção de novas ideias para demonstrar teoremas.	“[...] dar uma perspectiva da construção matemática do conhecimento humano [...]”
Dreyfus	Processos relacionados a representar, visualizar, generalizar, ou ainda outros tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar sintetizar, abstrair ou formalizar.	“[...] dar relevo à importância dos processos envolvidos e suas interacções para a compreensão da Matemática avançada [...]”

Fonte: COSTA (2002, p. 257-258)

Conforme Tall (apud MARIANI, 2006, p. 34) o pensamento avançado “considera a contextualização de um problema na investigação matemática, a formulação de conjecturas e o estágio final de refinamento e prova”. Além disso, o autor destaca a definição formal e a dedução como próprias do pensamento avançado, diferenciando do pensamento matemático elementar. Para tanto, é importante compreender a estrutura do pensamento avançado. Gray enfatiza que

> [...] o movimento a partir do elementar para o pensamento matemático avançado envolve uma transição significativa: isso da descrição à definição, do convencimento à prova em uma maneira lógica baseada naquelas definições... É a transição da coerência da matemática elementar a conseqüência da matemática avançada, baseada nas entidades abstratas que o indivíduo deve construir através das definições formais. (GRAY, 1999 apud PALHARINI, 2008, p. 4)

A transição do pensamento elementar para o avançado é um dos obstáculos que muitos estudantes enfrentam não só no Ensino Superior, mas na Educação Básica também, em especial, na transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio. No Ensino Médio, geralmente, exige-se dos estudantes processos de abstração e representação em níveis mais sofisticados que no Ensino Fundamental.

Conforme Dreyfus (1991) no pensamento matemático avançado os principais processos envolvidos são: a *abstração* e a *representação*.

A abstração é *“um processo construtivo de estruturas mentais* a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos” (MACHADO, BIANCHINI, 2013, p. 592, grifo no original). A abstração possui os subprocessos *generalização* e *sintetização*. Generalizar entende-se como um processo de expansão de um domínio de validade, enquanto sintetizar significa a formação de um objeto matemático a partir de combinações de partes (MACHADO, BIANCHINI, 2013).

Já o processo de representação de um conceito, parte da ideia de exemplificar uma determinada situação e acontece “em registros compartilhados como da escrita, do desenho, da fala, dos gestos e outros" (MACHADO, BIANCHINI, 2013, p. 592). A representação simbólica objetiva facilitar a comunicação de conceitos enquanto a representação mental, segundo Dreyfus (1991), refere-se a articulações internas do indivíduo para que haja a interação com o meio externo.

Em relação às representações mentais, Dreyfus (1991), afirma que a visualização possibilita a construção de algumas dessas representações, que são importantes para que o sujeito obtenha sucesso na apreensão de conceitos.

Machado e Bianchini (2013, p. 592) destacam que "uma representação é rica se ela tem vários aspectos articulados do conceito". Por exemplo, quando o sujeito articula as representações gráfica e algébrica (forma geral, reduzida e/ou paramétrica) de uma equação do 1º grau, a representação mental torna-se rica, pois propicia o estabelecimento de relações entre os coeficientes envolvidos.

Concorda-se com Machado e Biachini (2013) que interpretar e alternar as representações de um determinado conceito é essencial para que o sujeito obtenha êxito em sua compreensão. Em outras palavras, é necessário que o estudante transite entre as representações de um determinado objeto matemático, conforme a situação em questão. Além disso, segundo Dreyfus (1991), os processos de modelar, alternar e interpretar são subprocessos da representação.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, ganha destaque no que se refere à importância das representações no processo de aprendizagem. Duval (1993) considera a existência de vários registros distintos que possibilitam a realização de representações de objetos matemáticos, tais como: registro da língua natural; registro algébrico; registro gráfico; ... Intrínsecas as representações, as operações de tratamento e conversão são enfatizadas pelo autor.

O autor complementa: "o **tratamento** de uma representação é a **transformação** desta representação **no mesmo registro onde ela foi formada**. O tratamento é uma transformação interna a um registro" (DUVAL, 1993, p. 41, grifo no original, tradução nossa). Enquanto a "**conversão** de uma representação é a **transformação** desta função em uma interpretação **em outro registro**, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial" (DUVAL, 1993, p. 42, grifo no original, tradução nossa).

Cabe ressaltar que existem outros processos presentes no pensamento avançado, por exemplo, Dreyfus (1991) destaca os processos da descoberta, da intuição, da validação, da prova e da definição. Entende-se que as propostas dos livros didáticos do Ensino Médio e os livros-textos do Ensino Superior podem e devem utilizar estes processos na apresentação dos conceitos matemáticos, por exemplo, no estudo do conceito de derivada.

O trabalho com o conceito de derivada pode ser introduzido de modo intuitivo, destacando a taxa de variação, que é trabalhada na Educação Básica, por exemplo, no estudo da reta e do coeficiente angular. Para tanto, é importante explorar as diferentes representações de taxa de variação e os subprocessos da abstração que são: generalização e sintetização.

O estudante da Educação Básica, geralmente, depara-se com a seguinte definição para taxa de variação: supondo que y é uma variável dependente de outra variável x, de forma que $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2, seu incremento será dado por $\Delta x = x_2 - x_1$, e a variação correspondente de y será: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. A razão será dada por: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, denominada de taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ (STEWART, 2005).

Já os acadêmicos de cursos superiores relacionados às ciências exatas, além da definição mencionada acima, precisam considerar a taxa média de variação em intervalos cada vez menores, de forma que Δx "venha a tender a 0", tem-se que o limite dessas taxas médias de variação, denominado taxa (instantânea) de variação de y em relação a x em $x = x_1$, é interpretado como a inclinação da reta tangente a curva $y = f(x)$ num ponto $P(x1, f(x1))$. Daí tem-se que a derivada da função em x_1 é dada por: $f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Em outras palavras, o domínio do conteúdo de função é imprescindível para o trabalho com derivadas (STEWART, 2005).

Sublinha-se que pesquisadores, como por exemplo, Ávila (1991, 2006), defendem o estudo de derivada no Ensino Médio, desde que os conceitos de função e geometria analítica sejam abordados de forma articulada com derivada e não em blocos estanques como, geralmente, é proposto. Em outras palavras, o conceito de função é abordado no 1º ano e geometria analítica é apresentada no 3º ano, muitas vezes, sem estabelecer conexões.

Assim, o estudo da taxa de variação em intervalos cada vez menores também pode ser estudada no Ensino Médio, o que proporcionará a resolução de várias situações-problema reais, antes tratadas apenas no Ensino Superior. Esta afirmação é destacada por Ávila (2006, p. 31) ao afirmar que:

> A meu ver, o professor deveria iniciar a primeira série do ensino médio retomando a proporcionalidade e a regra de três, mostrando que grandezas proporcionais são como duas variáveis, uma dependente da outra (a variável independente), as quais dão origem ao gráfico de uma reta pela origem. Daí a mostrar a equação geral da reta na forma normal $y = mx + n$ não é difícil: trata-se de uma translação do gráfico $y = mx$ de magnitude n ao longo do eixo vertical. Trabalhando com

> diferentes valores numéricos de m e n, o aluno não terá maiores dificuldades na compreensão do caso geral.
> Em seguida vale a pena falar em acréscimos e decréscimos das variáveis, familiarizando o aluno com a notação Δx (delta x) e Δy (delta y), e com o fato de que o declive da reta é $\Delta y/x$. Vários exemplos concretos ajudam nessa familiarização, inclusive com valores positivos e negativos desses acréscimos.

Pode-se explorar a taxa de variação da função quadrática, o que contribuirá para justificar várias propriedades desta função, principalmente, relacionada a representação gráfica.

Ainda, conforme Ávila (2006):

> Há [...] uma certa reserva quanto à derivada, que costuma ser considerada difícil e imprópria para o ensino médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário [...]. (p. 36)

O pesquisador considera desnecessária uma abordagem do conceito de derivada com ênfase para o conceito de limite porque defende um trabalho com a noção de taxa de variação.

Bisognin e Bisognin (2015) enfatizam que a taxa de variação é fundamental na resolução de problemas tanto matemáticos quanto de outras áreas da Ciência, e que a exploração de suas diferentes representações precisam ser abordadas. Uma vez que, por exemplo, o conceito de derivada pode ser entendido como a taxa de variação instantânea de uma função, a qual está presente em várias situações, tais como: taxa de crescimento do número de pessoas de uma determinada cidade, taxa de variação da temperatura e velocidade de um carro em movimento.

O trabalho com situações problema é um caminho para a compreensão dos conceitos de variação e posteriormente para o estudo do Cálculo, sendo a modelagem pertinente neste processo. Dreyfus (1991) afirma que "o termo modelagem se refere tipicamente a encontrar uma representação matemática para um objeto ou processo não matemático" (apud MACHADO, BIANCHINI, 2013, p. 593), tornando a modelagem uma importante ferramenta para o trabalho com situações-problema. Biembengut (2004, p.11) define modelagem como

> [...] o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sobre certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

A modelagem, também, é fundamental para a significação de alguns conceitos intrínsecos ao trabalho com funções, permitindo ao estudante, por meio de problemas da realidade, a exploração de objetos matemáticos ainda não compreendidos.

Com base nas ideias apresentadas, buscam-se compreensões e entendimentos sobre como o conceito de taxa de variação é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio.

A seguir é descrita a metodologia utilizada na realização desta pesquisa.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

As escolhas metodológicas foram definidas a partir da questão de pesquisa e dos objetivos de investigação. Inicialmente buscou-se embasamento teórico, para então delinear a metodologia de pesquisa e os procedimentos a serem adotados.

A metodologia de pesquisa adotada foi de cunho qualitativo, de forma que aspectos teóricos e metodológicos foram determinantes, entre si, para o desenvolvimento da pesquisa. Segundo Bicudo (2012) as pesquisas qualitativas

> [...] são pesquisas que permitem compreender características do fenômeno investigado e que, ao assim procederem, oferecem oportunidade para possibilidades de compreensões possíveis quando a interrogação do fenômeno é dirigida a contextos diferentes daquele em que a investigação foi efetuada. (p.19)

A proposta de estudo objetivou compreender e explicar dados. Nesta perspectiva, a pesquisa qualitativa

> [...] não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc. [...] trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p. 32)

Entretanto, não se descartou o trabalho com abordagens de dados quantitativos, uma vez que estes são importantes para o desenvolvimento do estudo. De fato, a "utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente." (FONSECA, 2002, p.20)

Para auxiliar o desenvolvimento da pesquisa optou-se por utilizar a análise documental, que entre algumas vantagens, consiste em um baixo custo e possibilita um trabalho com fontes de dados fixas, neste caso os livros didáticos.

Bardin define análise documental como "uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob uma forma diferente da original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referenciação" (1977, p. 45). Assim, a análise documental, a partir do tratamento dos dados contidos nos documentos, possibilita a representação de uma informação de diferentes maneiras.

A análise foi realizada por meio do procedimento denominado Análise de Conteúdo, procedimento este que é considerado

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens[...] A intenção da

> análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não). (BARDIN, 1977, p. 38)

Bardin (1977) aponta algumas diferenças entre os objetivos da análise documental e da análise de conteúdo, afirmando que a análise documental tem por intenção condensar informações, enquanto a análise de conteúdo a manipulação das mensagens.

A análise de conteúdo é dividida em três fases: pré-análise; exploração do material; e, tratamento dos resultados e interpretações.

A *pré-análise* é a fase de organização, cujo objetivo é operacionalizar e sistematizar as primeiras ideias, de forma que um esquema preciso, do desenvolvimento das ações, seja conduzido num plano de análise (BARDIN, 1977). Nesta fase, o *corpus* documental da pesquisa foi constituído, por meio da seleção das coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD (BRASIL, 2014), disponíveis nas três escolas da rede estadual do município de Itaqui-RS. Cabe ressaltar que duas escolas utilizam a mesma coleção, portanto foram analisadas duas coleções de livros didáticos, e não três, como previsto inicialmente.

Na pré-análise, também, foram elencados alguns indicadores, que têm como aporte teórico as pesquisas sobre Pensamento Algébrico; Pensamento Matemático Avançado; e Registros de Representação Semiótica, no que tange a aprendizagem da matemática, e as propostas curriculares deste nível.

A *exploração do material* é a fase em que as coleções de livros didáticos da Educação Básica foram analisadas a partir dos indicadores, descritos anteriormente. Os dados foram divididos em: Função, Taxa de Variação e Pré-Cálculo, e dispostos em tabelas para facilitar a análise/apresentação.

No *Tratamento dos resultados e interpretações* os resultados foram tratados de maneira a serem significativos e válidos (BARDIN, 1977). Nesta fase foi realizada a análise dos dados produzidos a partir de categorias de análise, a saber: espaço-tempo dedicado ao conceito de taxa de variação nas obras; abordagem do conceito de função; tipos de variáveis abordadas; identificação dos elementos do pensamento avançado nas obras; e, transformações cognitivas abordadas (tratamento e conversão).

Para tal, o conceito de emparelhamento foi utilizado. Segundo Laville e Dionne (2008) o emparelhamento consiste em associar os dados analisados a um modelo teórico a fim de compará-los. Os autores afirmam que “essa estratégia supõe a presença de uma teoria sobre a qual o pesquisador apoia-se para imaginar um modelo do fenômeno ou da situação em estudo” (p. 227).

O capítulo seguinte apresenta a análise das coleções, começando pela apresentação individual e seguindo da comparação delas, qualitativa e quantitativamente.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS

Nos capítulos anteriores, apresentou-se o contexto da pesquisa e a metodologia empregada na coleta e análise dos dados. Com base nesses dados, o presente capítulo tem a intenção de realizar a análise das duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio.

3.1 APRESENTAÇÃO DA COLEÇÃO 1 (C1)

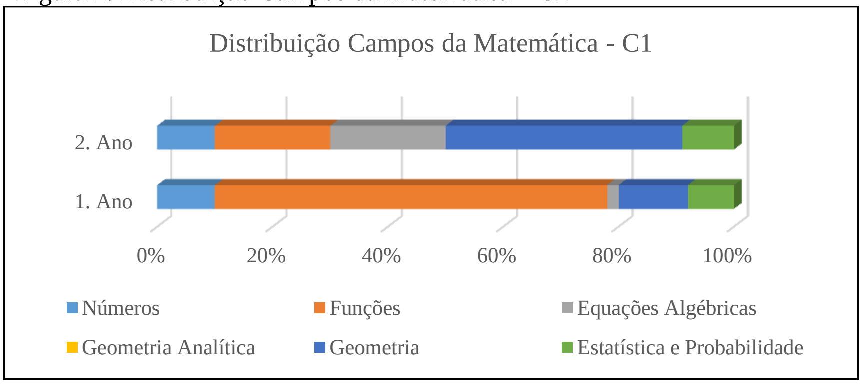
A primeira coleção analisada compreendeu os livros do 1º e 2º anos da obra Matemática: Ciências e Aplicações, da editora Saraiva, cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Os livros estão organizados em capítulos e os conteúdos propostos para cada ano estão divididos em itens.

O livro do 1º ano está dividido em 14 capítulos, dos quais foram analisados os capítulos 3, 4, 5, 7 e 8. O livro do 2º ano está dividido em 16 capítulos, sendo analisado o capítulo 4. Conforme o PNLD, esta coleção possui um excesso de conteúdos para o Ensino Médio, destacando, ainda, que

> [...] em cada volume um dos campos recebe uma atenção nitidamente predominante: funções no primeiro, geometria espacial no segundo e geometria analítica no terceiro. Essa forma de distribuição vem sendo criticada por não favorecer as conexões entre os campos. Apenas os campos dos números e de estatística e probabilidade são dosados satisfatoriamente nos três volumes. (BRASIL, 2014, p. 52)

De fato, observou-se tal característica nos livros. A Figura 1 apresenta a distribuição dos campos da matemática escolar, para o primeiro e segundo anos do Ensino Médio conforme dados do PNLD.

Figura 1: Distribuição Campos da Matemática – C1



Fonte: PNLD (BRASIL, 2014)

A abordagem do conceito de função é analisada de maneira positiva pelos avaliadores do PNLD. O documento afirma que o trabalho com situações do cotidiano facilita a atribuição de significados por parte dos estudantes, porém ressalta que existem casos em que gráficos de funções são obtidos com apenas alguns pontos do plano cartesiano, processo este denominado de análise pontual por Duval (2003). Para o autor este tipo de análise não contribuiu na compreensão da representação gráfica das funções. A construção da representação gráfica para ser realizada de forma articulada com a representação algébrica ou numérica exige a análise de variáveis visuais pertinentes, por exemplo, taxa de variação.

As críticas em relação a metodologia adotada indicam uma limitação na interação entre professor e estudante, em virtude do excesso de atividades propostas e abordagens que seguem sempre o mesmo padrão: exemplos e atividades. Em contrapartida elogia-se o rigor matemático adotado para o nível de ensino em questão. O uso da calculadora como recurso didático não é explorado devidamente, restringindo-se, meramente, a operações matemáticas fundamentais.

A contextualização é considerada pertinente pelas relações das abordagens com a história da Matemática e com outras áreas da ciência. Na seção denominada *Aplicações* destaca-se o trabalho de conceitos matemáticos em diversos contextos: "funções na modelagem de fenômenos estudados em Física, Química, Biologia ou na Meteorologia; matemática financeira em situações da vida cotidiana; estatística nas pesquisas relacionadas a práticas sociais". (BRASIL, 2014, p. 55).

3.2 ANÁLISE DA COLEÇÃO 1 (C1)

Na Coleção 1 (C1) os dados utilizados para análise foram os exercícios propostos na coleção, especificamente, dos capítulos que abordam o conceito de função.

Analisou-se os capítulos 3, 4, 5, 7 e 8 do Volume 1 (1º ano) que abordam, respectivamente, funções, função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica; e, o capítulo 4 do Volume 2 (2º ano) que aborda funções trigonométricas.

Para facilitar as análises, os exercícios foram tabelados a partir das categorias expostas no Capítulo 1 desta pesquisa. Observou-se os tipos de variáveis envolvidas, a lei da função (se era definida ou não no enunciado) e os tratamentos e conversões solicitados.

Os Quadros 2 e 3 apresentam os dados quantitativos referentes a seleção dos exercícios para C1.

Quadro 2: Capítulos analisados: Volume 1 – C1

Cap.	Título	Total Exercícios Capítulo	Total Exercícios Categorizados
3	Funções	63	12
4	Função Afim	67	17
5	Função Quadrática	74	8
7	Função Exponencial	46	8
8	Função Logarítmica	65	3

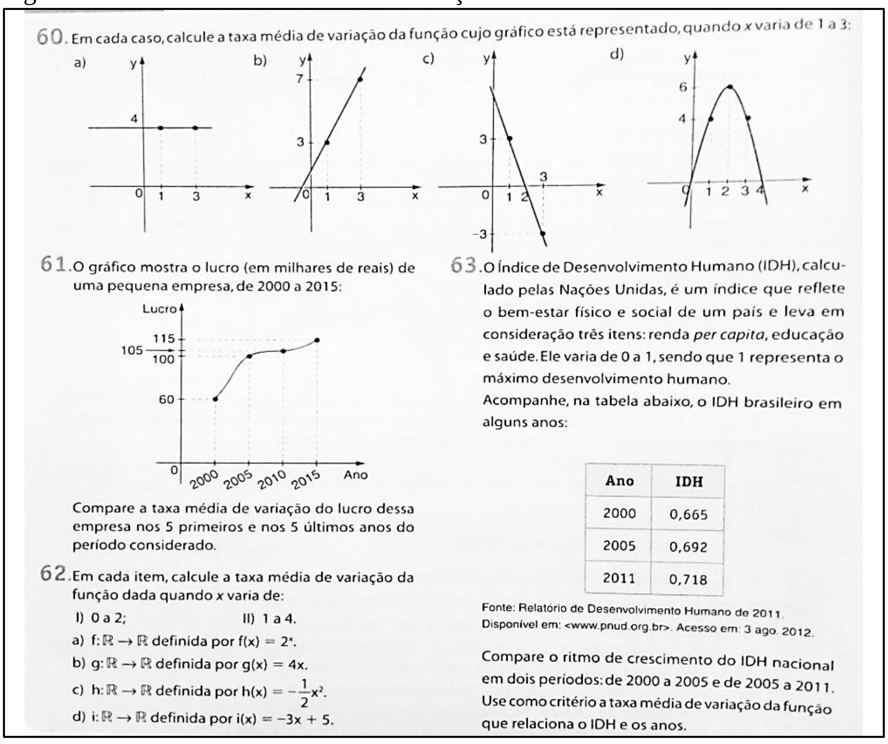
Quadro 3: Capítulo analisado: Volume 2 – C1

Cap.	Título	Total Exercícios Capítulo	Total Exercícios Categorizados
4	Funções Trigonométricas	33	0

No Volume 1, foram selecionados 48 exercícios, o que equivale a 15,2% do total de atividades dos capítulos e 6,9% do total de atividades do volume. Destes 48 exercícios, 25% estão no capítulo 3, 35,4% no capítulo 4, 16,6% no capítulo 5, 16,6% no capítulo 7 e 6,4% no capítulo 8. No Volume 2, foi analisado o capítulo 4, que aborda o conceito de funções trigonométricas, entretanto nenhum exercício foi selecionado.

É importante ressaltar que o Capítulo 3 possui um tópico específico que aborda o conceito de taxa média de variação de uma função e, apesar desta particularidade, não apresentou o maior número de atividades relacionadas ao conceito. A Figura 2 apresenta algumas as atividades propostas no tópico taxa média de variação.

Figura 2: Atividades Taxa Média de Variação Volume 1 – C1



60. Em cada caso, calcule a taxa média de variação da função cujo gráfico está representado, quando *x* varia de 1 a 3:

a) b) c) d)

61. O gráfico mostra o lucro (em milhares de reais) de uma pequena empresa, de 2000 a 2015:

Compare a taxa média de variação do lucro dessa empresa nos 5 primeiros e nos 5 últimos anos do período considerado.

62. Em cada item, calcule a taxa média de variação da função dada quando *x* varia de:

I) 0 a 2; II) 1 a 4.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 4x$.

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $i(x) = -3x + 5$.

63. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), calculado pelas Nações Unidas, é um índice que reflete o bem-estar físico e social de um país e leva em consideração três itens: renda *per capita*, educação e saúde. Ele varia de 0 a 1, sendo que 1 representa o máximo desenvolvimento humano.

Acompanhe, na tabela abaixo, o IDH brasileiro em alguns anos:

Ano	IDH
2000	0,665
2005	0,692
2011	0,718

Fonte: Relatório de Desenvolvimento Humano de 2011. Disponível em: <www.pnud.org.br>. Acesso em: 3 ago. 2012.

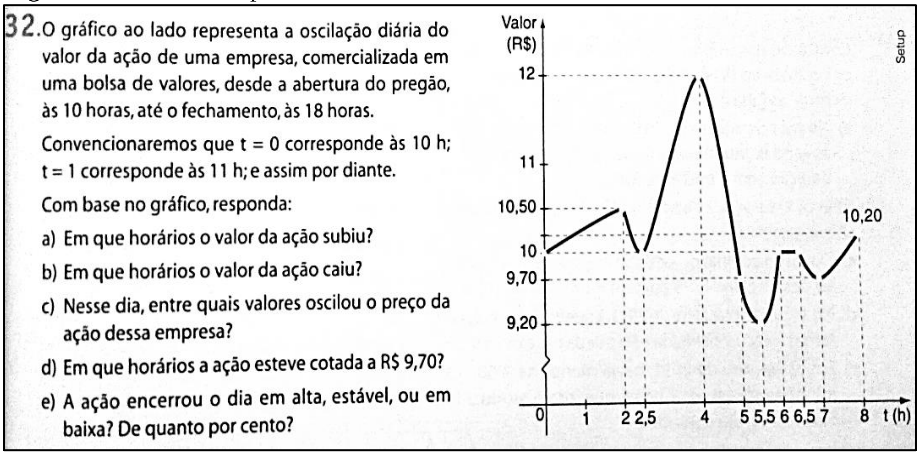
Compare o ritmo de crescimento do IDH nacional em dois períodos: de 2000 a 2005 e de 2005 a 2011. Use como critério a taxa média de variação da função que relaciona o IDH e os anos.

Fonte: Iezzi et al (2013, p. 66)

Na atividade 60 (Figura 2), o autor utiliza a representação gráfica para solicitar a taxa média de variação de cada função. Destaca-se que, na letra d, foi utilizada uma parábola, o que permite comparar funções que possuem taxa média de variação constante, com funções que possuem taxa média de variação dependente do intervalo escolhido para o cálculo. Na sequência, a atividade 61 (Figura 2) apresenta outro exemplo em que a taxa média de variação não é constante. Compreende-se que esta abordagem é pertinente, pois é necessário que o estudante perceba que a variação dependerá do tipo de função e dos seus intervalos. Na atividade 62 (Figura 2) são abordadas diferentes funções, mas o cálculo da taxa média de variação ocorre de maneira mecânica. Já a atividade 63 (Figura 2) apresenta uma situação contextualizada sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), auxiliando no desenvolvimento do processo de abstração.

A Figura 3 apresenta uma das atividades selecionadas no Capítulo 3 de C1. Compreende-se que atividades semelhantes a esta contribuem para a significação do conceito de taxa de variação, pois envolvem a relação de processos – representação e abstração – que segundo Dreyfus (1991), fazem parte da definição de pensamento matemático avançado. Para a resolução desta atividade é necessário que o estudante interprete corretamente as informações e abstraia as características comuns do fenômeno (generalização). A visualização da variação da função, possibilitada pelo gráfico, propicia a análise das variáveis pertinentes nesta representação, possibilitando a relação com outras representações. Neste caso, é preciso que o estudante compreenda que para cada intervalo de tempo escolhido definirá uma taxa de variação, que não será a mesma para todos os intervalos dados.

Figura 3: Atividade Capítulo 3 Volume 1 – C1



32. O gráfico ao lado representa a oscilação diária do valor da ação de uma empresa, comercializada em uma bolsa de valores, desde a abertura do pregão, às 10 horas, até o fechamento, às 18 horas.

Convencionaremos que t = 0 corresponde às 10 h; t = 1 corresponde às 11 h; e assim por diante.

Com base no gráfico, responda:

a) Em que horários o valor da ação subiu?

b) Em que horários o valor da ação caiu?

c) Nesse dia, entre quais valores oscilou o preço da ação dessa empresa?

d) Em que horários a ação esteve cotada a R$ 9,70?

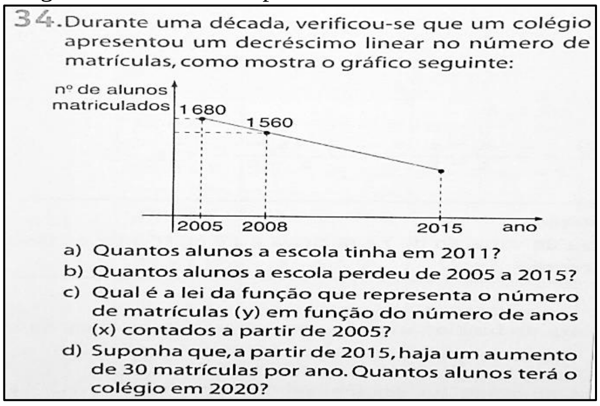
e) A ação encerrou o dia em alta, estável, ou em baixa? De quanto por cento?

Fonte: Iezzi et al (2013, p. 47)

Observa-se, no gráfico da Figura 3, a ênfase dada aos intervalos da função, de forma que o crescimento ou decrescimento da curva está diretamente relacionado à taxa de variação.

No Capítulo 4, o autor elucida que o coeficiente a representa a taxa média de variação das funções da forma $f(x) = ax + b$ (função afim) e observa que quando $a > 0$ a taxa média de variação de f é positiva e f é crescente e, quando $a < 0$ a taxa média de variação de f é negativa e f é decrescente. A Figura 4 exemplifica umas das atividades sugeridas pelo autor neste capítulo.

Figura 4: Atividade Capítulo 4 Volume 1 – C1



Fonte: Iezzi et al (2013, p. 80)

A atividade apresenta uma situação com taxa média de variação negativa. Compreende-se que esse tipo de atividade exige generalização para que a lei da função seja definida. Outro fator a ser destacado é que a atividade exige a conversão do registro gráfico para o algébrico. Em outras atividades constatou-se a exigência da conversão do registro algébrico para o gráfico, mas o sentido contrário da conversão não é proposto em nenhum dos casos.

Ainda neste capítulo, no item denominado aplicações, é feita a relação da função afim com os movimentos uniforme e uniformemente variado que são trabalhados na Física. Na perspectiva de Ávila (2006), estas relações poderiam ser melhor exploradas se o conceito de derivada fosse proposto no Ensino Médio, o que requer que abordar acréscimos e decréscimos das variáveis, explorando notação Δx e Δy, e com o fato de que o declive da reta é $\Delta y/\Delta x$.

O trabalho proposto no Capítulo 5, sobre função quadrática, não enfatizou o conceito de variação, na mesma dimensão dos capítulos anteriores. Deste capítulo destaca-se a atividade da Figura 5, que utilizou uma função linear e uma função quadrática para apresentar os crescimentos de duas plantas em um determinado intervalo de dias.

Figura 5: Atividade Capítulo 5 Volume 1 – C1

45. Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas A e B da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes. Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta A cresceu linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; a altura da planta B pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que y é a altura medida em centímetros e x o tempo medido em dias:

a) Obtenha a diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida.

b) Qual é a lei da função que representa a altura (y) da planta A em função de *x* (número de dias)?

c) Determine o dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

d) Calcule a taxa média de variação do crescimento das plantas A e B do 1º ao 4º dia.

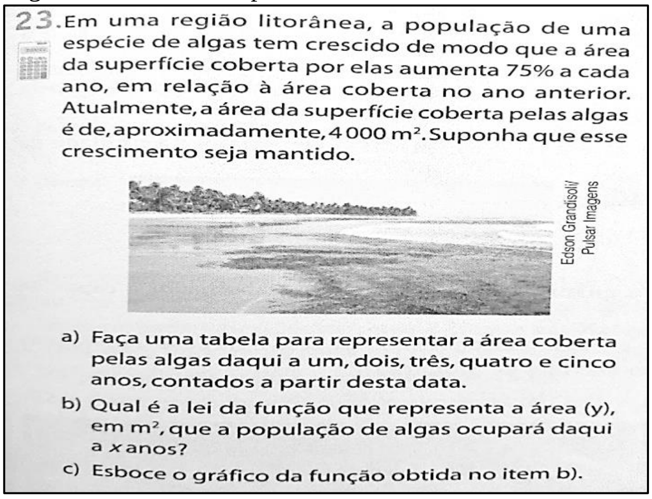
Fonte: Iezzi et al (2013, p. 110)

Considera-se importante esta comparação com funções distintas, pois com isso se reforça que a variação será específica para cada curva dada e/ou intervalo definido, possibilitando que o estudante, a partir de suas conjecturas, não generalize erroneamente que a taxa de variação será sempre a mesma. No caso da função quadrática, por exemplo, a taxa de variação é diferente para intervalos de tempo diferentes.

Esta atividade contribui para o entendimento da taxa média de variação em funções onde ela não é constante, e consequentemente, também, contribui para o desenvolvimento do pensamento avançado do estudante, principalmente, no que diz respeito ao processo de generalização que ocorre a partir da expansão das características de um caso particular (função afim) para a validação das novas conjecturas. Contudo, vale ressaltar que outras situações poderiam ser abordadas ao tratar da função quadrática se a proposta de Ávila (2006), do ensino do conceito de derivada no Ensino Médio, fosse aceita pelos autores de livros didáticos desta etapa da Educação Básica.

De maneira semelhante ao Capítulo 5, as atividades propostas no trabalho com funções exponenciais não enfatizam, explicitamente, o conceito de variação, limitando o estudo de algumas propriedades desta função, por exemplo, as propriedades que garantem que o gráfico da função exponencial não é uma reta. A atividade 23 (Figura 6) aborda uma situação de crescimento populacional de certo tipo de alga, destacando a transição em mais de um registro de representação: tabular, algébrico e gráfico.

Figura 6: Atividade Capítulo 7 Volume 1 – C1



23. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de algas tem crescido de modo que a área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior. Atualmente, a área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4 000 m^2. Suponha que esse crescimento seja mantido.

Edson Grandisoli/ Pulsar Imagens

a) Faça uma tabela para representar a área coberta pelas algas daqui a um, dois, três, quatro e cinco anos, contados a partir desta data.

b) Qual é a lei da função que represente a área (y), em m^2, que a população de algas ocupará daqui a x anos?

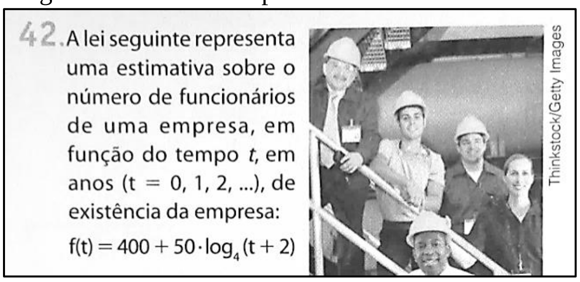
c) Esboce o gráfico da função obtida no item b).

Fonte: Iezzi et al (2013, p. 149)

Apesar de solicitar essa conversão, não é sugerido que seja feito o sentido contrário da conversão. Ressalta-se que a conversão do registro gráfico para o algébrico é solicitado em outras atividades propostas. De modo geral a atividade possibilita o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, pois ao solicitar a lei da função, que representa a área y em m^2, sugere que o estudante valide uma lei para x anos, o que caracteriza o processo de generalização.

A Figura 7 é referente ao Capítulo 8 (função logarítmica), que apresentou o menor número de atividades selecionadas do livro do 1º ano. A atividade apresentada propõe uma estimativa para o número de funcionários de uma determinada empresa a partir de uma lei de formação definida no enunciado.

Figura 7: Atividade Capítulo 8 Volume 1 – C1



42. A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo t, em anos (t = 0, 1, 2, ...), de existência da empresa:

$f(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$

Thinkstock/Getty Images

Fonte: Iezzi et al (2013, p. 180)

Entre os questionamentos desta atividade, o autor solicita a taxa média de variação do número de funcionários da empresa do 6º ao 14º ano. Apesar de evidenciado o trabalho com a variação, a atividade exige apenas tratamentos numéricos porque a lei que modela a situação já foi apresentada. Conforme Duval (2003), a apreensão de um determinado conceito só é concretizada com a mobilização e coordenação de no mínimo dois registros, e a conversão deve ser realizada em ambos os sentidos, de modo a não confundir a representação do objeto com o próprio objeto.

No que se refere às transformações dos registros de representações, o quadro abaixo expressa os dados quantitativos.

Quadro 4: Tratamento e Conversão: Volume 1 – C1

Cap.	Título	Total Exercícios Tratamento	Total Exercícios Conversão
3	Funções	3	9
4	Função Afim	5	12
5	Função Quadrática	6	2
7	Função Exponencial	4	4
8	Função Logarítmica	3	0

No Capítulo 3, 75% das atividades selecionadas exigem a conversão de registros e 25% exigem tratamento. No capítulo 4, 70,6% das atividades selecionadas exigem a conversão de registros e 29,4% exigem tratamento. No capítulo 5, 75% das atividades exigem o tratamento dos registros e 25% exigem conversão. No capítulo 7, 50% das atividades exigem o tratamento e 50% exigem conversão. No capítulo 8, 100% das atividades selecionadas exigem tratamento. Entre as atividades selecionadas o registro algébrico é o mais utilizado, presente em 47,9% das situações. Em relação às variáveis envolvidas 79,1% dos exemplos apresentam variáveis contínuas.

Em relação aos sentidos das conversões, observa-se que: no Capítulo 3, 55,6% das atividades compreendem a conversão do registro tabular para o registro algébrico, 22,2% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro tabular, 11,1% compreendem a conversão do registro gráfico para o registro numérico e 11,1% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro tabular e no Capítulo 4, 50% das situações propostas compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, 41,6% compreendem a conversão do registro gráfico para o registro algébrico e 8,3% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

No Capítulo 5, 50% das atividades compreendem a conversão do registro gráfico para o registro algébrico e 50% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico; no Capítulo 7, 37,5% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro tabular, 37,5% compreendem a conversão do registro tabular para o registro algébrico e 25% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico; e, no Capítulo 8 nenhuma atividade selecionada exige a conversão de registros.

Em algumas situações em que são solicitadas construções gráficas, o registro tabular é utilizado como registro intermediário. Outro fato observado diz respeito a conversão, as atividades valorizam a conversão em apenas um sentido. No que se refere aos tratamentos, 90,8% do total das atividades selecionadas trabalham com o registro algébrico.

3.3 APRESENTAÇÃO DA COLEÇÃO 2 (C2)

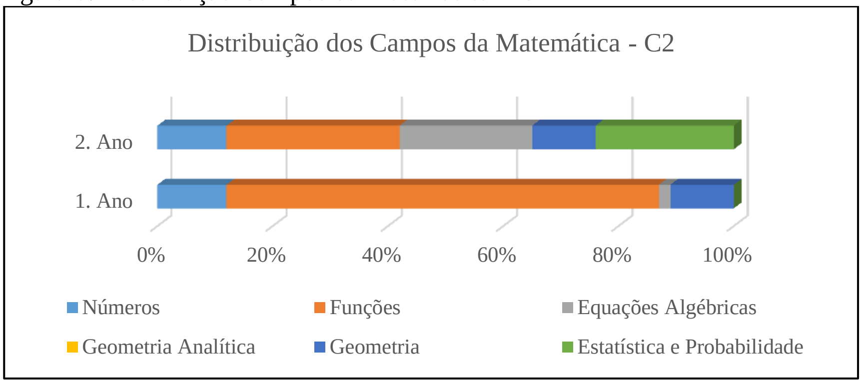
A segunda coleção analisada, Novo Olhar: Matemática, da editora FTD e autoria de Joamir Souza, também compreendeu dois livros: o do 1º ano e do 2º ano do Ensino Médio. A organização dos livros se dá por unidades divididas em capítulos.

O livro referente ao 1º ano do Ensino Médio possui 4 unidades que compreendem 9 capítulos, dos quais foram analisados os capítulos 2, 3, 4, 5 e 6. O livro do 2º ano, também, está organizado em 4 unidades e dividido em 9 capítulos, sendo analisado apenas o capítulo 1.

Segundo o PNLD, "são abordados os tópicos normalmente estudados no ensino médio, com algumas escolhas elogiáveis" (BRASIL,2014). O documento afirma que o conceito de função é abordado de maneira excessiva no livro do 1º ano, comparado aos demais campos. Ainda, é pontuado que o trabalho com funções trigonométricas limita-se ao seno e ao cosseno.

A Figura 8 apresenta a distribuição dos campos da matemática escolar, para o 1º e 2º anos do Ensino Médio.

Figura 8: Distribuição Campos da Matemática – C2



Fonte: PNLD (BRASIL, 2014)

No que se refere ao trabalho com funções os avaliadores do PNLD afirmam que a "contextualização desenvolvida no campo é elogiável e feita com base em bons exemplos da relação entre grandezas variáveis, definidas por leis ou regras", com boas relações com outras áreas da Ciência. (BRASIL, 2014 p.70). Porém, é realizada uma crítica negativa a ênfase demasiada em regras e definições que, aliadas a falta de destaque aos diferentes tipos de funções, acabam prejudicando o processo de aprendizagem.

Conforme o PNLD, a coleção caracteriza-se por suas abordagens de cunho teórico seguidas de atividades resolvidas e posteriormente atividades propostas. Os avaliadores salientam que existe uma grande quantidade de atividades desafiadoras, que exigem diferentes estratégias para suas resoluções. Para o desenvolvimento de algumas atividades existem sugestões para o uso da calculadora, que por sua vez restringem-se a mera apresentação das funcionalidades de suas teclas.

Em termos da contextualização da obra, as conexões com práticas sociais e outras áreas da Ciência são consideradas pertinentes pelos avaliadores. No que diz respeito ao uso da história da Matemática o PNLD ressalta que existe uma limitação em torno do relato de eventos, sem uma adequação específica para a compreensão de conceitos atuais.

3.4 ANÁLISE DA COLEÇÃO 2 (C2)

Na Coleção 2, também, para a análise dos volumes, foram selecionadas as atividades propostas em cada capítulo, em específico as atividades relacionadas ao conceito de função.

No volume do 1º Ano, foram analisados os capítulos 2, 3, 4, 5 e 6 que abordam, respectivamente, funções, função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica. As atividades analisadas no volume do 2º Ano compreendem o conteúdo de funções trigonométricas, o qual é abordado no capítulo 1.

De maneira similar a análise da C1, as atividades foram tabeladas a partir das categorias expostas no Referencial Teórico.

Os Quadros 5 e 6 apresentam os dados quantitativos referentes a seleção das atividades da Coleção 2.

Quadro 5: Capítulos analisados: Volume 1 – C2

Cap.	Título	Total Exercícios Capítulo	Total Exercícios Categorizados
2	Funções	79	11
3	Função Afim	65	23
4	Função Quadrática	88	15
5	Função Exponencial	83	9
6	Função Logarítmica	73	5

Quadro 6: Capítulo analisado: Volume 2 – C2

Cap.	Título	Total Exercícios Capítulo	Total Exercícios Categorizados
1	Funções Trigonométricas	80	9

No Volume 1, foram selecionados 63 atividades, o que equivale a 16,2% do total de atividades dos capítulos analisados e 8,4% do total de atividades do volume. Das 63 atividades, 17,47% estão no Capítulo 2, 36,51% no Capítulo 3, 23,80% no Capítulo 4, 14,28% no Capítulo 5 e 7,93% no Capítulo 6.

No Volume 2, foram selecionadas 9 atividades, que equivalem a 11,25% do total de atividades do Capítulo 1 e 1,4% do total de atividades do volume.

A atividade 3 (Figura 9) do Capítulo 2 exemplifica umas das situações propostas pelo autor.

Figura 9: Atividade Capítulo 2 Volume 1 – C2

3. Uma locadora de automóveis anuncia uma promoção de aluguel de veículos na qual o locatário deve pagar uma taxa fixa de R$ 39,90 mais uma quantia proporcional à quantidade *d* de quilômetros rodados. Nessa promoção, para calcular a quantia *Q* a ser paga pelo aluguel de um veículo, utiliza-se a fórmula $Q = 39{,}90 + 0{,}46d$.

a) Na fórmula $Q = 39{,}90 + 0{,}46d$, qual é a variável dependente? E a independente?

b) Nessa locadora, qual o preço por quilômetro rodado?

c) Quanto pagará uma pessoa que alugar um veículo e percorrer 230 km?

d) Se um cliente pagou R$ 223,90 pelo aluguel de um veículo, quantos quilômetros ele percorreu com esse veículo?

Fonte: Souza (2013, p.50)

A situação acima elucida uma atividade envolvendo uma função afim em uma situação contextualizada. Os questionamentos propostos permitem que os estudantes generalizem a relação de dependência entre as variáveis envolvidas observando a regularidade da função. Intuitivamente é possível perceber que conforme os quilômetros rodados aumentam, em uma unidade, o valor total a ser pago aumenta sempre em 0,46 (taxa média de variação).

O Capítulo 3 que apresenta o maior número de atividades selecionadas trata sobre o conteúdo função afim. A Figura 10 apresenta uma das atividades deste capítulo, que solicita a identificação da constante de proporcionalidade. Esta atividade exige que o estudante generalizar a relação entre as variáveis.

Figura 10: Atividade Capítulo 3 Volume 1 – C2

37. A colheita mecanizada da cana-de-açúcar é hoje uma realidade. Além do alto rendimento, uma das principais vantagens dessa prática é dispensar a queima da cana, evitando assim a emissão de CO_2 na atmosfera. Um modelo de colheitadeira é capaz de cortar, em 8h, cerca de 136 t de cana-de-açúcar.

a) Quantas toneladas de cana-de-açúcar uma colheitadeira corta em 1h de trabalho?

b) A relação entre as horas de trabalho da colheitadeira e a quantidade de cana-de-açúcar cortada é diretamente proporcional? Justifique.

c) Calcule a constante de proporcionalidade entre as grandezas horas de trabalho da colheitadeira e a quantidade de cana-de-açúcar cortada.

Fonte: Souza (2013, p.105)

A constante de proporcionalidade tratada nesta situação está associada a taxa de variação da função linear trabalhada no exemplo. A relação da taxa de variação com o conceito de proporcionalidade é destacado por Ávila (2006) como uma das possibilidades de iniciar o estudo de função e depois abordar o conceito de derivada. Diferente da C1, os capítulos de função e função afim não apresentam tópicos específicos que abordam o conceito de taxa média de variação. Algumas atividades, também, apresentam de forma implícita este conceito como exemplifica a Figura 11.

Figura 11: Atividade Capítulo 3 Volume 1 – C2

59. Um automóvel movimenta-se com velocidade constante em uma estrada. Abaixo é possível observar sua posição em determinados instantes.

Tempo (h)	0	3	5	7
Posição (km)	20	290	470	650

a) Qual é a velocidade média do automóvel?

b) Escreva uma função que relacione a posição *S* com o tempo *t* em que o automóvel se movimenta.

c) Após 10h, qual é a posição ocupada pelo automóvel nessa estrada?

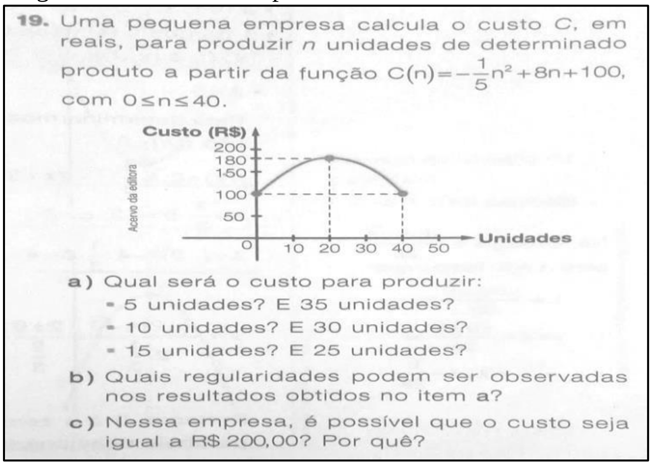
d) Construa um gráfico que relacione a posição do automóvel na estrada em função do tempo.

Fonte: Souza (2013, p.113)

A partir de conjecturas realizadas, acerca do registro tabular, o estudante deve generalizar a situação para qualquer valor de t observando a regularidade do deslocamento do automóvel, para que então valide a lei de formação da função. Nesta situação também é solicitada a construção do gráfico da função, o que permite a visualização do seu comportamento, que nesse caso se da por uma função afim.

As funções quadráticas, abordadas no capítulo, tratam o conceito de taxa de variação de maneira implícita. Nenhuma das atividades solicita em seu enunciado que seja definido o valor da taxa média de variação de determinada situação. A Figura 12 elucida uma situação envolvendo o trabalho intuitivo da noção de variação, relacionada a função quadrática.

Figura 12: Atividade Capítulo 4 Volume 1 – C2



19. Uma pequena empresa calcula o custo C, em reais, para produzir n unidades de determinado produto a partir da função $C(n) = -\frac{1}{5}n^2 + 8n + 100$, com $0 \leq n \leq 40$.

a) Qual será o custo para produzir:
- 5 unidades? E 35 unidades?
- 10 unidades? E 30 unidades?
- 15 unidades? E 25 unidades?

b) Quais regularidades podem ser observadas nos resultados obtidos no item **a**?

c) Nessa empresa, é possível que o custo seja igual a R$ 200,00? Por quê?

Fonte: Souza (2013, p.123)

Destaca-se a abordagem gráfica da situação, pois facilita a visualização da variação da função em determinados intervalos. Apesar da simetria do gráfico, é possível perceber que em determinados intervalos a taxa de variação será positiva e em outros negativa. Nesta atividade, apesar de ser possível obter os resultados substituindo o número de unidades diretamente na lei de formação dada, também é possível trabalhar as ideias de variação com o auxílio da representação gráfica, o que permite a obtenção de soluções aproximadas que podem ser comparadas com as respostas já obtidas. Reitera-se aqui a concepção de Ávila (2006) que sugere que os conceitos de geometria analítica sejam conectados ao conceito de função porque permite abordar o conceito de reta tangente e relacioná-la com a taxa de variação, o que facilitaria a análise do gráfico exposto na Figura 12.

Assim como a função quadrática a função exponencial não possui taxa de variação constante para diferentes intervalos de observação. Das atividades do Capítulo 5, relacionadas a função exponencial, selecionou-se um exemplo apresentado na Figura 13.

Figura 13: Atividade Capítulo 5 Volume 1 – C2

30. Certo banco oferece um investimento que rende uma taxa de 6% ao ano de juros compostos. Observe a simulação de um investimento de R$ 1500,00 em um período de três anos.

Ano (n)	Juro (J)	Montante (M)
1	$1\,500{,}00 \cdot 0{,}06 = 90{,}00$	$1\,500{,}00 + 90{,}00 = 1\,590{,}00$
2	$1\,590{,}00 \cdot 0{,}06 = 95{,}40$	$1\,590{,}00 + 95{,}40 = 1\,685{,}40$
3	$1\,685{,}40 \cdot 0{,}06 = 101{,}12$	$1\,685{,}40 + 101{,}12 = 1\,786{,}52$

a) Qual das funções a seguir determina o montante M obtido ao final do ano n, ao se investir R$ 1500,00?

- $M = 1500(6)^n$
- $M = 1500(1{,}06)^n$
- $M = 1500 + 6^n$
- $M = 1500 + (1{,}06)^n$

b) Qual será o montante ao final de 4 anos? E de 6 anos?

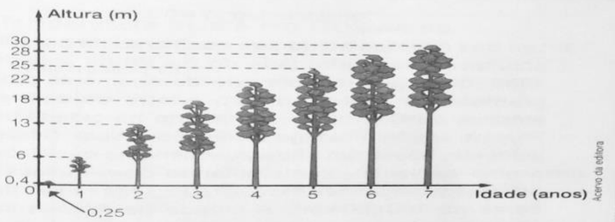
Fonte: Souza (2013, p.123)

A partir da representação tabular o estudante deverá realizar conjecturas que o levem a generalizar a situação para diferentes valores de n, em seguida, validar uma das leis de formação sugeridas no questionamento a. Ao trabalhar com a representação tabular o estudante pode observar que a taxa de variação é diferente para intervalos distintos, o que poderia ser potencializado com a representação gráfica, pois possibilitaria a visualização do comportamento da função exponencial que, por exemplo, difere do comportamento da função afim.

Do Capítulo 6, destinado ao trabalho do conceito de função logarítmica, poucas atividades foram categorizadas. A Figura 14 é um exemplo de atividade selecionada no capítulo.

Figura 14: Atividade Capítulo 6 Volume 1 – C2

64. Os eucaliptos, árvores originárias da Austrália e Indonésia, possuem mais de 600 espécies, sendo que algumas delas são utilizadas em reflorestamento para fins comerciais. Esses eucaliptos, que podem atingir 100 anos de idade, geralmente têm um ciclo rápido de 6 a 7 anos para a produção de celulose e carvão, e de 12 a 16 anos para serem comercializados como madeira sólida. Observe o desenvolvimento de certa espécie de eucaliptos, destinada à produção de celulose.



a) Sabendo que o crescimento dessa espécie pode ser descrito por uma função do tipo $f(x) = c + \log_a x$, com $c > 0$, então o valor de a é maior do que 1 ou está entre 0 e 1? Por quê?

b) Qual é a importância de algumas empresas explorarem apenas madeira de reflorestamento?

Fonte: Souza (2013, p.123)

Esta situação exige que o estudante perceba que o valor de a é maior que 1 pois se trata de uma função crescente, bem como, permite que o conceito de crescimento/decrescimento de funções, relacionado diretamente a taxa de variação, seja retomado. A abordagem gráfica facilita a visualização do fenômeno, inclusive em relação a variação da função.

Desta coleção, no volume 2 foi analisado o capítulo que aborda funções trigonométricas. Várias situações apresentam a noção intuitiva de variação, e a Figura 15 exemplifica uma delas.

Figura 15: Atividade Capítulo 1 Volume 2 – C2

80. O professor de Matemática pediu a um grupo de alunos que fizesse um controle da quantidade de visitantes na feira de Ciências do colégio e, após a primeira semana de feira, construísse uma função que fornecesse uma estimativa da quantidade de visitantes em função da hora do dia. Após a primeira semana, os alunos apresentaram a seguinte função:

$$P(t) = 80 - 80\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

Nessa função, t representava a hora do dia, e $P(t)$ representava a quantidade aproximada de visitantes, no tempo t. Sabendo que a feira de Ciências ficava aberta das 8 às 20 horas e considerando a função P, responda:

a) Qual foi a quantidade estimada de visitantes na feira às 10 horas em cada dia?

b) Em qual hora do dia a quantidade de visitantes na feira foi a maior? Qual foi essa quantidade?

c) Qual é o período da função P?

d) Esboce o gráfico da função P para $8 \leq t \leq 20$.

Fonte: Souza (2013, p.43)

A atividade 80 (Figura 15) apresenta a relação de dependência existente entre o número de visitantes e o tempo. A variação da função será distinta conforme o intervalo de tempo, possibilitando que o estudante realize conjecturas e experimente as possibilidades de se obter o número aproximado de visitantes utilizando a taxa média de variação, e que irá conduzi-lo a perceber que a taxa de variação depende do intervalo de tempo escolhido, o que é pertinente para determinar os momentos em que houve o maior fluxo de visitantes, por exemplo. A conversão do registro algébrico para o gráfico é um ponto positivo desta atividade, entretanto, o sentido inverso não é proposto.

No que se refere as transformações dos registros de representações, os quadros abaixo expressam os dados quantitativos.

Quadro 7: Tratamento e Conversão: Volume 1 – C2

Cap.	Título	Total Exercícios Tratamento	Total Exercícios Conversão
2	Funções	7	4
3	Função Afim	0	23
4	Função Quadrática	8	7
5	Função Exponencial	4	5
6	Função Logarítmica	3	2

Quadro 8: Tratamento e Conversão: Volume 2 – C2

Cap.	Título	Total Exercícios Tratamento	Total Exercícios Conversão
1	Funções Trigonométricas	5	4

Constatou-se que, no Capítulo 2, 63,6% das atividades selecionadas exigem o tratamento de registros e 36,4% exigem conversão. No Capítulo 3, 100% das atividades selecionadas exigem a conversão de registros. No Capítulo 4, 53,4% das atividades exigem o tratamento dos registros e 46,6% exigem conversão. No Capítulo 5, 44,4% das atividades exigem o tratamento e 55,6% exigem conversão. No Capítulo 6, 60% das atividades selecionadas exigem tratamento e 40% exigem conversão. Já no volume 2 das atividades relacionadas, o Capítulo 1 apresenta 55,5% situações que exigem tratamento e 44,5% que exigem conversão. Dos capítulos do volume 1, o registro da língua natural é o mais utilizado, presente em 46% das atividades tabeladas. Já no volume 2, 100% das atividades selecionadas estão elaboradas com base no registro algébrico. As variáveis contínuas representam 76,1% do total de atividades, dos volumes 1 e 2.

Em relação aos sentidos das conversões, observa-se, no volume 1, que: no Capítulo 2, 75% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e 25% compreendem a conversão do registro tabular para o registro algébrico e no Capítulo 3, 70,4% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, 14,8% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, 7,3% compreendem a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, 3,7% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro gráfico e 3,7% compreendem a conversão do registro tabular para o registro algébrico.

No Capítulo 4, 50% das atividades compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, 25% compreendem a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, 12,5% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico e 12,5% compreendem a conversão do registro tabular para o registro algébrico; no Capítulo 5, 40% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, 20% compreendem a conversão do registro tabular para o registro algébrico, 20% compreendem a conversão do registro gráfico para o registro algébrico e 20% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico; no Capítulo 6, 50% compreendem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico e 50% compreendem a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico. Já no volume 2, no Capítulo 1, todas as atividades categorizadas envolvem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Nesta obra não foram identificadas situações que propusessem conversões de registros (mais de um sentido), em uma mesma atividade. Cabe destacar, ainda, que o registro tabular é utilizado como registro intermediário em algumas atividades que solicitam construções de gráficos. No que se refere aos tratamentos envolvidos, 88,9% do total das atividades selecionadas trabalham com o registro algébrico.

3.5. COMPARAÇÃO DAS OBRAS

No que se refere às semelhanças e diferenças das obras, observou-se que C1 apresenta dois tópicos que abordam o conceito de taxa média de variação, um no Capítulo 3 e outro no Capítulo 4, já C2 não aborda explicitamente o conceito em nenhum de seus capítulos.

Em relação à nomenclatura, C1 utiliza o termo exercícios e C2 utiliza o termo atividades para designar as situações propostas. A abordagem dos conteúdos realizada em C1 apresenta um maior rigor matemático e um menor número de situações contextualizadas em relação a C2.

Nos capítulos que abordam o conceito de função trigonométrica é notória a diferença em relação as abordagens das obras. C2 apresenta um maior número de situações que exigem os processos de generalização e em C1, existe uma ênfase em técnicas e procedimentos algorítmicos.

Apesar de nenhum dos livros fazer referência ao uso de softwares, limitando-se apenas ao uso da calculadora como ferramenta, um fator a ser destacado é a disponibilidade de livros digitais da obra do autor Joamir Souza.

Constatou-se que o espaço e tempo dedicado a taxa de variação é similar nas duas obras, nos volumes 1 de C1 e C2 as atividades representam 6,9% e 8,4%, respectivamente, dos totais de atividades de cada livro. No volume 2 de C2, em que foi analisado o capítulo especifico de funções trigonométricas, as atividades selecionadas representam 1,4% do total de atividades do livro. Cabe ressaltar que no volume 2 de C1 nenhuma atividade foi tabelada por não se enquadrar nos critérios de análise.

As conversões de registros de representação ocorrem de maneira semelhante nas duas obras. Ambas sugerem conversões entre diferentes registros, em diferentes situações, porém os sentidos das conversões são sempre os mesmos. Em relação aos tratamentos trabalhados, o registro algébrico é predominante nas duas coleções, representando 90,8% em C1 e 88,9% em C2.

De maneira geral as duas coleções apresentam situações contextualizadas, muitas vezes relacionadas a outras áreas da ciência, que possibilitam o desenvolvimento dos processos de abstração e representação.

Entende-se que os processos do pensamento matemático avançado (abstração e representação) seriam potencializados se as obras articulam-se o conceito de taxa de variação com os conceitos de geometria analítica, em especial, reta tangente a uma curva, e apresentassem a conceito de derivada.

O capítulo seguinte apresenta algumas considerações pertinentes à análise das coleções de livros didáticos bem como, possibilidades de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Devido a importância de se compreender como é feita a abordagem de conteúdos matemáticos na Educação Básica, este trabalho foi realizado com o objetivo de verificar de que forma o conceito de taxa de variação é apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio de três escolas da rede estadual do município de Itaqui, sob uma perspectiva do Pensamento Matemático Avançado. Para isso, foram selecionadas duas coleções, ambas aprovadas pelo PNLD 2015, e as atividades dos capítulos específicos de funções foram categorizadas e analisadas. Ressalta-se que duas escolas utilizam a mesma coleção.

Para tentar responder a questão de pesquisa buscou-se fundamentação teórica nas ideias de alguns autores, Tall (1991), Dreyfus (1991), Gray (1999), Ávila (1991, 2006) Duval (1993, 2003), e optou-se por uma metodologia de cunho qualitativo, de forma que os dados foram analisados por meio do procedimento denominado Análise de Conteúdo. Na análise das coleções foram feitas suas respectivas apresentações (pré-análise) com base no PNLD 2015 e posteriormente foram realizadas as análises das atividades selecionadas.

A abordagem do conceito de função das obras é considerada positiva, pois ambas as coleções apresentam atividades contextualizadas. Relações com outras áreas da ciência também foram evidenciadas em algumas atividades, com destaque para C2 que apresenta bons exemplos, inclusive, no trabalho com funções trigonométricas, visto que no estudo destas funções, geralmente, o contexto escolhido é da própria matemática.

Foi possível observar que C1 apresenta dois tópicos específicos sobre taxa média de variação de uma função. Já C2 trabalha apenas implicitamente este conceito, o que pode dificultar a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. As variáveis contínuas são as mais trabalhadas nas obras, representando 79,1% das situações em C1 e 76,4% em C2.

Nas atividades analisadas foi possível evidenciar alguns processos do Pensamento Matemático Avançado. Várias situações exigem que o estudante as generalize para obter as leis de formação de determinadas funções. No entanto, destaca-se que esses processos poderiam ser melhor explorados se as articulações entre os conceitos de função e geometria analítica fossem propostas, já no volume do 1º Ano, e o conceito de derivada, mesmo que de forma intuitiva, fosse abordado.

Outro fator relevante diz respeito às representações, as duas obras trabalham com registros diferentes no decorrer de suas atividades, o que é fundamental para que o estudante não confunda o objeto matemático com sua representação. As conversões ocorrem em diferentes registros de representações, entretanto, no que se refere aos sentidos das conversões não muitas variações. Em relação aos tratamentos, observou-se uma ênfase no tratamento algébrico, tanto para C1 quanto para C2.

No que diz respeito ao espaço e tempo dedicado ao conceito, constatou-se que os capítulos destinados ao conceito função afim apresentaram o maior percentual de atividades selecionadas, 35,4% em C1 e 36,51% em C2, fato esse que evidencia uma maior ênfase na taxa de variação constante. Em termos gerais, as atividades selecionadas nos capítulos dos volumes 1, de C1 e C2, representam 6,9% e 8,4% do total de atividades. Nos volumes 2 de cada coleção os índices são ainda menores. Em C2 as atividades selecionadas representam 1,4% do total de atividades e em C1 nenhuma atividade foi categorizada.

Como trabalhos futuros sugere-se analisar como é feita a abordagem do conceito de taxa de variação nas obras utilizadas no Ensino Superior, pois este conceito está diretamente relacionado às disciplinas de Cálculo, as quais apresentam altos índices de reprovações; e verificar como os professores abordam em sala de aula os conceitos de função, em especial o conceito variação. Desta forma é pertinente buscar compreender as relações existentes entre esses dois níveis de ensino, de forma que a transição dos estudantes seja menos problemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática,** n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

______ Limites e Derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática,** n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edição 70, 1977.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: USP. 1999. 184 f. Tese. (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo.

BICUDO, M. A. V. **A Pesquisa em Educação Matemática**: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, p.15-26, 2012.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática**. Blumenau: Editora da Furb, 2004.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Taxa de Variação: Como Professores em Formação Continuada Compreendem o Conceito. **In:** VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM: Pirenópolis, GO, Brasil, **Anais...** 2015.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos** - PNLD 2015 (Matemática: Ensino Médio). Brasília: MEC/SEB, 2014. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/index.php>. Acesso em: 12/09/2015

______ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, 2002.

______ Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria da Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2006.

______ Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DUVAL, R. Registres de représention sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. **IREM de Strasbourg**, vol V, p.37-65, 1993.

______ Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. IN: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 11-33, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (org.), Advanced Mathematical Thinking. **Dordrecht: Kluwer**, pp. 25-41, 1991.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. (Série Educação a Distância).

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. Educational Studies in Mathematics, 38, 111-133, 1999.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciências e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 1 e 2.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do Saber**. Manual de metodologia de pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre. Editora Artmed. Belo Horizonte: Editora UFMG,1999. Reimpressão. 2008

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua "forma" de pensar a Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n.3, p. 590-605, 2013.

MARIANI, R. C. P. **Transição da educação básica para o ensino superior**: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo. São Paulo: PUC. 2006. Tese. (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. **Transição do Ensino Médio para o Superior:** como minimizar as dificuldades em cálculo? Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

PALHARINI, B. N. Modelagem Matemática e Pensamento Avançado: Um Estudo à Luz dos Três Mundos da Matemática. In: XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM. Educação matemática: possibilidades de interlocução. Rio Claro/SP, **Anais...** 2008.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **A Álgebra no Ensino Básico**. Portugal: Ministério da Educação-BGIdc, 2009.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. São Paulo: FE-USP. 2003. 450 f Tese. (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Educação Universidade de São Paulo.

SOUZA, J. R. **Novo olhar**: matemática. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 1 e 2.

STEWART, J. **Cálculo**. v. I, 5. ed. São Paulo:Pioneira/Thomson Learning, 2005.

TALL, D. O. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL. D. O. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991.