UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CAMPUS ITAQUI-RS
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

DIENIFER DA LUZ FERNER

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

ITAQUI-RS
2016

DIENIFER DA LUZ FERNER

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para conclusão do Curso de Matemática - Licenciatura pela Unipampa - Campus Itaqui-RS.

Orientador(a): Prof. Ma Maria Arlita da Silveira Soares
Coorientador: Prof. Me Leugim Corteze Romio

ITAQUI-RS

2016

DIENIFER DA LUZ FERNER

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para conclusão do Curso de Matemática - Licenciatura pela Unipampa - Campus de Itaqui-RS.

Aprovada em _____ de __________ de _______

BANCA EXAMINADORA

____

Maria Arlita da Silveira Soares (orientador) – Unipampa – Campus Itaqui

____

Rita de Cássia Pistóia Mariani - Universidade Federal de Santa Maria- UFSM

____

Renata da Silva Dessbesel - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por sempre apresentar caminhos que nos levam a continuar.

A minha família, por incansáveis incentivos e apoios, por vibrarem com minhas conquistas, pela força, confiança e pelas palavras de carinho. Um especial agradecimento a pessoa que sempre esteve comigo, João Paulo, pela compreensão quanto à minha ausência e que com muita paciência e amor, me ajudou a concluir esta etapa.

Aos meus orientadores, Prof. Ma Maria Arlita da Silveira Soares e Prof. Me Leugim Corteze Romio, que mesmo com inúmeras atividades estavam sempre dispostos a ajudar. Obrigada pela dedicação, valiosas orientações, paciência e compreensão das minhas limitações, acreditando que elas poderiam ser aprimoradas.

Aos meus colegas de curso, que por vezes me incentivaram e alegraram-se a cada conquista que de alguma maneira tivemos juntos. Pelas trocas de ideias, ajudas, confraternizações, o clima amigável e tantos conselhos trocados.

Por fim, a todas pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, com o desenvolvimento desta pesquisa.

Muito obrigada!

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo analisar se e como são abordados os elementos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico nas propostas do currículo planejado. Para tanto, busca fundamentação teórica no modelo de Van Hiele, o qual apresenta explicações sobre a ruptura entre o ensino da Geometria e sua compreensão, e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval que destaca as especificidades da aprendizagem matemática, em particular, no que tange a importância das representações semióticas nas atividades deste campo do conhecimento. A pesquisa adota os pressupostos de uma pesquisa qualitativa, tendo como tipo a análise documental e os dados foram analisados conforme os princípios da Análise de Conteúdo. As fontes de produção de dados são duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovadas pelo PNLD/2015, nas quais o foco de análise foi o ensino da Geometria Espacial, considerando categorias de análise elaboradas. A análise permitiu concluir que, há elementos importantes do desenvolvimento do pensamento geométrico abordados nas coleções de livros didáticos, a saber: os níveis *Visualização* e *Análise*, propostos no modelo de Van Hiele, a transformação cognitiva conversão, destacada por Duval, bem como a verificação, função da demonstração, apresentada por Michael de Villiers. No entanto, as coleções não apresentam outros recursos didáticos para o estudo dos conceitos/conteúdos de Geometria Espacial, principalmente os softwares de Matemática Dinâmica.

Palavras-Chave: Pensamento geométrico; Geometria Espacial; Livro Didático; Modelo de Van Hiele; Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This research aims to examine if and how they are addressed the key elements for the development of geometric thinking in the proposals of the planned curriculum. Therefore, it seeks theoretical foundation in the Van Hiele model, which provides explanations of the break between the teaching of geometry and understanding, and the Theory of Semiotics Representation Registers Duval highlighting the specificities of learning mathematics, in particular, respect the importance of semiotic representations in the activities of this field of knowledge. The survey adopts the assumptions of a qualitative research, with the type document analysis and data were analyzed according to the principles of Content Analysis. The production data sources are two collections of textbooks for high school math approved by PNLD/2015, in which the focus of analysis was the teaching of spatial geometry considering elaborate analysis categories. The analysis concluded that there are important elements of development of geometric thought addressed in the collections of textbooks, namely the visualization and analysis levels proposed in the Van Hiele model, cognitive processing conversion, highlighted by Duval and verification, due to the demonstration by Michael de Villiers. However , the collections have no other teaching resources for the study of the concepts/spatial geometry content, especially Dynamic mathematics software.

Keywords: geometric thought; Space geometry; Textbook; Van Hiele model; Semiotics Representation Registers.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Organização por objetivos dos artigos 18
Gráfico 2: Organização por palavras-chave dos artigos 19
Gráfico 3: Organização por participantes dos artigos 20
Gráfico 4: Organização por fontes utilizadas 20
Gráfico 5: Organização por conteúdos matemáticos abordados no artigo 21
Gráfico 6: Organização por menções de teóricos/pesquisadores por área de pesquisa 22

LISTA DE QUADROS

Quadro1: Distribuição de artigos por periódico 17
Quadro 2: Níveis de Van Hiele 27
Quadro 3: Categorias de análise 35
Quadro 4: Indicadores dos Livros Didáticos 36
Quadro 5: Avaliação do manual do professor 38
Quadro 6: Contextos apresentados nas atividades da C1 40
Quadro 7: Níveis de Van Hiele apresentados nas atividades da C1 43
Quadro 8: Atividades envolvendo seção definida por um plano em um paralelepípedo 43
Quadro 9: Transformações cognitivas exploradas no volume 3 da C1 46
Quadro 10: Contextos apresentados nas atividades da C2 53
Quadro 11: Níveis de Van Hiele apresentados nas atividades da C2 55
Quadro 12: Transformações cognitivas exploradas no volume 3 da C2 57
Quadro 13: Teses e Dissertações mapeadas 73
Quadro 14: Revistas na área da Educação Matemática mapeadas 75
Quadro 15: Endereço das Revistas da área de Educação Matemática 76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Organização por ano de publicação dos artigos 18

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Currículo como processo 14
Figura 2: Atividade que envolve o nível da Visualização 23
Figura 3: Pensamento Geométrico no RC/RS (2009) 25
Figura 4: Classificação dos tipos de registros semióticos 31
Figura 5: Gráfico que representa a distribuição dos conteúdos nos volumes analisados da C1 35
Figura 6: Gráfico que representa a distribuição dos conteúdos nos volumes analisados da C2 36
Figura 7: Apresentação do capítulo Poliedros 37
Figura 8: Apresentação do capítulo Esfera 37
Figura 9: Atividade com contexto da própria matemática na C1 41
Figura 10: Atividade com contexto cotidiano apenas ilustrativo na C1 41
Figura 11: Atividade com contexto relacionado a outras áreas do conhecimento C1 42
Figura 12: Atividade categorizada no nível Visualização na C1 43
Figura 13: Seção definida por um plano α em um paralelepípedo 44
Figura 14: Atividade categorizada no nível Dedução Informal na C1 45
Figura 15: Atividade que requer conversão na C1 45
Figura 16: Atividade que requer o registro geométrico como intermediário na C1 46
Figura 17: Atividade envolvendo conversão de registros na C1 47
Figura 18: Atividade que exige construção geométrica na C1 47
Figura 19: Atividade que exige tratamento geométrico na C1 48
Figura 20: Atividade que exige apenas aplicação de fórmula na C1 48
Figura 21: Atividade cujo objetivo é “mostrar” na C1 49
Figura 22: Demonstração – volume de uma pirâmide na C1 50
Figura 23: Demonstração – área da superfície de um tronco de cone reto na C1 51
Figura 24: Atividade complementar com contexto relacionado a outras áreas do conhecimento na C1 51
Figura 25: Atividade complementar categorizada no nível Análise na C1 52
Figura 26: Atividade complementar que exige conversão na C1 52
Figura 27: Atividade do contexto da própria matemática C2 54
Figura 28: Atividade do contexto cotidiano C2 54
Figura 29: Atividade que envolve outra área do conhecimento C2 55
Figura 30: Atividade do nível de Análise na C2 56
Figura 31: Atividade do nível Visualização C2 56
Figura 32: Atividade que exige conversão C2 57
Figura 33: Atividade que envolve volume C2 58
Figura 34: Atividade que envolve apenas volume na C2 58
Figura 35: Atividade envolvendo registro tabular na C2 59
Figura 36: Atividade envolvendo razão entre áreas na C2 59
Figura 37: Atividade que exige tratamento na C2 60
Figura 38: Demonstração – volume do tronco de cone na C2 61
Figura 39: Demonstração – área total do paralelepípedo na C2 61
Figura 40: Demonstração – Teorema na C2 62

SUMÁRIO

PROBLEMATIZAÇÃO 12

CAPÍTULO 1: GEOMETRIA ESPACIAL: ASPECTOS RELACIONADOS AO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM 17
1.1 MAPEAMENTO DE PEQUISAS BRASILEIRAS ACERCA DA GEOMETRIA ESPACIAL 17
1.2 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA ESPACIAL 24

CAPÍTULO 2: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 34
2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS 34
2.2 ORGANIZAÇÃO DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS ANALISADAS SOB A ÓTICA DO PNLD 35

CAPÍTULO 3: ANÁLISE DOS DADOS 40
3.1 A ANÁLISE DA COLEÇÃO 1 40
3.2 A ANÁLISE DA COLEÇÃO 2 53

CAPÍTULO 4: CONSIDERAÇÕES FINAIS 63
4.1 RESPONDENDO AS QUESTÕES DE PESQUISA 63

REFERÊNCIAS 68

APÊNDICES 71
APÊNDICE A 72

PROBLEMATIZAÇÃO

A Geometria está presente nas formas naturais e construídas, sendo fundamental "à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços" (BRASIL, 2002, p.123). Este campo da Matemática possibilita ao estudante resolver uma diversidade de problemas oriundos das práticas sociais, outras áreas do conhecimento e da própria matemática, por exemplo, problemas de otimização[1]. Entende-se que o conhecimento geométrico contribui no desenvolvimento de várias capacidades cognitivas superiores, em especial, localizar-se no tempo e no espaço, raciocinar logicamente, generalizar e abstrair.

Almouloud et al. (2004) afirma que, mesmo os professores verificando a importância que a Geometria possui em todos os níveis de ensino, constata-se uma contradição quando se analisa a organização dos conteúdos selecionados para serem ensinados. Em outras palavras, ainda que os professores mencionem a importância do ensino da Geometria, quando a seleção e organização dos conteúdos são analisadas, estas apresentam poucos ou não apresentam tópicos relacionados à Geometria.

Para Pires, Curi e Campos. (2012, p. 11) a

> [...] necessidade de resgatar o ensino de Geometria nas escolas passou a ser um dos destaques em diferentes propostas curriculares e artigos sobre o assunto. Chama-se atenção para a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico, de tanta relevância para o aluno como o pensamento aritmético ou algébrico.

Percebe-se que o número de pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria, aumentou consideravelmente nos últimos 10 anos, conforme dados do mapeamento elaborado para esta pesquisa (Apêndice A). Para a elaboração deste mapeamento, buscou-se as produções que apresentam no título os seguintes descritores: *Geometria Espacial, pensamento geométrico e volume*[2]. Foram mapeados alguns periódicos da área da Educação Matemática (GEPEM, Revista da PUC/SP, Revemat, Bolema, Em Teia, SBEM), cujos artigos estão disponíveis para acesso *online*.

Os dados do mapeamento indicam que há 6 produções envolvendo os descritores selecionados nas revistas e 10 nos programas de Pós-Graduação. Por exemplo, as pesquisas de Pietropaolo (2005), Machado (2010), Carvalho (2008) e Luna (2009) destacam o ensino de Geometria Espacial, pensamento geométrico e volume de sólidos. Dentre as pesquisas

---

[1] Criação de condições mais favoráveis para o desenvolvimento de algo.

[2] O ensino deste conteúdo/conceito contempla, geralmente, fórmulas/argumentação/demonstração, questões importantes para esta pesquisa.

mapeadas constatou-se que apenas três utilizam o modelo de Van Hiele e uma utiliza a teoria dos Registros de Representação Semiótica como aportes teóricos.

A análise do mapeamento auxiliou na escolha pelo modelo de Van Hiele e pela teoria dos Registros de Representação Semiótica como base teórica para o entendimento dos conceitos geométricos, em particular, conceitos relacionados a Geometria Espacial. Os dados produzidos no mapeamento são detalhados no Capítulo 1, Seção 1.1.

O modelo de Van Hiele foi elaborado pelo casal Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele em seus trabalhos de doutorado, publicados em 1957, que tiveram como intuito entender e obter explicação sobre a ruptura entre o ensino da Geometria e sua compreensão. Para descrever as características do processo de pensamento geométrico foram elaborados cinco níveis: *Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução Formal* e *Rigor*. Já a teoria dos Registros de Representação Semiótica foi elaborada por Duval, psicólogo francês, com objetivo de compreender as especificidades relacionadas à aprendizagem matemática, em particular, no que tange a importância das representações semióticas nas atividades deste campo do conhecimento. Os pressupostos teóricos do modelo de Van Hiele e dos Registros de Representação Semiótica são detalhados no Capítulo 1, Seção 1.2.

Ainda, em relação ao ensino da Geometria, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+) ressaltam que:

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática (BRASIL, 2002, p.124).

Percebe-se que as orientações curriculares sugerem aos professores um trabalho que contribua no desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e da linguagem matemática e suas especificidades (objeto matemático só é acessado por meio de representações semióticas). Assim, é preciso rever o processo de ensino, em particular, o da Geometria no que se refere ao trabalho centrado na memorização de fórmulas, dificultando a atribuição de significado aos conceitos envolvidos nas situações-problema.

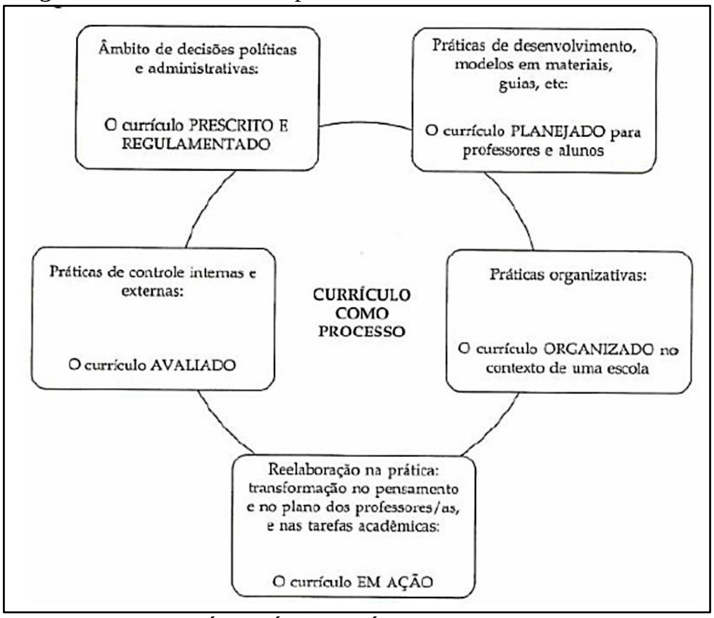
Os conceitos geométricos estão organizados, nos currículos, em: Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica. A Geometria Espacial, foco desta investigação, estuda o espaço. Em outras palavras, estuda as figuras que possuem mais de duas dimensões, estas recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais. Segundo Costa, Bermejo e Moraes (2009 apud MACHADO, 2010, p.28) "o estudo da Geometria Espacial é de suma importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano, estimar e comparar resultados, reconhecer propriedades das formas geométricas".

Ao mencionar a organização dos conceitos geométricos nos currículos, torna-se relevante apresentar o que entende-se por currículo. Para tanto, busca-se nas concepções de Sacristán (2000 apud LIMA, 2014, p.17) respaldo para conceituar currículo. Para este pesquisador,

> [...] o currículo é composto por conteúdos e formas, reflete os interesses concretos de um determinado sistema educativo, sistema este que possui um esquema socializador, formativo e cultural, portanto, desvelar e compreender os currículos adotados não somente permite discutir o papel da educação e a qualidade do ensino oferecido como recupera a escola enquanto instituição facilitadora de cultura.

Sacristán (2013) entende o currículo como processo e práxis (Figura 1), ou seja, oriundo da ação e reflexão. O pesquisador descreve cinco fases do currículo, a saber: currículo prescrito (documentos elaborados pelo Ministério da Educação, por exemplo, PCNEM, PCN+, Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e os documentos elaborados pelas Secretárias dos Estados), currículo planejado (materiais que apresentam o currículo ao professor, por exemplo, livros didáticos), currículo organizado (material elaborado pela escola, por exemplo, projeto político pedagógico da escola e planos de ensino), currículo em ação (trabalho realizado pelo professor em sala de aula, por exemplo, planejamento) e currículo avaliado (avaliações de larga escala nos âmbitos internacional, nacional e estadual). Ressalta-se que nestas fases há escolhas semelhantes (por exemplo, perspectivas metodológicas) e diferentes (por exemplo, seleção de conceitos/conteúdos).

Figura 1: Currículo como processo



Fonte: SACRISTÁN; PÉREZ-GÓMES (1998, p. 139)

Na perspectiva de Sacristán (2013), o currículo planejado se apresenta aos professores, principalmente, por meio dos livros didáticos e estes expressam, em partes, o significado e os conteúdos propostos no currículo prescrito. Em outras palavras, o currículo planejado faz uma (re)leitura das propostas do currículo prescrito.

Diante desse contexto, é importante mencionar a participação da autora desta pesquisa no grupo de pesquisa matE²[3] e no PIBID[4]. Nestes espaços-tempos desenvolvem-se: leituras de pesquisas acerca da Educação Matemática; atividades de monitoria e interaulas[5], que permitiram refletir e questionar, em particular, o conteúdo de Geometria Espacial abordado em sala de aula com uma turma de 3° ano do Ensino Médio, acompanhada pela autora, durante o período de um ano, sendo este conteúdo tratado com ênfase em fórmulas e exercícios a serem realizados de forma mecânica. Além disso, o grupo de pesquisa matE² tem dedicado seus estudos a análise de livros didáticos com o propósito de auxiliar os professores a formular critérios para analisar este recurso, considerando e analisando seus limites/lacunas e potencialidades.

Com base nos aspectos teóricos e acadêmicos vivenciados/experienciados pela autora, a presente pesquisa tem por questão: *Como são abordados os elementos fundamentais do pensamento geométrico no currículo planejado?*

Para tanto, o objetivo geral é: *analisar se e como são tratados os elementos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico nas propostas do currículo planejado*. Para alcançar o objetivo geral foram propostos os seguintes objetivos específicos: *identificar quais níveis de Van Hiele são abordados no currículo planejado; investigar qual entendimento de demonstração apresentado pelos autores dos currículos selecionados; verificar como são propostas as transformações de representações semióticas nos materiais selecionados para a produção de dados; e, investigar a utilização de softwares para o ensino dos conceitos geométricos.*

---

[3] Educação e Educação Matemática cujo objetivo é problematizar dimensões subjacentes às temáticas currículo, trabalho docente, políticas públicas, gestão educacional e "formação" de professores.

[4] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

[5] Espaço-tempo de produção do conhecimento no contraturno escolar, o qual estabelece intermediações conceituais dos conteúdos trabalhados na escola e universidade e re/interpreta dimensões de currículo, da formação de professores e de processos de identificação nos contextos sócioeducativos. O termo imprimi a característica interdisciplinar por denotar relações possíveis com outras áreas do conhecimento num espaço-tempo que reconhece diferenças no processo de ensino e aprendizagem. A conotação inerente ao termo interaula não minimiza a produção da “aula formal”, mas indica que um espaço-tempo de estudos e atividades no contraturno escolar pode construir-se de modo significativo e comprometido com a educação, cultura e sociedade. (RELATÓRIO DO PIBID, 2015)

Na tentativa de buscar respostas para a questão de pesquisa e alcançar o objetivo proposto, este trabalho foi organizado em 3 capítulos, antecedidos pela problematização e seguidos pelas considerações finais.

O capítulo 1 apresenta o mapeamento realizado sobre produções brasileiras, as quais destacam conceitos relacionados a Geometria Espacial e também expõe aspectos teóricos relacionados ao desenvolvimento do pensamento geométrico, em especial, o modelo de Van Hiele e a Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval.

No capítulo 2, expõe-se os procedimentos metodológicos da pesquisa, sendo esta de cunho qualitativo na forma de análise documental, utilizando a técnica de análise de conteúdo. Apresenta-se, também, as fontes de produção de dados, como estas estão organizadas e as categorias de análise.

O capítulo 3 destaca a análise das coleções de livros didáticos selecionadas para esta pesquisa, conforme as categorias de análise elaboradas.

Para encerrar, as considerações finais da pesquisa são expostas com intuito de responder a questão de pesquisa e apontar outras questões para estudos posteriores.

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA ESPACIAL: ASPECTOS RELACIONADOS AO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Neste capítulo, são apresentados aspectos sobre o mapeamento de produções brasileiras que destacam conceitos relacionados a Geometria Espacial, o qual auxiliou na definição teórico-metodológica desta pesquisa. Além disso, são expostos entendimentos em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico elaborados por meio da análise do modelo de Van Hiele e da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval.

1.1 MAPEAMENTO DE PEQUISAS BRASILEIRAS ACERCA DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ESPACIAL

Conforme afirmado na problematização foi realizado um mapeamento com intuito de identificar pesquisas brasileiras que destacam conceitos da Geometria Espacial, pois entende-se que mapear os trabalhos pode auxiliar nas revisões de literatura e em novas pesquisas acerca deste conceito. Foram identificados 19 artigos envolvendo os descritores Geometria Espacial, pensamento geométrico e volume. O Quadro 1 apresenta a distribuição dos artigos mapeados em relação aos periódicos.

Quadro 1: Distribuição de artigos por periódico

Revista	*Artigos por revista*
Acta Scientiae – Revista de Ensino de Ciências e Matemática	1
Boletim de Educação Matemática – Bolema	1
Boletim Grupo de Pesquisa em Educação Matemática – GEPEM	5
Educação Matemática Pesquisa	8
Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat	1
Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Rio Grande do Sul	1
Zetetiké – Revista de Educação Matemática	2

Os dados do Quadro 1 indicam que o periódico "Educação Matemática Pesquisa" publicou o maior número de artigos cujos títulos apresentam os descritores desta pesquisa. Talvez este resultado justifique-se pelo incentivo cada vez maior no desenvolvimento de pesquisas que tratam de conteúdos/conceitos abordados na Educação Básica, em particular, nos mestrados profissionalizantes, por exemplo, o mestrado profissionalizante em Educação Matemática da instituição em que o periódico é organizado.

Para as análises realizadas, apresentadas na sequência, recorreu-se a 11 dos 19 artigos mapeados, pois 6 dos 8 artigos, deixados fora da análise, não foi possível o acesso aos seus conteúdos, uma vez que os periódicos não disponibilizavam os artigos das primeiras publicações; 1 refere-se a história, optou-se por não analisá-lo, pois esta pesquisa está mais voltada para os aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem; e 1 foi publicado em dois periódicos com títulos diferentes, mas com mesmo conteúdo.

O período de busca das publicações abrangeu desde 1976 (primeiro artigo identificado) até dezembro de 2015 (Tabela 1).

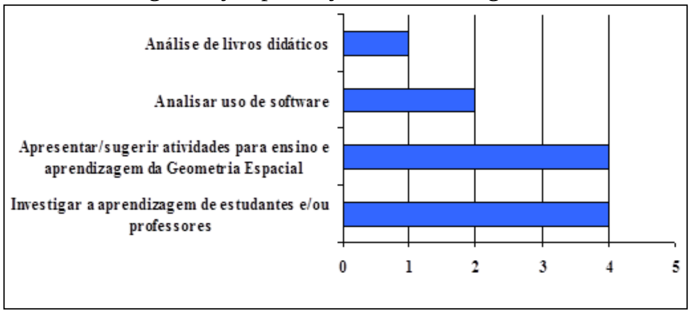
Tabela 1: Organização por ano de publicação dos artigos

Ano	*Número de trabalhos publicados*
1976 – 1995	1
1996 – 2005	2
2006 – 2015	8
Total	11

A partir desses dados (Tabela 1), pode-se perceber o aumento, com o decorrer dos anos, no interesse por pesquisar sobre Geometria Espacial, pensamento geométrico e volume. Talvez porque as propostas curriculares internacionais e nacionais tenham dado ênfase a essa área da Matemática ao proporem a organização dos conceitos/conteúdos em blocos e a conexão entre eles.

Ao analisar os objetivos elencados em cada publicação percebe-se que pertencem a diferentes categorias, sendo estas: investigar a aprendizagem de estudantes e/ou professores; apresentar/sugerir atividades para ensino e aprendizagem da Geometria Espacial; analisar o uso de software; e, analisar livros didáticos. A distribuição das categorias de objetivos são apresentadas no Gráfico 1.

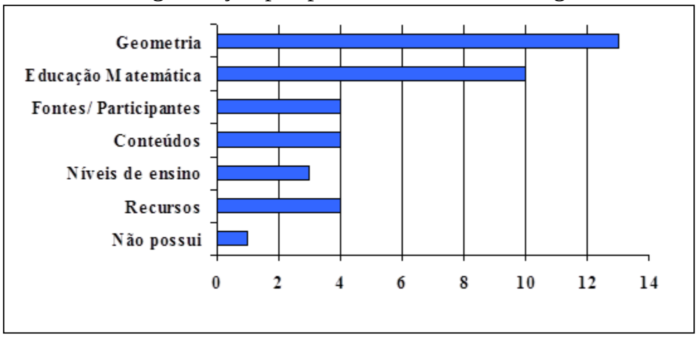
Gráfico 1: Organização por objetivos dos artigos



Com base nos dados apontados acima (Gráfico 1), constata-se maior ênfase dada às atividades relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial e à investigação sobre a aprendizagem de estudantes e/ou professores. Pode-se observar (Gráfico 1) que a análise de livros didáticos está sendo pouco realizada em relação ao tema proposto. Cabe destacar a importância de analisar livros didáticos, pois estes expressam o significado e os conteúdos propostos nos documentos elaborados pelo Ministério da Educação. Os livros didáticos são para os estudantes uma referência aos conhecimentos socialmente relevantes e para os professores, uma fonte auxiliar na elaboração e gestão de suas aulas (SACRISTÁN, 2013).

Em relação a análise das palavras-chave adotadas pelos autores das pesquisas mapeadas, identifica-se um total de 38, apenas um dos artigos não as possuía. Os descritores utilizados no mapeamento constituem 21,1% do total das palavras-chave. Estas são bastante distintas, por este motivo, optou-se por separá-las em categorias (Gráfico 2), a saber: Geometria; Educação Matemática; Fontes/Participantes; Conteúdos; Níveis de ensino; Recursos.

Gráfico 2: Organização por palavras-chave dos artigos

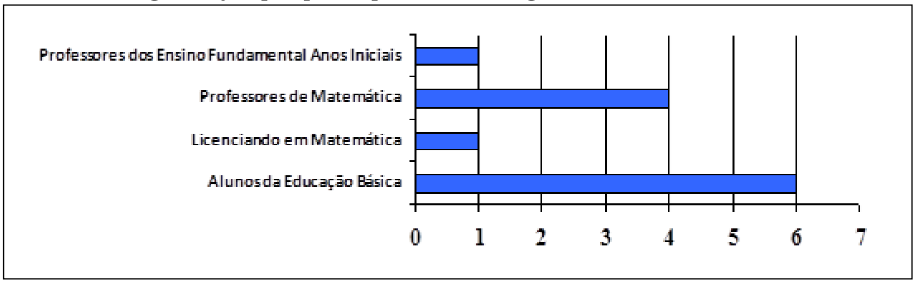


Verifica-se (Gráfico 2) que as palavras-chave mais utilizadas nos artigos mapeados estão relacionadas a Geometria. Nesta categoria fazem parte a Geometria Espacial e o pensamento geométrico, focos deste estudo, entre outros. Sendo que, do total de pesquisas mapeadas, 72,7% tratam de algum conteúdo/conceito de Geometria Espacial.

Nos trabalhos analisados constata-se que os participantes escolhidos pelos pesquisadores são de diferenciados níveis de ensino (Gráfico 3). Apenas uma das pesquisas mapeadas não está contabilizada nesta etapa da análise, pois utilizou, como fonte de dados, livros didáticos. É importante ressaltar que há um número maior de participantes em relação ao número de pesquisas mapeadas, pois algumas trabalharam mais de uma categoria de participantes.

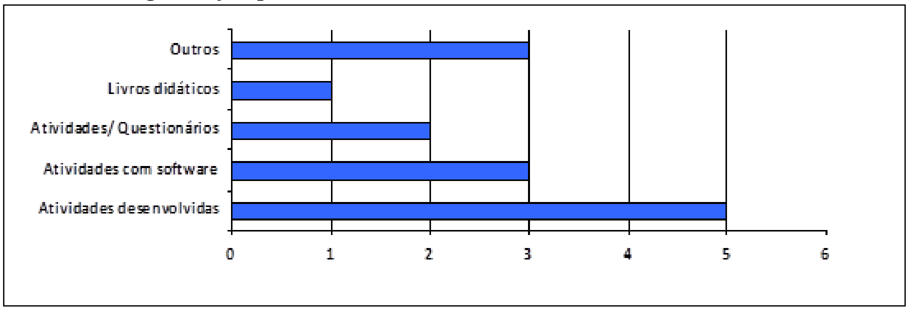
O Gráfico 3 permite afirmar que a Educação Básica é o nível de ensino mais investigado pelos pesquisadores. Além disso, percebe-se que pesquisas com acadêmicos do Ensino Superior ainda são reduzidas, sendo este nível de ensino de extrema importância, pois proporcionará fundamentação teórica para formação de professores que atuarão com as gerações mais novas de estudantes, oportunizando, já na formação inicial, a apropriação de teorias e metodologias para o ensino e aprendizagem de Geometria, bem como conhecimento sobre as potencialidades e limitações dos softwares de Geometria Dinâmica.

Gráfico 3: Organização por participantes dos artigos



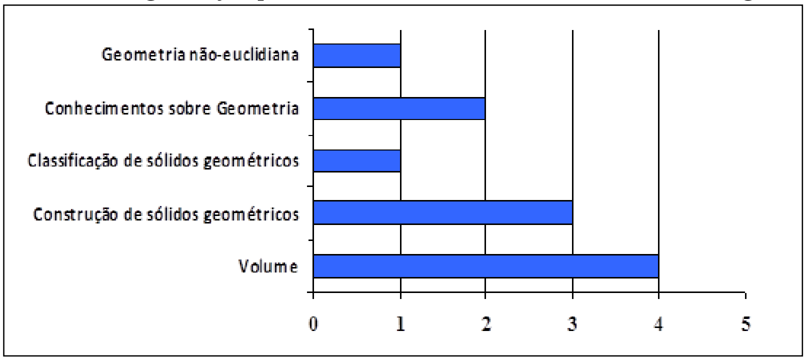
As fontes utilizadas para produção de dados escolhidas pelos autores dos 11 artigos mapeados, permitem classifica-las em 4 categorias, a saber: atividades desenvolvidas; atividades com software; atividades/questionários; e, outros. Esta última categoria abrange itens que foram mencionados apenas uma vez, a saber, entrevistas, gravações e diário da pesquisadora. O Gráfico 4 apresenta a distribuição das fontes utilizadas. Cabe destacar que, há um número maior de fontes em relação ao de pesquisas mapeadas, pois algumas utilizaram mais de uma fonte para a produção de seus dados.

Gráfico 4: Organização por fontes utilizadas



Ao realizar a análise sobre as fontes para produção de dados, verifica-se os conteúdos matemáticos abordados nas diferentes pesquisas. Por identificar distintos conteúdos matemáticos na análise, além de melhor organização e entendimento, estes foram categorizados conforme descrição presente no Gráfico 5. A partir desta análise constata-se que o conteúdo volume é o mais enfatizado nas publicações mapeadas. Talvez este dado pode ter sido influenciado pelos descritores escolhidos, visto que volume é um deles. Entretanto, esperava-se que conceitos relacionados a área de figuras espaciais também aparecessem no mapeamento em semelhante proporção.

Gráfico 5: Organização por conteúdos matemáticos abordados no artigo

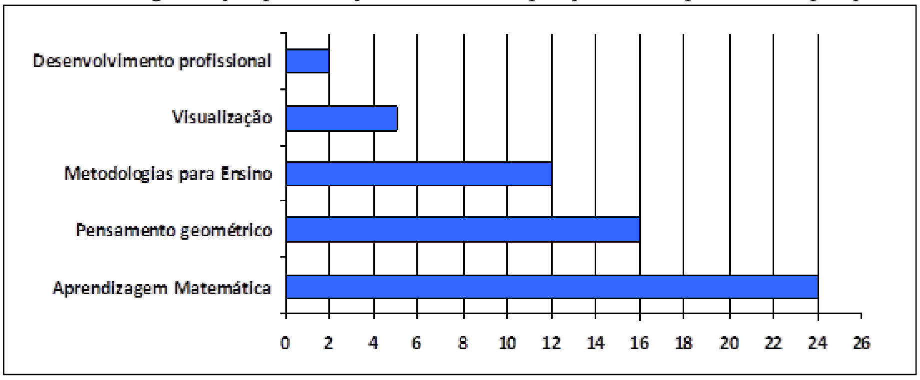


Identifica-se que há diferentes análises realizadas para o conceito de volume, a saber: análise relacionada ao volume como uma grandeza trabalhada a partir de situações de comparação com alunos de 3º ano do Ensino Médio; análise do volume de cilindros por meio da resolução de problemas com professores em formação inicial; análise de como os adultos calculam o volume de sólidos constituídos por pequenos cubos; e, análise de situações de volume em livros didáticos de matemática do Ensino Médio baseado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Verganud.

Nas considerações finais das pesquisas, que envolvem o conceito de volume, há contribuições para esta investigação que cabem ser destacadas: duas pesquisas mencionam/constatam a dificuldade dos estudantes em justificar ou argumentar sobre construções geométricas; uma pesquisa enfatiza contribuições dos softwares na visualização em vários pontos de vista na realização de atividades que envolvem objetos geométricos. Já, a pesquisa que analisa situações de volume em livros didáticos menciona que é dada muita ênfase a situações de medição e que situações como de comparação entre sólidos são pouco exploradas.

Para realizar a análise dos teóricos/pesquisadores utilizados na elaboração dos artigos mapeados, novamente, organizou-se categorias de acordo com os temas propostos nos textos utilizados pelos autores dos trabalhos mapeados (Gráfico 6). Isto porque há uma ampla distinção entre as referências utilizadas. Cabe destacar que, a busca foi realizada apenas no referencial teórico de cada pesquisa e destacados todos os teóricos/pesquisadores citados nesta parte dos textos pesquisados.

Gráfico 6: Organização por menções de teóricos/pesquisadores por área de pesquisa



Há um total de 59 menções a teóricos/pesquisadores, a partir do Gráfico 6 pode-se verificar que estas, em sua maioria, estão relacionadas a aprendizagem matemática. Também observa-se que 27,1% do total está relacionado ao pensamento geométrico, foco deste trabalho.

Com base nesses resultados, foi identificado de que forma o termo "pensamento geométrico" é utilizado nas publicações mapeadas. Dos 11 artigos analisados, 3 utilizam este termo. Sendo que, 2 falam sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, utilizando o modelo de Van Hiele e 1 utiliza outras referências (por exemplo, FISCHBEIN, 1993[6]; PAIS, 1996; GUTIÉRREZ, 1996[7]; NACARATO, 2005[8]). Esta última ao fazer referência ao termo "pensamento geométrico" destaca que a visualização e a representação são dois elementos importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, entendendo a visualização como uma forma de identificar as características e propriedades dos objetos e representação como uma forma de expressar conhecimentos e ideias geométricas.

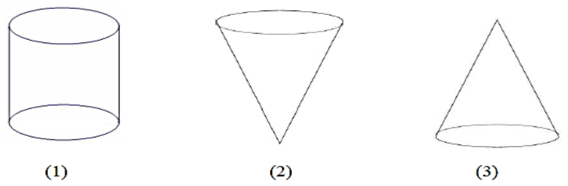
Os trabalhos que utilizam o modelo de Van Hiele para tratar do "pensamento geométrico" buscam apresentar/sugerir atividades para ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. Estas atividades foram elaboradas a partir dos níveis de Van Hiele, sendo explorados do nível visualização ao nível dedução informal, dando-se ênfase ao primeiro nível (Figura 2). Já a pesquisa que utiliza de outras referências tem por objetivo investigar a aprendizagem de professores acerca do pensamento geométrico a partir de questionários, encontros, entrevistas, entre outros, baseados no uso adequado de termos geométricos,

[6] FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. EducationaI Studies in Mathematics. 24: 139-162, 1993.
PAIS, Luiz Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. Zetetiké, Campinas, SP, v. 4, n. 6, p.65-74, jul./dez. 1996.
[7] GUTIERREZ, Angel. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of aFramework. University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso: fev. 2011.
[8] NACARATO, Adair Mendes. Eu Trabalho Primeiro no Concreto. Revista de Educação Matemática, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p.1-6, 2005. SBEM-SP.

visualização e representação, e compreensão de conceitos. Esta pesquisa verificou que os professores demonstram conhecimento de propriedades de figuras e/ou de orientação espacial, porém não utilizam termos apropriados, os quais são de extrema importância para a compreensão dos estudantes.

Figura 2: Atividade que envolve o nível da Visualização

A figura a seguir mostra três reservatórios com a mesma capacidade e a mesma altura. Supõe que em cada um desses reservatórios há uma torneira enchendo-os com uma mesma vazão da água constante.



Sabe-se que a altura da água nos três reservatórios aumenta à medida que transcorre o tempo; entretanto há diferenças significativas em relação ao aumento mais rápido ou mais lento do nível de água, conforme o tipo de reservatório.

Analisa a forma de cada um dos reservatórios e descreve, em cada caso, o comportamento do nível da água no decorrer do tempo.

Fonte: Excerto da pesquisa analisada.

Em relação as transformações cognitivas de registros de representação mais utilizadas, há um total de 10 pesquisas que dedicaram-se a elaboração e desenvolvimento de atividades. Entretanto, nem todas apresentam as atividades desenvolvidas, somente são expostos os resultados, deste modo estas pesquisas não fizeram parte da análise. Assim, há um total de 28 atividades, das quais 4 exigem respostas de cunho pessoal[9]. Constatou-se que há um percentual de 75% que exigem conversão, sendo, em sua maioria, do registro figural, para o algébrico e deste para o numérico. Os tratamentos matemáticos necessários para as atividades analisadas, em sua maioria, são do registro algébrico/numérico.

Diante da análise realizada nas pesquisas mapeadas a partir dos descritores escolhidos, pode-se destacar que o conteúdo mais abordado foi volume. Em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico, este recebeu pouco destaque. A teoria de Van Hiele foi utilizada em apenas 2 publicações, em uma delas foi explorado apenas o nível da visualização e em outra foram explorados os quatro primeiros níveis. Compreende-se que os níveis de Van Hiele podem ser melhor explorados nas pesquisas, visto que eles contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em relação as conversões identificadas nos trabalhos, conforme já mencionado, a maioria partia do registro figural para o algébrico e deste para o numérico. Entende-se, que é necessário trabalhar outros sentidos de conversão, por exemplo, o retorno das conversões

[9] Não contabilizadas na análise referente as transformações cognitivas de registros de representação.

trabalhadas, visto que os registros são, sempre, parciais em relação ao objeto matemático. Quanto aos tratamentos, verificou-se que o principal tratamento trabalhado foi o algébrico/numérico.

Diante desse contexto, acredita-se, com base nos estudos de Cury (2013) e Bicudo (2014), que este mapeamento contribuiu no desenvolvimento desta pesquisa e pode contribuir na produção de outras investigações acerca do ensino e aprendizagem da geometria, em particular, da Geometria Espacial, porque indica diversos aspectos dos estudos já realizados e publicados em periódicos da área da Educação Matemática.

1.2 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA ESPACIAL

A compreensão de inúmeras atividades do dia a dia requer que as pessoas questionem-se, por exemplo: qual o melhor formato para elaboração de uma embalagem, considerando o material disponível para a construção e o objeto a ser guardado. Para responder estas e outras questões, geralmente, é preciso mobilizar diferentes tipos de raciocínios, a saber: pensamento indutivo; raciocínio lógico-dedutivo; pensamento não determinístico[10], em particular, visão geométrico-espacial (BRASIL, 2014).

Em relação à visão geométrico-espacial, esta consiste em um aprendizado significativo da Geometria e de suas aplicações. Segundo o Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio (BRASIL, 2014, p.11) este pensamento permite

> [...] a partir da construção de representações mentais que possibilitam, por exemplo, reconhecer características de figuras geométricas [...], interpretar relações entre objetos no espaço e estimar áreas e volumes sem medição direta; antecipar resultados de transformações de figuras planas e objetos espaciais [...]; produzir e interpretar representações planas de objetos espaciais, plantas baixas de construções, mapas de diversos tipos, ou maquetes.

Este pensamento propicia aos estudantes a relação entre objetos e movimentos no espaço físico, permitindo que façam relações entre o tridimensional e o bidimensional. Além das contribuições já citadas, a visão geométrico-espacial "é fundamental em várias situações do cotidiano, nas ciências, nas artes e em diferentes profissões" (BRASIL, 2014, p.94).

[10] Maiores detalhes sobre os diferentes tipos de pensamento ver Caderno V do Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio, disponível em: <http://pactoensinomedio.mec.gov.br/images/pdf/cadernos/web_caderno_2_5.pdf>.

Ao tratar do ensino da Geometria, o Referencial Curricular do Estado do Rio Grande do Sul - RC/RS (2009) destaca o desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo esta proposta curricular (currículo prescrito) este pensamento está

> [...] ligado ao desenvolvimento de abstrações e representações do espaço, é uma poderosa via de generalização da própria álgebra e, ainda, está em estreita ligação com o desenvolvimento do pensamento combinatório, estatístico-probabilístico, na medida em que esquemas, tabelas e gráficos de diferentes tipos são representações, tanto do tratamento da informação, como das funções que expressam relações especiais, que modelam fenômenos da ciência, da tecnologia e da sociedade. (p. 38, grifo nosso)

Nesta perspectiva, o desenvolvimento do pensamento geométrico contribui no entendimento de outras áreas do conhecimento matemático, bem como, permite a visualização de conceitos aritméticos e algébricos.

O RC/RS (2009) sugere que os conceitos/conteúdos relacionados ao pensamento geométrico sejam trabalhados em todas as séries (anos) finais do Ensino Fundamental (EF) e durante o Ensino Médio (EM) (Figura 3). Indicam que o trabalho com os conceitos geométricos deveria iniciar pela Geometria Espacial, visto que os objetos do mundo "real" são tridimensionais, e, por intermédio desta, trabalhar os conceitos da Geometria Plana, em razão de que esta requer procedimentos de abstração e generalização. Também sugerem que a formalização (processos dedutivos) desses conceitos/conteúdos, em geral, seja realizada no 3º ano do EM, conforme pode-se observar na intensidade das cores apresentadas na figura 1. Em outras palavras, a intensidade da cor está relacionada à retomada e ampliação dos conteúdos/conceitos, bem como a formalização destes.

Figura 3: Pensamento Geométrico no RC/RS (2009)

Pensamento geométrico		5ºe 6ºsérie	7ºe 8ºsérie	1ºano	2ºano	3ºano
Espaço e forma	Localização e deslocamento					
	Figuras espaciais e planas e suas características					
	Decomposição e composição de figuras planas e espaciais					
	Ângulo, perpendicularismo e paralelismo					
Transformações no plano	Simetrias e homotetias					
	Congruências e semelhanças					
Grandezas e medidas	Perímetro, área e volume					
	Unidades e conversões de: comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo e tempo					
	Uso de instrumentos de medida					
	Relações métricas e trigonométricas					
Linguagem e simbologia geométrica						

Fonte: RIO GRANDE DO SUL, 2009, p.55

Quanto aos processos dedutivos nas diferentes áreas da Matemática, o Referencial Curricular do Paraná – RC/PR (2008, p. 57) entende que

> [...] a valorização de definições, as abordagens de enunciados e as demonstrações de seus resultados [conceitos/conteúdos] são inerentes ao conhecimento geométrico. No entanto, tais práticas devem favorecer a compreensão do objeto e não reduzir-se apenas às demonstrações geométricas em seus aspectos formais.

Para tanto, existem muitas possibilidades de experiências escolares relacionadas a validação de fórmulas, por exemplo, o cálculo de áreas (por meio da composição e decomposição de figuras geométricas) e volumes (por meio do princípio de Cavalieri, manipulação de figuras sólidas construídas, por exemplo, no Geogebra[11]) de figuras geométricas, que possibilitam discussões e proporcionam aos estudantes a capacidade de argumentação (BRASIL, 2015).

Van de Walle (2009) sugere que os objetivos da Geometria sejam analisados em termos de duas estruturas diferentes, mesmo que relacionadas, a saber: o *raciocínio espacial* e o *conteúdo específico*. A primeira estrutura diz respeito ao modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre as formas (bi ou tri dimensionais). Já a segunda estrutura relaciona-se com o conteúdo, por exemplo, saber sobre triângulos, quadriláteros, retas paralelas, entre outros. Para o pesquisador é essencial entender esses dois aspectos da Geometria, o pensamento e o conceito, para auxiliar os estudantes no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Os estudos relacionados ao desenvolvimento do pensamento geométrico obtiveram maior destaque com as pesquisas do casal Van Hiele. Contudo, a atenção internacional ao modelo de Van Hiele foi dada somente a partir da década de 70, quando Izaak Wirszup (1976) e Hans Freudenthal (1973), por volta da mesma época começaram a falar e escrever sobre o modelo (LINDQUIST e SHULTE, 1994). Este modelo foi organizado em cinco níveis de compreensão, a saber:

a) *Visualização*: as figuras geométricas são reconhecidas por sua aparência física, não por suas propriedades e os estudantes conseguem aprender um vocabulário geométrico, identificação de formas específicas e reproduzi-las.

b) *Análise*: consiste na observação e experimentação, é uma análise dos conceitos geométricos que permite aos estudantes perceber/compreender as características das figuras.

c) *Dedução informal*: proporciona ao estudante estabelecer inter-relações de propriedades, deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras.

---

[11] Criado por Markus Hohenwarter, o Geogebra é um software livre de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática tanto para a Educação Básica quanto para o Ensino Superior. Disponível para acesso em: www.geogebra.im-uff.mat.br. Acessado em abril de 2016

d) *Dedução formal*: possibilita perceber as inter-relações e o papel dos axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações e entender, também, a demonstração de mais de uma maneira, condições necessárias e suficientes.

e) *Rigor*: consiste em trabalhar em vários sistemas axiomáticos, a geometria de forma abstrata e estudar geometrias não-euclidianas. (LINDQUIST e SHULTE, 1994).

No Quadro 2 são apresentados exemplos sobre os níveis de Van Hiele, com base na produção de Lindquist e Shulte (1994).

Quadro 2: Níveis de Van Hiele

Níveis	**Capacidades desenvolvidas para cada nível**	**Proporcionar aos alunos oportunidades para:**	**Pergunta:** "Que tipo de figura é esta? Como você sabe?"
Visualização	Reconhecem-se formas geométricas com base na sua aparência física como um todo.	- manipular, colorir, dobrar e construir figuras geométricas; - identificar uma figura ou uma relação geométrica; - criar figuras; - descrever figuras geométricas e construções usando a linguagem adequada; - trabalhar com problemas que podem ser resolvidos manejando figuras, medindo e contando.	"Parece um retângulo!" ou "Porque parece uma porta".
Análise	A forma recua e emergem as propriedades das figuras.	- Medir, colorir, dobrar modelar e ladrilhar a fim de identificar propriedades de figuras e outras relações geométricas; - descrever uma classe de figuras por suas propriedades; - comparar figuras segundo suas propriedades características; - classificar e reclassificar figuras por atributos isolados; - identificar e desenhar uma figura, dada uma descrição oral ou escrita de suas propriedades; - identificar uma figura a partir de pistas visuais; - deduzir empiricamente "regras" e generalizações; - identificar propriedades que possam ser usadas para caracterizar ou comparar diferentes classes de figuras; - descobrir propriedades de classes de objetos não familiares; - encontrar e usar vocabulário e símbolos apropriados; - resolver problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas ou abordagens perspicazes.	"Quatro lados, fechados, dois lados compridos, dois lados curtos, lados opostos paralelos, quatro ângulos retos..."
Dedução Informal	Começa a se formar uma rede de relações.	- estudar as relações desenvolvidas no nível 1 [Análise], buscando inclusões e implicações; - identificar conjuntos mínimos de	"É um paralelogramo com quatro ângulos retos" (O aluno procura

		propriedades para descrever uma figura; - desenvolver e usar definições; - acompanhar argumentos informais; - apresentar argumentos informais (usando diagramas, figuras recortadas, diagramas de árvores); - acompanhar argumentos dedutivos, eventualmente fornecendo alguns "passos omitidos"; - tentar fornecer mais do que uma abordagem ou explicação; - trabalhar e discutir situações que focalizem uma afirmação e sua recíproca; - resolver problemas em que as propriedades das figuras e as inter-relações são importantes.	dar um número mínimo de propriedades. Se indagado, indicaria que sabe que é redundante, neste exemplo, dizer que os lados opostos são congruentes).
Dedução Formal	Compreende-se a natureza da dedução...	- identificar aquilo que é dado e o que deve ser provado num problema; - identificar informações implícitas numa figura ou numa dada informação; - demonstrar compreensão do significado de *conceito primitivo* (*termo não definido*), *postulado*, *teorema*, *definição*, *etc*; - demonstrar compreensão de condições necessárias e suficientes; - provar rigorosamente as relações desenvolvidas informalmente no nível 2 [dedução informal]; - provar relações não familiares; - comparar demonstrações diferentes de um mesmo teorema – por exemplo, teorema de Pitágoras; - Usar várias técnicas de demonstração – por exemplo, sintética, por transformações, por coordenadas, por vetores; - identificar estratégias gerais de demonstração; - refletir sobre o raciocínio geométrico.	"Isso pode ser provado se eu sei que a figura é um paralelogramo e que um dos ângulos internos é reto."(O aluno procura demonstrar o fato dedutivamente).

Fonte: Adaptação de Lindquist e Shulte (1994, p. 8-18).

Em relação à *Visualização*, primeiro nível de Van Hiele, Carvalho (2013) afirma que este é um dos principais obstáculos encontrados pelos estudantes no estudo da Geometria, principalmente, a visualização dos sólidos geométricos. Em função disto, muitos estudantes não alcançam a abstração necessária para a resolução de problemas da Geometria Espacial.

Ainda, no que tange a visualização Duval (2011, p.86) afirma que:

> As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras.

Nesta perspectiva, é preciso "mudar o olhar", ou seja, identificar a dimensão das unidades figurais. Assim, ver geometricamente uma figura significa "operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura fixada no monitor ou construída no papel" (DUVAL, 2011, p. 87), entendendo que a desconstrução dimensional é caracterizada pelo reconhecimento das partes de uma figura/objeto. Por exemplo, "no caso de uma figura tridimensional (3D), a desconstrução refere-se a identificar, por exemplo, as faces bidimensionais (2D) de um poliedro" (VIANNA, BOIAGO, 2015, p.170). Nas salas de aula percebe-se esta situação quando o estudante precisa construir um retângulo de lados a e b e a desconstrução dimensional do retângulo torna-se necessária no desenho de retas/segmentos paralelos e/ou perpendiculares, momento este que emergem as propriedades das figuras sem haver, geralmente, a percepção do estudante.

No modelo de Van Hiele, a partir da visualização, é apropriada a realização da análise das figuras/objetos, pois contribui na melhoria da compreensão do estudante, uma vez que este pode verificar as características e conceitos matemáticos envolvidos, que ajudam nas explicações/deduções/demonstrações das leis matemáticas ou fórmulas (LINDQUIST e SHULTE, 1994).

Cabe destacar que, Duval (2011) entende a visualização das figuras geométricas de forma diferente que a forma como está proposta no modelo de Van Hiele. Neste modelo, a visualização é o ponto de partida para a realização da análise (observação das características das figuras). Já para Duval a visualização é essencial para compreender que há várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais que contribuem na modificação das formas sem alterar o objeto matemático, bem como na apropriação das propriedades geométricas. Nesta perspectiva, a visualização é entendida como uma atividade de representação e não somente de percepção/visão. Conforme o autor, "ao contrário da visão, que fornece um acesso direto ao objeto, a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica, pois mostra relações, ou melhor, a organização das relações entre unidades figurais de representação" (PALLES, 2013, p.39).

No nível da *Análise*, a forma com que os estudantes reconhecem as figuras deve ser por meio de suas propriedades, entretanto, ainda não conseguem identificar as relações existentes entre as propriedades de diferentes figuras. É fácil identificar situações desse tipo, por exemplo, os estudantes são capazes de descrever "todas as propriedades dos quadrados, dos retângulos, dos paralelogramos, dos losangos, isoladamente, sem estabelecer relações entre essas figuras; não percebendo, por exemplo, que todo quadrado é um retângulo, é um losango e, também, é um paralelogramo" (BRAGA, DORNELES, 2011, p. 275). A linguagem que o professor utiliza é muito importante e o mau uso dela pode ser um dos fatores que influenciam situações como a apresentada anteriormente. O questionamento realizado pelos professores, segundo Lindquist e Shulte (1994), é um fator crucial na orientação do raciocínio do estudante, pois é desta forma que se pode reconhecer os entendimentos, as ideias vagas, imaturas, incompletas ou concebidas erroneamente.

Geralmente, o trabalho do professor acerca dos conhecimentos geométricos limita-se a apresentação de fórmulas, deixando de lado o desenvolvimento da dedução informal e formal. Em outros termos, as leis matemáticas ou fórmulas não são demonstradas, fazendo com que o estudante trabalhe mecanicamente, limitando o desenvolvimento do raciocínio lógico. Para que este quadro mude os PCN+ (BRASIL, 2002) orientam que

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias [experimentação e deduções informais] no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. (p.124).

As ideias do último nível de Van Hiele (*Rigor*) não estão propostas na maioria das orientações curriculares (PCN, PCNEM, PACTO), pois estão relacionadas a Geometria de forma abstrata e no estudo das geometrias não-euclidianas. Uma das exceções são as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado do Paraná (2008) que destacam a importância de trabalhar a geometria não-euclidiana ao abordar os seguintes conteúdos: geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Este documento ainda destaca que "os conceitos destes conteúdos são fundamentais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico" (p.57).

Percebe-se a relevância dos níveis de Van Hiele na análise de situações para o ensino de conceitos geométricos, em especial, conceitos da Geometria Espacial. Contudo, ao tratar de aprendizagem matemática é relevante considerar os pressupostos da teoria de Duval (2003, 2011), dos Registros de Representação Semiótica, pois esta contribui na compreensão do objeto matemático por meio da coordenação dos diferentes tipos de representações semióticas[12].

Os diferentes tipos de registros semióticos utilizados em Matemática, de acordo com Duval (2011) (Figura 4), são: a) registros discursivos: consistem em uma linearidade fundamentada na sucessão, que abrange as línguas (designação de objetos, enunciação e raciocínio), representações auxiliares transitórias e as escritas simbólicas; e, b) registros não discursivos: compreendem o entendimento concomitante de uma organização bidimensional, que contém a produção a mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto (icônica), configuração geométrica (construção

[12] Produções constituídas pelo emprego de signos/sinais, que podem ser em forma de língua natural, algébrica, figural, entre outros. (SANTOS, CURI, 2011)

instrumental, divisão e reconfiguração merológicas). Para Duval (ASSUMPÇÃO, 2015, p.52) a

> [...] divisão do todo em partes justapostas ou sobrepostas é realizada para reconstruir com as partes obtidas, uma figura visualmente muito diferente da figura de partida, denominando-a de reconfiguração. Sendo este um tratamento que consiste na partição de uma figura em subfiguras. Em comparação, realiza-se com as mesmas uma eventual remontagem constituindo-se outra figura de contorno global diferente,

(desconstrução dimensional das formas), e gráficos cartesianos (operação de zoom, interpolação, mudança de eixos).

Figura 4: Classificação dos tipos de registros semióticos

	Registros DISCURSIVOS *Linearidade fundamentada na sucessão* para a produção, apreensão e organização das expressões.	Registros NÃO DISCURSIVOS *Apreensão simultânea de uma organização bidimensional*
Registros MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são não algoritmizáveis	AS LÍNGUAS: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção: oral/escrita	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas).
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: as transformações de expressões são **algoritmizáveis**	AS ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: escrita	*Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas.* GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos.** ESQUEMAS

Fonte: Duval (2003, p.14)

Para Duval (2004 apud KLUPPEL, 2012, p.38) "a atividade cognitiva que a Geometria requer é mais exigente que as outras áreas do conhecimento, pois requer que os tratamentos discursivos e os tratamentos figurais sejam efetuados de maneira simultânea e de maneira interativa". Por exemplo, a partir de uma atividade referente a Geometria de Posição, como: "Considere uma pirâmide quadrangular (isto é, a base é um quadrilátero) V-ABCD. As arestas VA e VC determinar um plano α; as arestas VB e VD determinam um plano β. Qual será a interseção entre os planos α e β?". Este exemplo mostra que a conversão para o registro geométrico é importante para sua resolução, para tanto, a construção da pirâmide em um software como o Geogebra permite a visualização das relações existentes.

As representações semióticas possuem um "papel primordial na produção do conhecimento uma vez que elas permitem representações radicalmente diferentes em se tratando de um mesmo objeto matemático" (SANTOS, CURI, 2011, p. 7). O que é mais relevante matematicamente, quando falamos em registros, são as transformações que podem ser realizadas a partir de uma representação semiótica. Estas transformações podem ser de dois tipos, a saber: *tratamento*, que consiste em uma transformação interna a um registro e *conversão*, é uma transformação que faz passar de um registro para outro, propondo assim a coordenação de dois ou mais registros (DUVAL, 2011). Por exemplo, *"Duas retas concorrentes têm um ponto comum"*, esta atividade exige que o estudante realize um tratamento no registro da língua natural, pois basta mobilizar a definição de retas concorrentes. Um exemplo de atividade que exige a transformação de um registro para outro é seguinte: *"Num plano α há duas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ concorrentes num ponto O. Fora de α há um ponto P. Qual é a interseção dos planos $\beta = (P, A, B)$ e $\gamma = (P, C, D)$?"*. Para resolvê-la o estudante pode construir as retas concorrentes e os planos α, β e γ e verificar que a interseção entre β e γ é a reta $\overleftrightarrow{OP}$. Nesta solução percebe-se uma conversão do registro da língua natural para o geométrico. O estudante, também, pode fazer uma conversão do registro da língua natural para o simbólico.

A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: "é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis" (DUVAL, 2012, p.270). Assim, a compreensão do objeto matemático esta relacionada a capacidade de mobilizar, ao menos, dois registros de representação.

Ao se falar de demonstração em matemática cabe destacar sua importância para o conhecimento matemático. Segundo Michael De Villiers, esta "não pode ser encarada apenas como uma forma de convencer os cépticos de que algum teorema é verdadeiro" (GUERATO, SOUZA, 2015, p.1). Este pesquisador propõe algumas funções para as demonstrações em matemáticas, a saber:

a) *verificação/convencimento*: são testes empíricos realizados antes de começar uma demonstração para que diminuam as chances de erros;

b) *explicação*: explicará porque a conjectura é válida;

c) *descoberta*: a demonstração como forma de explorar, inventar novos resultados por meio de tentar verificar um outro resultado verdadeiro;

d) s*istematização*: organização das afirmações que estão isoladas em um forma coerente e integrada;

e) *meio de comunicação*: serve como uma interação entre os matemáticos, para que a partir das demonstrações se identifiquem falhas e inconsistências, observações e até mesmo novas conclusões;
f) *desafio intelectual*: para os matemáticos, a demonstração é uma forma de mostrar sua competência em fazer matemática.

Conforme De Villiers (GUERATO, SOUZA, 2015, p.2), quando se pensa em Educação Básica, a função de explicação ganha um destaque maior do que as outras. Esta é bastante utilizada pelos professores para justificar a validade de uma teoria e para o estudante esta "teoria ganha mais credibilidade quando vê o professor demonstrando a validade, mesmo que esta demonstração não seja cobrada" em outros momentos.

Ao se aplicar as funções elencadas, anteriormente, para as demonstrações em Geometria da Educação Básica, softwares de Geometria Dinâmica são mencionados por De Villiers para contribuir na compreensão dos estudantes. Por exemplo, no processo da demonstração como uma verificação/convencimento, estes softwares possibilitam que os estudantes verifiquem por meio da visualização as propriedades em casos particulares e desta forma percebam que pode ser válida sempre. No caso da demonstração como processo de descoberta, o professor pode colocar um problema em que o estudante possa explorar por meio do software de Geometria Dinâmica e através desse meio elaborar conjecturas, descobrir propriedades dos objetos estudados, situação esta que pode ser relacionada com o nível de *Análise* de Van Hiele, no qual as propriedades das figuras emergem e a partir disto, pode-se descobrir os caminhos que levam a esta demonstração.

A seguir, são apresentados os procedimentos metodológicos escolhidos para o desenvolvimento desta pesquisa.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresenta-se o desenho metodológico desta pesquisa. Inicialmente expõe-se as opções metodológicas, sendo esta pesquisa de cunho qualitativo na forma de uma análise documental, utilizando, como técnica, a análise de conteúdo. Na sequência, são apresentadas as fontes de produção de dados, ou seja, as coleções de livros didáticos escolhidas e as categorias de análise. Por fim, destaca-se a organização das coleções de livros didáticos sob a ótica do Programa Nacional do Livro Didático.

2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

A escolha teórico-metodológica adotada para este estudo foi de uma pesquisa qualitativa. Conforme Silveira e Córdova (2009, p.31) “não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc”. Contudo, isto não significa que os dados não possam ser quantificados.

O tipo de pesquisa, quanto aos procedimentos, foi uma análise documental. Conforme Fiorentini e Lorenzato (2006, p.71) este é um “estudo que se propõe a realizar análises históricas e/ou revisão de estudos ou processos tendo como material de análise documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos”.

Para Lüdke e André (1986 apud SCHNEIDER, TOBALDINI e FERRAZ., 2014, p.7) esta análise é uma “técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema”.

Dentro da análise documental a técnica escolhida foi a de análise de conteúdo. De acordo com Laville e Dione (1999) constitui-se em demonstrar as estruturas e os elementos do conteúdo para assim explicar suas diferentes características e seus significados. Para realização desta técnica de análise é preciso organizar os documentos e realizar três etapas: a) Pré-análise: etapa de organização que compreende a formulação dos objetivos, escolha de documentos e elaboração das categorias de análise; b) Exploração do material: consiste em analisar e produzir os dados; c) Tratamento dos resultados e interpretações: consiste em tratar os dados obtidos para serem significativos e válidos.

Nesta pesquisa, as fontes de produção de dados foram as coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovadas pelo PNLD/2015, adotadas pelas escolas Estaduais do Município de Itaqui-RS, cujo foco de análise é o ensino da Geometria Espacial.

Considerando nossas referências teórico-metodológicas, elencamos algumas categorias iniciais de análise (Quadro 3), podendo surgir no transcorrer da pesquisa/análise outras categorias.

Quadro 3: Categorias de análise

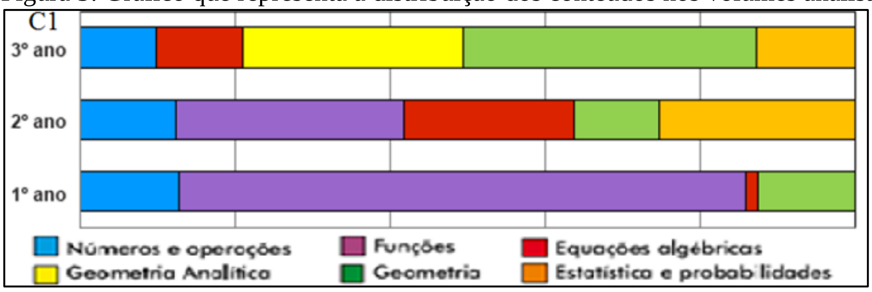
Categorias	Descrição
Contexto	Identificação de quais contextos são abordados nos livros didáticos.
Níveis de Van Hiele	Identificação de quais níveis de Van Hiele são contemplados nos livros didáticos.
Transformações cognitivas	Verificação de quais transformações cognitivas são mais exploradas e quais os sentidos das conversões.
Demonstração	Reconhecimento de quais leis matemáticas são demonstradas no estudo dos conceitos de Geometria Espacial.

A interpretação dos dados de produções, na análise, foi feita por meio do emparelhamento que faz parte da técnica de análise de conteúdos, a qual, segundo Laville e Dionne (1999, p.227), “[...] consiste em emparelhar ou, mais precisamente, em associar os dados recolhidos a um modelo teórico com finalidade de compará-los”.

2.2 ORGANIZAÇÃO DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS ANALISADAS SOB A ÓTICA DO PNLD

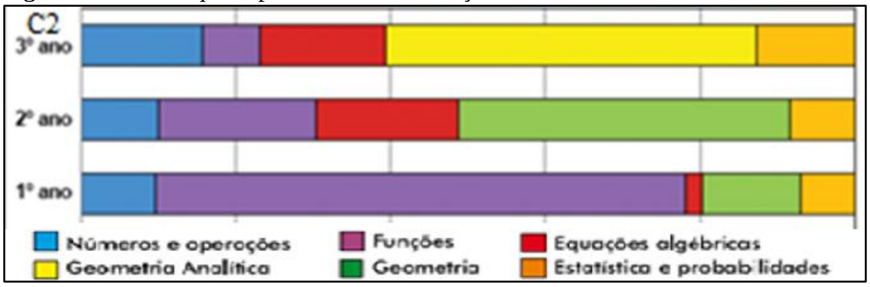
Em um primeiro momento, optou-se por verificar como são distribuídos e abordados os conteúdos das coleções analisadas, conforme dados do PNLD/2015 (BRASIL, 2014). As Figuras 5 e 6 apresentam as distribuições dos conteúdos nos volumes das duas coleções analisadas.

Figura 5: Gráfico que representa a distribuição dos conteúdos nos volumes analisados da C1



Fonte: Adaptado do PNLD/2015 (BRASIL, 2014)

Figura 6: Gráfico que representa a distribuição dos conteúdos nos volumes analisados da C2



Fonte: Adaptado do PNLD/2015 (BRASIL, 2014)

A Figura 5 indica que a C1 aborda os conceitos de Geometria, que abrange os conceitos de Geometria Espacial, em todos os seus volumes, enquanto a Figura 6 indica que a C2 aborda esses conceitos nos volumes 2 e 3, o que pode limitar as relações existentes entre os conceitos de Geometria e outros conceitos já estudados no volume 1.

Organizou-se o Quadro 4, destacando o número de páginas, capítulos, páginas sobre Geometria e páginas sobre Geometria Espacial por volume de cada coleção com intuito de verificar quantitativamente como este campo da Matemática é proposto.

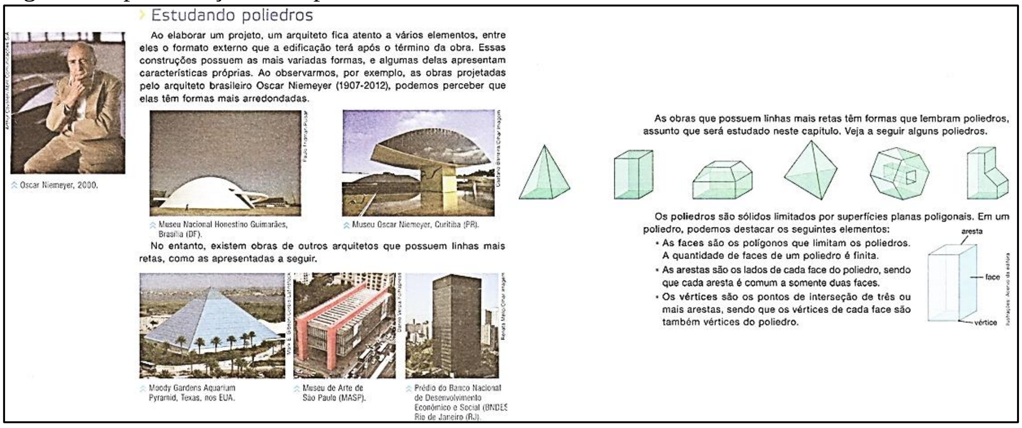
Quadro 4: Indicadores dos Livros Didáticos

	C1			**C2**		
	V1	**V2**	**V3**	**V1**	**V2**	**V3**
Nº de páginas por volume	320	320	320	320	320	256
Nº de capítulos por volume	9	9	8	14	16	9
Nº de páginas sobre Geometria por volume	35	28	104	19	120	0
Nº de páginas sobre Geometria Espacial por volume	0	0	104	0	94	0

Os dados do Quadro 4 indicam que a C1, nos seus três volumes, dedica 17,4% de seu total para conceitos relacionados a Geometria. As páginas do volume 3 da C1 dedicadas ao estudo dos conceitos relacionados a Geometria Espacial correspondem a 32,5% do total dos conceitos/conteúdos abordados neste livro. Os índices dos demais conceitos/conteúdos abordados indicam que a maioria das páginas deste volume são dedicadas a Geometria Espacial.

Conforme o PNLD/ 2015, na apresentação dos capítulos da C1 são propostos textos acerca do assunto que será estudado, enfatizando as relações da matemática com as práticas sociais e outras áreas do conhecimento (Figura 7).

Figura 7: Apresentação do capítulo Poliedros



Estudando poliedros

Ao elaborar um projeto, um arquiteto fica atento a vários elementos, entre eles o formato externo que a edificação terá após o término da obra. Essas construções possuem as mais variadas formas, e algumas delas apresentam características próprias. Ao observarmos, por exemplo, as obras projetadas pelo arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012), podemos perceber que elas têm formas mais arredondadas.

Oscar Niemeyer, 2000.

Museu Nacional Honestino Guimarães, Brasília (DF).

Museu Oscar Niemeyer, Curitiba (PR).

No entanto, existem obras de outros arquitetos que possuem linhas mais retas, como as apresentadas a seguir.

Moody Gardens Aquarium Pyramid, Texas, nos EUA.

Museu de Arte de São Paulo (MASP).

Prédio do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES) Rio de Janeiro (RJ).

As obras que possuem linhas mais retas têm formas que lembram poliedros, assunto que será estudado neste capítulo. Veja a seguir alguns poliedros.

Os poliedros são sólidos limitados por superfícies planas poligonais. Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

- As faces são os polígonos que limitam os poliedros. A quantidade de faces de um poliedro é finita.
- As arestas são os lados de cada face do poliedro, sendo que cada aresta é comum a somente duas faces.
- Os vértices são os pontos de interseção de três ou mais arestas, sendo que os vértices de cada face são também vértices do poliedro.

Fonte: Coleção analisada no volume 3

Os capítulos apresentam situações contextualizadas e na sequência são expostas atividades resolvidas e propostas (os estudantes devem resolvê-las). Também, são expostos, ao final de cada capítulo, itens como: *Explorando o tema*, *Refletindo sobre o capítulo* e *Atividades complementares*. Nos três volumes da coleção constata-se atividades dos tipos resolvidas, propostas e complementares.

A C2, nos seus três volumes, apresenta um total de 15,5% dedicado ao estudo dos conceitos relacionados a Geometria. No que tange aos conceitos/conteúdos relacionados a Geometria Espacial, as páginas do volume 2 representam 29,8% deste volume, sendo que esta porcentagem não representa a maioria como na coleção C1.

Na C2 os capítulos/itens são apresentados, na maioria das vezes, seguindo esta ordem: introdução, definições ou exemplos de situações relacionadas ao assunto que será estudado e na sequência são expostas atividades resolvidas e propostas (os estudantes devem resolvê-las) (Figura 8).

Figura 8: Apresentação do capítulo Esfera

Observe os objetos seguintes:

Todos eles têm a forma de uma esfera, sólido que passaremos a estudar agora.

Autorretrato no espelho esférico. Litografia de 1935 do artista holandês M. C. Escher, que se encontra no Gemeentemuseum em Haia, Holanda.

Conceito

Consideremos um ponto O e um segmento de medida *r*. Denomina-se **esfera** de centro O e raio *r* o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a *r*.

Na figura ao lado, observe que os pontos P, Q, R, S e T pertencem à esfera, pois suas respectivas distâncias (d) ao centro O são menores ou iguais a *r*.

É importante diferenciarmos esfera de superfície esférica: a **superfície esférica** de centro O e raio *r* é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual a *r*.

Observe, na figura ao lado, que os pontos R e T pertencem à superfície esférica, mas P, Q e S não pertencem.

Fonte: Coleção analisada no volume 2

Em alguns itens, são expostos subitens como: *Um pouco de História* e *Aplicações*. Nos três volumes da coleção analisada, verificou-se que esta apresenta atividades dos tipos resolvidas e propostas.

No guia do livro didático organizado pelo PNLD/2015 há um critério que dedica esforços para analisar o manual do professor de cada coleção. O Quadro 5 apresenta as avaliações do manual do professor das duas coleções analisadas.

Quadro 5: Avaliação do manual do professor

Itens da Avaliação	**Superficial**		**Suficiente**		**Com destaque**	
	C1	**C2**	**C1**	**C2**	**C1**	**C2**
Fundamentação teórica que norteia a coleção			X	X		
Contribuições para a formação do professor			X	X		
Orientações para a avaliação da aprendizagem			X	X		
Orientações para o uso do livro didático			X	X		
Orientações para o uso de recursos didáticos	X	X				
Orientações para o desenvolvimento das atividades		X	X			
Soluções das atividades propostas			X	X		
Sugestões de atividades complementares			X	X		

Os dados do Quadro 5 apontam que as duas coleções selecionadas possuem uma avaliação quanto ao manual do professor bem semelhante na maioria dos itens, em outras palavras, a maioria dos itens foi avaliado como suficiente. Diferem-se apenas em um item “Orientações para o desenvolvimento das atividades”, no qual a C1 foi avaliada como suficiente, enquanto a C2 foi avaliada como superficial. Em relação ao item “Orientações para o uso de recursos didáticos”, as coleções foram avaliadas como superficial, pois não explicitam “alternativas e recursos didáticos ao alcance do docente, permitindo-lhe selecionar, caso o deseje, os conteúdos que apresentará em sala de aula e a sequência em que serão apresentados” (BRASIL, 2014, p.14). Ressalta-se que em nenhum momento o PNLD/2015 expõe o que está considerando como recursos didáticos.

Também há, no guia do livro didático, uma análise geral de como as coleções abordam os campos da Matemática. No que se refere a Geometria, o guia destaca que na C1 na

> [...] geometria de posição, são enunciados postulados e propriedades sobre retas e planos, em alguns casos, com excesso de formalismo. Os sólidos geométricos são tratados, no livro do 3º ano, com abordagens que exploram de maneira equilibrada métodos dedutivos e estratégias de visualização. (BRASIL, 2014, p.71)

O excesso de formalismo pode prejudicar o entendimento do estudante, criando obstáculos, por exemplo, para a realização das atividades. Em relação aos sólidos geométricos, pode-se destacar que as “estratégias de visualização”, conforme Duval veem a contribuir na compreensão nas várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, bem como na apropriação das propriedades geométricas.

Já na C2, há um excerto no PNLD que trata da Geometria Espacial e demonstração, sublinhando que

> Em geral, são cuidadosas as deduções das fórmulas do volume de poliedros e dos sólidos redondos mais comuns, com base no Princípio de Cavalieri.[...] Na abordagem da geometria espacial de posição, são dados passos iniciais e adequados para o emprego do método axiomático e apresentadas demonstrações satisfatórias de alguns teoremas. Contudo, algumas demonstrações, apoiam-se em ilustrações e, assim, podem não contemplar todos os casos possíveis. (BRASIL, 2014, p.53-54)

É importante que os estudantes compreendam para que são utilizadas as fórmulas e porque são válidas, uma das formas de mostrar é por meio de deduções partindo de situações/fórmulas já conhecidas. Em relação as demonstrações, estas precisam estar bem claras paras os estudantes, mesmo que obtenham somente a função de explicação, mostrando todos seus casos possíveis de forma a contribuir para a compreensão dos estudantes e resolução de outras demonstrações e/ou atividades que exijam este tipo de resolução.

Esta é uma primeira visão sobre as coleções de livros didáticos escolhidas, segundo as avaliações expostas no PNLD. A seguir, apresenta-se a análise detalhada das coleções C1 e C2 no que tange aos conceitos da Geometria Espacial.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo apresenta a análise das duas coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, tendo como referência as categorias de análise expostas no Capítulo 2.

3.1 ANÁLISE DA COLEÇÃO 1 (C1)

Entendendo que a Geometria Espacial deve ser trabalhada ao longo da Educação Básica e considerando que esta pesquisa analisa duas coleções de livros didáticos de Ensino Médio, foram identificadas atividades resolvidas e propostas, relacionadas a este tema, nos 3 volumes das coleções.

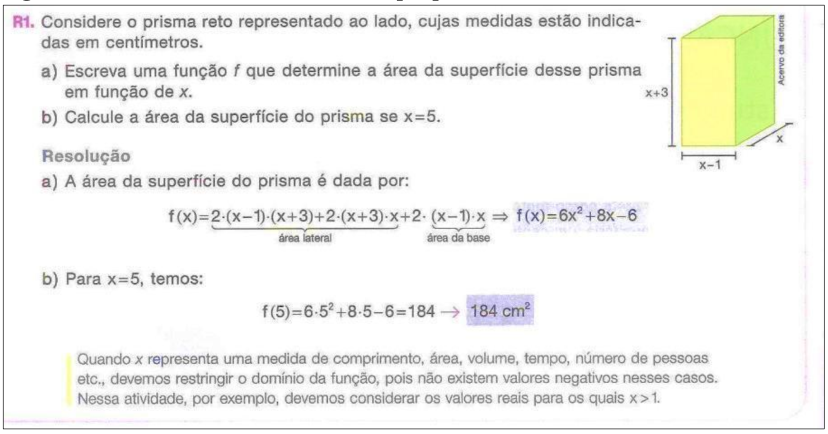
Nesta seção, são apresentadas as atividades identificadas nos três volumes da Coleção 1. Foram analisadas 258 atividades, sendo que 254 pertencem ao volume 3, mais especificamente, a unidade destinada ao ensino da Geometria Espacial. Este dado indica que a relação entre os conceitos geométricos e outros conceitos matemáticos fica bastante comprometida, pois há volumes da coleção em que não foram identificadas atividades envolvendo Geometria Espacial (volume 2). Além da identificação de como estavam distribuídas as atividades nos volumes, verificou-se os contextos escolhidos para apresentá-las (Quadro 6).

Quadro 6: Contextos apresentados nas atividades da C1

Contexto	**Volumes da coleção**		
	V1	**V2**	**V3**
Própria Matemática	4	0	176
Cotidiano	0	0	73
Outra área do conhecimento	0	0	5

O total de atividades categorizadas indica que o contexto “própria matemática” é o que possui maior ênfase, tendo um total de 69,8%. A figura 9 apresenta uma atividade, do contexto mais enfatizado, categorizada no volume 1 da coleção. Esta atividade envolve o conceito de volume relacionado com o conceito de função. Para resolvê-la o estudante já deve ter solucionado outras situações em que o conceito de área de paralelepípedos tenha sido problematizado.

Figura 9: Atividade com contexto da própria matemática na C1



R1. Considere o prisma reto representado ao lado, cujas medidas estão indicadas em centímetros.

a) Escreva uma função *f* que determine a área da superfície desse prisma em função de *x*.

b) Calcule a área da superfície do prisma se $x=5$.

Resolução

a) A área da superfície do prisma é dada por:

$$f(x)=\underbrace{2\cdot(x-1)\cdot(x+3)+2\cdot(x+3)\cdot x}_{\text{área lateral}}+2\cdot\underbrace{(x-1)\cdot x}_{\text{área da base}} \Rightarrow \boxed{f(x)=6x^2+8x-6}$$

b) Para $x=5$, temos:

$$f(5)=6\cdot 5^2+8\cdot 5-6=184 \rightarrow \boxed{184\ cm^2}$$

Quando *x* representa uma medida de comprimento, área, volume, tempo, número de pessoas etc., devemos restringir o domínio da função, pois não existem valores negativos nesses casos. Nessa atividade, por exemplo, devemos considerar os valores reais para os quais $x>1$.

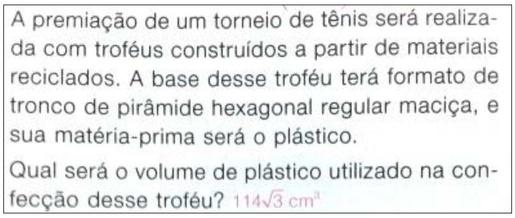
Fonte: Volume 1 da coleção analisada

Cabe destacar que, as atividades categorizadas em outros capítulos envolvem o contexto da própria matemática (100% das atividades) e exigem a mobilização do conceito de volume, relacionando com outros conteúdos/conceitos como: função, potência; progressões aritméticas, polinômios, entre outros. Ressalta-se que o conceito de volume teve a maior ênfase nas produções mapeadas (Capítulo 1).

Já as atividades categorizadas nos capítulos específicos da Geometria Espacial, em sua maioria, abordam conteúdos como: geometria de posição, reconhecimento de poliedros, relação de Euler, propriedades de poliedros, diagonal, área e volume de poliedros.

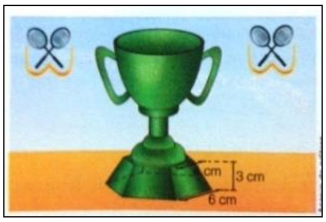
Os dados do Quadro 6, também, indicam que 28,3% das atividades envolvem situações cotidianas, sendo que deste total 78,1% a situação escolhida é apenas ilustrativa, em outras palavras, os dados da situação não influenciam na resolução da atividade (Figura 10).

Figura 10: Atividade com contexto cotidiano apenas ilustrativo na C1



A premiação de um torneio de tênis será realizada com troféus construídos a partir de materiais reciclados. A base desse troféu terá formato de tronco de pirâmide hexagonal regular maciça, e sua matéria-prima será o plástico.

Qual será o volume de plástico utilizado na confecção desse troféu? $114\sqrt{3}\ cm^3$



Fonte: Volume 3 da coleção analisada

É preocupante que as atividades relacionadas a outras áreas do conhecimento não cheguem a 2% do total. Embora, a relação com este contexto seja essencial para que o estudante obtenha, de uma melhor forma, o entendimento do conceito/conteúdo matemático utilizando-o como uma ferramenta para resolver problemas deste gênero. As poucas atividades destacam conceitos/conteúdos como geometria de posição, área e volume de esfera relacionando-os à física e a geografia. A Figura 11 apresenta um exemplo das atividades em que verifica-se a relação entre os conceitos/conteúdos de densidade, massa e volume. Nesta atividade o estudante sabendo os valores da densidade e dos raios de duas esferas precisa determinar qual a maior massa entre os corpos. Para tal, é necessário calcular os volumes e mobilizar o conceito de razão, visto que densidade é uma razão especial.

Figura 11: Atividade com contexto relacionado a outras áreas do conhecimento na C1

R13. A densidade de um corpo é a razão entre sua massa e seu volume. Um objeto é mais denso do que outro se, tendo uma massa igual, ocupar menor volume, ou, analogamente, com o mesmo volume, tiver maior massa. Por exemplo, ao comparar 1 kg de chumbo com 1 kg de algodão, apesar de as massas serem iguais, o volume ocupado pelo algodão é maior, pois sua densidade é menor.

Os valores da densidade do ouro e da prata são, respectivamente, 19,42 g/cm³ e 10,54 g/cm³, em condições ideais de pressão e temperatura. Considere duas esferas nessas condições: uma de ouro com raio 1,05 cm e uma de prata com raio 1,20 cm. Determine qual esfera possui maior massa.

Resolução

Note que a esfera de prata possui maior volume, pois possui maior raio. No entanto, não podemos dizer o mesmo da massa, pois as esferas são compostas por materiais que possuem diferentes densidades.

Para calcular a massa de cada esfera, inicialmente calculamos o volume de cada uma delas:

- $V_{ouro} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}05)^3}{3} = \frac{14{,}53977}{3} = 4{,}84659 \rightarrow 4{,}84659\ cm^3$
- $V_{prata} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}20)^3}{3} = \frac{21{,}70368}{3} = 7{,}23456 \rightarrow 7{,}23456\ cm^3$

Calculamos a massa de cada esfera:

- $d_{ouro} = \frac{m_{ouro}}{V_{ouro}} \Rightarrow 19{,}42 = \frac{m_{ouro}}{4{,}84659} \Rightarrow m_{ouro} \simeq 94{,}12 \rightarrow 94{,}12\ g$
- $d_{prata} = \frac{m_{prata}}{V_{prata}} \Rightarrow 10{,}54 = \frac{m_{prata}}{7{,}23456} \Rightarrow m_{prata} \simeq 76{,}25 \rightarrow 76{,}25\ g$

Portanto, a esfera de ouro possui maior massa.

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

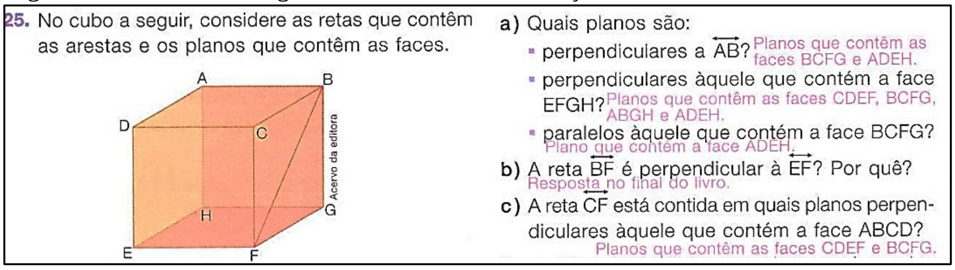
Ao analisar quais níveis de Van Hiele estão contemplados nas atividades (Quadro 7), verifica-se que apenas os três primeiros, dos cinco, são abordados. O nível da *Análise* é o mais enfatizado (58,1% do total de atividades). Este nível desenvolve no estudante, segundo Lindquist e Shulte (1994), a descrição de uma classe de figuras por suas características, a dedução empírica de “regras” e generalizações, a resolução de problemas geométricos que necessitam do conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas, entre outras capacidades. A maioria dessas atividades está no capítulo denominado *Poliedros* (47,7% do total de atividades no nível *Análise*) por apresentar situações que requerem o entendimento de que sólidos geométricos são formados por partes e a compreensão de um conceito requer a mobilização de uma listagem de propriedades que caracterizam o referente conceito. A partir dessas atividades o estudante começa a estabelecer relações entre figuras bi e tridimensionais.

Quadro 7: Níveis de Van Hiele apresentados nas atividades da C1

Níveis de Van Hiele	**Volumes da coleção**		
	V1	**V2**	**V3**
Visualização	3	0	101
Análise	1	0	150
Dedução Informal	0	0	3

Cabe destacar que o nível da *Visualização*, também, obteve um percentual “alto” (40,3%). Acredita-se que as atividades que exigem *Visualização* destacam-se porque proporcionam aos estudantes a manipulação, identificação, criação e descrição de figuras geométrica. A Figura 12 apresenta um exemplo de atividade que valoriza o nível de *Visualização*, abordando conceitos de geometria de posição por meio de um contexto da própria matemática.

Figura 12: Atividade categorizada no nível Visualização na C1


25. No cubo a seguir, considere as retas que contêm as arestas e os planos que contêm as faces.

a) Quais planos são:
- perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$? Planos que contêm as faces BCFG e ADEH.
- perpendiculares àquele que contém a face EFGH? Planos que contêm as faces CDEF, BCFG, ABGH e ADEH.
- paralelos àquele que contém a face BCFG? Plano que contém a face ADEH.

b) A reta $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular à $\overleftrightarrow{EF}$? Por quê? Resposta no final do livro.

c) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ está contida em quais planos perpendiculares àquele que contém a face ABCD? Planos que contêm as faces CDEF e BCFG.

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

É importante retomar que a visualização permite aos estudantes descrever figuras geométricas e construções usando a linguagem adequada, bem como trabalhar com problemas que podem ser resolvidos manejando figuras, medindo e contando, entre outros. Entende-se que as atividades categorizadas nesse nível poderiam ser exploradas com auxílio de um software, por exemplo, Geogebra, mas nesta análise não foi identificada nenhuma recomendação desses recursos para a resolução das atividades, apenas confirmando a análise realizada pelo PNLD que nesta coleção não há sugestões de materiais didáticos. Esta afirmação é justificada a partir do exemplo exposto no Quadro 8.

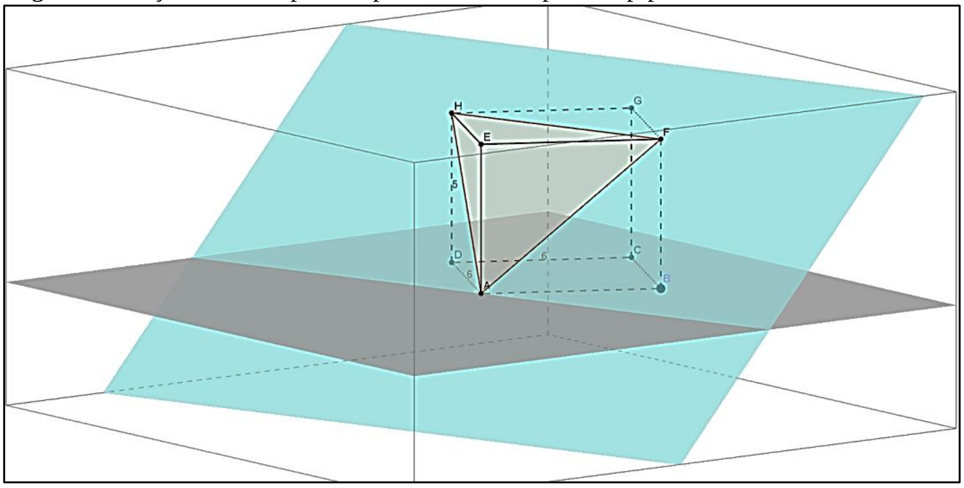
Quadro 8: Atividades envolvendo seção definida por um plano em um paralelepípedo

Considere três pontos M, N e P em três retas paralelas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ de um paralelepípedo $ABCDEFGH$ e estude a seção determinada no paralelepípedo pelo plano definido por estes três pontos. Como duas faces opostas de um paralelepípedo são paralelas, qualquer plano que corte estas faces o faz segundo retas paralelas. Suponha que as arestas do paralelepípedo sejam $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$ e $\overline{AE} = 5$. Considere a situação em que $M = A, N = F, P = H$.

Fonte: LIMA et al., (1998, p. 185)

Para resolver esta atividade (Quadro 8) o estudante precisa converter do registro da língua natural para o registro geométrico, identificando as variáveis visuais pertinentes. Acredita-se que ao utilizar o Geogebra 3D, para construir o paralelepípedo (Figura 13), o estudante terá a oportunidade de relembrar as propriedades deste sólido geométrico, poderá marcar os pontos M, N e P com precisão, o que possibilitará definir o plano $\alpha = pl(M, N, P)$ e, assim, verificar a figura geométrica definida pelo plano α no paralelepípedo, ou seja, um triângulo. Entende-se que esta atividade se for realizada sem o auxílio de um software limitará o trabalho com diferentes conceitos.

Figura 13: Seção definida por um plano α em um paralelepípedo



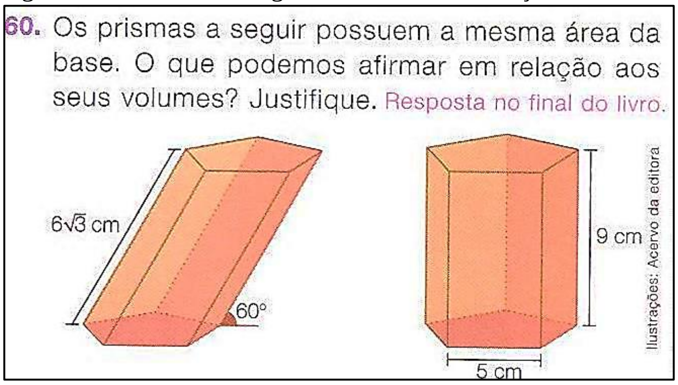
Fonte: Elaborado pela autora.

O nível da *Dedução Informal* é raramente explorado nas atividades, assim como nas pesquisas analisadas no mapeamento, nas quais apenas uma utilizou este nível na elaboração de atividades. Há apenas três atividades categorizadas neste nível, uma delas aborda o conteúdo/conceito de área do cone e as outras volume de prisma. Em relação aos contextos, uma das atividades está relacionada ao cotidiano e as outras a própria matemática.

Atividades categorizadas, neste nível, requerem que o estudante, de alguma forma, resolva problemas em que as propriedades das figuras e as inter-relações sejam importantes, que necessite desenvolver e usar algumas definições, identifique conjuntos mínimos de propriedades para descrever uma figura, entre outros.

A Figura 14 apresenta uma dessas atividades, a qual exige que o estudante, para afirmar algo sobre os volumes, compreenda o princípio de Cavalieri (apresenta uma definição para volume de sólidos). Este princípio afirma que o volume de um sólido é o mesmo, se a altura e a área da base são iguais, realizando assim uma comparação e para verificar se a altura dos prismas são iguais, o estudante precisa utilizar uma razão trigonométrica, a saber, o seno.

Figura 14: Atividade categorizada no nível Dedução Informal na C1

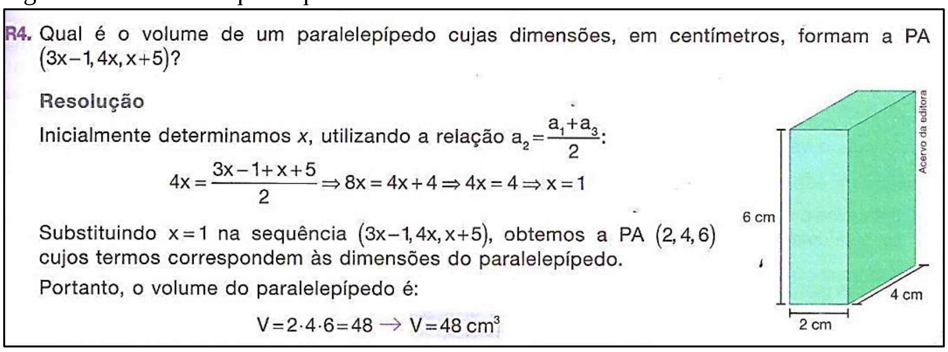


60. Os prismas a seguir possuem a mesma área da base. O que podemos afirmar em relação aos seus volumes? Justifique. Resposta no final do livro.

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Quanto a categoria transformações cognitivas, constata-se que das 4 atividades categorizadas que não pertencem aos capítulos específicos de Geometria Espacial, 3 delas estão localizadas no volume 1 da coleção e 1 no volume 3, 2 exigem a conversão do registro geométrico para o numérico, estas categorizadas no nível *Visualização*; 1 exige a conversão do registro da língua natural para o numérico, tendo como registro intermediário o geométrico, categorizada no nível *Visualização*; e 1 atividade requer a conversão do registro da língua natural para o algébrico, tendo como registro intermediário o geométrico, categorizada no nível *Análise*, exemplifica este resultado a atividade exposta na Figura 15.

Figura 15: Atividade que requer conversão na C1



R4. Qual é o volume de um paralelepípedo cujas dimensões, em centímetros, formam a PA $(3x-1, 4x, x+5)$?

Resolução

Inicialmente determinamos *x*, utilizando a relação $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$:

$$4x = \frac{3x-1+x+5}{2} \Rightarrow 8x = 4x+4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo $x = 1$ na sequência $(3x-1, 4x, x+5)$, obtemos a PA $(2, 4, 6)$ cujos termos correspondem às dimensões do paralelepípedo.

Portanto, o volume do paralelepípedo é:

$$V = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \rightarrow V = 48\ cm^3$$

Fonte: Volume 1 da coleção analisada

Os conceitos abordados na atividade (Figura 15) são: volume, sequência (em seu caso específico, progressão aritmética) e média aritmética. Compreende-se que atividades como estas favorecem a articulação entre diferentes conteúdos/conceitos, bem como a mobilização e articulação entre várias representações semióticas.

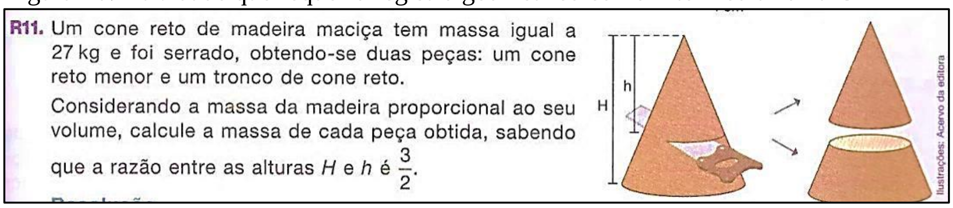
Ainda, em relação a categoria transformações cognitivas abordadas no volume 3, identifica-se que a conversão do registro da língua natural para o algébrico, tendo como intermédio o geométrico (Quadro 9) é a transformação cognitiva proposta em maior número (31,1% do total de atividades).

Quadro 9: Transformações cognitivas exploradas no volume 3 da C1

Transformações cognitivas	Níveis de Van Hiele		
	Visual.	**Análise**	**Ded. Inf.**
Tratamento Geométrico	1	0	0
Tratamento Língua Natural	0	6	0
Tratamento na língua natural, tendo auxilio do geométrico, figural e numérico	0	17	0
Tratamento na língua natural, com proposta de passar pelo registro geométrico	0	0	1
Conversão do registro figural para algébrico e intermediário o geométrico	1	0	0
Conversão registro figural para algébrico e intermediário o gráfico	1	0	0
Conversão do registro geométrico para algébrico	18	0	0
Conversão do registro geométrico para numérico	25	2	1
Conversão do registro da língua natural para algébrico	70	1	1
Conversão registro da língua natural para algébrico e intermediário o figural	0	3	0
Conversão do registro da língua natural para o geométrico	0	1	0
Conversão do registro da língua natural para algébrico, com proposta de passar pelo e intermediário geométrico.	0	23	0
Conversão do registro da língua natural para algébrico e intermediário geométrico.	52	27	0
Conversão do registro da língua natural para o algébrico e intermediário num.	2	0	0
Conversão do registro da língua natural para o gráfico	0	1	0

É importante registrar que 65,8% das atividades que tomaram o registro geométrico como intermediário, estão classificadas no nível de *Visualização* e 53,2% das atividades que tomaram o registro geométrico como intermediário, abordam o conceito de volume, sendo que 21,4% do total das atividades de volume enfatizam o volume de tronco de cone. A atividade exposta na Figura 16 exemplifica a afirmação anterior, pois possibilita que o estudante mobilize vários conceitos, tais como: volume, proporcionalidade, semelhança entre cones, regra de três simples.

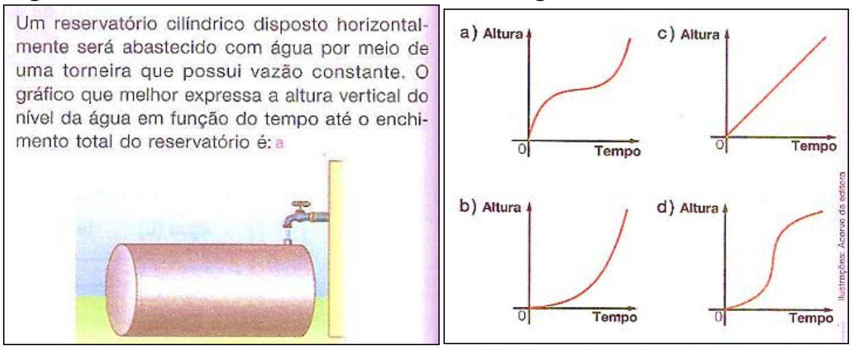
Figura 16: Atividade que requer o registro geométrico como intermediário na C1


R11. Um cone reto de madeira maciça tem massa igual a 27 kg e foi serrado, obtendo-se duas peças: um cone reto menor e um tronco de cone reto.
Considerando a massa da madeira proporcional ao seu volume, calcule a massa de cada peça obtida, sabendo que a razão entre as alturas H e h é $\frac{3}{2}$.

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Analisando os dados do Quadro 9 pode-se constatar que as atividades que envolvem, de alguma forma, o registro gráfico, não chegam a 1% do total de atividades analisadas do volume 3. O pouco trabalho com este registro pode dificultar a construção de relações, pelo estudante, por exemplo, entre o conceito de volume e o conceito de função como é apresentado na Figura 17, a qual requer que o estudante analise como as grandezas envolvidas variam. Em outras palavras, analisar (identificando as unidades geométricas relevantes do registro gráfico) que no início do abastecimento a altura aumenta rapidamente, no meio a altura aumenta, mas de forma mais lenta, e no final volta a aumentar rapidamente. Esta análise pode ser feita por meio da verificação da inclinação da reta tangente a um ponto da curva (taxa de variação).

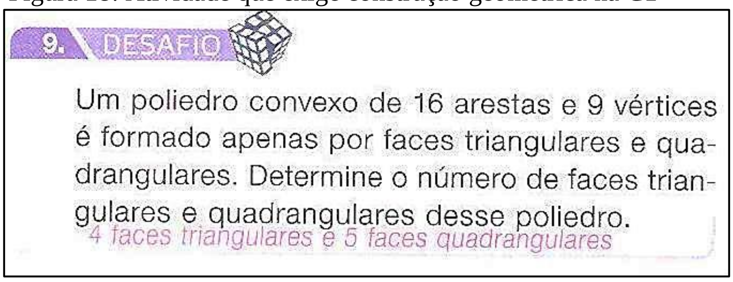
Figura 17: Atividade envolvendo conversão de registros na C1



Fonte: Volume 3 da coleção analisada

As atividades categorizadas no nível de *Dedução Informal* proporcionam ao estudante a identificação de algumas propriedades necessárias à descrição de uma figura, bem como, o desenvolvimento e utilização de algumas definições, entre outras capacidades. Outro aspecto a ser destacado são as construções geométricas, as atividades que as exigem construções geométricas representam apenas 9,9% do total, mesmo se tratando da unidade de geometria, especialmente, Geometria Espacial. Por exemplo, a Figura 18 pede que o estudante esboce um poliedro em que não seja válida a Relação de Euler, para isso ele deve saber, pelo menos, as propriedades de um poliedro e o significado dessa relação.

Figura 18: Atividade que exige construção geométrica na C1

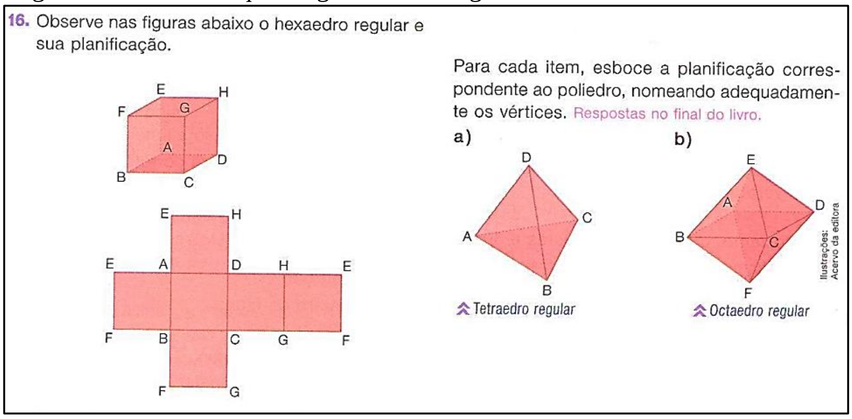

9. DESAFIO

Um poliedro convexo de 16 arestas e 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Determine o número de faces triangulares e quadrangulares desse poliedro.
4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Em relação as atividades que exigem algum tipo de tratamento, estas representam 7,8% do total de atividades analisadas no volume 3. Pode-se destacar o tratamento na língua natural, tendo como auxiliar o geométrico, figural e numérico, que foi o mais enfatizado dentre os tratamentos. É importante registrar que apenas uma atividade exige um tratamento geométrico e está categorizada no nível de *Visualização* (Figura 19), nível este, como já mencionado, requer que os estudantes construam figuras geométricas, identifiquem uma figura ou uma relação geométrica, descrevam figuras geométricas e construções usando a linguagem adequada.

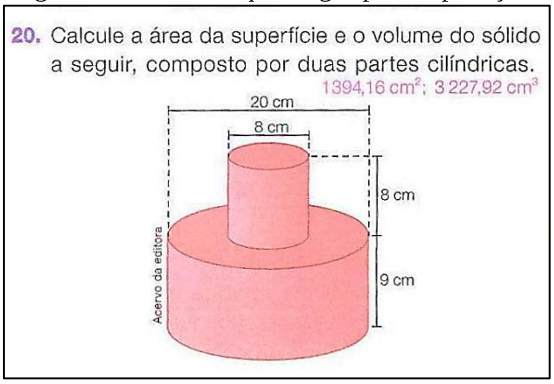
Figura 19: Atividade que exige tratamento geométrico na C1



Fonte: Volume 3 da coleção analisada

A maioria das atividades categorizadas como conversão do registro da língua natural para o algébrico, tendo como intermédio o geométrico, dependendo da forma como sejam encaminhadas pelos professores podem reduzir-se a aplicação de fórmulas, por exemplo, a atividade representada na Figura 20.

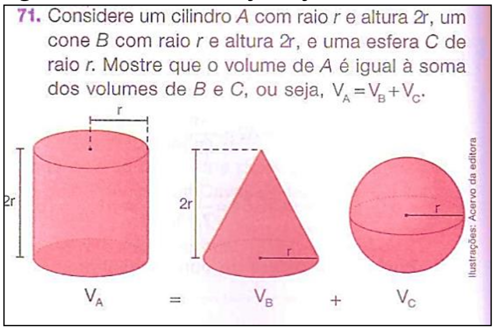
Figura 20: Atividade que exige apenas aplicação de fórmula na C1



Fonte: Volume 3 da coleção analisada

As atividades cujo objetivo é “mostrar” são raras. Há apenas uma atividade que solicita a relação entre o volume do cilindro com a adição do volume da pirâmide e da esfera (todos com a mesma altura e raio) (Figura 21).

Figura 21: Atividade cujo objetivo é “mostrar” na C1



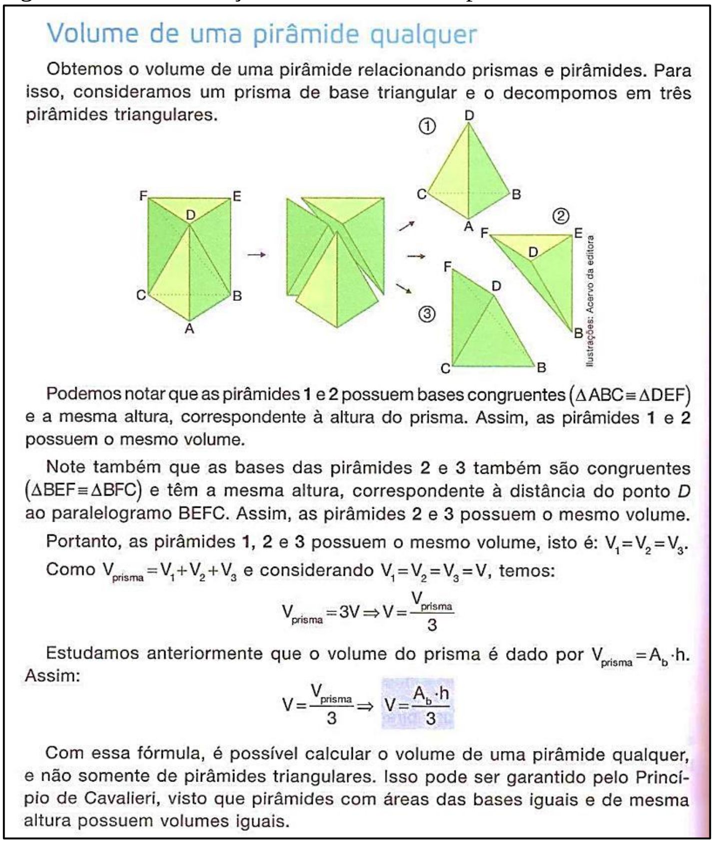
Fonte: Volume 3 da coleção analisada

A atividade acima (Figura 21) pode ser construída no Geogebra, potencializando a articulação com conceitos de Geometria Plana e o trabalho com os conceitos de Geometria de Posição; por exemplo, planos paralelos, reta perpendicular a um plano.

A partir da análise realizada referente às transformações cognitivas, constata-se que a coleção valoriza as conversões, sendo esta uma importante atividade cognitiva para a aquisição dos conteúdos, pois conforme Duval (2012), a compreensão do objeto matemático está relacionada à capacidade de mobilizar, ao menos, dois registros de representação, assim não sendo confundido em suas representações e que seja reconhecido em cada uma delas. Mesmo que as atividades em sua grande maioria explorem a conversão, estas tem sempre o mesmo sentido, a saber, do registro da língua natural para o algébrico, tendo como intermédio o geométrico, ainda que a mobilização de dois ou mais registros seja importante, deve-se destacar que a conversão no sentido contrário também se faz importante para um melhor entendimento do objeto matemático.

No que se refere as leis matemáticas demonstradas no estudo dos conceitos da Geometria Espacial, constata-se que de um total de 18 conteúdos/conceitos propostos na unidade de *Geometria* do volume 3, com possibilidades de serem demonstrados aos estudantes para seu melhor entendimento e compreensão sobre o que está sendo estudando, há um total de 88,9% que possui demonstração com finalidade de exemplificação, por exemplo, o conteúdo/conceito de *Volume de uma pirâmide* (Figura 22). Cabe destacar que não há atividades em que os estudantes tenham que realizar demonstrações.

Figura 22: Demonstração – volume de uma pirâmide na C1



Volume de uma pirâmide qualquer

Obtemos o volume de uma pirâmide relacionando prismas e pirâmides. Para isso, consideramos um prisma de base triangular e o decompomos em três pirâmides triangulares.

Podemos notar que as pirâmides **1** e **2** possuem bases congruentes $(\Delta ABC \equiv \Delta DEF)$ e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides **1** e **2** possuem o mesmo volume.

Note também que as bases das pirâmides **2** e **3** também são congruentes $(\Delta BEF \equiv \Delta BFC)$ e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto *D* ao paralelogramo BEFC. Assim, as pirâmides **2** e **3** possuem o mesmo volume.

Portanto, as pirâmides **1**, **2** e **3** possuem o mesmo volume, isto é: $V_1 = V_2 = V_3$.

Como $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$ e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Estudamos anteriormente que o volume do prisma é dado por $V_{prisma} = A_b \cdot h$.
Assim:

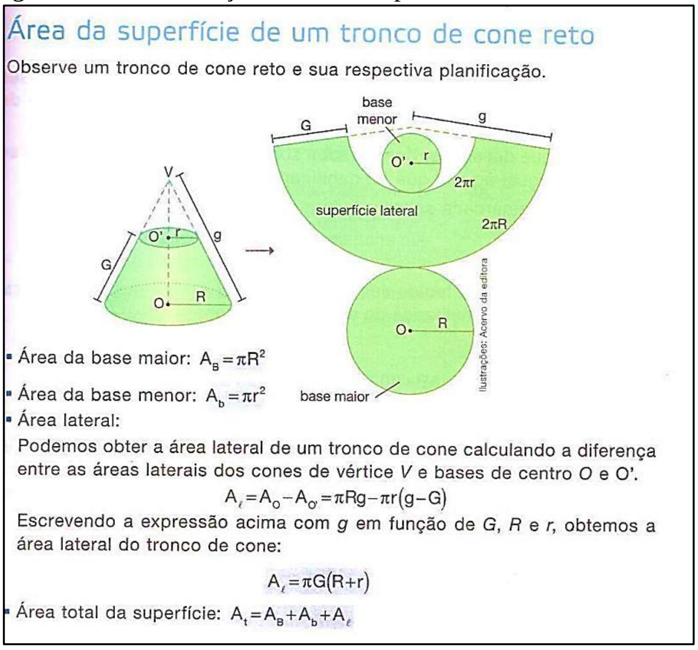
$$V = \frac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

Com essa fórmula, é possível calcular o volume de uma pirâmide qualquer, e não somente de pirâmides triangulares. Isso pode ser garantido pelo Princípio de Cavalieri, visto que pirâmides com áreas das bases iguais e de mesma altura possuem volumes iguais.

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Os demais conteúdos/conceitos que possuem demonstrações utilizam induções (partindo de casos particulares para uma conclusão geral) e deduções (partindo de um caso geral para um específico), partindo de fórmulas já vistas em momentos anteriores ou já demonstradas, por exemplo, o conteúdo/conceito de *Área da superfície de um tronco de cone reto* (Figura 23). Quanto ao conteúdo/conceito do *Princípio de Cavalieri* e *Volume de um prisma qualquer*, verifica-se que apenas são apresentadas as fórmulas e tomadas como válidas. Esta coleção não apresenta nenhum tipo de teorema, corolário, entre outros.

Figura 23: Demonstração – área da superfície de um tronco de cone reto na C1



Área da superfície de um tronco de cone reto

Observe um tronco de cone reto e sua respectiva planificação.

- Área da base maior: $A_B = \pi R^2$
- Área da base menor: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral:

Podemos obter a área lateral de um tronco de cone calculando a diferença entre as áreas laterais dos cones de vértice *V* e bases de centro *O* e *O'*.

$$A_\ell = A_O - A_{O'} = \pi R g - \pi r(g - G)$$

Escrevendo a expressão acima com *g* em função de *G*, *R* e *r*, obtemos a área lateral do tronco de cone:

$$A_\ell = \pi G(R + r)$$

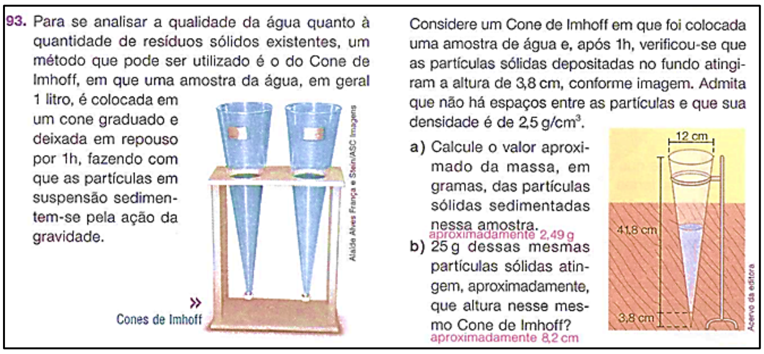
- Área total da superfície: $A_t = A_B + A_b + A_\ell$

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Esta coleção, ainda, apresenta ao final de cada capítulo o item *Atividades complementares*, no qual são propostas atividades com o intuito de revisar todo o conteúdo explorado. Constatou-se um total de 57 *atividades complementares* nos capítulos destinados ao estudo da Geometria Espacial.

Ao analisar as *Atividades complementares*, pode-se destacar que as atividades que envolvem situações cotidianas são as mais enfatizadas, tendo um total de 55,4%, sendo que deste total mais de 90% a situação é apenas ilustrativa. As atividades relacionadas a outras áreas do conhecimento ganham pouco destaque, assim como as atividades resolvidas e propostas desta coleção, representando um percentual de 5,4% apenas. Atividades como as expostas na Figura 24 são importantes para os estudantes compreenderem que a matemática também é utilizada para solucionar problemas de outras áreas do conhecimento.

Figura 24: Atividade complementar com contexto relacionado a outras áreas do conhecimento na C1



93. Para se analisar a qualidade da água quanto à quantidade de resíduos sólidos existentes, um método que pode ser utilizado é o do Cone de Imhoff, em que uma amostra da água, em geral 1 litro, é colocada em um cone graduado e deixada em repouso por 1h, fazendo com que as partículas em suspensão sedimentem-se pela ação da gravidade.

Considere um Cone de Imhoff em que foi colocada uma amostra de água e, após 1h, verificou-se que as partículas sólidas depositadas no fundo atingiram a altura de 3,8 cm, conforme imagem. Admita que não há espaços entre as partículas e que sua densidade é de 2,5 g/cm³.

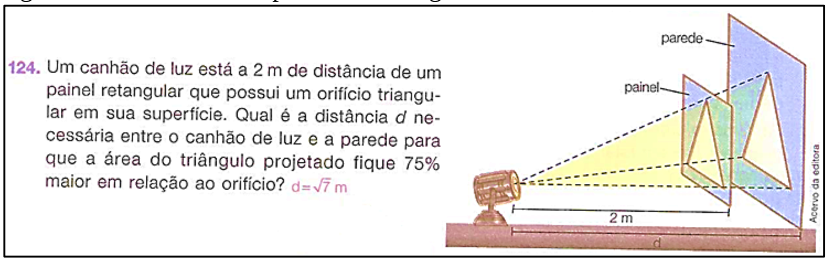
a) Calcule o valor aproximado da massa, em gramas, das partículas sólidas sedimentadas nessa amostra.
aproximadamente 2,49 g

b) 25 g dessas mesmas partículas sólidas atingem, aproximadamente, que altura nesse mesmo Cone de Imhoff?
aproximadamente 8,2 cm

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Observou-se que apenas os dois primeiros níveis de Van Hiele, *Visualização* e *Análise*, estão contemplados nas *Atividades complementares*. O nível que recebeu mais destaque foi o da *Análise*, com 94,6% do total. A Figura 25 apresenta uma atividade considerada como uma situação do cotidiano e categorizada no nível mais enfatizado. Esta atividade aborda o conceito/conteúdo de área da superfície de um poliedro e proporcionalidade.

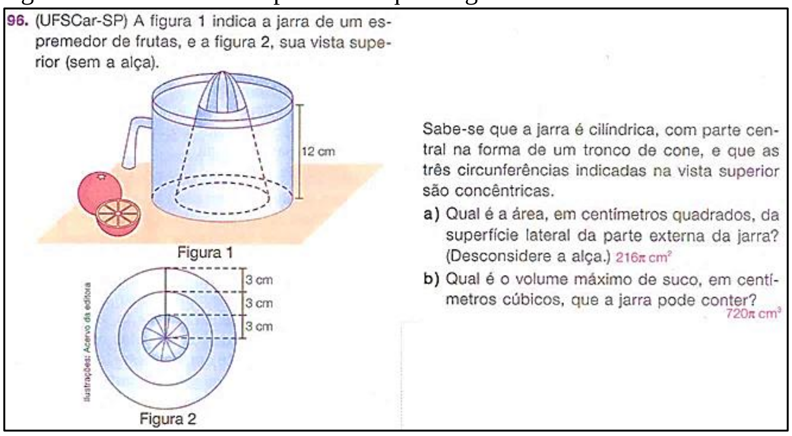
Figura 25: Atividade complementar categorizada no nível Análise na C1


124. Um canhão de luz está a 2 m de distância de um painel retangular que possui um orifício triangular em sua superfície. Qual é a distância *d* necessária entre o canhão de luz e a parede para que a área do triângulo projetado fique 75% maior em relação ao orifício? $d = \sqrt{7}$ m

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

Analisando as *Atividades complementares* quanto as transformações cognitivas, há um total de 9% das atividades que exigem tratamento com ênfase no registro da língua natural, atividades estas em que ocorre apenas uma transformação interna no próprio registro. A conversão, assim como nas atividades resolvidas e propostas da coleção, é a transformação cognitiva mais exigida, sendo este um ponto positivo, pois Duval (2012) menciona que a mobilização de dois ou mais registro contribuem para a apreensão conceitual do objeto matemático. Dentre as conversões, a mais enfatizada é a do registro da língua natural para o algébrico, tendo como intermédio o registro geométrico, com um total de 43,1%.

Figura 26: Atividade complementar que exige conversão na C1


96. (UFSCar-SP) A figura 1 indica a jarra de um espremedor de frutas, e a figura 2, sua vista superior (sem a alça).

Sabe-se que a jarra é cilíndrica, com parte central na forma de um tronco de cone, e que as três circunferências indicadas na vista superior são concêntricas.

a) Qual é a área, em centímetros quadrados, da superfície lateral da parte externa da jarra? (Desconsidere a alça.) 216π cm²

b) Qual é o volume máximo de suco, em centímetros cúbicos, que a jarra pode conter? 720π cm³

Fonte: Volume 3 da coleção analisada

A Figura 26 apresenta uma atividade que envolve a conversão mais enfatizada e categorizada no nível *Análise*. Esta situação é categorizada como do cotidiano, mas é apenas ilustrativa, visto que a ênfase está nos conceitos/conteúdos de área e volume. Cabe destacar, que o registro geométrico, sendo ele de partida, chegada ou intermediário, é bastante explorado nas atividades complementares, representando um total de 54,9%.

Diante deste contexto, pode-se constatar que a C1 propõe 315 atividades envolvendo conceitos da Geometria Espacial. A maioria destas atividades envolve o contexto da própria matemática, o nível *Análise* e atividade cognitiva de conversão. Quanto as demonstrações, verifica-se que estas são apresentadas apenas com finalidade de explicação, não sendo exigidas em nenhuma atividade.

3.2 ANÁLISE DA COLEÇÃO 2 (C2)

Na coleção 2, foi analisado um total de 166 atividades, sendo elas resolvidas e propostas e presentes nos 3 volumes da coleção. Dentre elas, 164 estão dispostas no volume 2 da coleção, o qual apresenta capítulos referentes ao ensino da Geometria Espacial. Verificou-se que há apenas duas atividades envolvendo o tema em questão que não pertencem aos capítulos específicos de Geometria Espacial. Estas atividades foram identificadas no volume 1 e 3 da coleção. A partir destes dados pode-se afirmar que, de certa forma, a Geometria Espacial/conceitos geométricos é/são apresentados ao estudantes de forma isolada de outros conceitos matemáticos, em especial, do conceito de função.

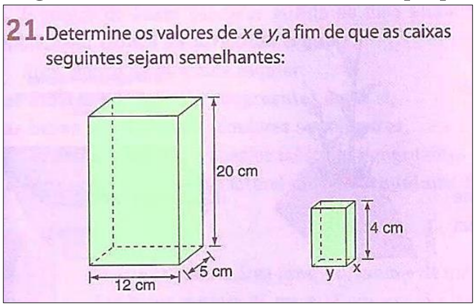
Quanto a categoria análise de contextos indicados nas atividades, expõe-se os resultados no Quadro 10.

Quadro 10: Contextos apresentados nas atividades da C2

Contexto	**Volumes da coleção B**		
	V1	**V2**	**V3**
Própria Matemática	1	124	1
Cotidiano	0	35	0
Outra área do conhecimento	0	5	0

Os dados do Quadro 10 indicam que o contexto da “própria matemática” é o mais evidenciado nas atividades, atingindo um total de 76%. Nestas atividades os conteúdos/conceitos envolvidos, em sua maioria, são: geometria de posição; princípio de Cavalieri; área, razão entre áreas e volume de sólidos geométricos; elementos, classificação e semelhança de sólidos geométricos; proporcionalidade. A figura 27 representa uma atividade do contexto mais enfatizado. Para resolvê-la o estudante deve compreender que as caixas serão semelhantes se há proporcionalidade, o que permite determinar a razão existente entre as medidas dadas.

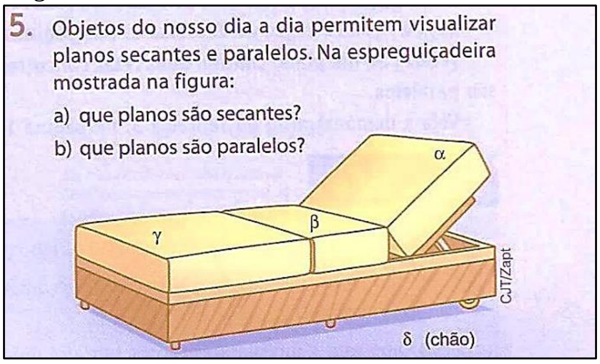
Figura 27: Atividade do contexto da própria matemática na C2



Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Verifica-se, também, um total de 21% de atividades envolvendo situações cotidianas. Contudo, é importante registrar que 71,4% deste total é apenas uma situação ilustrativa que não interfere na resolução da atividade. A situação apresentada na Figura 28 exemplifica a afirmação anterior, pois a atividade apresenta um objeto do nosso dia a dia, uma espreguiçadeira, neste caso, é utilizada para a visualização dos planos secantes e paralelos, podendo ser qualquer outro objeto.

Figura 28: Atividade do contexto cotidiano na C2



Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Pode-se destacar em relação a categoria contexto, que a C2 enfatiza mais o contexto da própria matemática do que a C1, valorizando o ambiente puramente. Contudo, esta coleção apresenta mais atividades de outras áreas do conhecimento do que a C1. As atividades categorizadas no contexto cotidiano são mais enfatizadas na C1. Ressalta-se que as orientações curriculares (BRASIL 2002, BRASIL, 2006) sugerem que sejam propostas situações cujos contextos aproximem-se do cotidiano dos estudantes. Contudo, não basta propor atividades em que o contexto é apenas ilustrativo.

Ainda nesta categoria de análise, tem-se o contexto relacionado a atividades que envolvem outras áreas do conhecimento, como engenharia e marcenaria, as quais representam 3% do total de atividades. A Figura 29 apresenta uma atividade categorizada neste contexto que relaciona o conteúdo/conceito volume e razão com a área de engenharia, sendo esta uma forma de mostrar aos estudantes aplicações para os conceitos matemáticos.

Figura 29: Atividade que envolve outra área do conhecimento na C2

28. (PUC-RS) O metrônomo é um relógio que mede o tempo musical (andamento). O metrônomo mecânico consiste de um pêndulo oscilante, com a base fixada em uma caixa com a forma aproximada de um tronco de pirâmide, como mostra a foto.

Relativamente ao tronco de pirâmide ABCDEFGH, representado na figura abaixo, *a* é a medida do lado da base maior, *b* é a medida do lado da base menor e V é o volume. Sabendo que a = 4b e P é o volume da pirâmide ABCDX, determine a razão $\frac{V}{P}$.

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

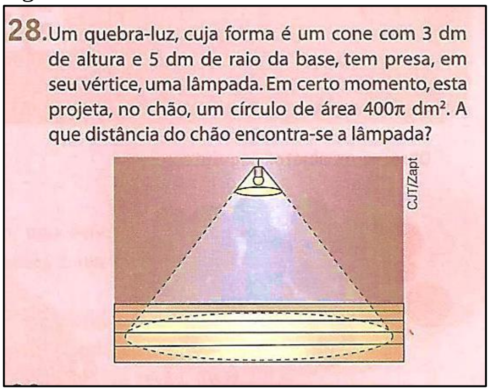
Na categoria de análise destinada a verificar quais níveis de Van Hiele estão contemplados nas atividades (Quadro 11), percebe-se que apenas dois níveis, dos cinco, são representados no total de atividades analisadas.

Quadro 11: Níveis de Van Hiele apresentados nas atividades da coleção B

Níveis de Van Hiele	**Volumes da coleção B**		
	V1	**V2**	**V3**
Visualização	0	31	0
Análise	1	133	1

Verifica-se que o nível de Van Hiele mais enfatizado nas atividades é o da *Análise*, o qual possui um total de 81,3%. A maioria das atividades categorizadas neste nível estão nos capítulos denominados *Pirâmide* e *Cone* (cada um com 20,7% do total de atividades no nível *Análise*), nestes são abordadas situações que trabalham com o reconhecimento de propriedades, elementos do sólido, razão e semelhança entre esses sólidos, área, volume, entre outros. Por exemplo, a atividade apresentada na Figura 30 pertencente ao nível mais enfatizado, ou seja, está categorizada no contexto cotidiano, explorando os conceitos/conteúdos de tronco de cone e semelhança de triângulos. Nesta atividade o estudante deve determinar o raio do círculo projetado e após identificar a semelhança entre os triângulos, para assim calcular a distância procurada.

Figura 30: Atividade do nível de Análise na C2

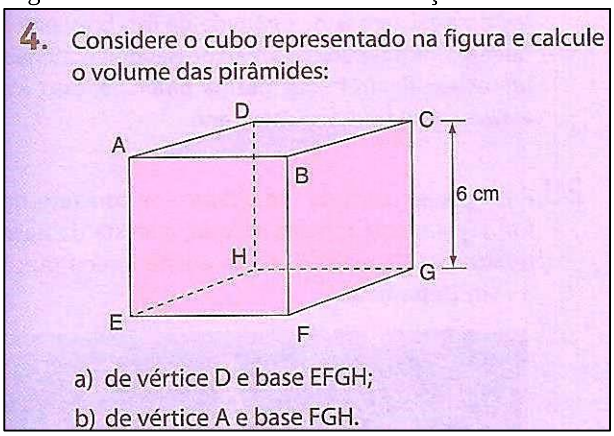


28. Um quebra-luz, cuja forma é um cone com 3 dm de altura e 5 dm de raio da base, tem presa, em seu vértice, uma lâmpada. Em certo momento, esta projeta, no chão, um círculo de área 400π dm². A que distância do chão encontra-se a lâmpada?

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

O nível da *Visualização* obteve um percentual “baixo” (18,7%) considerando a comparação com a C1. A maioria das atividades categorizadas neste nível utiliza o conteúdo/conceito de volume (48,4% do total de atividades no nível *Visualização*), por exemplo, a atividade exposta na Figura 31 solicita ao estudante o cálculo do volume do cubo por meio de dados apresentados no registro geométrico.

Figura 31: Atividade do nível Visualização na C2



4. Considere o cubo representado na figura e calcule o volume das pirâmides:

a) de vértice D e base EFGH;

b) de vértice A e base FGH.

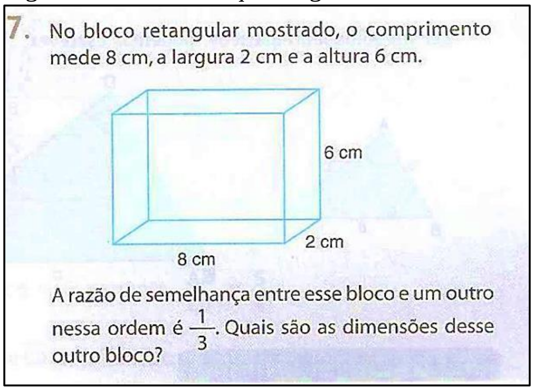
Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Pode-se destacar em relação a categoria níveis de Van Hiele que, as duas coleções analisadas enfatizam mais o nível *Análise*. Contudo, a C1 possui uma grande porcentagem

(40,3%) referente ao nível *Visualização* comparado a C2. O nível *Dedução Informal* é muito pouco destacado nas atividades da C1, mas ainda é apresentado, visto que na C2 não há atividades categorizadas neste nível.

Ao analisar as atividades quanto a categoria transformações cognitivas, pode-se averiguar que as 2 atividades analisadas que não estão presentes nos capítulos específicos da Geometria Espacial exigem a conversão do registro da língua natural para o algébrico, tendo como intermediário o registro geométrico, categorizadas no nível de *Análise*, abordando os conceitos/conteúdos de volume e dimensões de um sólido geométrico. Por exemplo, a atividade apresentada na Figura 32 que faz com que o estudante mobilize, a partir das dimensões e razão apresentada, a semelhança entre blocos mantendo-se a proporcionalidade entre eles.

Figura 32: Atividade que exige conversão na C2



Fonte: Volume 1 da coleção analisada

Nos capítulos específicos sobre Geometria Espacial, observa-se que a conversão do registro da língua natural para o algébrico (Quadro 12) é a transformação cognitiva mais evidenciada com um total de 37,8%, sendo que em sua maioria, as atividades reduzem-se a aplicação de fórmulas.

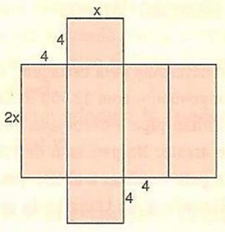
Quadro 12: Transformações cognitivas exploradas no volume 3 da C2

Transformações cognitivas	**Níveis de Van Hiele**	
	Visual.	**Análise**
Tratamento Língua Natural	1	10
Tratamento na língua natural, com proposta de passar pelo registro geométrico	0	1
Conversão registro figural para língua natural	1	0
Conversão registro figural para numérico	1	0
Conversão do registro geométrico para algébrico	13	0
Conversão do registro geométrico para língua natural	11	0
Conversão do registro língua natural para algébrico	0	62
Conversão do registro da língua natural para algébrico e intermédio o figural	0	7
Conversão do registro da língua natural para algébrico e intermédio o figural e o geométrico	0	1

Conversão do registro da língua natural para algébrico e intermédio o figural e com proposta de passar pelo registro geométrico	0	1
Conversão do registro da língua natural para o algébrico e intermédio o geométrico	4	28
Conversão do registro da língua natural para o algébrico e com proposta de passar pelo registro geométrico	0	22
Conversão do registro da língua natural para algébrico e intermediário tabular	0	1

Cabe destacar que as atividades que tomaram o registro geométrico como intermediário possuem um percentual de 34,2% do total de atividades dos capítulos destinados ao tema da pesquisa, podendo ser considerado "baixo" por se tratar de conceitos geométricos e considerando que esse registro intermediário pode auxiliar na compreensão dos estudantes. Há um percentual de 76,8% das atividades que tomaram o registro geométrico como intermediário que abordam o conteúdo/conceito de volume, relacionando este com outros, por exemplo, área e razão entre sólidos (Figura 33), e 42,9% das atividades que tomaram o registro geométrico como intermediário que abordam especificamente o conteúdo/conceito de volume (Figura 34).

Figura 33: Atividade que envolve volume na C2



5. A figura mostra a planificação de um paralelepípedo retângulo no qual a unidade das dimensões indicadas é o centímetro. Determine:

a) x, sabendo que a área total do paralelepípedo é igual a 364 cm²;
b) o volume do paralelepípedo para x = 4 cm;
c) a medida da diagonal do paralelepípedo para x = 6 cm.

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Figura 34: Atividade que envolve apenas volume na C2

10. Determine o volume da pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede $6\sqrt{2}$ cm e a aresta lateral mede 10 cm.

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Pode-se sublinhar, também, o fato que dentre todas as atividades analisadas apenas 1 envolveu, de alguma forma, o registro tabular (Figura 35) para tratar do conceito/conteúdo de volume de pirâmide.

Figura 35: Atividade envolvendo registro tabular na C2

19. (Unesp-SP) Na periferia de uma determinada cidade brasileira, há uma montanha de lixo urbano acumulado, que tem a forma de uma pirâmide regular de 12 m de altura em que a base é um quadrado cujo lado mede 100 m. Considere os dados, apresentados em porcentagem na tabela, sobre a composição dos resíduos sólidos urbanos no Brasil e no México.

	País	
	Brasil	México
Orgânico (%)	55	42,6
Metais (%)	2	3,8
Plásticos (%)	3	6,6
Papelão/papel (%)	25	16,0
Vidro (%)	2	7,4
Outros (%)	13	23,6

Fonte: Cempre/Tetra Pak Américas/EPA 2002.

Supondo que o lixo na pirâmide esteja compactado, determine o volume aproximado de plásticos e vidros existentes na pirâmide de lixo brasileira e quantos metros cúbicos a mais desses dois materiais juntos existiriam nessa mesma pirâmide, caso ela estivesse em território mexicano.

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

As construções geométricas que poderiam ser bastante evidenciadas no desenvolvimento das atividades analisadas, são deixadas de lado, não há nenhuma atividade que aborde esse procedimento. Cabe destacar que, mesmo de uma forma reduzida, 4,9% do total de atividades analisadas na coleção, são trabalhados conteúdos/conceitos de proporcionalidade e razão entre áreas e volume de sólidos geométricos (Figura 36). A relação entre esses conceitos auxilia no desenvolvimento do raciocínio proporcional, raciocínio este "útil na interpretação de fenômenos do mundo real, na compreensão de várias áreas do conhecimento, bem como, no aprendizado de outros conceitos da própria matemática" (SOARES e NEHRING, 2013, p.4).

Figura 36: Atividade envolvendo razão entre áreas na C2

29. A altura de uma pirâmide regular quadrangular é 45 cm. Ela é interceptada, a 15 cm de seu vértice, por um plano paralelo à base, que determina uma nova pirâmide e um tronco de pirâmide. Sabendo que a aresta da base da pirâmide primitiva é 60 cm, determine:

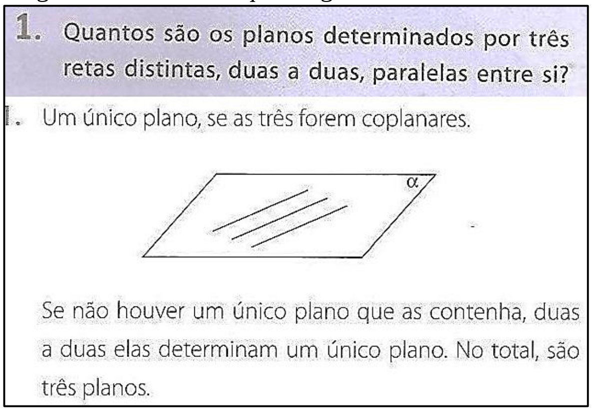
a) a medida da aresta da base da pirâmide obtida;

b) a razão entre as áreas totais da pirâmide primitiva e da pirâmide obtida.

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Ao analisar os tipos de tratamentos, verificou-se que apenas um tipo é exigido nas atividades, o registro da língua natural, o qual representa 7,3% do total de atividades analisadas no volume 2 da coleção. Dentre essas atividades, apena 1 apresenta a proposta, no manual do professor, de analisar o registro geométrico, categorizada no nível de *Análise*, abordando o conteúdo/conceito de geometria de posição no contexto da própria matemática (Figura 37).

Figura 37: Atividade que exige tratamento na C2



1. Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas, paralelas entre si?

1. Um único plano, se as três forem coplanares.

Se não houver um único plano que as contenha, duas a duas elas determinam um único plano. No total, são três planos.

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Ao analisar quais leis matemáticas e teoremas são demonstrados em relação ao estudo dos conceitos da Geometria Espacial, verificou-se que dentre 24 conteúdos que possibilitam ser demonstrados aos estudantes, no volume 2, há um total de 83,3% que possui demonstração com finalidade de explicação. Já 30% desse total, apresenta uma forma de demonstração que faz o uso de propriedades e teoremas, por exemplo, o conteúdo/conceito de *Volume do tronco de cone* (Figura 38).

Figura 38: Demonstração – volume do tronco de cone na C2

Volume

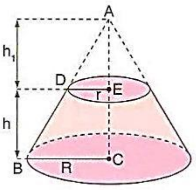
Considere um tronco de cone de bases paralelas, cuja altura é *h*. Sendo R o raio da base maior e *r* o raio da base menor, então o volume V do tronco é:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [R^2 + R \cdot r + r^2]$$

Demonstração:

O volume V do tronco de cone será obtido pela diferença entre os volumes dos dois cones, ou seja:

$$V = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot (h + h_1)}_{\text{volume do cone "original" (ou "primitivo")}} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h_1}_{\text{volume do novo cone}}$$



$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot h_1] \quad (1)$$

Como os triângulos ACB e AED são semelhantes, temos:

$$\frac{h_1 + h}{h_1} = \frac{R}{r} \Rightarrow h_1 = \frac{h \cdot r}{R - r} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left[R^2 \cdot h + (R^2 - r^2) \cdot \frac{h \cdot r}{R - r}\right]$$

Como $R^2 - r^2 = (R + r) \cdot (R - r)$, obtemos:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h + (R + r) \cdot hr] \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3} \cdot [R^2 + Rr + r^2]$$

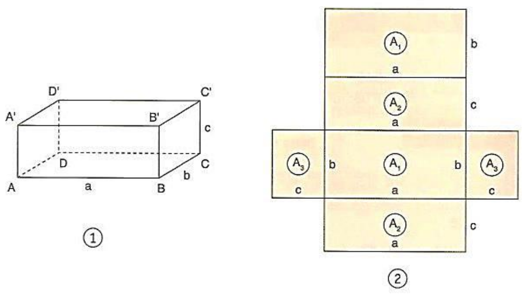
Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Os demais conteúdos/conceitos são demonstrados a partir de induções (partindo de casos particulares para uma conclusão geral) e deduções (partindo de um caso geral para um específico), partindo de fórmulas já vistas em momentos anteriores ou já demonstradas, por exemplo, o conteúdo/conceito de *Área total do paralelepípedo* (Figura 39). Os conteúdos/conceitos de *Área de um prisma*, *Área de uma pirâmide*, *Área e volume do tronco de uma pirâmide* apenas apresentam a fórmula e as consideram como válidas.

Figura 39: Demonstração – área total do paralelepípedo na C2

Cálculo da área total

A figura (1) representa um paralelepípedo retângulo, em que *a* e *b* são as medidas dos lados do retângulo da base e *c*, a medida da altura. A figura (2) representa a planificação desse paralelepípedo.



A planificação do paralelepípedo mostra que sua superfície é a reunião de seis retângulos, dois a dois congruentes. Assim, a sua área total A_t é igual à soma das áreas desses seis retângulos, ou seja:

$$A_t = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \Rightarrow A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Esta coleção, diferente da C1, apresenta um item chamado *Teoremas fundamentais*, no qual são apresentados e demonstrados quatro teoremas, a Figura 40 apresenta um deles.

Figura 40: Demonstração – Teorema na C2

Teorema 3

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

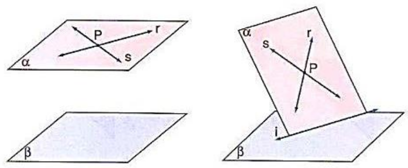
Hipóteses:
1. A reta r está contida no plano α.
2. A reta s está contida no plano α.
3. r e s são concorrentes no ponto P.
4. r é paralela ao plano β.
5. s é paralela ao plano β.

Tese: O plano α é paralelo ao plano β.

Demonstração:

I. Os planos α e β são distintos, pois α contém retas paralelas a β.

II. Se α e β fossem secantes, tendo como interseção a reta i, teríamos: r paralela à reta i (pois r está contida em α e r é paralela a β) e s também paralela a i (pois s está contida em α e s é paralela a β). Daí, as retas r e s estariam passando pelo ponto P e ambas seriam paralelas à reta i, o que é absurdo, pois contraria o postulado de Euclides. A contradição vem do fato de admitirmos que α e β são secantes. Logo, α e β não podem ser secantes, ou seja, α é paralelo a β.



Fonte: Volume 2 da coleção analisada

Diante desta análise, pode-se verificar que a coleção C2 propõe 166 atividades envolvendo conceitos da Geometria Espacial. A maioria destas atividades envolvem o contexto da própria matemática, o nível *Análise* e atividade cognitiva da conversão. Quanto as demonstrações, verifica-se, da mesma forma que a C1, que estas são apresentadas apenas com finalidade de explicação, não sendo exigidas em nenhum atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo geral analisar se e como são tratados os elementos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico nas propostas do currículo planejado. Para alcançar este objetivo geral foram propostos alguns objetivos específicos, a saber: identificar quais níveis de Van Hiele são abordados no currículo planejado; investigar qual entendimento de demonstração apresentado pelos autores dos currículos selecionados; verificar como são propostas as transformações de representações semióticas nos materiais selecionados para a produção de dados; e, investigar a utilização de softwares para o ensino dos conceitos geométricos.

Assim, como os objetivos, a problematização, o mapeamento de pesquisas e leitura referentes ao tema contribuíram na busca da resposta para a questão de pesquisa que orienta este trabalho, *Como são abordados os elementos fundamentais do pensamento geométrico no currículo planejado?*

Os principais aportes teóricos desta pesquisa foram o modelo de Van Hiele, o qual busca entender e obter explicação sobre a ruptura entre o ensino da Geometria e sua compreensão e a Teoria dos Registros de Raymond Duval que tem por objetivo compreender as especificidades relacionadas à aprendizagem matemática, em particular, no que tange a importância das representações semióticas nas atividades deste campo do conhecimento.

Baseando-se nos aportes teóricos apresentados, realizou-se uma análise tendo como fontes de produção de dados duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovadas pelo PNLD/2015, nas quais o foco de análise foi o ensino da Geometria Espacial, considerando as categorias de análise elaboradas (Capítulo 2).

Desta forma, esta seção busca apresentar algumas considerações finais por meio da análise realizada no capítulo anterior.

4.1 RESPONDENDO A QUESTÃO DE PESQUISA

A Geometria, em específico, a Geometria Espacial está presente no cotidiano, nas formas naturais e construídas, desta maneira se torna necessário compreender este campo da Matemática, bem como buscar formas de desenvolver o pensamento geométrico, entendendo este como um aprendizado significativo da geometria e de suas aplicações.

De acordo com Almouloud et al. (2004) os professores mesmo constatando a importância da Geometria, ainda, não privilegiam esta área em seus planejamentos e seleções de conteúdos. Assim, concorda-se com Pires, Curi e Campos (2012), ao sublinhar que é necessário resgatar o ensino da Geometria nas escolas de Educação Básica, dada a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico na aprimoramento de capacidades superiores, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço, raciocinar logicamente, generalizar e abstrair.

Tendo em vista que o livro didático é um dos principais recursos utilizados por professores, buscou-se responder a questão de pesquisa por meio de uma análise de um dos materiais que caracteriza o currículo planejado, especificamente, nos capítulos destinados a Geometria Espacial. Esta análise baseou-se, principalmente, em dois aportes teóricos, a saber, modelo de Van Hiele e a Teoria dos Registros de Raymond Duval.

Analisando as atividades apresentadas em cada uma das coleções referentes aos conceitos/conteúdos de Geometria Espacial, verificou-se que o espaço-tempo em que estas são apresentadas é muito restrito aos capítulos específicos, desta forma limitando a relação da Geometria Espacial com outros conteúdos estudados ao longo do Ensino Médio.

Em relação aos contextos apresentados, ambas coleções enfatizam atividades da própria matemática, que por vezes não permitem aos estudantes trabalharem situações relacionadas ao cotidiano, ou melhor dizendo, situações reais. As atividades que envolvem situações cotidianas, mesmo recebendo um menor percentual nas coleções (28,3% - C1 e 21,1% - C2), são importantes, pois mostram aos estudantes que a matemática possibilita a resolução de situações próximas da sua realidade. As atividades que relacionam a matemática com outras áreas do conhecimento são poucas vezes exploradas nas coleções analisadas (menos de 5%), sendo este um ponto negativo porque não exige do estudante que este relacione e mobilize os conceitos/conteúdos matemáticos para solucionar problemas/situações de outras áreas do conhecimento.

Ao problematizar o desenvolvimento do pensamento geométrico com base nos níveis de Van Hiele, as atividades foram categorizadas de modo a verificar qual nível o estudante poderia desenvolver ao resolvê-las. O nível *Análise* que potencializa a descrição de uma classe de figuras por suas características, a dedução empírica de “regras” e generalizações, a resolução de problemas geométricos que necessitam do conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas, entre outras capacidades, foi o mais enfatizado nas duas coleções.

O nível da *Visualização*, também, foi explorado nas atividades das coleções, recebendo maior ênfase em uma delas, C1. Já o nível da *Dedução Informal* foi apresentado em apenas uma das coleções, C1. Destaca-se que quando não são exploradas atividades que exijam *Dedução Informal* limita-se o desenvolvimento do pensamento geométrico, assim como, a não apresentação de atividades que explorem os outros níveis de Van Hiele.

Para que o estudante obtenha a compreensão do objeto matemático, segundo Duval (2012), este entendimento está relacionado à capacidade de mobilizar, ao menos, dois registros de representação semiótica, caso contrário, há possibilidade de confundir o objeto matemático com suas representações. Assim, buscou-se verificar nas coleções de livros didáticos quais transformações cognitivas são exploradas e quais os sentidos das conversões. Verificou-se nas duas coleções que a transformação cognitiva mais enfatizada é a conversão (mais de 90%), principalmente, do registro da língua natural para o algébrico e em uma das coleções, C1, tendo o registro geométrico como intermediário. É importante ressaltar que a ênfase dada a conversão não garante um melhor desenvolvimento do pensamento geométrico ou da compreensão do objeto matemático. Um melhor desenvolvimento do pensamento geométrico depende também do encaminhamento dado pelo professor, o qual pode ser apenas por meio direto de aplicação de fórmulas, tornando-se assim um procedimento mecânico.

Destaca-se em relação aos registros de representação semiótica que, por se tratar de conceitos/conteúdos relacionados a Geometria Espacial, o registro geométrico contribui para um melhor entendimento por meio da visualização, que conforme Duval, é essencial para compreender que há várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais que contribuem na modificação das formas sem alterar o objeto matemático. Este registro em ambas as coleções é bastante enfatizado como registro de partida ou intermediário, mas recebe pouco destaque para as construções geométricas, registro de chegada.

O registro da língua natural, ao referir-se aos tratamentos matemáticos explorados nas atividades analisadas, é o mais enfatizado, sendo que há apenas 1 atividade, entre as duas coleções, que não aborda este registro, e sim o registro geométrico.

Para que os conceitos/conteúdos matemáticos tenham significados para os estudantes não basta o professor apenas apresentar uma fórmula para ser aplicada e se obter um resultado, sem ao menos ser explicado porque esta fórmula é válida e o que pode ser obtido por meio dela. Desta forma, buscou-se verificar quais leis matemáticas são demonstradas em relação ao estudo dos conceitos da Geometria Espacial. Constatou-se que em ambas coleções a maioria de seus conceitos/conteúdos é demonstrado de alguma forma. Em outras palavras, as demonstrações são apresentadas para explicação Cabe destacar que apenas uma das coleções, C2, apresenta alguns teoremas de Geometria Espacial de posição e suas demonstrações. Contudo, nenhuma das coleções analisadas apresentam atividades que o estudante tenha a necessidade/possibilidade de demonstrar algo, essa constatação vem de encontro a não ter nenhuma atividade categorizada no nível de *Dedução Formal*.

Nas coleções analisadas constatou-se que não há nenhuma sugestão de atividades que envolvessem *softwares*, nem mesmo a recomendação de utilizá-los no estudo de conceitos/conteúdos de Geometria Espacial. Atividades categorizadas no nível *Visualização* e as que apresentam o registro geométrico poderiam ser exploradas, contribuindo significativamente, para os estudantes, se fossem trabalhadas a partir de um *software*, por exemplo, o Geogebra 3D, o qual possibilita a articulação entre conceitos de Geometria Plana, Geometria Espacial e Álgebra.

Há elementos importantes ao desenvolvimento do pensamento geométrico abordados nas coleções de livros didáticos, a saber: os níveis *Visualização* e *Análise*, propostos no modelo de Van Hiele, a transformação cognitiva conversão, destacada por Duval, explicação, função da demonstração apresentada por Michael de Villiers. No entanto, o Pacto Nacional para o Ensino Médio (2014, p. 11) ao fazer referência ao pensamento geométrico, diz que este se desenvolve por meio da "interação com os objetos e com os movimentos no espaço físico", baseando-se nesta informação constata-se que uma das formas de realizar esta relação é com o auxílio de um software, por exemplo, Geogebra 3D, recurso didático que não foi sugerido pelas coleções ao se trabalhar com os conceitos/conteúdos de Geometria Espacial.

Pensando aprofundar os resultados aqui apresentados em estudos posteriores, apresenta-se possibilidades de outras pesquisas que problematizem: o desenvolvimento de uma sequência de ensino, destacando o registro geométrico/figural como ponto de partida e intermediário, podendo estar também relacionado a uso do software Geogebra 3D, buscando identificar como este software pode ser utilizado para auxiliar na resolução das atividades propostas nesta sequência ou até mesmo propostas por livros didáticos e quais as contribuições deste software na aprendizagem dos estudantes em termos de visualização e coordenação de registros.

Outra possibilidade seria a aplicação de uma sequência de ensino elaborada a partir das atividades categorizadas nos livros didáticos analisados em relação aos níveis de Van Hiele e os registros de representação com estudantes do Ensino Médio, buscando verificar se estas atividades contribuem no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Espera-se com esta pesquisa ter contribuído com a área da Educação Matemática, principalmente, nas discussões acerca do processo de ensino e aprendizagem de conceitos/conteúdos matemáticos e na análise de materiais curriculares, neste caso, currículo planejado. Além disso, almeja-se ter apresentado as potencialidades do modelo de Van Hiele, da teoria dos Registros de Representação Semiótica e das funções da demonstração por meio das ideias de Michael de Villiers na análise de situações da Geometria Espacial.

Por fim, é importante registrar que os dados desta pesquisa permitiram elaborar dois artigos científicos, a saber, Geometria Espacial: mapeamento das produções brasileiras relacionadas ao pensamento geométrico e Geometria Espacial: análise de uma coleção de livros didáticos do ensino médio, que foram encaminhados para eventos como a VI Jornada Nacional de Educação Matemática e XIX Jornada Regional de Educação Matemática e Encontro Nacional de Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A.L.; SILVA, M.J.F.; CAMPOS, T.M.M. A Geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, 2004.

ASSUMPÇÃO, P. G. S. **Perímetro e área de polígonos**: abordagem através de um ambiente dinâmico sob o olhar das representações semióticas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS, 2015.

BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental. **Revista Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.13, n.2, p.273-289, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2015 (documento preliminar).

_____ Formação de professores do ensino médio, Etapa II - Caderno V: Matemática / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [autores: Ana Paula Jahn... et al.]. – Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014a.

_____ Guia de livros Didáticos: PNLD 2015: Matemática/Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014b.

_____ Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/ 2006.

_____ PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmentros Curriculares Nacionais**.** Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____ Relatório Parcial do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. PIBID/CAPES, 2015.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT** – Florianópolis-SC, v. 9, Ed. Temática (junho), p. 07-20, 2014.

CARVALHO, F. S. **Uma aplicação no ensino dos poliedros e corpos redondos para turmas do 3º ano do ensino médio usando dobraduras e softwares livres**. Dissertação (Mestrado EM Educação Matemática). Palmas, 2013.

CARVALHO, L. C. de. **Análise da organização didática da Geometria Espacial Métrica nos livros didáticos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

CURY, H. N. Erros, dificuldades e obstáculos em produções escritas de alunos e professores. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A.F.T. **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas, SP: Papirus, 2013.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

_____ Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: MériclesThadeu Moretti. Revemat: Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012.

_____ Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. 1º Ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas-SP: Autores Associados, 2006.

GUERATO, E. T.; SOUZA, V. H. G. Elaboração de conjecturas em geometria plana com o software geogebra. In: A**nais da mostra do CAEM 2015:** 30 anos de formação continuada de professores. Disponível em: https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina06_Vera_giusti.pdf. Acessado em fevereiro de 2016.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino de geometria em livros didáticos à Luz da Teoria das Representações Semióticas segundo Raymond Duval**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2012.

LAVILE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Tradução de Heloísa Monteiro e Franscisco Settineri. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LIMA, S. F. de. **Relações entre professores e materiais curriculares no ensino de números naturais e sistema de numeração decimal**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de Matemática. v. 2. Editora SBM, 1998.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria.Tradução de Hygino H. Domingues**. São Paulo: Atual, 1994.

LUNA, M. de F. A de. **Estudo das Trajetórias Hipotéticas da Aprendizagem de Geometria Espacial para o Ensino Médio na Perspectiva Construtivista**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

MACHADO, R. A. **O ensino de geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria Dinâmica**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifica Universidade Católica de São Paulo, 2013.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Secretaria de Estado da Educação. Curitiba: 2008.

PIETROPAOLO, R.C. **(Re) Siginificar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

PIRES, C. M. C.; CURI, E.; CAMPOS, T. M. **Espaço & forma**: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2012.

RIO GRANDE DO SUL. **Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul**: Matemática / Secretaria de Estado da Educação. Porto Alegre, SE/DP, 2009.

SACRISTÁN, J. G. (org.). **Saberes e Incertezas sobre o Currículo**. Tradução Alexandre Salvaterra. Porto Alegre: Penso, 2013. 542 p.

SACRISTÁN, J. G., PÉREZ-GÓMEZ, A. I. **Compreender e transformar o ensino**. 4.ed. Porto Alegre: ArtMed Editora, 1998.

SANTOS, C. A. B. dos; CURI, E. Os Registros de Representação Semiótica como Ferramenta Didática no Ensino da Disciplina de Física. **R. Eletr. de Edu. Matem**. Florianópolis, v. 06, n. 1, p. 1-14, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/10.5007-1981-1322.2011v6n1p1> Acesso em maio de 2015.

SCHNEIDER, E. M., TOBALDINI, B.G.; FERRAZ, D.F., O uso de modalidades didáticas no contexto do PIBID e o ensino por investigação. **Anais do X ANAPED SUL**, Florianópolis, 2014.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDT, T. E. e SILVEIRA, D. T. (org.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora de UFRGS, 2009. p. 31–42.

SOARES, M. A. S., NHERING, C. M. Proporcionalidade como função: uma análise de livros didáticos do ensino médio. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009

VIANNA, O. A.; BOIAGO, C. E. P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no Geogebra. **Revemat:** R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 162-182, 2015. Disponível em: <

https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p162> Acesso em maio de 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Quadro 13: Teses e Dissertações mapeadas

N°	Indicadores	Título	Objetivo(s)	Autor	Ano	Tipo	Universidade
01	**Geometria Espacial**	A produção matemática em um ambiente virtual de Aprendizagem: o caso da geometria euclidiana Espacial	Investigar como se dá a produção matemática de alunos-professores em um curso de extensão universitária à distância sobre "Tendências em Educação Matemática"	Silvana Claudia Santos	2006	Dissertação	Universidade Estadual Paulista
02	**Geometria Espacial**	Ensino de geometria espacial com utilização de vídeos e Manipulação de materiais concretos – um estudo no Ensino médio	Investigar as possibilidades e limitações emergentes da utilização integrada de vídeos didáticos e da manipulação de materiais concretos no ensino de geometria no Ensino Médio.	Ricardo Ferreira Paraizo	2012	Dissertação	Universidade Federal de Juiz de Fora
03	**Geometria Espacial**	Ensinando geometria espacial para alunas surdas de uma Escola pública de belo horizonte (MG): um estudo Fundamentado na perspectiva histórico cultural	Procurar entender como o uso de recursos didáticos, como os materiais manipulativos – utilizados por alunas surdas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Belo Horizonte, em aulas em que fossem estimuladas ao diálogo através de questionamentos – favorecem a aprendizagem de Geometria Espacial quanto à ampliação do vocabulário em Língua de Sinais e o português escrito.	Fernanda Bittencourt Menezes Rocha	2014	Dissertação	Universidade Federal de Ouro Preto
04	**Geometria Espacial**	O ensino de geometria espacial em ambientes Educacionais informatizados: um projeto de ensino De prismas e cilindros para o 2º ano do ensino médio.	Investigar as contribuições que um projeto de ensino, desenvolvido em ambientes informatizados, pode trazer para o ensino -aprendizagem de Geometria Espacial em uma turma de 2º ano do Ensino Médio da rede pública na cidade de Entre Rios de Minas (MG).	Ronaldo Asevedo Machado	2010	Dissertação	Universidade Federal de Ouro Preto

05	**Geometria Espacial**	Recursos didáticos e representações da Geometria espacial da 4ª série do ensino Fundamental de uma escola em Campo grande – MS	Descrever o fenômeno da interação entre os sujeitos e os recursos didáticos: objetos, desenho e representações dinâmicas, e suas utilizações para representações da geometria espacial em nível das séries iniciais do Ensino. Fundamental.	Alessandra Christiani Cardoso Dos Santos	2003	Dissertação	Universidade de Mato Grosso Do Sul
06	**Geometria Espacial**	A geometria espacial no ensino médio a partir da atividade webquest: análise de uma experiência	Apresentar minha experiência ao construir e aplicar uma atividade *WebQuest* analisando as dificuldades e possibilidades desta forma de ensinar.	Mauricio Barbosa da Silva	2006	Dissertação	PUC/SP
07	**Geometria Espacial**	Análise da organização didática da geometria espacial métrica nos livros didáticos	Investigar qual a organização que os livros didáticos de Matemática destinados à 2ªsérie do Ensino Médio fazem referente ao tema Geometria Espacial Métrica, e se essa organização favorece a construção do pensamento geométrico.	Luis Carlos de Carvalho	2008	Dissertação	PUC/SP
08	**Geometria Espacial**	Estudo das trajetórias hipotéticas da aprendizagem de geometria espacial para o ensino médio na perspectiva construtiva	Verificar a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivas de aprendizagem com a planificação do ensino, em colaboração pesquisador e professor, no caso particular da Geometria Espacial e verificar a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtiva de aprendizagem.	Maria de Fátima Aleixo de Luna	2009	Dissertação	PUC/SP
09	**Volume**	Uma abordagem conceitual de volumes no ensino médio	Avaliar se e em que medida os *Cadernos do Professor e do Aluno de Matemática*, na abordagem de estereometria, contemplam a especificidade da disciplina,	Wagner Pulido Rodrigues	2011	Dissertação	PUC/SP

			consiste precipuamente no seu caráter abstrato, de sorte a proporcionar ao professor as condições de superação das dificuldades que aquelas especificidades acarretam para o processo de aprendizado.				
10	**Geometria Espacial**	Argumentação e prova: uma experiência em geometria espacial no ensino médio	Fazer um mapeamento das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo, bem como a elaboração, aplicação e avaliação de situações de aprendizagem sobre prova.	Wellington Zarur Viana Vieira	2007	Dissertação	PUC/SP

Quadro 14: Revistas na área da Educação Matemática mapeadas

N°	Indicadores	Título	Objetivo(s)	Autor	Ano	Revista
01	**Volume**	Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação		Ana Paula Nunes Braz Figueiredo, Paula Moreira Baltar Bellemain e Rosinalda Aurora de Melo Teles	2014	Bolema
02	**Geometria Espacial**	Atividades de geometria espacial e tecnologias informáticas no contexto da educação a distância online	Destacar o processo de elaboração e a discussão de atividades matemáticas que foram propostas no curso de extensão universitária à distância, intitulado “Tendências em Educação Matemática” e oferecido no primeiro semestre de 2005 pelo IGCE - UNESP, Rio Claro.	Silvana Claudia Santos	2008	GEPEM
03	**Geometria Espacial**	O uso do Cabri 3D para desenvolver habilidade de visualização	Investigar as contribuições do software Cabri 3D na visualização de seções obtidas no cubo através de planos.	Guilherme Baggio Marin e José Carlos Pinto Leivas	2013	GEPEM
04	**Geometria Espacial**	(Resenha) A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial	(Objetivo da pesquisa) Investigar como ocorre a produção matemática em determinado contexto – o da produção em um	Rafael Teixeira dos Santos	-	GEPEM

			ambiente-informático.			
05	**Pensamento Geométrico**	Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o Exemplo da Geometria do táxi	Apresentar atividades apoiadas nos Parâmetros CurricularesNacionais e no Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico.	Ana Maria Kaleff e Rogério Santos do Nascimento	2004	GEPEM
06	**Volume**	Como o Surpreendente Arquimedes determinou o Volume e a Área da Esfera	-	Paulo Antonio Esquef	2003	GEPEM
07	**Geometria Espacial**	Geometria Espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas	Mostrar o trabalho realizado em uma turma de 3º ano do ensino médio, sobre o conteúdo de Geometria Espacial, aplicando a metodologia da Resolução de Problemas, seguindo as etapas sugeridas por Polya (1995).	Eliana Bevilacqua Salin	2013	Revemat

Quadro 15: Endereço das Revistas da área de Educação Matemática

Revistas da área de Educação Matemática (Fonte de dados)
BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro:UNESP. Quadrimestral. 1985-. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/index. Acessado em set/2015.
BOLETIM: GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio de Janeiro:UFRJ. Semestral. 1976-. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=index. Acessado em set/2015.
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Canoas:SBEM/RS. Semestral. 2009-. Disponível em: http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/index. Acessado em set/2015.
REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGIA IBEROAMERICANA. Recife:UFPE. Quadrimestral. 2010-. Disponível em: http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/index. Acessado em set/2015.
REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA. São Paulo:USP. Quadrimestral. 1999-. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index>. Acessado em set/2015.
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Florianópolis:UFSC. Semestral. 2006-. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/index>. Acessado em set/2015.