UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

WAGNER DAS CHAGAS LIMA

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SEGUNDO A TEORIA *VAN HIELE*

Itaqui-RS
2017

WAGNER DAS CHAGAS LIMA

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SEGUNDO A TEORIA *VAN HIELE*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Alex Sandro Gomes Leão

Itaqui-RS
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo autor através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

L732p Lima, Wagner das Chagas
UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO SEGUNDO A TEORIA *VAN HIELE* / Wagner das Chagas Lima.
48 p.

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2017.
"Orientação: Alex Sandro Gomes Leão".

1. Teoria *van Hiele 2.* Engenharia didática. 3. Ensino de geometria. I. Título.

WAGNER DAS CHAGAS LIMA

Uma proposta de sequência didática baseada no desenvolvimento do pensamento geométrico segundo a Teoria *van Hiele*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 4 de dezembro de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Ms. Alex Sandro Gomes Leão
Orientador
Unipampa

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes
Unipampa

Profª. Msª. Vera Terezinha Cortelini da Rosa
Unipampa

Dedico este trabalho a minha esposa Ludmilla e meu filho Alexandre Wagner.

AGRADECIMENTO

Agradeço a minha querida e amada esposa, Ludmilla, pelo incentivo a ir em busca do conhecimento, pois como a mesma diz “conhecimento é a única coisa que é realmente tua e ninguém pode tirar de ti (só um Alzheimer!)” e pela iniciativa em auxiliar-me sempre que possível.

Aos professores que sempre se prontificaram em compartilhar suas experiências e conhecimento, em especial ao professor Alex, meu orientador.

RESUMO

Trabalhar com a construção dos conceitos geométricos é essencial para o desenvolvimento do aluno. Pensar geometricamente observando a natureza ao seu redor é uma atividade humana que foi construída ao longo da história, mas nos parece permanecer esquecida do currículo escolar atual. Não é difícil encontrarmos alunos que não sentem afinidade pelo estudo da Geometria, de modo geral sentem-se desconfortáveis quando defrontados com situações que exigem uma solução geométrica. A nossa proposta busca colaborar com o currículo escolar, trazendo o estudo da Geometria para a sala de aula, de modo a fazer com que ela seja ensinada de forma que o aluno possa visualizar a construção dos seus conceitos e não apenas obter resultados através de substituição em fórmulas sem entender onde e quando aplicá-las. Portanto, nossa contribuição é no sentido de dar visibilidade à questão e de fomentar a discussão acadêmica da mesma, buscando um caminho para as dificuldades encontradas por diferentes autores que pesquisam nesta área, apresentando uma sequência didática abordando o tema área de figuras planas, baseada na Teoria de *van Hiele* e seguindo os pressupostos da Engenharia Didática com a finalidade de tentar diminuir as dificuldades com este conteúdo geométrico.

Palavras-Chave: Teoria *van Hiele*, engenharia didática, ensino de geometria.

ABSTRACT

Working with a construction of geometric concepts is essential for student development. To think geometrically looking the nature around them is a human activity that has been constructed throughout history, but we seem it is forgethed in the current school grade. It is not difficult to find students who do not feel affinity for the study of Geometry, generally feel uncomfortable when faced with situations that require a geometric solution. Our research aim to collaborate with the school grade, bringing the study of geometry to a classroom, way that it is taught so that the student can visualize the construction of his concepts and not only get results through substitution in formulas without understanding where and when to apply them. Therefore, our contribution is to give visibility to the issue and to foment the academic discussion of the same, seeking a way to the difficulties encountered by different authors who research in this area, presenting a didactic sequence addressing the area of 1-D figures, based on van Hiele Theory and following the assumptions of Didactic Engineering with a research purpose as difficulties with this geometric content.

Keywords: van Hiele's Theory, didactic engineering, geometry teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina de grande importância para o cotidiano das pessoas, ela não está limitada a simples aritmética do dia a dia, mas sim ao desenvolvimento do raciocínio lógico que é necessário para as diversas situações que se apresentam no decorrer da rotina diária.

Em particular, a geometria mostra sua acuidade em diversas situações do nosso cotidiano. Quando olhamos ao nosso redor, notamos sua presença nas formas dos objetos, em suas medidas de comprimento e em incontáveis exemplos. Mas apesar de estar intimamente ligada à realidade das pessoas, a forma de como a geometria é abordada em sala de aula não está contribuindo para que o aluno possa realmente deter um aprendizado duradouro.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais Brasil (1997), a Geometria é um dos importantes campos de estudo, essencial para a construção e desenvolvimento do pensamento matemático. Os seus conceitos constituem parte importante do currículo do Ensino Fundamental pois, por meio deles, o aluno consegue compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive.

A geometria está em tudo ao nosso redor e, por esse motivo, temos a convicção de que é muito importante relacionar o conteúdo com a realidade do educando. Dessa maneira o aprendizado pode tornar-se mais duradouro e o aluno poderá compreender melhor os conceitos básicos, facilitando o seu desenvolvimento para o entendimento de futuros conceitos geométricos.

Entendemos que, os professores precisam tornar o ensino da Matemática mais prazeroso fazendo uso de metodologias diferenciadas em suas aulas e trabalhando a construção de conceitos, tornando-a mais agradável de ser estudada. Ao fazer uso de diferentes metodologias o professor pode gerar estímulos para que suas aulas se tornem mais interessantes. Temos que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem o trato dessa forma no campo de ensino da Geometria.

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL 1998, p. 51).

Lembramos que o processo ensino/aprendizagem não é uma via de mão única, ou seja, o professor, mesmo munido da melhor metodologia que se possa construir, não é o único fator importante para que ocorra a aprendizagem. Os meios empregados, o ambiente e o próprio aluno também devem ser levados em consideração.

Portanto, nosso estudo teve como finalidade de buscar subsídios teóricos para a construção de uma sequência didática com o intuito de tornar o ensino de geometria plana mais intuitivo, a fim de contribuir para um aprendizado mais duradouro.

Assim, elegeu-se como base deste trabalho, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto pelo casal *van Hiele*, para a construção do conhecimento no tema: Áreas de Polígonos. Formulou-se o problema da pesquisa representado por meio da seguinte questão: quais as dificuldades encontradas por alunos ao trabalharem com geometria plana?

Para responder tal questionamento, buscamos respostas em artigos, periódicos e revistas especializadas em ensino de matemática ou educação matemática, a fim de encontrar as causas que contribuem para o fracasso do ensino de geometria.

Buscamos na teoria do casal *van Hiele* o aporte teórico necessário para entender como construir tal sequência que nos possibilite trabalhar com a formação de conceitos geométricos em sala de aula.

Por fim, apresentaremos nossa proposta, focada no ensino de área baseada na teoria de *van Hiele* segundo os pressupostos da Engenharia Didática.

A referida proposta foi desenvolvida inicialmente para ser aplicada em uma turma do 9° ano do ensino básico.

A sequência didática foi pensada e planejada para ser aplicada em cinco Unidades de Ensino:

Unidade 1: Teste de *van Hiele* desenvolvido pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997).

Unidade 2: Pré-teste sobre áreas (Nível 1).

Unidade 3: Deduzindo fórmulas de áreas de figuras planas com o Geoplano (Nível 2).

Unidade 4: Obtenção das fórmulas das áreas dos polígonos (Nível 3).

Unidade 5: Explorando atividades envolvendo o conceito de área.

2. O ENSINO DE GEOMETRIA

2.1 O Conceito de Perímetro e Área

Os conceitos de perímetro e área estão relacionados entre si: o perímetro é uma curva unidimensional que delimita uma região bidimensional, uma área. Além dessas descrições dimensionais e topológicas, o perímetro e a área podem ser considerados como grandezas.

Do livro Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 9, temos que a definição de área de uma superfície plana limitada é um número real positivo associado à superfície de tal forma que:

> 1º) As superfícies equivalentes estão associadas a áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.
>
> **A ≈ B ↔ (Área de A = Área de B)**
>
> 2º) A soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.
>
> **(C = A + B) → (Área de C = Área de A + Área de B)**
>
> 3º) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra.
>
> **B ⊂ A → Área de B ≤ Área de A**
>
> (DOLCE, O. p 312)

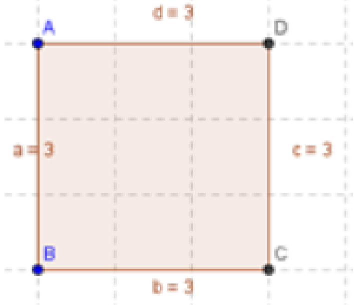
Apesar da diferença clara dos conceitos de área e perímetro, estudos mostram que, de forma geral, eles são trocados pelos alunos que estudam Geometria Plana e um dos motivos apontados por Silveira (2002), para que ocorra essa troca, é a falta de confiança em seu próprio conhecimento aliado a internalização de que a Matemática é "difícil".

De acordo com Jakubovic e Lellis (1995) a palavra área vem do latim *area* e pode ser entendido como a medida de uma região, de uma superfície.

O significado matemático formal a respeito da medida de uma área no contexto de geometria euclidiana plana é "(...) medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para isso, comparamos F com a unidade de área. O resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área". (LIMA, 1985, p. 9).

Para definir uma medida para a área, é preciso adotar uma unidade de área, chamada de quadrado unitário. Em qualquer quadrado de lado n, uma unidade de lado desse quadrado terá área igual a uma unidade de área. Assim, segue-se que, um quadrado Q, que tem como lado um número inteiro positivo n, poderá ser decomposto por retas paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, com lado unitário e área de uma unidade. Segue que a área de Q será n^2. Entende-se, portanto, que um quadrado (Fig.1) de lado 3, tem $n=3$ e área igual a 3^2 unidades, ou seja, 9 unidades de área.

Figura 1- Área de um quadrado

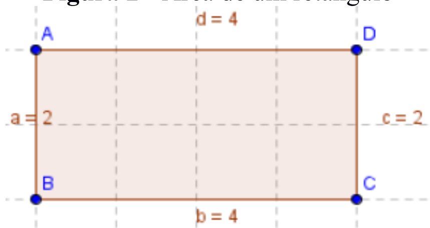


Fonte: O autor

Mesmo que um quadrado Q tenha lado com medida "*a*", sendo "*a*" um número fracionário ou um número irracional qualquer, terá a área do quadrado Q = a^2 unidades quadradas, onde "a" é a medida do lado do quadrado.

Considere agora um retângulo, cujos lados são números inteiros positivos *m* e *n*, utilizando-se de paralelas aos lados, pode-se decompor o retângulo em $m \times n$ quadrados unitários de área uma unidade quadrada. Assim, o retângulo tem área igual a $m \times n$ unidades quadradas. Tem-se, por exemplo, um retângulo (Fig. 2) de comprimento 4 e largura 2, com área de 8 unidades quadradas.

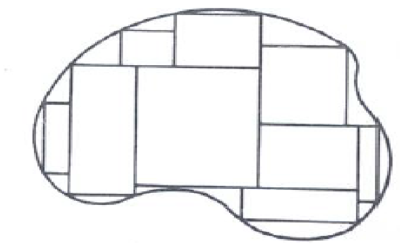
Figura 2 - Área de um retângulo



Fonte: O autor

Generalizando, observa-se que Lima (1985) procura mostrar que a área de outros polígonos, como o triângulo, trapézio, paralelogramos, pode ser obtida por decomposição e recomposição desses polígonos em outros mais comuns, como o quadrado e o retângulo. Já para as figuras planas arbitrárias, afirma que o cálculo da área é obtido numa aproximação por falta ou sobra (Fig. 3).

Figura 3 - Área aproximada (região plana)



Fonte: Lima (1985, p. 20)

Assim, medir uma área é comparar. Comparar uma superfície a outra superfície. Sabe-se que o resultado da medida de uma área deve ser expresso por um número seguido de uma unidade. O número representa quantas vezes aquela unidade cabe na superfície, a qual se propôs medir. Para Baltar (1996 apud BALDINI, 2004, p. 20-21), a significação de perímetro e área pode ser identificada em, pelo menos, quatro pontos de vista distintos:

> a) **topológico:** os conceitos correspondem a objetos distintos. Área associada à superfície e perímetro associado ao contorno;
> b) **dimensional**: a figura sobre a qual se pretende identificar a área é bidimensional, ao passo que a figura sobre a qual se deseja saber o perímetro é unidimensional;
> c) **computacional**: esta característica está associada à obtenção das fórmulas de área e de perímetro que são distintas. Para um retângulo de comprimento c e altura h, temos: $P= 2c + 2h$ e $A = c \times h$;
> d) **variacional**: consiste em aceitar que superfícies de mesma área podem ter diferentes perímetros e vice-versa.

Buscamos assim, contemplar em nossa sequência de ensino estes conceitos de área, de modo a colaborar para uma aprendizagem duradoura, com mais representações mentais para o aluno.

2.2 As dificuldades encontradas ao ensinar geometria

Os Profissionais da área de educação, em algum momento lidarão com alunos que apresentam alguma dificuldade em relação ao aprendizado. Os fatores que causam essas dificuldades são os mais variados, onde podemos citar alguns como o próprio histórico do aluno, a condição socioeconômica desfavorável, a falta de incentivo para o estudo em casa e também ainda existem os que apresentam problemas de fundo biológico.

Durante as pesquisas realizadas na literatura a respeito da dificuldade em ensinar a Geometria, no aspecto das habilidades e competências dos alunos, verificou-se que existe uma deficiência do conhecimento prévio que o aluno necessariamente deveria possuir ao iniciar esse tópico matemático (SANTOS, J. A. 2011). A falta de compreensão do tópico unidades de medidas faz com que os alunos não façam a distinção correta entre comprimento e área, portanto essa deficiência na aquisição satisfatória do conhecimento prévio acaba afetando a compreensão do conteúdo vindouro e como consequência ocorre a confusão dos conceitos entre perímetro e área.

Este problema foi verificado através de pesquisa realizada por Jamile Aparecida Saulino, em 2011, como parte da sua dissertação. Os alunos participantes responderam duas questões retiradas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do estado de São Paulo (SARESP), referentes ao cálculo de perímetro e área. Ao analisarem as produções dos alunos, os professores apontam que o erro ocorreu em razão da falta de domínio que os alunos apresentaram em relação aos conceitos de perímetro e área.

> (…) fica evidente que esses conceitos não estão bem compreendidos por eles. Afinal, uma grande parcela confunde perímetro e área, quando somam os quatro lados de um quadrado (perímetro) para calcular a área. Além de utilizarem, de maneira errônea, as fórmulas." (SANTOS, J. A. S. p 77-78)

Além da compreensão incorreta dos conceitos, Loureiro e Pires (2011) nos dizem, em seu trabalho intitulado "As Dificuldades do Ensino da Geometria na 7° Série", que algumas dificuldades encontradas no processo de ensino/aprendizagem, estão relacionados a dificuldade que os alunos encontram ao resolver os problemas de Geometria. Essa dificuldade é vinculada a falta de compreensão das demonstrações o que leva os alunos a reclamarem da grande quantidade de fórmulas.

A compreensão insuficiente dos conceitos geométricos faz com que os alunos não percebam que as fórmulas de obtenção da área dos diversos polígonos são oriundas da composição da área de diversos polígonos triangulares, portanto essa insuficiência na compreensão dos conceitos gera erroneamente a ideia da diversidade de fórmulas.

Também podemos apontar como outra dificuldade a internalização do conceito de que a "matemática é difícil". Por esse motivo, segundo Silveira (2002), podemos considerar que esse "preconceito" é um dos fatores que contribuem para a falta de motivação para realizar as atividades propostas em sala de aula.

Outro problema encontrado nas pesquisas, faz referência ao modelo tradicional[1] adotado na educação brasileira e corrobora a ideia de Pavanelo (2004) que, nesse sentido, nos retrata que a Geometria não é trabalhada de forma adequada em sala de aula. Temos ainda que o próprio PCN deixa claro esse fato quando menciona em seu texto que:

> No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL 1998, p. 122).

A seguir resumimos as dificuldades encontradas no ensino de Geometria, citando as pesquisas e os seus pontos principais.

1. É a abordagem pedagógica predominante no país. Com foco no professor (que detém os conhecimentos e repassa aos alunos), o estudante tem metas a cumprir dentro de determinados prazos que são verificadas por meio de avaliações periódicas.

Figura 4 - Dificuldades no Ensino de Geometria

Problema	Descrição do problema	Pesquisador	Título da Pesquisa
Confusão entre perímetro e área	Alunos confundem o conceito de perímetro com a de área; Fazem uso de fórmulas de forma incorreta.	Jamile Aparecida Saulino dos Santos	Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área: um estudo de caso com professores de matemática e alunos de 7° série do ensino fundamental
• Os alunos reclamam de muitas fórmulas; • Não conseguem entender as demonstrações; • Tem dificuldades nos exercícios; e • Não reconhecem os símbolos lógicos.	A falta de compreensão dos conceitos geométricos acarretam dificuldades no processo ensino-aprendizagem	Davi Feio Loureiro e Dieck, Dicksson Camilo Pires	As dificuldades do ensino da geometria na 7° série
A matemática é difícil	Internalização, por parte dos alunos, de que a matemática é difícil.	Marisa Rosâni Abreu da Silveira	“Matemática é difícil”: Um sentido pré-constituído.
A geometria não está sendo trabalhada de forma adequada	Problemas na forma de ensinar.	Parâmetros Curriculares Nacional	Parâmetros Curriculares Nacional

Fonte: O autor

Tendo como referência as inquietações acima descritas e que preocupam grande parte dos pesquisadores que trabalham com Ensino de Matemática, fica evidente que, a internalização do conceito de que a Geometria é difícil, aliado ao método de ensino tradicional faz com que os alunos tenham dificuldades de compressão do conteúdo geométrico. Esta deficiência é evidenciada através dos resultados dos exames sobre a qualidade do ensino brasileiro.

3. O MODELO DE *VAN HIELE D*E DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Não é difícil encontrarmos alunos que apresentam dificuldades em definir figuras planas que já conhecem, como exemplo podemos citar os que possuem a dificuldade em definir o que é um quadrado apesar de conhecê-lo. Ainda podemos citar que alguns não compreendem que um quadrado também é um retângulo.

Esses comportamentos, segundo Dina *van Hiele* e seu marido Pierre *van Hiele*, representam o estágio de maturidade geométrica do aluno. O casal, pensando em uma forma de como poderiam facilitar o entendimento desses conceitos, iniciou o seu trabalho de doutorado com o modelo *van Hiele* de pensamento geométrico.

Neste modelo são apresentados cinco níveis distintos de compreensão que foram elaborados a partir de experiências educacionais que o casal teve com os seus alunos do curso secundário em escolas da Holanda. Os níveis foram denominados como sendo de visualização, de análise, de dedução informal, de dedução formal e de rigor. O casal *van Hiele* enumerou seu modelo de zero para o nível básico até quatro para o nível de rigor, mas em algumas literaturas essa numeração ocorre de maneira diferente.

O modelo descreve que o aluno progride sequencialmente em todos os níveis iniciando do mais simples (visualização), onde as propriedades das figuras não são estudadas ainda, até o nível mais elevado (rigor), onde a abstração e os aspectos mais formais são amplamente exigidos. O modelo lembra ainda que poucos alunos conseguem alcançar o nível mais elevado.

Os *van Hiele* decidiram por particionar a construção do conhecimento geométrico em diferentes níveis como a seguir:

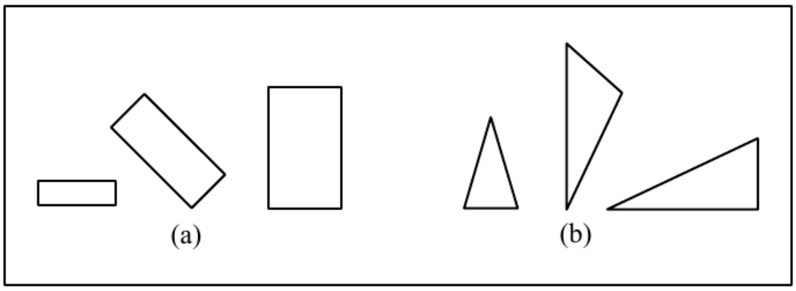
Nível 0 (nível básico) – visualização

Neste nível o aluno tem a noção das figuras geométricas por elas estarem ao seu redor. Reconhecem as figuras geométricas e as comparam sem o conhecimento de seus atributos e das propriedades que as definem, portanto a sua compreensão é feita apenas pela sua forma apresentada. Neste nível conseguem aprender um vocabulário geométrico, identificando formas específicas e até as reproduzindo, em seu caderno, desde que não seja muito complexa.

Como exemplo podemos citar, conforme a figura 5, que um aluno neste nível consegue reconhecer que os desenhos em (a) são retângulos e que os em (b) são triângulos, pois ambos possuem formas semelhantes entre si.

Também tem a capacidade de visualizar que as portas do ambiente escolar são retângulos, pois já as viram antes. Mas não conseguem visualizar, por exemplo, que o retângulo possui lados paralelos ou que o triângulo possui três ângulos.

Figura 5 - Nível básico do pensamento geométrico



Fonte: O autor.

Nível 1 – análise

Neste nível os alunos começam a analisar os conceitos geométricos através de experimentações e observações, dessa forma, conseguem perceber algumas particularidades de cada figura geométrica. Por exemplo, percebem que o retângulo possui quatro lados e o triângulo possui três, possibilitando o reconhecimento de diferentes figuras a partir de algumas características.

Sendo assim, o reconhecimento das figuras não fica restrito somente a forma, como no nível anterior, mas também são reconhecidas pelas suas partes. Dessa maneira, conseguem fazer generalizações para as figuras analisadas (por exemplo, reconhecem que os quadriláteros possuem quatro lados e os triângulos apenas três lados).

Entretanto ainda não entendem as definições e não são capazes de relacionar propriedades de uma figura com outras. Como exemplo disso podemos citar que, os alunos neste nível, não são capazes de reconhecer que o retângulo pode ser dividido em dois triângulos.

Nível 2 – dedução informal

A partir deste momento, os alunos conseguem inter-relacionar algumas propriedades dentro da própria figura e também conseguem fazer essas relações entre figuras geométricas distintas. Como exemplo, conseguem verificar que os retângulos possuem quatro lados paralelos, dois a dois. Também podem reconhecer que no triângulo os lados e os ângulos têm relação de proporcionalidade, ou seja, quanto maior o ângulo maior será o lado oposto a esse ângulo.

Os alunos começam a reconhecer as figuras a partir de suas propriedades, já conseguindo separá-las por classes. As definições começam a ter significado o que possibilita o acompanhamento e a formulação informal de argumentos.

Ainda não são capazes de construir uma prova formal completa, mas já são capazes de compreender as demonstrações formais.

Nível 3 – dedução

Agora os alunos conseguem compreender o significado das deduções, estabelecendo a distinção entre teoremas e definições, dessa forma conseguem construir demonstrações formais sem precisar decorá-las. Neste nível os alunos compreendem as demonstrações de uma forma mais ampla, possibilitando a interação entre as diversas demonstrações.

Também são capazes de fazer uma mesma demostração de diferentes maneiras percebendo que o resultado sempre será o mesmo, o que possibilita a utilização de uma linguagem matemática mais precisa.

Um aluno neste nível é capaz de identificar as estratégias gerais de uma demonstração e refletir sobre qual o raciocínio geométrico foi empregado para esta demonstração.

Começam a compreender as interações entre condições necessárias e suficientes e também já são capazes de matematizar enunciados de problemas.

Nível 4 – rigor

Este nível foi o menos desenvolvido nos trabalhos originais e também não foi muito explorado pelos pesquisadores deste modelo. Pierre *van Hiele* afirmou que "se interessava pelos três primeiros níveis, justamente por ter desenvolvido a teoria, no ensino secundário" (informação verbal)[2]

Entretanto, para este nível o aluno será capaz de trabalhar e fazer comparações entre vários sistemas axiomáticos diferentes do usual, ou seja, a geometria passa a ser vista em um plano mais abstrato ainda.

A figura seguinte resume os níveis de aprendizagem do modelo *van Hiele*.

Figura 6 - Níveis de aprendizagem do Modelo *van Hiele*

Níveis de aprendizagem	**Características**	**Exemplos**
Nível 0 Visualização	Identificação e comparação de figuras geométricas, com base na sua forma.	Classificação de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Nível 1 Análise	Análise dos componentes de uma figura geométrica, suas propriedades são reconhecidas e o uso destas utilizados para resolver problemas	Descrição de um quadrado através de propriedades: quatro lados iguais, quatro ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
Nível 2	Estabelecimento de relações e impli-	Descrição de um quadrado através de

2. Segundo Alan Hoffer, comunicação pessoal, 25 de fevereiro de 1985.

Dedução informal	cações entre as figuras geométricas, classificando-as conforme a suas propriedades.	suas propriedades mínimas: quatro lados iguais, quatro ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
Nível 3 Dedução	Maior domínio do processo dedutivo. O aluno consegue realizar demonstrações formais das propriedades já compreendidas, descobrindo novas propriedades	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
Nível 4 Rigor	O aluno estabelece e compara teoremas e axiomas.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Adaptado de Karine Pértile (2011)

Os *van Hiele*, além de explicar as especificidades de cada nível do pensamento geométrico também identificaram algumas características a serem observdas em seu modelo que podem ajudar a orientar a forma de como o conteúdo poderá ser abordado. São cinco as propriedades do modelo:

a) Sequencialidade.

O aluno deverá passar pelos diversos níveis de aprendizado de forma sequencial, iniciando no menor nível e terminando no mais alto. O sucesso em cada nível subsequente se dará na medida em que o aluno tiver o conhecimento satisfatório do nível anterior.

b) Avanço.

A passagem (ou não) de um nível para outro mais elevado não depende da idade do aluno, mas sim da sequência de como o conteúdo será apresentado, ou seja, dependendo da forma com que o professor aborda o conteúdo esse processo poderá ser acentuado. Não existem métodos que possibilitem ao aluno pular de nível, entretanto alguns deles podem retardar ou até mesmo impedir a passagem do aluno para o nível seguinte. Outro ponto bastante importante é que o aluno pode estar em diferentes níveis em assuntos diferentes.

c) Intrínseco e extrínseco.

Propriedades que não são visualizadas em um nível tornam-se evidentes no nível posterior. Como exemplo, no nível 0, o aluno visualiza um retângulo e o reconhece pela sua forma. No nível subsequente, além de reconhecer a figura pela sua forma, também indica algumas de suas propriedades, por exemplo, é um retângulo por possuir quatro lados e quatro ângulos retos.

d) Linguística.

Cada nível possui sua própria simbologia e um conjunto de relações que as interliga. Dessa maneira, uma relação correta em um certo nível, pode modificar-se em outro. Podemos exemplificar essa propriedade com as particularidades do quadrado. Um aluno do nível um não entende que o quadrado também é um retângulo, dessa forma os coloca em classes diferentes. Mas quando passa ao nível seguinte começa a descrever figuras através de suas propriedades mínimas e então consegue entender esse retângulo particular.

e) Combinação inadequada.

Aluno, material didático, conteúdo, vocabulário e principalmente o professor devem se encontrar no mesmo nível, pois se alguns desses itens estiver em um nível diferente, o aprendizado poderá ocorrer de maneira insatisfatória ou mesmo não ocorrer. Vale lembra que se os itens estiverem em um nível superior ao do aluno, este terá dificuldades de acompanhar o raciocínio do pensamento geométrico que será empregado.

Como foi mencionado, a passagem de um nível para outro depende mais da forma como o conteúdo é abordado pelo professor, do que pela idade ou maturidade do aluno. Dessa maneira, a forma de organização da aula, o método de ensino e os materiais didáticos utilizados são fundamentais para essa progressão.

Dessa forma, os *van Hiele* propuseram cinco fases sequenciais que ocorrem em cada nível do aprendizado. São elas: interrogação/informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

a) Interrogação / informação.

Nesta primeira fase, professor e aluno conversam, desenvolvendo várias atividades sobre os objetivos do respectivo nível. Nesta etapa o vocabulário específico referente a este nível é introduzido ao aluno, levantam-se questões, fazendo-se várias perguntas e observações. Esta é uma fase preparatória para os próximos níveis.

b) Orientação dirigida.

Nesta fase, os alunos exploram cuidadosamente o material didático que o professor separou para a atividade. Orientados pelo professor, essa exploração revela gradualmente as características desse nível através de respostas específicas dadas pelos próprios alunos. Percebe-se que a escolha do material didático adequado é muito importante no processo ensino-aprendizagem.

c) Explicação.

Baseado na experiência adquirida nas fases anteriores, os alunos dialogam entre si sobre as anotações feitas a respeito das estruturas anteriormente observadas. Ao professor, cabe o papel de orientar para o uso de uma linguagem adequada e precisa. É nesta fase que começa a se tornar evidente o sistema de relação de níveis.

d) Orientação livre.

Nesta fase, o aluno depara-se com tarefas bem mais complexas, que podem ser solucionadas de diversas maneiras. Dessa forma, os alunos ganham confiança ao encontrar uma maneira própria para solucionar as tarefas, orientando-se a si mesmo. Mais confiantes com o conhecimento que foi adquirido e por entender melhor as relações entre os objetos de estudo, os alunos sentem-se mais à vontade para trabalhar com as diversas atividades contextualizadas.

e) Integração.

Nesta fase, o aluno revê e sumariza tudo o que aprendeu, com o objetivo de construir uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode auxiliar nesta fase fornecendo apanhados gerais do que foi aprendido pelos alunos. No entanto, este sumário não deve apropriar novos conceitos.

Crowley (2011, p. 8) nos diz que "No final desta fase, os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte".

A figura a seguir resume as fases de aprendizagem do modelo *van Hiele*.

Figura 7 - Fases do aprendizado para cada nível do Modelo *van Hiele*

Fase	Características	Exemplos
Interrogação / informação	Troca de informações entre professores e alunos sobre o objeto de estudo. O vocabulário é próprio do nível em que os alunos se encontram.	Questionamento acerca do número de lados dos polígonos e o consequente número de ângulos internos.
Orientação dirigida	Exploração do objeto de estudos em atividades pré-selecionadas pelo professor de forma a dar aos alunos capacidade de ter respostas específicas e objetivas.	Atividades contextualizadas, que auxiliem o aluno a definir área e identificar quando é solicitada nos exercícios.
Explicação	Troca de visões entre alunos acerca das observações feitas na fase anterior. Nesta fase, começa a tornar-se evidente o sistema de relações de níveis.	Atividades de manipulação, na tentativa de transformar polígonos e círculos em retângulos, no objetivo de encontrar fórmulas de áreas

Orientação livre	Atividades mais complexas, com diversos resultados. Com isso, o estudante tem condições de tornar explícitas as relações do objeto de estudo, o que lhe trará maior autonomia e confiança no aprendizado.	Atividades utilizando áreas em uma construção, onde o aluno deve relacionar a área total com o rendimento de um balde de tinta, por exemplo
Integração	O aluno sintetiza o que aprendeu, a fim de formar uma visão geral da nova rede de objetos e das relações entre eles.	Classifica os quadriláteros e percebe que quadrados são retângulos e que ambos são paralelogramos.

Fonte: Adaptado de Karine Pértile (2011)

3.1 TESTES DE IDENTIFICAÇÃO DOS NÍVEIS DE RACIOCÍNIO

Professores e pesquisadores que trabalham com o modelo *van Hiele* fazem uso de testes que permitem determinar o nível de raciocínio geométrico em que seus alunos se encontram. Tais testes são essenciais tanto para iniciar um trabalho apoiado no modelo, como para avaliar a evolução dos alunos.

O teste pode ser oral, que consiste de entrevistas individuais entre professor e aluno, ou escrito. Pode ser elaborado com questões de múltipla escolha ou com questões de respostas livres. O de múltipla escolha, além da facilidade de aplicação, apresenta a vantagem da agilidade na organização dos dados. Se optar por entrevista, esta deve ser individual, ela proporciona resultados mais confiáveis sobre o nível de raciocínio geométrico de uma pessoa. Porém, esse método não é muito viável à nossa realidade, pois consome muito tempo não podendo ser aplicado a grupos muito grandes (JAIME; GUTIERREZ, 1990).

Para Jaime e Gutierrez (1990), em qualquer caso, ao se preparar uma atividade para avaliar o nível de raciocínio dos alunos, é conveniente seguir algumas normas para torná-lo o mais confiável possível. São elas:

1. as atividades devem ser selecionadas de tal forma que os estudantes possam expressar suas ideias e sua forma de raciocinar por meio das respostas;

2. não se deve confundir o questionário para conhecer o nível de raciocínio com um exame tradicional que se trata de avaliar o nível de conhecimento dos alunos. Para determinar o nível de raciocínio, a coisa mais importante não é saber se os alunos responderam de forma certa ou errada, mas como e porque eles responderam assim;

3. mesmo que o professor tenha alguma ideia prévia sobre o nível de raciocínio dos alunos, para fazer a seleção dos exercícios é conveniente que estes sejam selecionados de tal forma a cobrir todos os níveis ou, pelo menos, os níveis de 1 a 3, no caso de alunos de séries menos avançadas.

A busca por testes para definir o nível de raciocínio em que um aluno se encontra ajudou na evolução do modelo. Inicialmente, *van Hiele* considerava que a passagem de um nível para o seguinte ocorria de forma brusca. Mas, foi notado pelos pesquisadores que, nas entrevistas, as respostas oscilavam entre dois níveis, levando-os a considerar que a evolução dos níveis ocorre de maneira contínua. Por esse motivo, para Jaime e Gutierrez (1990), na prática, nenhum salto brusco ocorrerá quando você terminar de trabalhar em um nível e começar o seguinte.

3.2 ENGENHARIA DIDÁTICA

A partir do objetivo traçado e do referencial teórico escolhido para construir nossa sequência didática, definimos como metodologia o uso da Engenharia Didática, entendida como:

> (...) uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (DOUADY, 1993, p. 02)

Neste sentido, entende-se que a engenharia didática tem uma característica peculiar, que é a maneira de organizar os procedimentos metodológicos dentro da pesquisa em Didática da Matemática. Ela trata de aspectos teóricos e experimentais fazendo uma relação entre a teoria e a prática.

A metodologia de engenharia didática é considerada como uma abordagem com enfoque da didática francesa e que tem como característica os procedimentos metodológicos de pesquisas que vem sendo desenvolvidas em ambiente escolar em sala de aula.

Propomos desenvolver nossa pesquisa no campo da educação matemática tomando como pressuposto alguns princípios da Engenharia Didática, salientamos que durante o processo de Engenharia Didática, deve-se considerar um conteúdo do sistema de ensino, cujo funcionamento parece, por algum motivo, pouco satisfatório, fazendo-se uma análise do mesmo, e propondo mudanças para um possível funcionamento mais satisfatório.

Nesta direção a Engenharia Didática tem a característica de estabelecer relações entre a construção do saber matemático com a prática reflexiva do professor, diante de uma sequência didática experimental.

A Engenharia Didática caracteriza-se como forma viável de proposta metodológica por considerar as peculiaridades dessa modalidade de pesquisa, pelo fato de buscar os conhecimentos prévios dos alunos e partir deles para a construção de um saber consolidado. Neste sentido, o saber matemático se constrói a partir do levantamento de questionamentos sobre o próprio objeto matemático a ser investigado.

A Engenharia Didática é composta de quatro fases: análises preliminares, elaboração da sequência, aplicação da sequência didática, e análise *posteriori*. Porém na construção da sequência didática, é importante considerarmos alguns procedimentos que podem contribuir para sua eficiência:

- Revisão da literatura com a finalidade de conhecer as dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de um determinado tema, e as propostas de ensino já existentes sobre o mesmo;
- Compreender a fundamentação teórica que deverá dar suporte aos estudos; e
- Realizar consulta aos profissionais que estão envolvidos na área de conhecimento que se pretende estudar, com a finalidade de agregar dados e informações à sequência.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A elaboração de nossa proposta didática, foi planejada para ser desenvolvida ao longo das aulas do 9° ano do Ensino Fundamental no momento em que o professor retoma o estudo sobre área de polígonos. Apoiamo-nos em dois referenciais teóricos distintos: a Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de *van Hiele* e a Engenharia Didática.

Van Hiele preconiza que o principal motivo das dificuldades na aprendizagem da Geometria acontece por conta da inadequação do sistema linguístico usado pelo professor, que, na maioria das vezes, não corresponde ao nível do pensamento geométrico dos alunos.

Já a Engenharia Didática caracteriza-se pelo fato de buscar os conhecimentos prévios dos alunos e partir deles para a construção de um saber consolidado. Por esse motivo, nossa sequência começa com a aplicação de testes de *van Hiele*, para verificar o nível do pensamento geométrico da turma. Os testes também podem proporcionar informações importantes sobre as deficiências da turma, fazendo o professor planejar a forma mais adequada para a abordagem do assunto.

Portanto, na unidade 1 temos o teste de *van Hiele,* desenvolvido pela equipe do Projeto Fundão, onde objetivamos conhecer o nível ao qual a turma se encontra segundo os pressupostos da referida teoria. Possui atividades objetivas e dissertativas de caráter sequencial que se inicia no nível 0, terminando no nível 2.

Na unidade 2, o teste tem por objetivo verificar a maturidade geométrica com relação ao conceito área de polígonos, visto que esse conteúdo se inicia no 6° ano, é retomado e ampliado nas séries seguintes, até ser finalizado no 9° ano com o tópico circunferência e círculo.

Na unidade 3 buscamos que os alunos reflitam sobre o conceito de área de figuras planas, através da manipulação do geoplano e da orientação dirigida do professor. Esperamos que após as atividades os alunos tenham consolidado, informalmente, os principais procedimentos para se calcular a área de uma figura plana.

A unidade 4 faz referência a formalização dos conceitos adquiridos no nível anterior. Portanto, através das observações realizadas durante as atividades anteriores, as anotações/conclusões dos alunos e, principalmente, da orientação dirigida do professor, espera-se que os alunos formalizem os procedimentos através da obtenção das fórmulas para o cálculo de áreas.

Na unidade 5 temos atividades que visam ratificar/retificar o aprendizado, buscando exercícios de forma dinâmica que integrem o assunto com o cotidiano do aluno.

Outro fator destacado como preponderante pelos dois modelos é o papel do professor no processo educacional. Os *van Hiele* destacam que não há aprendizagem sem uma intervenção planejada, organizada e conduzida pelo professor, ou seja, não há aprendizagem automática.

Já na engenharia didática, a ideia de intervenção planejada está presente quando nos referimos as suas quatro fases, que são: análises preliminares, elaboração da sequência, aplicação da sequência didática, e análise posteriori. Portanto, nossa sequencia didática utilizará o planejamento da engenharia didática aliada ao modelo de pensamento geométrico segundo *van Hiele.*

Desta forma, a estrutura das oficinas foi elaborada tendo como fundamentos estes dois pilares: a linguagem, enquanto forma de expressão e compreensão dos objetos matemáticos e, o papel do professor, responsável pela condução do processo de ensino. Utilizamos o Modelo de *van Hiele* para a construção das atividades em seus respectivos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Unidade 1: Teste de *van Hiele* desenvolvido pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997).

Unidade 2: Pré-teste sobre áreas (Nível 1).

Unidade 3: Deduzindo fórmulas de áreas de polígonos com o Geoplano (Nível 2).

Unidade 4: Obtenção das fórmulas das áreas dos polígonos (Nível 3).

Unidade 5: Explorando atividades envolvendo o conceito de área.

Nesta sequência é priorizada a apropriação do conhecimento geométrico, portanto são listadas tarefas que visam facilitar o entendimento desses conceitos. Deixamos claro neste momento que o tempo planejado para a atividade foi de 13 períodos (com cada período de 45 minutos), porém pode variar conforme o tamanho da classe, os alunos envolvidos e seu comprometimento com a matéria, além dos aspectos particulares, sociais e psicológicos de cada aluno envolvido nesse processo de ensino-aprendizagem.

Lembramos ainda que durante as sessões, os alunos apresentarão as mais diversas dúvidas acerca do conteúdo. Uma sugestão é que o professor elucide essas questões através de perguntas específicas e adequadas de modo que o próprio aluno responda o seu questionamento. Dessa forma o aluno percebe que já conhece o conteúdo, bastando apenas refletir sobre o assunto para obter as respostas. Esta forma de pensar possibilita que o aluno tenha mais confiança no seu conhecimento e em si mesmo, além de proporcionar uma análise mais crítica sobre o conteúdo.

Também é recomendado que as atividades sejam realizadas com a classe dividida em grupos de, aproximadamente, 3 ou 4 alunos. Dessa forma, esperamos que a interação entre os alunos e suas discussões acercas das possíveis respostas possam contribuir para o processo ensino-aprendizagem, uma vez que alunos isolados têm medo de responder as perguntas, devido ao constrangimento que o erro causa. Em oposição a isso grupos tendem a defender suas respostas ou seu ponto de vista.

4.1. Unidade 1: Testes de *van Hiele.*

Tempo previsto: 2 hora-aula

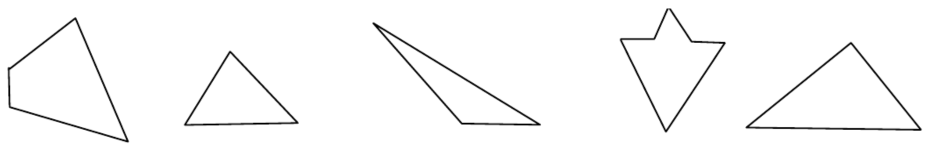
Público Alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: investigar o nível de pensamento geométrico de cada participante, através do teste dos níveis de *van Hiele*, elaborado pela equipe do Projeto Fundão da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

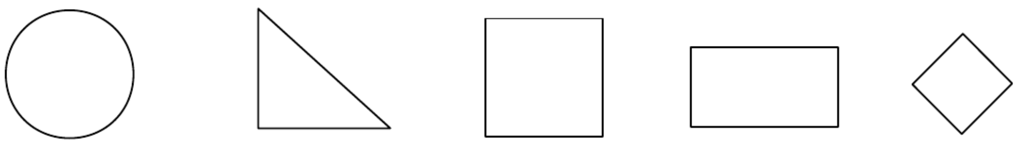
Desenvolvimento: após uma breve conversa com a turma explicando o objetivo do teste, o professor aplicará na turma o teste de *van Hiele.*

Nome: ______________________________________ Turma: _____________ Idade: ________

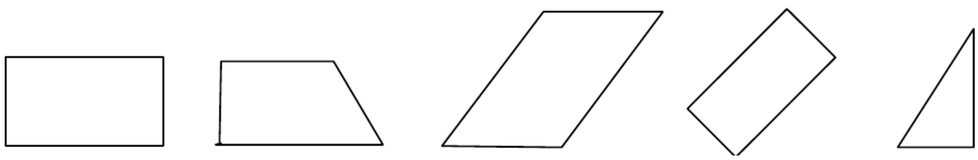
1) Marque o(s) triângulo(s):



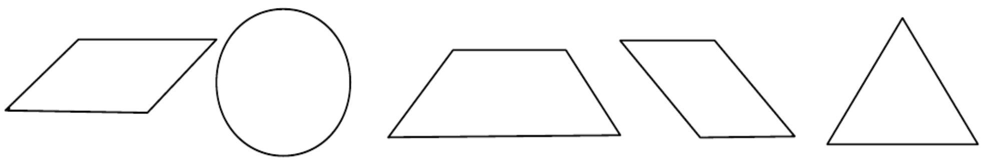
2) Marque o(s) quadrado(s):



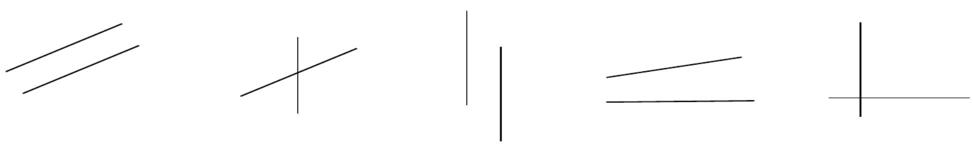
3) Marque o(s) retângulo(s):



4) Marque o(s) paralelogramos(s):



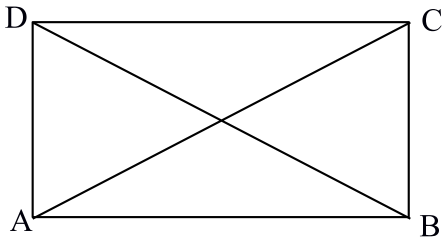
5) Assinale as retas paralelas:



As questões de 1 a 5 foram selecionadas com a intenção de verificar se os alunos possuem o conhecimento geométrico referente ao nível 0 (visualização), segundo a Teoria *van Hiele*. Nestas questões, é verificado a capacidade do aluno identificar figuras geométricas com base na sua forma e comparando-as com outras figuras. Também é verificado se sabem classificá-las como quadrados, retângulos, paralelogramos e triângulos.

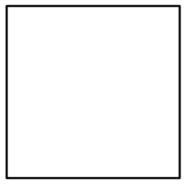
As questões de 6 a 10 foram selecionadas com a intenção de verificar se os alunos possuem o conhecimento geométrico referente ao nível 1 (análise), segundo a Teoria *van Hiele.* Nestas questões, é verificado se o aluno consegue analisar as figuras geométricas através de suas propriedades.

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



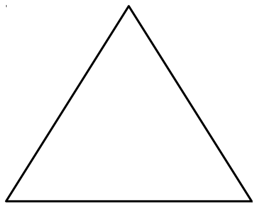
a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos e paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os 4 lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



1 - ………………………………………………..
2 - ………………………………………………..
3 - ………………………………………………..

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles.



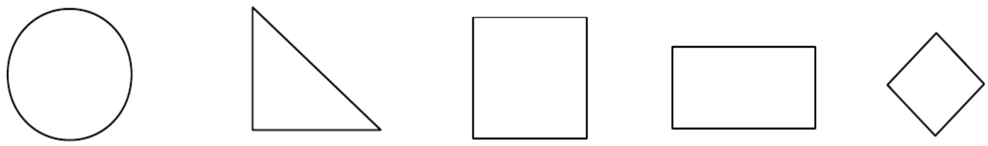
(a) Pelo menos um dos lados mede 60°.
(b) Um dos ângulos mede 60°.
(c) Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma afirmativa é verdadeira.

9 – Dê três propriedades dos paralelogramos.
1 - ………………………………………………..
2 - ………………………………………………..
3 - ………………………………………………..

10 – Dê um exemplo de quadrilátero cujas as diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

As questões de 11 a 15 foram selecionadas com a intenção de verificar se os alunos possuem o conhecimento geométrico referente ao nível 2 (dedução informal), segundo a Teoria *van Hiele*. Nestas questões, é verificado se o aluno consegue analisar e estabelecer relações de implicações entre figuras geométricas distintas. Também é verificado se os alunos reconhecem as figuras a partir de suas propriedades mínimas.

11 – Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):



12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.
a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ……………………………………….
b) Por que? …………………………………………………………………………
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ………………………………………………..

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? ………………...
Por que? …………………………………………………………………………….

14 – Considere as afirmativas:
I – A figura X é um retângulo.
II – A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira.
a) Se I é verdadeira, então II é falsa.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados.
a) Qualquer propriedade dos quadrados também é propriedade dos retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é uma propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é uma propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Durante a realização do teste o professor poderá, de forma individual e aos alunos que apresentarem maior dificuldade, auxiliar na análise das questões utilizando a interrogação e a orientação dirigida (fases do aprendizado). Dessa forma, o aluno será capaz de realizar uma análise mais crítica do objeto de estudo, reconhecendo as principais características de cada figura geométrica.

Após a correção dos testes, se necessário, o professor deve realizar uma revisão das propriedades dos polígonos com o intuito de nivelar a turma, pois as atividades seguintes foram elaboradas para alunos que se encontram neste nível (nível 2) do pensamento geométrico segundo a Teoria *van Hiele*.

Continuando na sequência, é importante saber qual é o entendimento que o aluno possui sobre o conceito de área, portanto a aplicação de um pré-teste sobre o tema é uma forma que o professor tem a sua disposição, para tentar compreender como o aluno pensa e qual o seu entendimento até aquele momento.

Além de avaliar o conhecimento do aluno, o teste tem por objetivo encontrar as suas principais dificuldades que, utilizando-se da engenharia didática, podem ser contornadas através de um planejamento adequado a essas dificuldades.

Nesta atividade, também é recomendado que o professor, de forma individual e aos alunos que apresentarem maior dificuldade, auxilie na análise das questões utilizando a interrogação e a orientação dirigida.

4.2 Unidade 2: Pré-Testes sobre Áreas (Nível 1)

Tempo previsto: 2 hora-aula

Público Alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: investigar o conhecimento específico sobre Áreas de Polígonos, através da aplicação de um pré-teste onde foram selecionadas questões elaboradas pelos seguintes autores.

1) Juliana Maria Souza Rangel Dos Santos desenvolvida em sua dissertação de mestrado; e

2) Cristiane de Arimatéa Rocha, et al. em UMA DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO NO ENSINO FUNDAMENTAL.

Desenvolvimento: após uma breve conversa com a turma explicando o objetivo do teste, o professor aplicará à turma o pré-teste sobre áreas de figuras planas.

1. Para você, o que é área de uma figura?

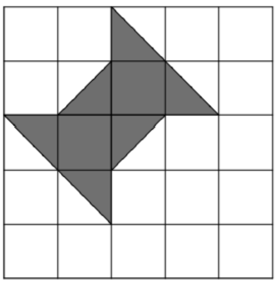
____

____

____

O objetivo da questão 1. é descobrir qual o entendimento que o aluno tem sobre o conceito área. Espera-se descobrir se o mesmo não o confunde com o perímetro ou exemplifica uma fórmula para esse conceito. É muito importante saber como o aluno pensa, pois só assim o professor conseguirá fazer um melhor planejamento de suas atividades.

2. A figura mostra um quadrado dividido em 25 quadradinhos iguais. A área sombreada corresponde a que fração do quadrado?



a)1/2

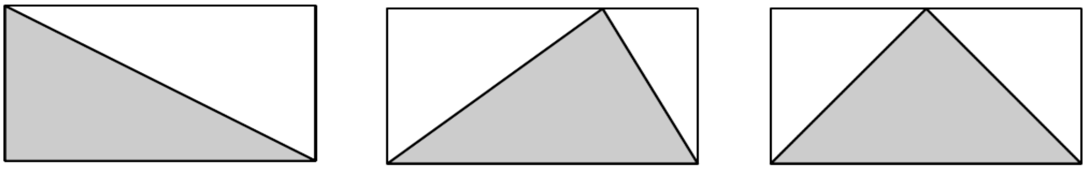
b)1/3

c)1/5

d)1/6

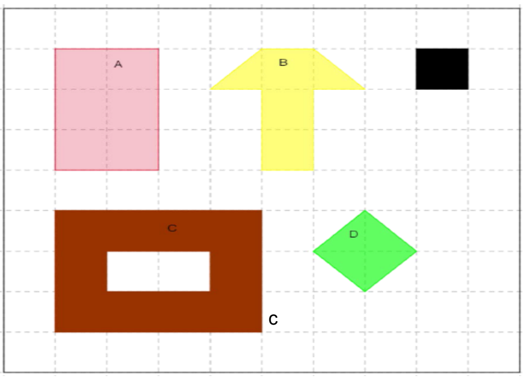
O objetivo da questão 2. é verificar se o aluno consegue analisar a área da parte (desconhecida) com a área total do polígono (conhecida), ou seja, fazer a relação de que uma área de tamanho desconhecido pode ser um “pedaço” de uma área de tamanho conhecido.

3. Sabendo-se que os retângulos abaixo são iguais e possuem área de 32 cm^2, podemos concluir que os triângulos sombreados possuem a mesma área? Por quê? Se sim, qual é o tamanho da área sombreada?



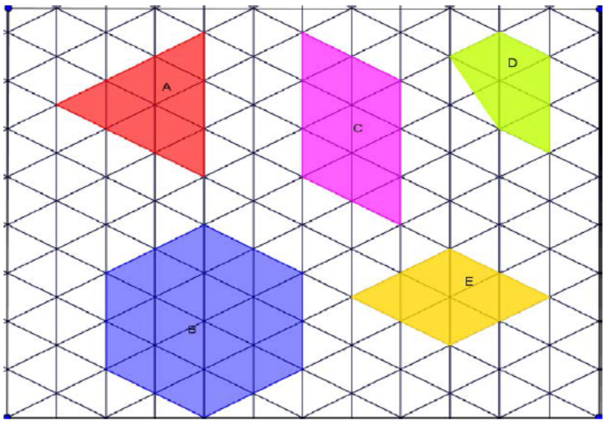
Na questão 3. reiteramos o objetivo de analisar uma área de tamanho desconhecido. Mas agora temos um triângulo inscrito em um retângulo. Desejamos que o aluno perceba que esta área desconhecida sempre será a metade da área do retângulo. Também busca-se verificar se os alunos têm a compreensão de que não alterando a base e a altura do triângulo, sua área permanece constante.

4. Considerando o quadradinho menor como unidade de área, calcule a área das figuras abaixo:



Polígono	Área
A	
B	
C	
D	

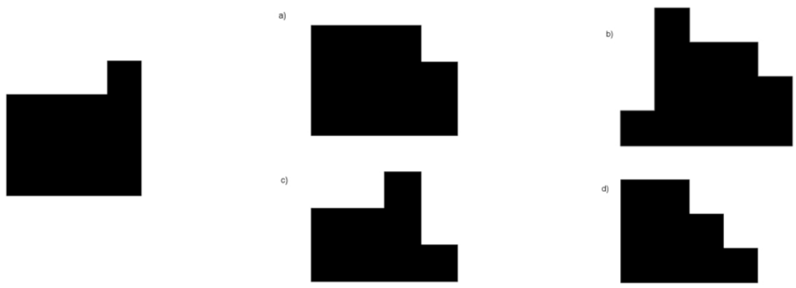
5. Observe o desenho de alguns polígonos na malha triangular. Usando o triângulo menor como unidade de área, complete a tabela:



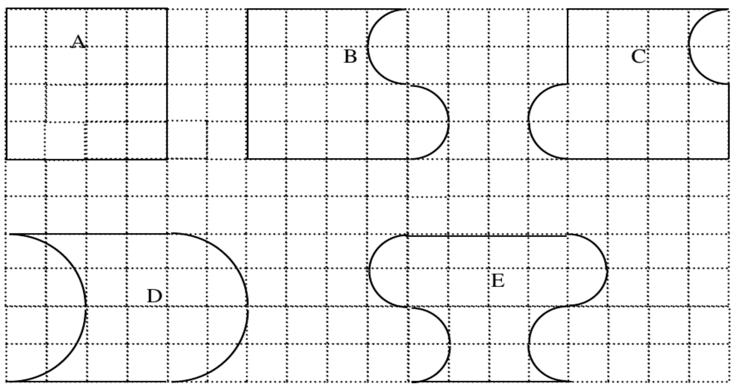
Polígono	Nome	Área
A		
B		
C		
D		
E		

Nas atividades 4. e 5. temos como objetivo que o aluno conte a quantidade de quadrados (questão 5.) e de triângulos (questão 6.) que compõe a figura total. Esperamos que os alunos, ao analisar as questões, compreendam que uma área total é a soma das diversas áreas menores que compõem o polígono.

6. Identifique a figura que possui a mesma área da figura dada:



7. As figuras abaixo têm a mesma área? Como você chegou a essa resposta?

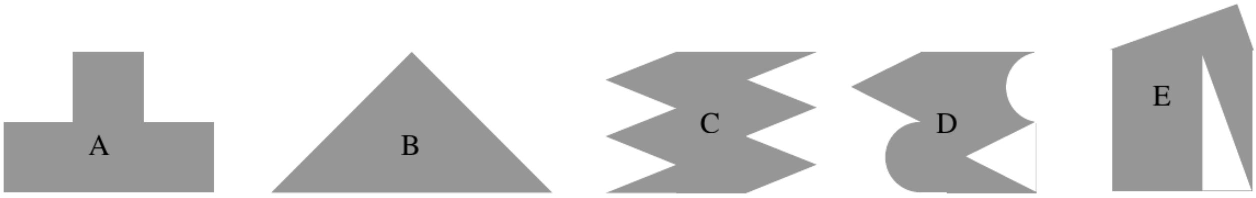


Escreva aqui a sua solução: ____

____

O objetivo das atividades 6. e 7. é verificar se os alunos conseguem investigar as particularidades de uma figura geométrica e compará-las com outras figuras. Sendo assim, o aluno deverá analisar e compreender que figuras diferentes podem possuir a mesma área. Também é objetivo nesta questão, que o aluno começe a pensar em decomposição de uma figura desconhecida para transformá-la em uma figura conhecida.

8. Observe as figuras abaixo e com apenas um corte reto, divida cada uma delas de maneira que seja possível montar um quadrado a partir de cada figura dividida.



Na atividade 8. o tamanho da área não importa, o nosso objetivo na atividade é forçar o aluno a transformar uma figura qualquer em outra, utilizando a decomposição.

O conceito de decomposição de figuras planas deve ser bem compreendido durante as atividades, pois ele será muito importante para a dedução informal das fórmulas de área que serão mostradas nas próximas atividades.

Após a correção do pré-teste sobre áreas e posterior análise das repostas dos alunos, o professor pode planejar uma revisão sobre os conteúdos aos quais os alunos apresentarem maior dificuldade de compreensão. É necessário que esses conceitos estejam com entendimento satisfatório ou, pelo menos, que os alunos tenham a capacidade de analisar os polígonos nas atividades futuras.

4.3 Unidade 3: Deduzindo fórmulas de áreas de figuras planas com o Geoplano (Nível 2)

Tempo previsto: 4 hora-aula

Publico alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Recursos utilizados: Geoplano retangular e elásticos coloridos.

Objetivo: investigar as contribuições de materiais concretos, especificamente o Geoplano, para a aprendizagem do conteúdo áreas de polígonos, avaliadas segundo a teoria de *van Hiele*. Espera-se que, ao final desta aula, o aluno seja capaz de calcular áreas de polígonos e deduzir informalmente as fórmulas dos polígonos mais simples (triângulos e quadriláteros).

Desenvolvimento: No primeiro momento o professor formará grupos de 3 alunos e entregará a cada grupo um geoplano. O professor deixará uns instantes para que os alunos manipulem a vontade o material.

Após esse primeiro momento, solicitará aos grupos que, utilizando os elásticos fornecidos com o material, construam no geoplano algumas figuras geométricas conhecidas por eles. Dessa maneira exploraremos o nível 0 da teoria de *van Hiele*, que consiste no reconhecimento das figuras geométricas através de suas formas.

1. Utilize o Geoplano e construa nele figuras geométricas conhecidas por vocês.

Logo em seguida, poderá ser explorado o nível 1 do pensamento geométrico, através da análise das propriedades dos polígonos que os grupos construirão no Geoplano. Utilizando-se da orientação dirigida, o professor coloca os alunos em situações para explorar o assunto através de materiais ordenados cuidadosamente numa sequência de grau de dificuldade crescente. Neste momento cada atividade deve estar voltada para que os alunos deem respostas específicas de forma que possam perceber por si mesmos, as propriedades, conceitos e definições que o professor quer atingir.

Ao decorrer da atividade, o professor como mediador levantará questionamentos a respeito do conteúdo que está sendo desenvolvido, buscando com isso que os alunos percebam que a área de uma figura plana é o número que expressa a medida de superfície dessa figura, numa certa unidade, considerando que:

- Unidade de medida de área (u.a.): superfície quadrada delimitada por quatro pregos.
- Unidade de comprimento (u.c.): a distância entre dois pregos na horizontal ou vertical.
- Usualmente chama-se um dos lados de um retângulo de comprimento (ou base) e o outro de largura (ou altura).

2. Construa no Geoplano um retângulo de lados 5 cm e 3 cm. a) Quantos quadradinhos sem sobreposição têm dentro desse retângulo? b) Você sabe o que significa esse número encontrado?

Na atividade 2, queremos que o aluno deduza informalmente, através da contagem dos quadrados internos, a medida da área do retângulo utilizando uma unidade de medida padronizada. Ainda reforçamos o conceito de área nesta atividade através da pergunta b).

3. Construa no geoplano, três diferentes figuras de área 12.

Esta atividade busca estabelecer as relações entre as diversas figuras geométricas, fazendo com que os alunos deduzam que figuras geométricas diferentes podem possuir áreas iguais.

4. Construa no geoplano retângulos de dimensões conforme a tabela. Após a construção preencha-a:

Base (lado horizontal)	Altura	Área
7	3	
5	8	
2	10	
4	6	

Indique certo (C) ou errado (E) para as respostas a respeito da área do retângulo:

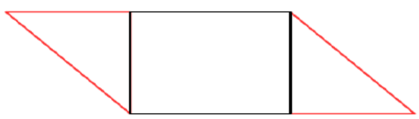
( ) A área do retângulo é obtida somando os lados.

( ) A área do retângulo é obtida multiplicando o comprimento da base pela medida da altura.

( ) Os valores do produto da base pela altura na tabela não são os mesmos que os da área mostrados na tabela.

Ainda com atividades sobre os retângulos, a atividade 4. tenta estabelecer, através da verificação das assertivas (orientação dirigida), que os alunos façam a relação entre a área do retângulo e o produto dos seus lados. De forma experimental, perceberão que não importando as medidas do retângulo, sua área sempre será o produto da base pela sua altura.

5. Agora construa um paralelogramo no geoplano com elásticos de cores diferentes, trace sua altura, preencha a tabela.



Base (lado horizontal)	Altura	Área

a) Você consegue "transformar" o paralelogramo em um retângulo?

b) A partir do que observou, qual seria a maneira para calcular a área de um paralelogramo?

c) Construa outros dois paralelogramos diferentes do primeiro e repita os passos anteriores.

O objetivo da atividade 5 é relacionar a área do retângulo com a área do paralelogramo, através da sua transformação em retângulo. A orientação dirigida da atividade busca fazer com que essa propriedade seja deduzida informalmente através de três exemplos.

6 - A partir dos paralelogramos da atividade anterior, deduzir a área do triângulo. Com um elástico de cor diferente trace uma diagonal no paralelogramo.

a) O paralelogramo ficou dividido em quantos triângulos?

b) Que fração do paralelogramo, cada um dos triângulos representa?

c) Marque certo (C) ou errado (E) a respeito da área do triângulo:

(   ) A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo.

(   ) A área é obtida somando os lados.

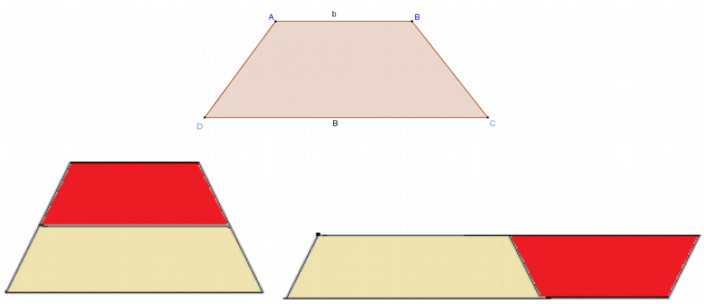
(   ) A área é obtida multiplicando o comprimento da base pela altura e dividindo tudo por dois.

(   )Podemos calcular a área do triângulo multiplicando o comprimento da base pela altura e dividindo tudo por 3.

d) Agora trace uma diagonal diferente e responda as letras a), b) e c).

Fazendo uma relação direta com o exercício 3 do pré-teste sobre áreas, o objetivo desta questão é reforçar a relação que existe entre a área do paralelogramo e a área do triângulo. Esperamos que os grupos, seguindo a orientação das atividades propostas na questão, deduzam informalmente que a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. Essa ideia é reforçada quando é solicitado aos grupos, refazerem suas análises utilizando a outra diagonal do paralelogramo.

7- Construa no geoplano, um trapézios como duas ligas de cores diferentes.



a) Com os dois trapézios, monte um polígono que você já sabe calcular a área. Que polígono você formou?

b) Marque a resposta correta a respeito da área do trapézio.

( ) A área é obtida somando as medidas das bases.

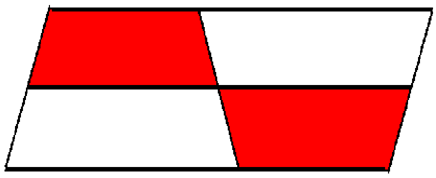
( ) A área é obtida multiplicando o comprimento da base pela altura e dividindo tudo por 2.

( ) A área é obtida multiplicando a soma das bases pela altura e dividindo o resultado por 2.

Na atividade 7. o professor pode orientar aos grupos que utilizem a decomposição de polígonos para facilitar a solução da questão, pois estas manipulações são facilitadas com a utilização do geoplano. Dessa forma, os alunos se deparam novamente com uma figura bastante conhecida, o paralelogramo, que está sendo estudado desde o início das atividades.

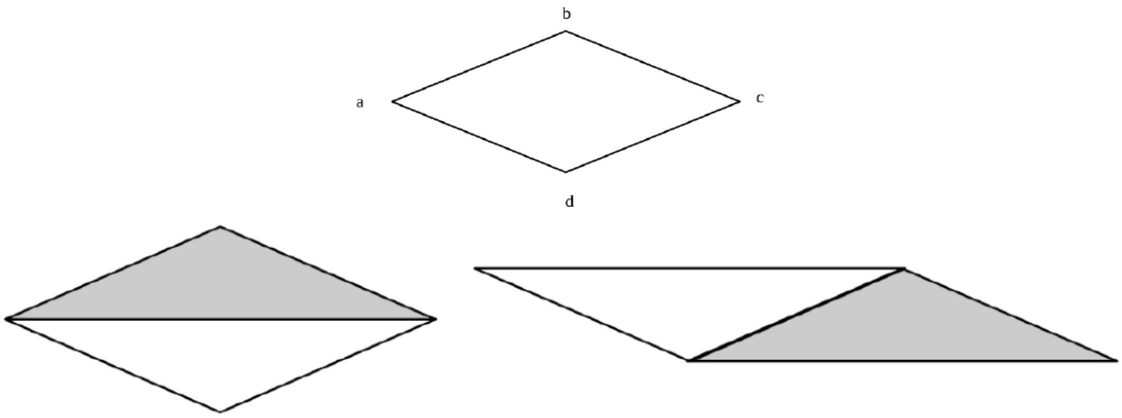
Para esta questão, também podemos orientar aos grupos a "completarem" a figura com outro trapézio igual ao primeiro, dando origem a um paralelogramo com o dobro da área do trapézio inicial. Dessa forma, a dedução informal pode ser reiterada de uma forma diferente da primeira solução.

Figura 8 – Paralelogramo formado com trapézios



Fonte: O autor.

8- Construa no geoplano, um losango utilizando dois elásticos como o apresentado a seguir:



a) Com os dois triângulos isósceles, monte um polígono que você já sabe calcular a área. Que polígono você formou?

b) Marque a resposta correta a respeito da área do trapézio.

( ) A área é obtida somando as medidas dos lados.

( ) A área é obtida multiplicando o comprimento da base pela altura.

( ) A área é obtida multiplicando a diagonal maior pela metade da diagonal menor.

Nesta atividade, os alunos transformarão o losango em um paralelogramo, pois o grupo já está familiarizado a encontrar a área desta figura. Portanto, utilizando a decomposição do losango, a análise da figura formada e seguindo as orientações da atividade, espera-se o grupo conclua de maneira informal como se obtém a área do losango.

4.4. Unidade 4: Obtenção das fórmulas das áreas dos polígonos (Nível 3)

Tempo previsto: 1 hora-aula

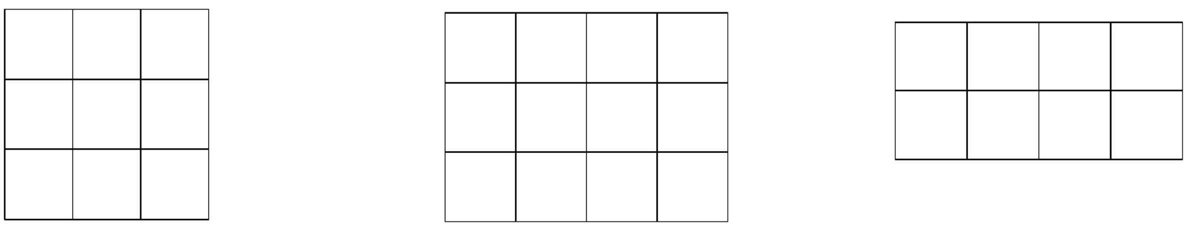
Público Alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: fazer com que os alunos formalizem os procedimentos para encontrar a área dos polígonos e compreendam essas fórmulas.

Desenvolvimento: a seguir, apresentamos sete tarefas que podem ser utilizadas para demonstrar e generalizar as fórmulas para obtenção da área de alguns polígonos. É necessário que nesta atividade os grupos sejam orientados a relembrar os procedimentos e técnicas que foram utilizados com o geoplano, além de consultar todas as anotações realizadas na sessão anterior.

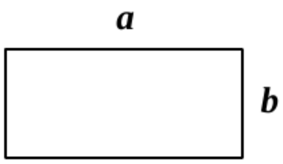
Obtenção da fórmula da área do retângulo.

Tarefa 1: Sabendo que cada quadrado menor tem 1cm de lado e mede 1 cm^2, qual a área total dos retângulos abaixo?



Provavelmente os grupos encontrarão as respostas de forma bastante simples, bastando somar a quantidade de quadrados menores a figura possui. Dessa forma, a orientação dirigida deve ocorrer de maneira que o aluno, ao analisar a figura, faça a relação que o valor da área é a multiplicação do número de quadrados de uma linha pela quantidade de linhas que a figura possui.

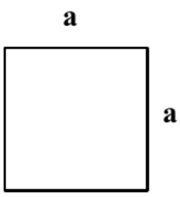
Tarefa 2: Agora que você encontrou as áreas dos retângulos da tarefa 1, você consegue generalizar a fórmula de obtenção da área do retângulo de lados ***a*** e ***b****?*



Área retângulo =

Após as trocas de informações entre o grupo, através da orientação dirigida feita pelo professor, é esperado que os alunos consigam deduzir (Nível 3) a fórmula de obtenção da área dos retângulos que é A = ***a*** x ***b.***

Tarefa 3: Qual é a fórmula para se obter a área de um quadrado de lado ***a***? Ela é parecida com a fórmula para a área do retângulo? Por quê?

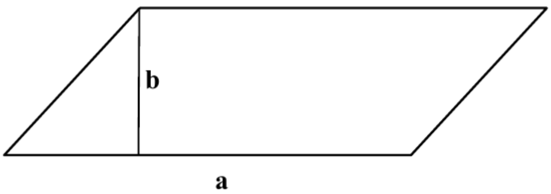


Área do quadrado =

Nesta tarefa queremos que o aluno compreenda que um quadrado é um retângulo de lados iguais, através da análise entre a tarefa e o problema anterior.

Obtenção da fórmula da área do paralelogramo.

Tarefa 4: Baseado nas suas anotações a respeito da área do paralelogramo e na comparação co a área do retângulo, você consegue generalizar a fórmula de obtenção da área do paralelogramo de lados ***a*** e altura ***b****?*

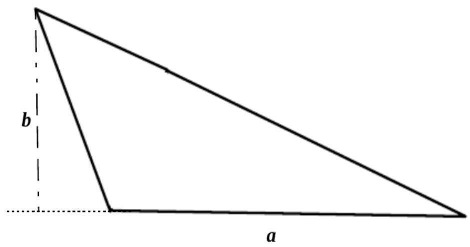


Área do paralelogramo =

Com as experimentações realizadas no geoplano e as anotações das observações daquela atividade, é esperado que o grupo não tenha dificuldades em repetir o pensamento geométrico utilizado para calcular a área da figura naquela ocasião. Portanto, é esperado que os grupos façam relação da área do paralelogramo com a área do retângulo.

Obtenção da fórmula da área do triângulo.

Tarefa 5: Tendo como referência o paralelogramo da questão anterior e baseado nas suas anotações a respeito do assunto, você consegue generalizar a fórmula de obtenção da área de um triângulo de base ***a*** e altura ***b****?*

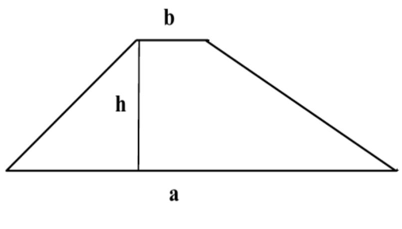


Área do triângulo =

Neste momento, utilizando a análise feita na atividade semelhante da aula anterior, o grupo poderá "completar" o paralelogramo para ficar mais evidente que a área de um triângulo é a metade da área do paralelogramo correspondente.

Obtenção da fórmula da área do trapézio.

Tarefa 6: Baseado nas suas anotações a respeito da área do trapézio e na comparação com a área do paralelogramo, você consegue generalizar a fórmula de obtenção da área do trapézio abaixo?



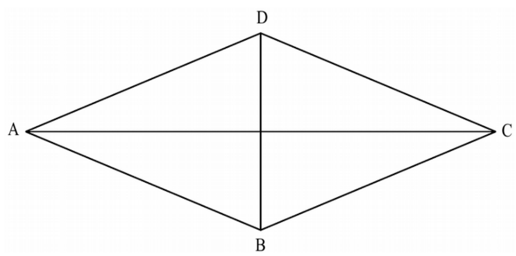
a → base maior
b → base menor
h → altura

Área do trapézio =

Através das experimentações realizadas no geoplano e as anotações das observações daquela atividade, é esperado que os grupos façam relação da área do trapézio com a área do paralelogramo.

Obtenção da fórmula da área do losango.

Tarefa 7: Baseado nas suas anotações a respeito da área do losango e na comparação com a área do paralelogramo, você consegue generalizar a fórmula de obtenção da área do losango abaixo?



AC → Diagonal maior (D)
BD → Diagonal menor (d)

Área do losango =

Com as experimentações realizadas no geoplano e as anotações das observações daquela atividade, é esperado que o grupo não tenha dificuldades em repetir o pensamento geométrico utilizado para calcular a área da figura naquela ocasião. Portanto, é esperado que os grupos façam relação da área do paralelogramo com a área do retângulo.

4.5 Unidade 5: Explorando atividades envolvendo o conceito de área.

Tempo previsto: 4 hora-aula

Público Alvo: 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: esta atividade tem por objetivo principal permitir que o aluno aplique o conceito de área e perceba a sua importância no cotidiano.

Desenvolvimento: nesta etapa, os alunos serão divididos em grupos ou duplas, cada grupo deverá escolher um ambiente da escola para calcular sua área com o auxílio da fita métrica, instrumento que a escola o possui em quantidade suficiente para todos os grupos.

Atividade 1. A diretora da nossa escola pretende trocar o piso de todas as salas, mas para isso precisa saber quantos metros quadrados aproximadamente de ladrilho é necessário comprar, vamos ajudá-la?

Utilizando o que você aprendeu sobre áreas, reúna-se com o seu grupo, com o auxílio da fita métrica e lápis, escolha um ambiente da escola e mãos à obra.

Registre aqui, o ambiente escolhido e sua área:

Atividade 2.

1. Observe cada embalagem recebida:
2. Identifique o polígono de cada face da embalagem:
3. Com a régua, meça cada aresta da embalagem e registre:
4. Calcule a área de cada um dos polígonos:
5. Encontre a área total da superfície da embalagem:

Desenvolvimento: Cada dupla receberá duas embalagens de formatos diferentes, duas réguas, a folha de atividades e papéis para anotações. Os alunos deverão, então, identificar o polígono de cada face, usar a régua para medir as arestas e, com o uso do Geoplano, calcular a área de cada polígono e, posteriormente, a área total da superfície da embalagem.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve origem através das minhas experiências tomadas em sala de aula durante dois momentos, ambos na Escola Estadual Profª. Odila Villorde de Moraes, na cidade de Itaqui-RS.

No primeiro momento ministrei aulas de reforço escolar para alunos do 2° ano do Ensino Médio, no ano de 2016 e naquela oportunidade revisamos um pouco dos conteúdos de áreas e volumes. Durante as atividades pude verificar que não havia por parte dos alunos uma compreensão adequada sobre o conceito de área, pois alguns alunos confundiam área de um polígono com o seu volume e também havia confusão entre perímetro e área.

Ao ser questionado sobre o que entendia por área de uma figura plana, a resposta foi que área era a base multiplicado pela altura e dividido por dois, ou seja, a forma como este conteúdo foi introduzido, não proporcionou ao aluno a compreensão desejada para este conceito e sua opção foi decorar fórmulas prontas que geraram muita confusão entre conceito, aplicação e também entre a diferenciação das várias figuras poligonais.

No segundo momento, durante o Estágio Curricular Obrigatório I, realizado no segundo semestre de 2017 para uma turma da 9° ano do Ensino Fundamental ao trabalhar com área e perímetro nos trinômios, percebi que o mesmo conflito entre perímetro e área surgia, porém neste caso não havia conhecimento sólido da fórmula de obtenção da área do quadrado.

Levando em considerações nossas pesquisas e as observações acima descritas, é que consideramos de extrema importância rever o ensino de Geometria, de modo a fazer com que os alunos compreendam os conceitos geométrico no momento oportuno.

Dessa forma a nossa sequência tem por objetivo promover um aprendizado onde o aluno não se apegue a fórmulas prontas e construa o conceito de área a partir de atividades encadeadas, fazendo com que ele pense nas figuras através de suas propriedades, realizando comparações e analisando suas características, dando maior ênfase nas implicações que cada propriedade traz para as fórmulas de cálculo de área e perímetro.

Queremos deixar claro que em nenhum momento tentamos esgotar o assunto que é extremamente vasto, nem tampouco solucionar os problemas da educação matemática, nosso intuito é de apenas mostramos uma maneira de explorar o assunto de forma a torná-lo mais conceitual e dinâmica e menos memorizado, fazendo com que o aluno se sinta ativo no processo de construção de seu conhecimento e não um mero receptor de informações prontas e acabadas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CROWLEY, M. L., **O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: Lindquist, M. M., Shulte, A. P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Editora Atual, 2011.

DOLCE, O., POMPEO J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar – Vol 9**. São Paulo: Atual, 1997.

JAIME, A., GUTIERREZ, A. **Una proposta de fundamentación para la enseñansa de lá geomtria**. Disponível em: <https://www.sectormatematica.cl/articulos/van%20hiele.pdf>. Acessado em 15 outubro 2017, 15:25:32.

JAKUBOVIC, J., LELLIS, M. C. **Matemática na medida certa: 5ª série**. 3ª edição. São Paulo: Scipione, 1995

LEIVAS, J. C. P. - **Educação Geométrica: Reflexões Sobre Ensino e Aprendizagem em Geometria.** Educação Matemática Em Revista – RS, Ano 13 - 2012 - número 13 - v.1 - pp. 9 a 16.

LIMA, E. L. **Áreas e Volumes: Fundamentos da Matemática Elementar**. Sociedade Brasileira de Matemática. RJ, 1985.

LOUREIRO, D. F. et al. **As Dificuldades do Ensino da Geometria Na 7° Série**. TCC, 2011. Disponível em <https://www.webartigos.com/storage/app/uploads/public/588/508/305/58850830506b0791352262.pdf> Acessado em: 14/10/17, 14:35:31.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades no Processo Ensino Aprendizagem de Trigonometria por Meio de Atividades**. Dissertação, 2006. Disponível em <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_62.pdf>. Acesso em 14/09/17, 14:21:32.

PAVANELLO, R. M. **Por que Ensinar/aprender Geometria? In VII Encontro Paulista de Educação Matemática.** 2004. Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/mr21-Regina.doc>. Acessado em 04 maio 2017, 17:15:30.

PÉRTILE, K. (2011) **O modelo *van hiele* de desenvolvimento do pensamento geométrico: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio.** Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br:8080/dspace/handle/10923/3005>. Acesso em: 20/05/17, 18:15:17.

ROCHA, C. A. et al. **Uma discussão sobre o ensino de área e perímetro no ensino fundamental**. Disponível em <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo2/rocha_et_al_area%20e%20perimetro_minicurso.pdf>. Acesso em: 8/10/17, 17:30:31.

SANTOS, J. A. S. **Problemas de Ensino e de Aprendizagem em Perímetro e Área: Um Estudo de Caso com Professores de Matemática e Alunos de 7ª Série do Ensino Fundamental.** Dissertação, 2011. Disponível em <https://www.unimep.br/phpg/bibdig/pdfs/docs/26092011_144051_jamile.pdf>- Acessado em 04 maio 2017, 17:15:30.

SANTOS, J. M. S. R. **A teoria de Van Hiele no estudo de Áreas de Polígonos e Poliedros.** Dissertação, 2015. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/24072015Juliana-Maria-Souza-Rangel-dos-Santos.pdf.> Acesso em: 02/07/2017, 17:45:15.

SILVEIRA, M. R. A. (2002) **"Matemática é difícil": Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos.** Disponível em: <http://www.anped.org.br/25/marisarosaniabreusilveirat19.rtf>. Acessado em 03 maio 2017, 17:17:17.