

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA - UNIPAMPA

GABRIELLE NUNES DOS SANTOS

**CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA LINEAR ENSINADOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
UMA ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO SUPERIOR**

**Itaqui-RS
2017**

GABRIELLE NUNES DOS SANTOS

**CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA LINEAR ENSINADOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
UMA ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora:

Profa. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares

**Itaqui-RS
2017**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S237c Santos, Gabrielle Nunes dos
CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA LINEAR ENSINADOS NA
EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO
SUPERIOR / Gabrielle Nunes dos Santos.
61 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade
Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2017.
"Orientação: Maria Arlita da Silveira Soares".

1. Álgebra Linear. 2. Registros de Representação Semiótica. 3.
Livros-Texto. 4. Formação de Professores. I. Título.

GABRIELLE NUNES DOS SANTOS

**CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA LINEAR ENSINADOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
UMA ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 09 de Dezembro de 2017.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares
UNIPAMPA – Campus Caçapava do Sul-RS

Profa. Dra. Cátia Maria Nehring
Unijuí – Ijuí-RS

Profa. Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani
UFSM - Santa Maria-RS

AGRADECIMENTOS

Agradeço, especialmente,

Aos meus familiares pelo apoio durante toda minha graduação.

À minha orientadora Professora Dra. Maria Arlita da Silveira Soares, pela orientação, incentivo e paciência.

Aos professores do curso de Matemática-Licenciatura da Unipampa- Campus Itaqui pelas oportunidades de aprendizagem.

Às Professoras Dra Cátia Maria Nehring e Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho e pelas colaborações.

RESUMO

Resumo: Este trabalho tem por objetivo analisar os encaminhamentos dados por livros de Álgebra Linear, presentes na bibliografia básica dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições brasileiras de Ensino Superior, quanto ao ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes. A teoria que fundamentou a elaboração deste trabalho é a dos Registros de Representação Semiótica. Adota-se, também, pressupostos da pesquisa qualitativa e da Análise de Conteúdo, tendo como fonte de produção de dados dois livros-texto de Álgebra Linear. Os livros-texto foram escolhidos mediante a análise das referências bibliográficas de cursos de Licenciatura em Matemática brasileiros. A análise dos dados permitiu concluir que as relações, conexões e situações-problemas são pouco exploradas em ambos os livros, assim como, as relações dos conceitos de sistemas lineares, matrizes e determinantes com outras áreas do conhecimento. Nenhum dos livros aborda o uso de *softwares* como ferramenta para a resolução de sistemas lineares, tendo em vista a programação dos métodos de resolução. Com relação aos métodos de resolução, o livro que explorou mais métodos foi o livro B. Ademais o registro de representação semiótica que teve mais ênfase em ambos os livros foi o registro matricial. A transformação cognitiva de conversão foi verificada em ambos os livros. Por fim, destaca-se que esta pesquisa pode ser ampliada a partir da análise de outros livros-texto de Álgebra Linear presentes de maneira significativa nas bibliografias básicas de instituições brasileiras de Ensino Superior. Como também, investigar, comparar e salientar as vantagens de se utilizar cada um dos métodos para a resolução de sistemas lineares, no que tange a programação computacional destes métodos, bem como, analisar as ligações entre os métodos estudados em Álgebra Linear e revisitados no Cálculo Numérico atrelando estes dois componentes curriculares obrigatórios na graduação em Matemática.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Registros de Representação Semiótica; Livros-texto; Formação de Professores.

ABSTRACT

Abstract: This work aims to analyze the referrals given by Linear Algebra books, present in the basic bibliography of Mathematics Degree courses of the Brazilian institutions of Higher Education, regarding the teaching of Linear Systems, Matrices and Determinants. The theory behind this work is that of the Semiotic Representation Registers. We also adopt assumptions of the qualitative research and the Content Analysis, having as data source two textbooks of Linear Algebra. The textbooks were chosen by analyzing the bibliographic references of Brazilian Mathematics Degree courses. Data analysis allowed us to conclude that the relations, connections and situations-problems are little explored in both books, as well as the relations of the concepts of linear systems, matrices and determinants with other areas of knowledge. None of the books addresses the use of software as a tool for the resolution of linear systems, with a view to programming the resolution methods. With regard to methods of resolution, the book that explored more methods was book B. In addition the record of semiotic representation that had more emphasis in both books was the matrix record. The cognitive transformation of conversion was verified in both books. Finally, it should be highlighted that this research can be expanded from the analysis of other textbooks of Linear Algebra present in a significant way in the basic bibliographies of Brazilian institutions of Higher Education. As well, to investigate, compare and emphasize the advantages of using each of the methods for solving linear systems, regarding the computational programming of these methods, as well as to analyze the connections between the methods studied in Linear Algebra and revisited in Calculus Numerical linking these two compulsory curricular components in the graduation in Mathematics

Keywords: Linear Algebra; Registers of Semiotic Representation; Textbooks; Teacher Formation

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Situação-problema utilizada para introduzir o estudo de sistemas lineares.....	36
Figura 2: Interpretação gráfica dos tipos de sistemas lineares de ordem 3x3 .	37
Figura 3: Exemplo envolvendo equilíbrio de equações químicas.....	38
Figura 4: Atividade envolvendo situação –problema do capítulo de sistemas lineares.....	40
Figura 5: Atividade envolvendo situação-problema sobre sistemas lineares....	41
Figura 6: Atividade em que o uso de ferramenta gráfica é sugerido.....	42
Figura 7: Continuação da atividade acima.....	42
Figura 8: Atividades envolvendo demonstrações	44
Figura 9: Atividade método de Gauss	45
Figura 10: Continuação da atividade acima.....	46
Figura 11: Atividade de comparação entre métodos.....	47
Figura 12: Exemplo de atividade com conversão do RLN-RM.....	49

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Exemplos de registros de representação semiótica	23
Quadro 2: Exemplo de tratamento envolvendo sistemas lineares.....	23
Quadro 3: Exemplo de tratamento envolvendo matrizes.....	24
Quadro 4: Exemplo de conversão do registro simbólico-algébrico para o registro gráfico envolvendo sistemas lineares	24
Quadro 5: Exemplo de conversão do registro gráfico para a o registro matricial envolvendo matrizes	24
Quadro 6: Informações sobre o Livro A.....	29
Quadro 7: Informações sobre o Livro B.....	30
Quadro 8: Categorias de análise e seus indicadores	31
Quadro 9: Exemplo de conexão	35
Quadro 10: Registros de Representação mobilizados nos dois livros	48
Quadro 11: Análise do livro A referente aos Registros de Representação Semiótica	49
Quadro 12: Análise do livro B referente aos Registros de Representação Semiótica	51
Quadro 13: Síntese dos resultados obtidos por categoria	53

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
2. O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM ÁLGEBRA LINEAR À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	15
3. METODOLOGIA.....	26
3.1. <i>Corpus</i> da pesquisa.....	27
3.1.1. PROCEDIMENTOS PARA A DEFINIÇÃO DO <i>CORPUS</i> DA PESQUISA.....	27
3.2. <i>Categorias de Análise</i>	31
4. SISTEMAS LINEARES, MATRIZES E DETERMINANTES NOS LIVROS-TEXTO DE ÁLGEBRA LINEAR.....	33
4.1. Localização dos Sistemas lineares, matrizes e determinantes na obra	33
4.2. Relações/Conexões (verificadas no decorrer dos capítulos)	35
4.3. Situações-problema (verificadas nas atividades propostas)	39
4.4. <i>Softwares</i>	41
4.5. Argumentos.....	43
4.6. Métodos escolhidos para a resolução dos sistemas de equações lineares	44
4.7. Registros de Representação Semiótica	48
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57

1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa insere-se no campo da Educação Matemática, especificamente, nas investigações realizadas no grupo de pesquisa matE² (Educação e Educação Matemática) da Universidade Federal do Pampa. A Educação Matemática “é um campo de produção de conhecimentos, no qual as investigações direcionam-se para a análise/entendimento das “múltiplas relações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático em um contexto específico” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 9). Com base neste entendimento de Educação Matemática, o grupo de pesquisa matE² visa problematizar dimensões subjacentes às temáticas currículo, trabalho docente, políticas públicas, gestão educacional e “formação” de professores.

Em relação à formação do professor de Matemática, as reflexões no grupo de pesquisa supracitado evidenciam as relações entre a formação matemática formal do professor com a formação teórico-metodológica e curricular. Para tanto, torna-se necessário “incorporar na formação do professor dimensões filosóficas, históricas, psicológicas, políticas, metodológicas e culturais” (PIRES; SANTOS, 2008, p. 202), áreas estas que compõem o campo interdisciplinar denominado Educação Matemática.

Pesquisas sobre formação de professores têm se dedicado a analisar como as disciplinas propostas nos cursos de graduação, em particular, as disciplinas de cunho específico¹ (GRILO; BARBOS; LUNA, 2015; MOREIRA, 2012; FIORENTINI, 2005) tem contribuído no desenvolvimento dos saberes dos futuros professores, tanto em relação às questões formais da Matemática quanto aos aspectos teórico-metodológicos e curriculares.

Grilo, Barbos e Luna (2015) ao realizarem uma investigação sobre os estudos e resultados de pesquisas sobre a repercussão de disciplinas específicas na prática do professor em sala de aula, destacam que “os conteúdos matemáticos da educação básica não ocupam lugar de destaque nos cursos de Licenciatura em Matemática, sendo abordados em forma de revisão, visando atender às disciplinas específicas do curso” (GRILO; BARBOS; LUNA, 2015, p. 13). Além disso, sublinham

¹ Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica são disciplinas obrigatórias para os cursos de Licenciatura em Matemática, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática (BRASIL, 2002, p. 6).

que questões teórico-metodológicas e curriculares só são vistas durante os estágios supervisionadas da graduação.

Em consonância com a pesquisa anterior, é importante mencionar o estudo realizado por Moreira (2012) sobre a permanência, mesmo que intrínseca, do modelo 3 + 1 das licenciaturas. Este modelo consistia em três anos com disciplinas específicas de Matemática com mais um ano de disciplinas didático-pedagógicas, ou seja, de disciplinas para o ensino. Para este pesquisador, ainda, separa-se o “conteúdo e ensino na formação do professor” (MOREIRA, 2012, p.1142), o que pode prejudicar a atuação desses profissionais na Educação Básica.

Fiorentini (2005) chama atenção para o fato de que nas disciplinas de Cálculo, Álgebra, Análise, entre outras, não se ensina apenas conceitos e procedimentos matemáticos, mas auxilia e influencia a maneira como o futuro professor compreende “o que é ser professor”, isto é, “um modo de conceber e estabelecer relações com o mundo e com a matemática e seu ensino” (FIORENTINI, 2005, p. 111).

O documento elaborado, em abril de 2003, no Seminário Nacional de Licenciaturas em Matemática, pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) para subsidiar as discussões acerca da formação de professores, descreve os conteúdos abordados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Análise, Álgebra, Geometria, Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade como conteúdos ampliadores do conhecimento matemático. Para tanto, o professor formador precisa analisar o aspecto formal da Matemática e os aspectos teórico-metodológicos. Conforme os autores do documento, os conteúdos dessas disciplinas “devem [...] possibilitar, [...], conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática, [destacando] aspectos de sua construção histórica, suas aplicações [...], os principais métodos utilizados [...] ao longo dos tempos, os avanços e os desafios atuais dessa área de conhecimento” (SBEM, 2003, p. 6).

No documento supracitado, lê-se que os conteúdos/conceitos que serão trabalhados pelo futuro professor, por exemplo, conteúdos relacionados à Álgebra Linear (sistemas lineares, matrizes, determinantes), precisam “ser aprofundados nos seus aspectos epistemológicos e históricos e tratados de modo articulado com conteúdos mais complexos da Matemática e também com suas didáticas específicas” (SBEM, 2003, p. 6). Nesta perspectiva, os conteúdos não devem ser abordados, somente, como revisão do que já foi estudado na Educação Básica,

tornando-se essencial (re)construir um conhecimento consistente, destacando as relações com outras áreas do conhecimento e com a própria Matemática. (SBEM, 2003).

Ponte, Branco e Matos (2009) ao tratarem do ensino de conceitos algébricos na Educação Básica afirmam que por mais vasto que seja o campo da Álgebra, por ela ser considerada a linguagem das ciências, este tem se tornado para muitos estudantes um amontoado de fórmulas, regras, letras dissociadas de qualquer significação social ou lógica. Para os pesquisadores uma das causas das dificuldades refere-se ao ensino de maneira mecanizada que não potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entende-se por pensamento algébrico “algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10). Para tal, exige-se saber resolver expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções.

Em relação à Álgebra Linear, as pesquisas do grupo liderado pelo francês Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007) mostram que os acadêmicos de diferentes cursos de graduação apresentam dificuldades em trabalhar com conceitos, geralmente, abordados na Educação Básica, como: matrizes, sistemas de equações lineares, transformações lineares. Para Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007, p. 18) um dos motivos para essas dificuldades de aprendizagens deve-se ao fato da “abordagem extremamente formal e predominantemente algébrica do ensino, presente nos livros didáticos e utilizada por professores que ministram essa disciplina [álgebra linear]”, o que contraria as perspectivas apontadas no documento da SBEM e o desenvolvimento do pensamento algébrico pois restringe as resoluções a uma única representação, isto é, a algébrica.

A análise da literatura brasileira (BOEMO, 2015; KARRER, 2006; BATTAGLIOLI, 2008; JORDÃO, 2011) corrobora com os resultados das pesquisas do grupo liderado por Jean-Luc Dorier, indicando que a abordagem de conceitos algébricos em livros tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior tem privilegiado poucas representações e alguns métodos de resolução. Por exemplo, a utilização da Regra de Cramer na resolução de sistemas lineares, em detrimento de outros métodos, especialmente, o processo de escalonamento.

Considerando que os livros são um dos recursos mais utilizados pelos professores, além disso, no Brasil as coleções de livros didáticos da Educação Básica são renovadas a cada três anos e, no Ensino Superior, as bibliografias básica e complementar dos cursos de graduação, também, são revisadas regularmente, destaca-se a importância das pesquisas que têm como foco a análise de livros. Pois, permitem entender como os conteúdos/conceitos a serem trabalhados pelo professor de Matemática, na Educação Básica, estão sendo propostos nos livros didáticos, bem como as escolhas realizadas pelos docentes do Ensino Superior (Formadores de Professores da Educação Básica) na elaboração das bibliografias básica e complementar dos componentes curriculares dos cursos de formação inicial. Além disso, também permitem verificar se estão de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais e pesquisas sobre a formação de professores.

Diante desses resultados, a problemática desta pesquisa diz respeito à: *quais são os encaminhamentos dados pelos livros de Álgebra Linear, presentes na bibliografia básica dos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições brasileiras de Ensino Superior, quanto ao ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes?*

Visto que, a Álgebra Linear é uma disciplina presente em diversos cursos de graduação (BARROS; FERNANTES; ARAÚJO, 2016; CELESTINO, 2000; GRANDE, 2006; BATTAGLIOLI, 2008). Além disso, a resolução de sistemas de equações lineares é um quesito básico para cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, Engenharia, Computação, Economia, dentre outros. Pois, problemas “relacionados a fenômenos reais, como os de otimização, de inferência estatística etc, são resolvidos pela solução simultânea de várias equações” (RAMIRES, 2012, p. 22). Cabe destacar que, algumas dessas situações resultam em sistemas lineares com várias equações e incógnitas, que exigem a utilização de *softwares* para resolvê-los.

Os softwares, como o *Scilab*, por exemplo, podem ser utilizados para facilitar a resolução desses sistemas, pois através da programação, pode-se organizar um algoritmo para sua resolução, agilizando o processo e potencializando o trabalho com as várias representações matemáticas (numérica, algébrica e gráfica).

Sobre o estudo de matrizes, Cristovão e Spiller (2009) apresentam uma proposta de sequência de conteúdos em que o ensino de matrizes viria posteriormente ao estudo de sistemas lineares, “associando-as aos sistemas, como

forma de facilitar a sua escrita e manipulação algébrica nas resoluções e nas discussões dos sistemas lineares por escalonamento” (CRISTOVÃO; SPILLER, 2009, p. 2). Posteriormente, introduzindo conceitos e operações com as matrizes.

Acredita-se que esta proposta de organização é pertinente, pois estabelece uma inter-relação entre os conteúdos. No que tange ao ensino de matrizes, não reduz este ao seu caráter operacional. Em outros termos, não explora apenas as operações matriciais, suas definições, regras, teoremas e tipos de matrizes desconexos de outros conteúdos, como os próprios sistemas lineares, as transformações lineares, dentre outros.

Diante desses entendimentos, o objetivo dessa pesquisa é: analisar os encaminhamentos dados pelos livros de Álgebra Linear, presentes na bibliografia básica dos cursos de Licenciatura em Matemática das Instituições brasileiras de ensino superior, quanto ao ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes.

Na próxima seção são apresentados aspectos da teoria dos Registros de Representação Semiótica que foram essenciais para a realização desta pesquisa, bem como resultados de pesquisas que tratam sobre o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

Na seção 3 são expostas as escolhas metodológicas para a realização desta pesquisa. Destaca-se algumas características da pesquisa qualitativa e as etapas da Análise de Conteúdo, técnica escolhida para a produção e análise dos dados.

A seção 4 expõe o tratamento e interpretação dos dados produzidos a partir da análise de dois livros-texto de Álgebra Linear identificados nas bibliografias básicas de Cursos de Licenciatura em Matemática de instituições brasileiras.

Por fim, apresenta-se as considerações finais deste estudo. Nesta seção, busca-se responder a questão de pesquisa, bem como expor possibilidades de dar continuidade nos estudos.

2. O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Recorrentemente, em textos sobre formação de professores (FIORENTINI, 2005; FERREIRA, 2014; ELIAS; CARVALHO; SAVIOLI, 2015), aponta-se a falta de articulação entre os conhecimentos específicos da Matemática e os conhecimentos didático-pedagógicos nas disciplinas dos cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, o que contraria a proposta do Documento da SBEM (citado anteriormente), pois este orienta que no ensino de disciplinas, como a Álgebra, os conceitos da Educação Básica sejam revisitados e, além disso, também sejam ampliados, tanto nos seus aspectos teóricos quanto práticos, metodológicos e históricos.

No entanto, na disciplina de Álgebra Linear, na maioria das vezes, isso não ocorre como apontam Karrer (2006) e Grande (2006), ao relatarem um ensino extremamente formalizado de seus conceitos, a predominância da representação algébrica, priorizando o ensino de procedimentos e métodos ligados a seus conteúdos, desprezando outras representações e os aspectos didático-metodológicos.

É importante registrar que o ensino dessa disciplina está presente na matriz curricular dos cursos de graduação da área de Ciências Exatas, por exemplo, Matemática, Física, Engenharia, Economia, Administração, Estatística, Pesquisa Operacional, Informática e Ciências da Computação (CELESTINO, 2000; GRANDE, 2006; BATTAGLIOLI, 2008). Segundo Grande (2006) a Álgebra Linear é uma disciplina de caráter unificador do pensamento matemático, pois permite que problemas algébricos sejam abordados de maneira geométrica e vice-versa, possibilitando a abstração e generalização dos conceitos matemáticos.

Nos cursos de licenciatura em Matemática, a Álgebra Linear é considerada uma disciplina ampliadora do conhecimento matemático, pois “constitui não apenas uma das ideias e ferramentas básicas da Matemática, mas sistematiza uma estrutura algébrica que está presente em muitas aplicações dentro e fora da Matemática” (SBEM, 2013, p. 29).

Os conceitos relacionados à Álgebra Linear são objetos de pesquisas, interessadas em entender quais são as dificuldades enfrentadas por estudantes

nesta área, bem como o que ocasiona estas dificuldades, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior. São exemplos de conceitos nos quais os estudantes encontram dificuldades: multiplicação de matrizes; operações sobre linhas e colunas das matrizes ao utilizarem o método de escalonamento para resolução de sistemas lineares; significado dos determinantes matrizes 2×2 ou 3×3 , entre outros (SBEM, 2013).

Das pesquisas brasileiras que discutem sobre Álgebra Linear, nesta investigação, recorre-se as pesquisas de Karrer (2006), Battaglioli (2008), Jordão (2011), Boemo (2015), Junior (2010), Santos (2011), Simião (2010) e Neves (2013) em função de suas escolhas teóricas, fontes de produção de dados e conteúdo matemático explorado.

Karrer (2006) desenvolveu, com um grupo acadêmicos de acadêmicos do curso de Engenharia da Computação, uma sequência de ensino para a aprendizagem de transformações lineares, destacando a articulação entre geometria e álgebra, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para tal, inicialmente, realizou uma análise de livros-texto de Álgebra Linear. A análise de livros-texto permitiu a pesquisadora concluir que dentre os quatro livros analisados: três exploram o registro da língua natural, o registro simbólico-algébrico e o numérico; um livro apresentou atividades que exigem a manipulação dos registros numérico-tabular e simbólico-matricial. A pesquisadora notou que em todas as obras o registro menos explorado foi o gráfico, bem como a atividade de conversão foi negligenciada, principalmente, a que parte do registro gráfico.

O desenvolvimento da sequência de ensino potencializou aos acadêmicos a ampliação do conhecimento sobre transformações lineares, além de ampliar o domínio das representações semióticas e a realização de conversões. Entende-se que os resultados da pesquisa de Karrer (2006) contribuem no desenvolvimento de outras investigações, pois a autora analisa conceitos da Álgebra Linear sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica bem como, apresenta a análise de alguns livros-texto, sugeridos nas ementas de Álgebra Linear.

Destaca-se, também, a pesquisa de Battaglioli (2008) que realizou uma análise de livros didáticos de Matemática da Educação Básica, no que tange ao conceito de Sistemas Lineares. A Teoria dos Registros de Representação semiótica foi o aporte teórico escolhido. Ao analisar os livros didáticos, a pesquisadora constatou que há um prevalectimento do registro algébrico, sendo os outros registros

pouco explorados, além de ser priorizado o ensino de algoritmos para a solução de um sistema linear, não explorando o significado do resultado obtido. Os resultados da pesquisa elaborada por Battaglioli (2008) permitem compreender como os conteúdos de Álgebra, em particular, sistemas lineares, foram explorados na Educação Básica. O entendimento de como estes conteúdos são explorados na Educação Básica torna-se importante para esta pesquisa, pois permite verificar se os livros-texto (Ensino Superior) possibilitam a retomada e ampliação dos conteúdos de Álgebra Linear que estão nos currículos desse nível de escolarização e de suas representações.

Sublinha-se, também, o estudo realizado por Jordão (2011) que elaborou uma sequência de ensino envolvendo a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares com estudantes do 2º ano do Ensino Médio. A sequência foi desenvolvida com o auxílio do *software* educacional *Winplot*, a fim de possibilitar a compreensão da representação gráfica da solução de um sistema, além de explorar o trabalho com diferentes registros de representação, fundamentando-se na obra de Duval. O desenvolvimento dessa sequência potencializou aos estudantes experimentarem a resolução de um sistema linear, mobilizando pelo menos dois registros de representação, além de constatarem a relevância do trabalho com o registro algébrico concomitante ao gráfico, o qual foi facilitado com a ajuda do ambiente computacional. A utilização do *software*, também, facilitou a visualização, experimentação e simulação dos sistemas. Os resultados da pesquisa de Jordão (2011) destacam as possibilidades de articulação entre os pressupostos teóricos de Duval, em especial, a atividade de conversão e o uso de *softwares* de Matemática Dinâmica para a aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear, especificamente, sistemas lineares.

Boemo (2015) buscou em sua pesquisa relacionar as ideias apresentadas nos estudos de Battaglioli (2008), Jordão (2011) e Freitas (2013) sobre sistemas de equações lineares e a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para tanto, organizou a pesquisa em três momentos: (i) a análise do livro didático de matemática, disponível aos estudantes que participaram da investigação; (ii) análise dos cadernos alguns estudantes das turmas de 2ºAno do Ensino Médio de uma escola da região central do estado do Rio Grande do Sul; (iii) elaboração e desenvolvimento de três sequências de atividades sobre sistemas lineares.

A autora pode constatar, no decorrer de sua pesquisa, que do total das atividades categorizadas no livro didático, 68,75% apresentavam, em algum momento, tratamento no registro algébrico, considerando, também, as atividades que envolviam conversão. A conversão se fez presente em 79,46% das atividades. Vale destacar que, o único método apresentado pelo livro didático para a resolução de sistemas lineares de ordem 3x3 foi o escalonamento.

A ênfase no registro algébrico se repetiu nas atividades utilizadas pelos professores e verificadas durante a análise dos cadernos dos estudantes. Assim, a conversão teve um destaque “ínfimo”, segundo Boemo (2015). A conversão tendo como registro de partida o registro gráfico não foi contemplada, além disso, as atividades envolvendo este registro exploraram apenas a representação de sistemas de ordem 2x2.

A partir, da análise do livro didático e dos cadernos dos estudantes, a autora planejou e desenvolveu três sequências de atividades, com diferentes objetivos, a saber,

Comparar soluções de um sistema linear 2x2 a partir de diferentes sistemas semióticos [...] Fazer com que os alunos identificassem e justificassem se um sistema linear de ordem 3x3 possui ou não solução, tomando como elemento de partida o RGr² [...] Fazer com que os alunos estabelecessem se sistemas lineares de ordem 3x3 possuem ou não solução por meio de uma análise de propriedades aritméticas com base no RAI_T³ e/ou no RAI⁴, para posteriormente analisarem essa solução no RGr e no RAI [...](BOEMO, 2015, p. 135-136)

Durante a análise da resolução dos estudantes nas atividades das sequências pôde-se identificar que, os estudantes apresentaram melhor desempenho em atividades, nas quais, precisavam realizar tratamentos no registro algébrico. A autora constatou, também, que em atividades que demandavam a resolução de sistemas lineares de ordem 2x2, a escolha da maioria, foi pelo método de substituição, e em sistemas de ordem 3x3, o escalonamento.

Os resultados de Boemo (2015) contribuem para compreender como o livro didático da Educação Básica está tratando o objeto matemático sistemas lineares em termos de transformações cognitivas, mas principalmente, em termos de métodos que são explorados para a resolução destes sistemas. Ressalta-se que o livro analisado pela autora não explorou a regra de Cramer como método de

² Registro Gráfico.

³ Registro Algébrico Tabular.

⁴ Registro Algébrico.

resolução de sistemas lineares. Uma interpretação para esta escolha pode ser encontrada nas sugestões expostas no documento denominado *Orientações Curriculares Nacionais* (BRASIL, 2006) para o *Ensino Médio* que sugere a retirada desta regra dos currículos.

Em relação ao ensino de Matrizes, identificou-se a pesquisa de Junior (2010). Neste estudo, o autor fez uma análise das propostas curriculares para o ensino de matrizes e analisou alguns livros didáticos de Matemática, com o intuito de verificar se os Cadernos do Professor, disponibilizado pela Secretaria de Educação do estado de São Paulo, estão em consonância com esses materiais curriculares. O autor destaca que os Cadernos do Professor estão de acordo com as propostas curriculares, no que tange a presença de situações-problema contextualizadas, em particular, a presença de atividades com contextos de outras áreas do conhecimento. O autor constatou a falta de atividades que envolvam a manipulação de imagens por operações matriciais, já que as mesmas possibilitam ao estudante relacionar o conteúdo com as transformações de imagens ocorridas na Computação gráfica, a fim de significar este estudo.

Em função das relações que podem ser estabelecidas entre matrizes, sistemas lineares e determinantes, Junior (2010) também analisou como estes últimos são propostos nos Cadernos do Professor. No que tange ao ensino de sistemas lineares, o autor verificou que é privilegiado o método do escalonamento, em detrimento a Regra de Cramer, conforme propõe as *Orientações Curriculares Nacionais* (BRASIL, 2006) para o *Ensino Médio*. Quanto ao ensino de determinantes, o autor afirma que sem o enfoque na Regra de Cramer, pois em ambos os cadernos analisados é dado enfoque ao método de escalonamento, este conteúdo é atrelado à geometria, sendo utilizado para cálculo de áreas de figuras. O autor deixa como reflexão, ao final de sua pesquisa, se este tipo de atividade envolvendo determinantes e o cálculo de área, volume de figuras justificam a permanência do estudo de determinantes.

Santos (2011), fundamentado na teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolveu um pesquisa sobre o ensino de Matrizes. Esta pesquisa teve como um dos seus objetivos analisar a presença do objeto matrizes em três livros didáticos de épocas distintas, a saber: *Matemática* de Iezzi e colaboradores (1980), *Matemática* de Netto (1993) e *Matemática no Ensino Médio* de Goulart (2009), no que tange aos registros utilizados para representar as matrizes e a presença das

transformações cognitivas de tratamento e conversão. O autor analisou, também, os capítulos sobre sistemas lineares, devido a associação destes dois conceitos e o uso das matrizes como forma de representação destes sistemas.

Ao analisar os livros didáticos, Santos (2011) verificou que há muitas formas de se explorar as conversões entre os registros de representações semióticas das matrizes (Língua Natural, Tabular, equação matricial⁵, dentre outras) para a interpretação diversificada do objeto ensinado. No entanto, as conversões têm sido minimizadas ou ignoradas no ensino de matrizes, enfatizando apenas a representação matricial. Além disso, destaca a insuficiência da conversão partindo do registro gráfico e a exploração desta representação para sistemas de ordem 3x3, como também foi relatado na pesquisa de Boemo (2015).

As pesquisas de Battaglioli (2008), Jordão (2011) e Boemo (2015) olharam, especificamente, para o ensino de sistemas de equações lineares e os registros de representação semiótica, já o texto de Santos (2011) teve como objeto principal as matrizes, mas todas tratam destes conteúdos devido as relações entre estes eles.

Simião (2010) investigou o que se pode esperar do conhecimento de estudantes sobre matriz na transição da Educação Básica para o Ensino Superior. Para tanto, o autor analisou as propostas curriculares para o ensino de matrizes, livros didáticos e livros-texto, caderno do professor e dos estudantes, propostas nos documentos oficiais sobre matrizes⁶ e a importância desse objeto nas disciplinas de Álgebra Linear. O autor destaca que, no Ensino Médio há um trabalho envolvendo as matrizes e suas operações que pode ser tomado como base introdutória para alguns conceitos de Álgebra Linear, por exemplo, transformações lineares. Quanto aos determinantes, são vistos como recurso importante para questões da Geometria Analítica.

Para o Simião (2010, p. 94) “a noção de matriz não é necessária para o desenvolvimento dos sistemas lineares”, levando em conta, o abandono da Regra de Cramer, indicado pelas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio,

⁵ Equação do tipo $A \cdot X = b$, onde A é a matriz de coeficientes, X a matriz de incógnitas e b a matriz dos termos independentes (SANTOS, 2011).

⁶ Documentos oficiais para o Ensino Médio: Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 1998), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000, 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008); e para o Ensino Superior: Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), Lei 1302, aprovada em 06 de novembro de 2001.

logo, o estudo de sistemas lineares pode ser realizado sem a necessidade do ensino de matrizes, anterior a ele.

Neves (2013) investigou a inserção e a permanência dos determinantes nos currículos escolares, de 1920 à 2006. Segundo a pesquisadora, este conteúdo foi inserido no currículo de matemática na década de 20, para auxiliar no estudo de permutação, permanecendo assim até o Movimento da Matemática Moderna. Neste movimento destaca-se a introdução do ensino de Matrizes no currículo. Com isto, o ensino de determinantes ficou atrelado ao ensino de matrizes e sistemas lineares.

A autora constatou que nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) o estudo dos determinantes é dispensado, pois este conteúdo é ensinado, geralmente, com o propósito de ser utilizado na resolução de sistemas lineares por meio da Regra de Cramer. Neves (2013) apresenta outras aplicações deste objeto que podem justificar sua permanência nos livros didáticos e na prática dos professores, são alguns exemplos: cálculo de áreas e volumes, resolução de sistemas lineares e inversão de matrizes e cálculo de autovalores. Mesmo assim, com base em Cabral e Segada (2009)⁷, a autora considera que o ensino de determinantes pode ser excluído.

Outros pesquisadores (DORIER, 1997; GRANDE, 2006; FREITAS, 2013) destacam a importância da análise dos livros em Educação Matemática, já que é uma forma de avaliar como os objetos matemáticos são descritos e representados para a sua aprendizagem. Segundo Grande(2006), muitas vezes ao ministrarem uma disciplina, os professores utilizam das representações e encaminhamentos propostos nos livros.

Constata-se que as pesquisas sobre conteúdos de Álgebra Linear, já mencionadas, recorreram a teoria dos Registros de Representação Semiótica, principalmente, no que se refere aos aspectos específicos do trabalho exigido pela Matemática. Esta teoria foi elaborada por Raymond Duval, pesquisador, filósofo e psicólogo francês. Duval (2013) desenvolveu suas pesquisas na área de psicologia cognitiva, desde os anos 1970, contribuindo de maneira significativa à área da Educação Matemática. A teoria, publicada pela primeira vez em 1995, aborda a

⁷ CABRAL, M. A. P. et al. O ensino do determinante e sua apresentação nos livros didáticos. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2009, Brasília. **Anais...** Brasília – DF: Universidade Católica de Brasília, 2009. p. 1-14

relevância das diversas representações semióticas e o modo como são exploradas para a aprendizagem matemática.

Duval (2003, 2013) entende que o que diferencia a Matemática das demais áreas do conhecimento está no fato de que não existe acesso aos objetos matemáticos sem recorrer as suas representações. Em áreas como Física, Química e Biologia, os objetos podem ser acessados por meio de instrumentos (por exemplo, microscópios), ou seja, não é preciso realizar uma atividade de produção semiótica como na Matemática.

A fim de diferenciar os sistemas semióticos utilizados na Matemática e os utilizados em outras áreas, o autor utiliza-se do termo “registro”. Os registros de representação semiótica são

[...] sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que satisfazem, basicamente, duas condições: (a) Produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente; (b) Permitem transformações em novas representações” (DUVAL, 2011 *apud* MORAN; FRANCO, 2015, p. 63).

Além do acesso aos objetos matemáticos ser realizado apenas por meio de representações semióticas, para cada objeto matemático existe uma variedade dessas representações. Assim, segundo Duval (2013, p.15)⁸, “as dificuldades de aprendizagem dos conceitos matemáticos não estão relacionadas aos mesmos, mas sim à variedade de representações semióticas utilizadas e o uso ‘confuso que fazem delas’”.

O que seriam então, para Duval (1993 *apud* GRANDE, 2006, p. 63), as representações semióticas? Estas representações são “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento”. São exemplos de representações semióticas utilizadas na Matemática: língua natural, linguagem formal, escrita algébrica, gráficos cartesianos, figuras.

Habitualmente, as representações são consideradas como suporte das representações mentais, ou seja, as representações semióticas teriam objetivo apenas de comunicar as representações mentais. Duval (*apud* DAMM, 2012, p.177) discorda dessa ideia, afirmando que “as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento”.

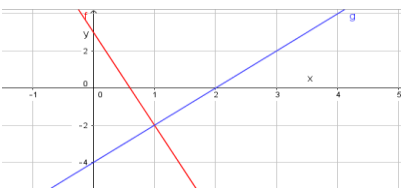
⁸ Afirmações retiradas da Entrevista que Duval concedeu aos professores José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende publicada na Revista Paranaense de Educação Matemática.

Existem, para Duval (apud DAMM, 2012), três tipos de representações: as mentais, as computacionais e as semióticas. As representações mentais têm por ofício a objetivação, isto é, uma expressão particular independente da comunicação, ou seja, independente da expressão para o outro. Já as representações computacionais referem-se ao tratamento, pois estas não podem ser satisfeitas apenas pelas representações mentais. Já as representações semióticas

[...] realizam de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Elas realizam de alguma forma uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana. (DAMM, 2012, p. 174).

Destaca-se que existe uma dualidade nas representações semióticas: a forma (o representante) e o conteúdo (o representado). A forma varia de acordo com a representação utilizada, no Quadro 1 tem-se três formas distintas de representar um sistema linear (conteúdo).

Quadro 1: Exemplos de registros de representação semiótica

Registro de Representação em Língua Natural	Registro de Representação Algébrica	Registro de Representação Gráfica
O quíntuplo de um número x adicionado a outro número y é igual a 3. O dobro de x subtraído y é igual a 4.	$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$	

Fonte: Elaboração da autora.

A atividade matemática, para Duval (2003, 2013), é constituída por dois tipos de transformações: tratamentos e conversões. Atualmente, o autor chama essas transformações de “gestos intelectuais específicos em qualquer atividade matemática” (DUVAL, 2013, p.16).

Entende-se por tratamento a operação, manipulação efetuada dentro do próprio registro, ou seja, não há uma mudança de um registro para outro, como por exemplo, as operações realizadas entre as linhas para escalonar o sistema linear, veja o exemplo no Quadro 2.

Quadro 2: Exemplo de tratamento envolvendo sistemas lineares

$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 7x + 0y = 7 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 1 + y = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Fonte: Elaboração da autora.

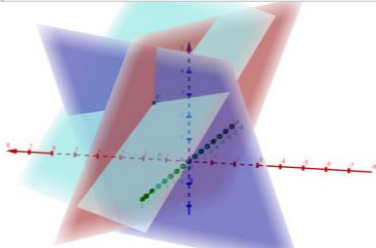
Quadro 3: Exemplo de tratamento envolvendo matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaboração da autora.

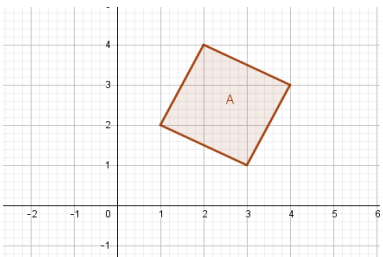
A conversão refere-se a mudança entre registros, ou seja, há uma conversão de um registro/representação a outro. Como mostra o exemplo exposto no Quadro 4.

Quadro 4: Exemplo de conversão do registro simbólico-algébrico para o registro gráfico envolvendo sistemas lineares

Registro Simbólico-Algébrico	Registro gráfico
$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$	

Fonte: Elaboração da autora.

Quadro 5: Exemplo de conversão do registro gráfico para a o registro matricial envolvendo matrizes

Registro Gráfico	Registro Matricial
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaboração da autora.

No entanto, a relação direta dos objetos matemáticos com suas representações gera o que Duval (2003, 2013) denomina de *paradoxo cognitivo da matemática*. Em outras palavras, “como não confundir o objeto com sua representação, se não temos acesso ao próprio objeto, fora de sua representação?” (DUVAL, 2013, p.17). Este paradoxo só é contornado pela possibilidade de representação múltipla de um mesmo objeto.

Além disso, acredita-se que há apreensão do conceito matemático quando o estudante é capaz de realizar o tratamento em diferentes registros de representação além de ser capaz de realizar a conversão entre os registros, em ambos os sentidos.

Por isso, torna-se pertinente analisar os encaminhamentos dos livros-texto de Álgebra Linear na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de investigar se há uma preocupação em abordar os conceitos de sistemas lineares, matrizes e determinantes tendo em vista as suas diferentes representações e a articulação entre elas.

3. METODOLOGIA

Este estudo seguiu os pressupostos da pesquisa qualitativa. Segundo Borba (2004), este tipo de pesquisa é indicado para estudos que buscam analisar a percepção, através do trabalho com discursos e linguagens, bem como aqueles que priorizam entender, interpretar e problematizar os dados obtidos, não apenas expô-los de quantitativamente.

A produção e análise dos dados foi realizada seguindo alguns pressupostos da Análise de Conteúdo. Este procedimento/técnica de análise pode ser caracterizada como

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens (BARDIN, 2004, p. 42).

Nesta pesquisa, as mensagens que foram analisadas emergem das propostas apresentadas nos livros-texto de Álgebra Linear. A análise das mensagens é realizada em três fases, conforme Bardin (2004), a saber: a *pré-análise*, a *exploração do material*, o *tratamento dos resultados e interpretação*.

A *pré-análise*, nas palavras de Bardin (2004), resume-se a organização da pesquisa. Nesta etapa, as ideias iniciais são sistematizadas, viabilizadas, a fim de coordenar as outras etapas. Também, é nesta etapa, que realizam-se as pesquisas iniciais sobre o tema, ocorre a maturação das intuições, que tornam-se hipóteses a serem evidenciadas no decorrer da pesquisa, a criação de objetivos e a escolha dos objetos a serem estudados. Vale ressaltar que a *pré-análise* não consiste em uma etapa fechada, durante o tratamento dos resultados podem surgir novas hipóteses, bem como a necessidade de reformulação dos objetivos. Além disso, faz parte da *pré-análise* a definição do *corpus* da pesquisa.

Nos próximos tópicos são detalhados como o *corpus* da pesquisa foi definido e as demais fases da Análise de Conteúdo, em especial, as categorias de análise escolhidas para a realização desta investigação.

3.1. *Corpus* da Pesquisa

O *corpus* desta pesquisa são os dois livros-texto de Álgebra Linear mais utilizados pelas Instituições de Ensino Superior brasileiras. Para obter esses dados, primeiramente, foi realizada uma pesquisa do site do e-MEC⁹, o qual possui um banco de dados com todas as Instituições de Ensino Superior e cursos cadastrados.

Obteve-se um total de 714 cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, dos quais foram identificados 168 PPC. Ao buscar pela disciplina de Álgebra Linear nestes PPC foram identificados 450 livros-textos, sendo o mais utilizado, presente em 75 bibliografias, o livro intitulado *Álgebra Linear* de José Luiz Boldrini, et. Al na sua 3^o edição, datada de 1980. Em segundo lugar, presente em 46 bibliografias, o livro denominado *Álgebra linear com aplicações* de Howard Anton e Chris Rorres, na sua 10^o edição de 2012.

3.1.1. PROCEDIMENTOS PARA A DEFINIÇÃO DO *CORPUS* DE PESQUISA

Na primeira etapa, buscou-se obter a quantidade de cursos e quais são as Instituições de Ensino Superior que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática, em atividade no Brasil. Para isso, utilizou-se a página institucional do Ministério da Educação e-MEC, realizando uma *busca avançada*. Nesta busca selecionou-se as seguintes opções:

- Na opção de buscar, marcou-se “curso de graduação”;
- Em “curso”, escreveu-se “matemática”;
- Na opção “grau”, marcou-se “Licenciatura”;
- No item “situação”, foi marcado “Em Atividade”;
- Clicou-se em “Pesquisar”.

A busca atingiu um total de 714 cursos de Graduação do tipo Licenciatura em Matemática ativos. Ao selecionar cada um dos cursos foi possível obter informações sobre o curso e a instituição. A partir disto, adentrou-se em cada um dos sites, páginas das instituições, buscando os PPC destes cursos. Para a análise das bibliografias de Álgebra Linear foram pesquisados apenas os PPC identificados nesses sites que atendiam os seguintes critérios: PPC de cursos presenciais e que continham a bibliografia básica de seus componentes curriculares e que sua ementa

⁹ Site: <http://emec.mec.gov.br/>

abrangia o estudo de Sistemas Lineares e Matrizes. Ao final da busca, o total de documentos restringiu-se a 198 PPC.

Por meio desses documentos, investigou-se quais são os livros-texto de Álgebra Linear recomendados como bibliografia básica para os componentes curriculares, nos quais o estudo de sistemas lineares, matrizes e determinantes faz parte das ementas.

De cada documento retirou-se as seguintes informações:

1. Nome da Instituição(sigla);
2. Curso(Identificação);
3. Data do PPC;
4. Disciplina (componente curricular);
5. Título do Exemplar;
6. Autor(es) do livro;
7. Edição do livro;
8. Volume do livro.

Todos esses dados foram organizados em uma planilha do Excel¹⁰, o que possibilitou uma melhor organização para a contagem dos exemplares. Ao final desta investigação obteve-se 450 resultados de livros-textos de Álgebra Linear, sendo o mais utilizado, presente em 75 bibliografias, o livro *Álgebra Linear* de José Luiz Boldrini, et al. 3^oed. 1980 (identificado nesta pesquisa como livro A), e em segundo lugar, presente em 46 bibliografias, o livro *Álgebra linear com aplicações* de Howard Anton e Chris Rorres, 8^oed., 2006 e 10^o ed¹¹., 2012 (identificado nesta pesquisa como livro B).

Salienta-se que ao realizar o mapeamento, juntamente, com os livros apresentados acima, teve se outros 57 livros distintos indicados na bibliografia básica das instituições, bem como, três destes outros livros tiveram destaque próximo ao livro de *Álgebra linear com aplicações* de Howard Anton e Chris Rorres, 8^oed., 2006 e 10^o ed., 2012.

O Quadro 6 apresenta a organização do livro A quanto a distribuição dos capítulos, conteúdos abordados, total de páginas e atividades.

¹⁰ O Excel é um *software* produzido e distribuído pela Microsoft Corporation.

¹¹ Optou-se por analisar a 10^o ed. pois era a única que tinha-se acesso a versão impressa.

Quadro 6: Informações sobre o Livro A

Capítulos	Conceitos abordados	Total de páginas	Total de atividades no capítulo
Matrizes	-Tipos especiais de Matrizes; -Operações com matrizes.	13	18
Sistemas de Equações Lineares	-Sistemas e matrizes; -Operações elementares; -Forma escada; -Soluções de um sistema equações lineares.	31	31
Determinantes e Matriz Inversa	-Determinantes; -Desenvolvimento de Laplace; -Matriz adjunta- Matriz inversa. -Regra de Cramer; -Posto de um matriz; -Matrizes elementares; -Procedimento para inversão de matrizes	32	25

Fonte: Elaborado pela autora com base em BOLDRINI (1980).

O Quadro 7 apresenta a organização do livro B quanto a distribuição dos capítulos, conteúdos abordados, total de páginas e atividades.

Quadro 7: Informações sobre o Livro B

Capítulos	Seções	Conteúdo	Total de Páginas	Total de atividades nas seções
Sistemas de Equações Lineares e Matrizes	Introdução a Sistemas de Equações Lineares	-Tipos de sistemas lineares -Operações elementares com linhas	9	17
	Eliminação Gaussiana	-Escalonamento -Eliminação de Gauss-Jordan	15	40
	Matrizes e operações matriciais	-Operações matriciais -Tipos de matrizes	14	30
	Inversas: Propriedades de Matrizes	-inversa de uma matriz -matrizes invertíveis -propriedades de matrizes inversas -polinômio matricial	13	55
	Matrizes Elementares e um método para encontrar A^{-1}	- Matrizes elementares e operações entre linhas Método para encontrar a matriz inversa	10	43
	Mais sobre Sistemas lineares e matrizes invertíveis	-Método para encontrar a solução do sistema através da matriz inversa -Como determinar a consistência de um sistema	6	24
	Matrizes Diagonais, triangulares e simétricas	- Matriz diagonal -Matrizes triangulares -Matriz simétrica	7	43
	Aplicações	-Análise de Redes -Circuitos elétricos -Equilibrando equações químicas -Interpolação polinomial Integração aproximada	12	18
	Modelos Económicos	Modelos Económicos	8	11
Determinantes	Determinantes por expansão de cofatores	-expansão de cofatores -Regra de Sarrus	7	42
	Calculando determinantes por meio de redução por linhas	-Determinante de matrizes elementares -Redução por linhas para calcular o determinante -Usando operações com colunas para calcular o determinante	6	36
	Propriedades dos Determinantes; regra de Cramer	-Propriedades de determinantes -Matriz adjunta -Regra de Cramer	13	39

Fonte: Elaborado pela autora com base em ANTON (2012).

Na próxima subseção são exibidas as categorias de análise elaboradas com intuito auxiliar no tratamento e interpretação dos dados.

3.2. Categorias de Análise

Definidos o objeto de pesquisa e o objetivo foram estabelecidas categorias de análise, adaptadas de Fonseca (2013), estas por sua vez estão indicadas no Quadro 8. Ressalta-se que elas podem ser modificadas no decorrer do desenvolvimento da pesquisa para adequar-se melhor as propostas dos livros-texto.

Quadro 8: Categorias de análise e seus indicadores

Categoria	Indicadores
Localização dos sistemas lineares, matrizes e determinantes na Obra	- Verificar se a abordagem dos sistemas de equações lineares vem antes ou depois do estudo de matrizes e determinantes;
Relações/Conexões (verificadas no decorrer dos capítulos)	- Se favorece o estabelecimento e uso de conexões entre as ideias matemáticas (problemas, representações, conceitos, procedimentos, propriedades, argumentos). - Se reconhece e aplica as ideias matemáticas em contextos não matemáticos.
Situações-problema (verificadas nas atividades propostas)	- Se apresenta uma amostra representativa e articulada de situações-problema que permitam contextualizar, retomar, ampliar e aplicar o conhecimento matemático a situações da própria matemática ou de outras áreas do conhecimento.
Softwares	- Se usa softwares que permitam explorar, simultaneamente, as várias representações semióticas do objeto matemático.
Argumentos	- Se favorece a argumentação e a prova dos enunciados e proposições matemáticas através de diversos tipos de argumentos e métodos de prova. - Se promovem situações em que os estudantes têm de conjecturar sobre relações matemáticas, se as investigam e justificam.
Métodos escolhidos para a resolução de sistemas de equações lineares	- Verificar quais os métodos escolhidos para a resolução dos sistemas lineares (escalonamento – eliminação gaussiana; método de Gauss – Jordam; Regra de Cramer; outros)
Registros de Representação Semiótica	- Se utiliza diferentes tipos de registros (língua natural, algébrico, gráfico, entre outros); - Se as transformações cognitivas (tratamento e conversão) são exploradas.

Fonte: Elaboração da autora.

Na *exploração dos resultados*, pode se utilizar, conforme Bardin (2004, p.101) “procedimentos aplicados manualmente ou de operações efetuadas pelo ordenador [...]. Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas”. Para realizar esta fase foram resolvidas todas as atividades expostas nos capítulos dos livros-texto que tratam de sistemas lineares, matrizes e determinantes com o objetivo de codificar e enumerar os dados de acordo com as

categorias de análise expostas no Quadro 8 e de outras que podem emergir. Os dados produzidos, nesta etapa, foram organizados em quadros elaborados em uma planilha eletrônica para facilitar a (re)composição do texto.

É na última fase da Análise de Conteúdo, *tratamento e interpretação dos dados*, que os resultados obtidos serão analisados, podendo evidenciar as hipóteses iniciais ou não.

A seguir, são apresentados os resultados da análise.

4. SISTEMAS LINEARES, MATRIZES E DETERMINANTES NOS LIVROS-TEXTO DE ÁLGEBRA LINEAR

O tratamento e interpretação dos dados são apresentados com base nas categorias de análise expostas na seção 3.

4.1. Localização dos sistemas lineares e matrizes e determinantes na Obra

Esta categoria tem por objetivo investigar qual a ordem em que os conteúdos de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes estão dispostos ao longo dos capítulos de ambos os livros-textos selecionados para a realização desta pesquisa. Destaca-se que esta categoria foi elaborada com base nas ideias de Cristovão e Spiller (2009). Estas pesquisadoras discutem a ordem em que esses conceitos são apresentados no Ensino Médio, conforme mencionado na Introdução. Elas recomendam que na abordagem desses conteúdos é importante privilegiar situações em que os estudantes associem o estudo de matrizes e determinantes ao estudo de sistemas lineares. Conforme as pesquisadoras estes últimos podem ser apresentados antes de matrizes e determinantes.

No livro A, o estudo de matriz é apresentado antes de sistemas lineares e determinantes. No capítulo destinado à matrizes são expostos os tipos de matrizes e as operações. O capítulo subsequente versa sobre sistemas lineares. Neste capítulo, é explorada a representação de um sistema de equações lineares por meio de uma matriz, ou seja, a representação matricial de um sistema é enfatizada. Além disso, são abordadas operações elementares, isto é, as operações entre as linhas da matriz, pois com o auxílio delas é possível determinar a uma matriz reduzida, denominada, no livro, de matriz na forma escada ou matriz escalonada, como uma das maneiras de se obter a resolução do sistema linear. Também, são identificados os tipos de soluções de um sistema linear, detalhando as situações que podem ocorrer durante a resolução de um sistema linear e suas representações gráficas. Na sequência, são expostos os capítulos referentes a determinantes e matrizes inversas.

Diante dessas descrições, pode-se afirmar que a abordagem exposta por esse livro segue a seguinte ordem: Matrizes; Sistemas Lineares; e Determinantes. Esta ordem revela que são apresentados outros métodos de resolução de sistemas

lineares, além da Regra de Cramer utilizada no Ensino Médio, geralmente, como único método de resolução de sistemas lineares.

O capítulo introdutório do livro B aborda o conceito de sistemas lineares e matrizes, versando, inicialmente, sobre sistemas de equações lineares. Neste capítulo, aborda-se como os sistemas lineares são representados algebricamente e suas formas de resoluções. Também, são identificados os tipos de soluções possíveis de um sistema linear: uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Estas soluções são exploradas na representação algébrica e na representação gráfica.

A seguir, no mesmo capítulo, porém em outra seção, são apresentadas as operações elementares entre linhas, utilizando a representação matricial do sistema linear, que são necessárias para o método de Eliminação Gaussiana (escalonamento). Posteriormente, nas seções seguintes sobre matrizes, são apresentadas as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes, bem como as propriedades algébricas das matrizes, matrizes invertíveis, como obter a matriz inversa, e como determinar a solução de um sistema linear, utilizando a matriz inversa. Em seguida, são expostos os tipos de matrizes e algumas aplicações dos sistemas lineares.

No capítulo de Determinantes, são expostos os métodos para calcular o valor do determinante de uma matriz, são eles: expansão em cofatores e por meio de redução por linhas. São contempladas as propriedades de determinantes e a aplicação de determinantes para a resolução de sistemas lineares por meio da regra de Cramer.

Verifica-se que o livro B expõe os conteúdos na seguinte ordem: Sistemas Lineares; Matrizes; e Determinantes. Esta ordem revela que matrizes e determinantes são conteúdos que auxiliam na resolução de sistemas lineares, mas o estudo destes últimos não precisa ficar restrito, em particular, ao cálculo de determinantes. Em outras palavras, o estudo de sistemas lineares não precisa ficar restrito a regra de Cramer, conforme sugerem as pesquisas de Santos (2011) e Simião (2010).

Pode-se observar que cada um dos livros segue uma sequência própria de dispor os conteúdos. O livro A, por exemplo, segue a sequência, geralmente, expostas em livros didáticos da Educação Básica (conforme verificado nas pesquisas de BATTAGLIOLI, 2008; SANTOS, 2011; SIMIÃO, 2010, BOEMO, 2015),

realizando inicialmente, o estudo de matrizes e depois sistemas lineares, tendo o ensino de matrizes como um pré-requisito para o ensino de sistemas lineares, pois as mesmas são vistas como uma forma de representar e facilitar o trabalho com sistemas. Já o livro B aborda o conteúdo de sistemas lineares antes de matrizes, em especial, das operações com matrizes. Percebe-se a intenção em relacionar as matrizes com sistemas lineares, conforme indicam as pesquisadoras Cristovão e Spiller (2009).

4.2. Relações/Conexões (verificadas no decorrer dos capítulos)

Nesta categoria, é averiguado se há estabelecimento e uso de conexões entre as ideias matemáticas (problemas, representações, conceitos, procedimentos, propriedades, argumentos) e se é feita uma aplicação de ideias matemáticas em contextos não matemáticos, nos exemplos apresentados no decorrer dos capítulos, desconsiderando as atividades propostas nos livros-texto.

No livro A, o capítulo destinado a matrizes inicia com um exemplo, comparando este objeto matemático a uma tabela com elementos dispostos em linhas e colunas. Posteriormente, é apresentada a definição de uma matriz, seguida de exemplos de matrizes e elementos que as compõem. Cabe destacar que, ao trabalhar igualdade de matrizes, os autores utilizam de matrizes que talvez a primeira vista seus elementos não sejam iguais para o leitor, exigindo a mobilização de outros conceitos matemáticos, por exemplo:

Quadro 9: Exemplo de conexão

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen}90^\circ & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Fonte: BOLDRINI, 1980, p. 3.

Neste caso, é necessário saber realizar as operações de potenciação, determinar o logaritmo de um número e o valor do $\text{sen}90^\circ$. Esta atividade possibilita estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos (relações intramatemática¹²), a saber: razões trigonométricas e logaritmo de um número.

¹² Utiliza-se este termo para designar situações que permitem estabelecer relações entre os campos da própria matemática.

No t3pico opera33es com matrizes, os autores ao livro A exp33em um contexto n3o matem3tico, no caso, a produ33o de gr3os de produtos de acordo com a regi3o por ano, para mostrar como podem ser realizadas as opera33es de adi33o, multiplica33o por escalar e multiplica33o entre matrizes. Posteriormente, s3o definidas essas opera33es e apresentadas suas propriedades. Percebe-se a conex3o de conceitos matem3ticos com situa33es oriundas de pr3ticas sociais.

O cap3tulo sobre sistemas lineares, tamb3m, 3 introduzido por meio de uma situa33o cujo contexto n3o 3 matem3tico. Em outros termos, recorre-se ao balanceamento de equa33es qu3micas para iniciar a discuss3o sobre sistemas lineares, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Situa33o-problema utilizada para introduzir o estudo de sistemas lineares

Na natureza, as coisas est3o sempre mudando, se transformando, e o ser humano, para garantir sua sobreviv3ncia e melhorar sua exist3ncia, precisa conhecer e dominar estes processos de mudan3a. Um dos m3todos encontrados para se descrever estas transforma33es foi o de procurar nestas o que permanece constante durante a mudan3a. Por exemplo, sabemos que o hidrog3nio (H_2) reage com o oxig3nio (O_2) para produzir 3gua (H_2O). Mas, quanto de hidrog3nio e de oxig3nio precisamos? Esta 3 uma mudan3a que podemos descrever do seguinte modo: x mol3culas de H_2 reagem com y mol3culas de O_2 produzindo z mol3culas de H_2O , ou esquematicamente:

$$xH_2 + yO_2 \longrightarrow zH_2O.$$

O que permanece constante nessa mudan3a? Como os 3tomos n3o s3o modificados, o n3mero de 3tomos de cada elemento no in3cio da rea33o deve ser igual ao n3mero de 3tomos desse mesmo elemento, no fim da rea33o. Assim, para o hidrog3nio devemos ter $2x = 2z$, e para o oxig3nio, $2y = z$. Portanto, as nossas inc3gnitas x , y e z devem satisfazer as equa33es:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Fonte: BOLDRINI,1980, p.29.

S3o apresentadas, tamb3m, as representa33es gr3ficas de um sistema linear, mas apenas as em R^2 , ou seja, cada equa33o 3 representada por uma reta. Percebe-se que, os autores do livro-texto exibem estas representa33es com o intuito de contribuir na compreens3o das poss3veis solu33es de um sistema linear, a saber: a) Retas distintas: a solu33o ser3 o ponto de intersec33o das retas; b) Retas coincidentes: a solu33o pode ser qualquer ponto da reta; c) Retas paralelas: n3o existe solu33o para o sistema; estabelecendo rela33es intramatem3tica.

Em rela33o ao cap3tulo “*Determinantes e Matriz inversa*” n3o foram identificadas conex3es ou rela33es com outros conceitos e/ou com outras 3reas do conhecimento.

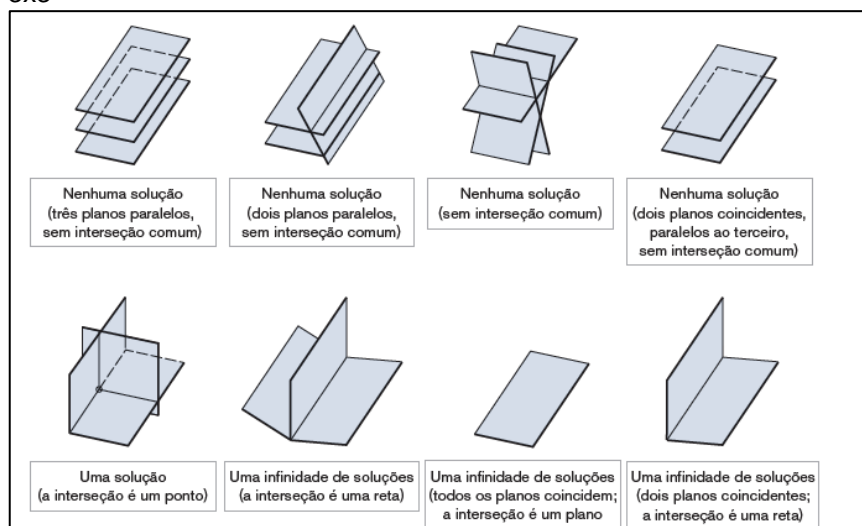
Pode-se afirmar que as rela33es e conex3es identificadas no livro s3o em sua maioria rela33es dentro da pr3pria matem3tica. Entende-se que poderiam ser melhor

exploradas as relações e conexões com outras áreas do conhecimentos, pois estas contribuem para o entendimento de que a Matemática como área do conhecimento contribuiu na resolução de problemas em outras áreas (BRASIL, 2002; SBEM, 2003).

No livro B é discutida a presença das matrizes em diferentes áreas do conhecimento, por exemplo, Ciências, Administração e na própria Matemática, sendo representadas frequentemente por tabelas com dados numéricos, oriundos de observações físicas ou contextos matemáticos. Percebe-se nesta introdução uma preocupação em relacionar o conteúdo matemático com outras áreas do conhecimento, visto que esta obra também é utilizada em diferentes cursos de graduação (Computação, Engenharias).

Ainda em relação ao livro B, no tópico introdutório de sistemas lineares são apresentados equações com duas incógnitas e a representação gráfica dos tipos de soluções, do mesmo modo que o livro anterior. Entretanto, são exibidos, também, os tipos de representações gráficas das soluções de sistemas formados por equações com três incógnitas, como mostra a Figura 2. Verifica-se, nesta situação, a busca por estabelecer relações dentro da própria matemática, destacando as relações entre álgebra e geometria.

Figura 2: Interpretação gráfica dos tipos de sistemas lineares de ordem 3x3



Fonte: ANTON, 2012, p. 4.

No que tange ao estudo das matrizes, novamente, é salientada a sua presença em contextos não matemáticos, mas tais contextos não são citados. A

relação dentro da própria matemática é enfatizada na descrição de matrizes como uma forma de representação de um sistema de equações lineares.

No decorrer do capítulo, encontram-se notas históricas, explicando descobertas de estudiosos e curiosidades sobre o assunto tratado. Além disso, existe um tópico versando sobre alguns problemas envolvendo aplicações dos sistemas lineares no mundo real. Destes problemas, pode-se citar: análise de rede (análise de fluxos de rede); projeções de padrões de tráfego; circuitos elétricos (Física); equilíbrio de equações químicas (Química); interpolação polinomial, integração aproximada (Própria Matemática). A seguir é apresentado um exemplo de sistema lineares no contexto da Química (Figura 3).

Figura 3: Exemplo envolvendo equilíbrio de equações químicas

► **EXEMPLO 5** Equilibrando equações químicas usando sistemas lineares

Equilibre a equação química

$$\text{HCl} + \text{Na}_3\text{PO}_4 \longrightarrow \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{NaCl}$$

[ácido clorídrico] + [fosfato de sódio] → [ácido fosfórico] + [cloreto de sódio]

Solução Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos que equilibram a equação

$$x_1 (\text{HCl}) + x_2 (\text{Na}_3\text{PO}_4) \longrightarrow x_3 (\text{H}_3\text{PO}_4) + x_4 (\text{NaCl}) \quad (7)$$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos lados, resulta

$1x_1 = 3x_3$	Hidrogênio (H)
$1x_1 = 1x_4$	Cloro (Cl)
$3x_2 = 1x_4$	Sódio (Na)
$1x_2 = 1x_3$	Fósforo (P)
$4x_2 = 4x_3$	Oxigênio (O)

do que obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 & & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada desse sistema é

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$$x_1 = t, \quad x_2 = t/3, \quad x_3 = t/3, \quad x_4 = t$$

onde t é arbitrário. Para obter os menores valores inteiros positivos que equilibram a equação, tomamos $t = 3$, e resulta $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituindo esses valores em (7), obtemos a equação equilibrada

$$3\text{HCl} + \text{Na}_3\text{PO}_4 \longrightarrow \text{H}_3\text{PO}_4 + 3\text{NaCl} \quad \blacktriangleleft$$

Fonte: ANTON, 2012, p. 80.

O que se pode observar com os exemplos desta seção é que estes possuem contextos de outras áreas do conhecimento e da própria matemática. Sobre o capítulo de determinantes, não foram estabelecidas conexões e relações com conceitos matemáticos e/ou outras áreas do conhecimento.

Assim como exposto no livro anterior, o livro B aborda em sua maioria relações dentro da própria matemática. No entanto, é preciso registrar que explorou outras possibilidades de conexões como: análise de rede (análise de fluxos de rede); projeções de padrões de tráfego, interpolação polinomial, integração aproximada.

Em suma, ambos os livros poderiam contemplar de maneira mais amplas as conexões e relações, não apenas no ensino de sistemas lineares, mas também no ensino de matrizes e determinantes, já que nestes últimos elas foram pouco ou nada exploradas. As matrizes são utilizadas na solução de problemas da área da computação, engenharias (civil, elétrica, mecânica), meteorologia, oceanografia entre outras áreas (MARCHETTO, 2016). Além disso, Marchetto (2016) ressalta que,

Certamente o ramo mais prodigioso do campo das matrizes é o computacional em que o uso de vetores e operações matriciais é indispensável, seja na elaboração e desenvolvimento de softwares às imagens geradas de filmes e fotos. Cada filme ou foto carrega uma quantidade incrível de pixels, que são calculadas por matrizes e que, por sua vez, são mais bem transportadas por matrizes linhas ou colunas (vetores) (MARCHETTO, 2016, p. 123).

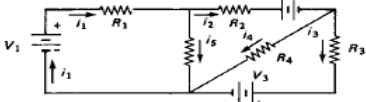
Há diversas aplicações de matrizes que podem ser melhor exploradas nos livros-texto, pois estes são utilizados por vários professores do Ensino Superior para preparar suas aulas, em particular, os professores formadores de professores de Matemática.

4.3. Situações-problema (verificadas nas atividades propostas)

As situações-problema foram identificadas, em sua maioria, nas atividades finais de cada capítulo do livro A, contabilizando um total de 10 atividades. destas 6 estão no capítulo de sistemas, 3 no capítulo de matrizes e apenas 1 no capítulo de determinantes, cujos contextos são a própria matemática e outras áreas do conhecimento, por exemplo, física. A Figura 4 exibe uma situação em que os sistemas lineares são utilizados para resolver um problema de circuitos elétricos.

Figura 4: Atividade envolvendo situação –problema do capítulo de sistemas lineares

27. Deseja-se construir um circuito como o mostrado na figura,



onde $V_1 = 280 \text{ V}$, $V_2 = 100 \text{ V}$, $V_3 = 50 \text{ V}$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 100\Omega$.

Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos de resistências; assim como as correntes máximas que elas suportam sem queimar.

		resistências				
		20 Ω	30 Ω	40 Ω	50 Ω	100 Ω
c m o á r x r i m a	0,5 A	10,00	10,00	15,00	15,00	20,00
	1,0 A	15,00	20,00	15,00	15,00	25,00
	3,0 A	20,00	22,00	20,00	20,00	28,00
	5,0 A	30,00	30,00	34,00	34,00	37,00

De que tipo devemos escolher cada resistência para que o circuito funcione com segurança e a sua fabricação seja a de menor custo possível?

Fonte: BOLDRINI, 1980, p.55.

As demais atividades exploram as matrizes as seguintes situações: organização de itens; matriz de transmissão, matriz de probabilidade. Quanto aos sistemas, as situações abordam o cálculo da quantidade de consumo de vitaminas (2 atividades), tipos de adubos e concentrações diferentes de nutrientes, circuitos elétricos, equação de fluxo de calor, concentração de produtos ao final da produção. A atividade identificada no terceiro capítulo envolve criptografia através da matriz inversa.

As situações-problema do Livro B foram localizadas apenas nas seções de “Aplicações” e “Modelos Econômicos de Leontief¹³”, contabilizando 7 atividades, diferente do livro A, em que as situações-problema estavam inseridas no final das listas de atividades. No que tange aos contextos das atividades deste livro, eles estavam relacionados análise de redes para determinar taxas de fluxos e a economia, como pode ser observado na Figura 5.

¹³ É um modelo econômico, no qual Wassily Leontief utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia, a saber, manufatura, agricultura e serviços (ANTON, 2012).

Figura 5: Atividade envolvendo situação-problema sobre sistemas lineares

3. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Se o fluxo ao longo da rua de A para B precisar ser reduzido em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas?

◀ Figura Ex-3

Fonte: ANTON, 2012, p. 84.

Pode-se afirmar que as atividades que buscam explorar relações dos conteúdos de sistemas lineares, matrizes e determinantes com outros conceitos matemáticos e/ou com outras áreas do conhecimento, conforme defende o documento elaborado por integrantes da SBEM em 2003 e as pesquisas de Junior (2010) e Marchetto (2016) ainda são poucas no que tange os conteúdos de Álgebra Linear.

4.4. Softwares

A categoria relacionada a *softwares* busca identificar se estes recursos são indicados pelos autores dos livros-texto para explorar, simultaneamente, as diferentes representações do objeto matemático. Entende-se que *softwares* como o *Scilab* e o *Geogebra* podem contribuir na aprendizagem dos conteúdos de Álgebra Linear, em particular, sistemas lineares e matrizes, pois permitem programar métodos de resolução de um sistema linear, transitar do registro algébrico para o gráfico e vice-versa (KARRER, 2006; FREITAS, 2013; BOEMO, 2015).

É importante destacar que o livro A foi publicado em mil novecentos e oitenta (1980). A data de publicação do livro e a produção de *softwares* destinados a área da Matemática, nesta época, podem justificar a falta de sugestões para a utilização destes recursos no decorrer dos capítulos analisados.

Já o livro B, cuja edição analisada é a publicada em 2012, dispõe de maior uso de ferramentas gráficas, como mostrado na categoria anterior, expõe um número maior de representações gráficas, em especial, no estudo dos tipos de soluções de sistemas lineares em \mathbb{R}^3 (Figura 2). Além disso, ao longo do capítulo, percebe-se que o uso de *softwares* é indicado para a resolução de atividades. Um dos casos observados refere-se resolução de uma atividade envolvendo interpolação polinomial. Os autores sugerem que após a realização da interpolação, o estudante esboce quatro curvas da mesma família da determinada “manualmente” ou com o auxílio de um software, como mostram as figuras 6 e 7. Verifica-se que os autores não indicam qual ferramenta utilizar.

Figura 6: Atividade em que o uso de ferramenta gráfica é sugerido

17. (a) Encontre uma equação que represente a família de todos os polinômios de grau dois que passam pelos pontos

Fonte: ANTON, 2012, p. 85.

Figura 7: Continuação da atividade acima

(0, 1) e (1, 2). [Sugestão: a equação deve incluir um parâmetro arbitrário que produza os membros da família quando variar.]
(b) Esboce quatro curvas da família obtida a mão ou com a ajuda de uma ferramenta gráfica.

Fonte: ANTON, 2012, p. 85.

Embora a inserção de tecnologias de informação como ferramentas gráficas, *softwares*, esteja em evidência nos dias atuais, em nenhum dos livros este tipo de tecnologia foi explorado de maneira significativa, bem como, as potencialidades de softwares como o *Scilab* para a programação dos métodos de resolução de sistemas, operações envolvendo matrizes, cálculo de matrizes inversas, dentre outros, não foram exploradas em nenhum dos livros analisados. É desejável que recursos como este sejam inseridos em disciplinas de Álgebra Linear, tendo em vista as suas potencialidades, por exemplo, na integração de conteúdos de Álgebra com a programação.

4.5. Argumentos

Antes de iniciar a análise desta categoria torna-se relevante entender o que é uma demonstração (ou prova) na Matemática e a sua ligação direta com a argumentação, buscada nesta categoria. Conforme Santos (2009, p. 9):

Uma prova matemática valida uma afirmação teórica. As provas podem ser empíricas, quando baseadas em desenho ou dobraduras; ou formais. A demonstração é um tipo de prova formal. A palavra *demonstração* é usada com vários sentidos em diferentes contextos. Mas todos têm a mesma ideia: a de justificar ou validar uma afirmação fornecendo razões ou argumentos.

Os argumentos presentes em uma demonstração formal são caracterizados por operações finitas com encadeamentos lógicos, que resultam na veracidade do enunciado, através de axiomas, teoremas e definições, já demonstrados (SANTOS 2009). Dito isso, foram consideradas, nesta categoria, as atividades que solicitam ao estudante que “prove” ou “mostre” a veracidade das afirmações por meio de teoremas, definições, argumento.

No decorrer dos três capítulos analisados no livro A, foram identificadas cinco atividades que exigem as atividades de provar ou mostrar. Assim, das 70 atividades analisadas, apenas 5 onde era necessário utilizar-se da argumentação. Em outros termos, apenas 7% das atividades propostas nos três capítulos exigiam que o acadêmico realizasse a demonstração da veracidade de uma sentença, sendo que uma delas solicitava a prova pelo Método de Indução. Também, foram identificadas sete atividades em que exigia-se a análise da veracidade ou falsidade das afirmações, não exigindo explicitamente a prova formal, mas possibilitando uma argumentação, no entanto essas atividades não foram categorizadas nesta categoria.

Durante a análise dos dois capítulos do livro B, verificou-se que 24 das 401 atividades propostas exigiam a realização de uma demonstração, ou seja, apenas 6% das atividades propostas. Estas demonstrações emergiam de parte de um teorema apresentado como verdadeiro no decorrer da seção ou da prova de outras proposições que foram exibidas no capítulo, por exemplo, a atividade exposta na Figura 8.

Figura 8: Atividades envolvendo demonstrações

47. Prove a parte (c) do Teorema 1.4.2.
48. Verifique a Fórmula (4) do texto calculando diretamente.
49. Prove a parte (d) do Teorema 1.4.8.
50. Prove a parte (e) do Teorema 1.4.8.

Fonte: ANTON, 2012, p.50.

Já com relação às atividades para “Mostrar” ou verificar a veracidade das afirmações dadas, estas foram exploradas em 40 atividades, não categorizadas como questões argumentativas, pois não explicitavam o uso de argumentação.

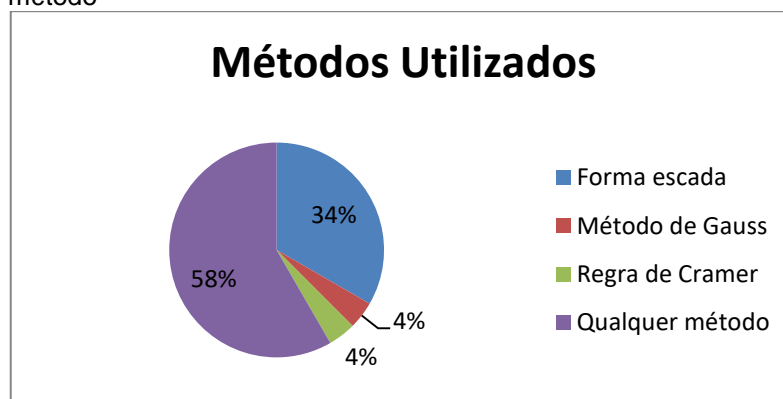
No entanto, nota-se que ambos os livros deram maior ênfase em atividades repetitivas e diretas. Em outras palavras, atividades que tem por objetivo “exercitar” “fixar” os conceitos apresentados, contrariando as propostas do documento da SBEM (2003) e de Ponte, Brocado e Matos (2009) sobre situações que potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Estes pesquisadores sugerem que atividades que proporcionam aos estudantes: conjecturar, argumentar, estabelecer relações, generalizar e abstrair, contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

4.6. Métodos escolhidos para a resolução de sistemas de equações lineares

Existem diferentes métodos para a resolução de um sistema de equações lineares. No entanto, como verificaram as pesquisas de SANTOS (2011) alguns métodos recebem atenção maior que outros na Educação Básica. Por isso, esta categoria busca saber quais são os métodos explorados pelos autores do livros-texto e se estes justificam a escolha.

No livro A foram descritos os métodos de substituição, forma escada (escalonamento), Método de Gauss (eliminação gaussiana) e a Regra de Cramer, Distribuídos conforme mostra o Gráfico 1.

Gráfico 1: Disposição das atividades de resolução de sistemas por método



Fonte: Elaboração da autora.

No capítulo dedicado a sistemas lineares do livro A, identificou-se 8 atividades que no enunciado está explícito “*resolva utilizando a forma escada*”. Este método, também, é denominado de escalonamento e o seu ensino na Educação Básica é sugerido pelos PCN+ (BRASIL, 2002) e pelas OCNEM¹⁴ (BRASIL, 2006). Os livros didáticos analisados por Boemo (2015), Battaglioli (2008) e Santos(2011) apresentam este método.

O método de escalonamento apresenta vantagens em relação a Regra de Cramer, principalmente, no que tange ao tempo de processamento do computador. Contudo, os autores do livro A não descrevem as vantagens de utilizar este método.

O Método de Gauss foi explicado na resolução de uma das atividades propostas. Nesta atividade (Figuras 9 e 10), é exposto em que consiste este método, além disso, alguns sistemas já resolvidos, anteriormente, são retomados.

Figura 9: Atividade método de Gauss

17. O método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em se reduzir a matriz ampliada do sistema por linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição *b*) de 2.4.1, que passa a ser: *b'*) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições *a*, *c* e *d* são idênticas. Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Fonte: BOLDRINI, 1980, p.51.

¹⁴ Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

Figura 10: Continuação da atividade acima

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a última matriz corresponde ao sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{5}{2} \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Por substituição, $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x_1 = 2$.

Resolva pelo método de Gauss os Exercícios 14, 15 e 16 e compare as respostas.

Fonte: BOLDRINI, 1980, p.51.

No capítulo de determinantes é apresentado o método de resolução de sistemas lineares pela Regra de Cramer. Este método é explorado em apenas uma atividade, não sendo justificado pelo autor o porquê de sua escolha.

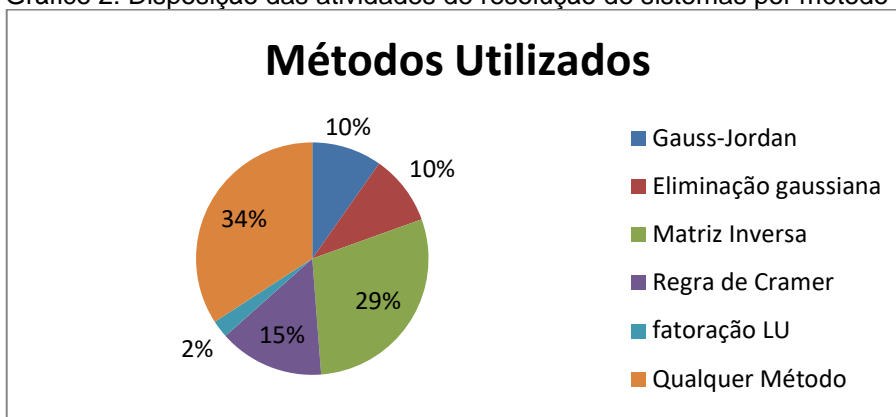
Na sequência do capítulo, são apresentadas 14 atividades para a resolução de sistemas lineares. Nestas atividades não foram especificados os métodos que poderiam ser utilizados¹⁵. Cabe destacar que, só haviam sido explicados, até o momento, o método *forma escada*, o método de Gauss e o método de resolução por *substituição*.

No livro B identificou-se um número maior de métodos para a resolução de sistemas de equações lineares do que no livros A. Os métodos apresentados no livro B são: Gauss-Jordan, Eliminação Gaussiana, Matriz inversa, Regra de Cramer e Fatoração LU.

A resolução de sistemas lineares esteve presente em 41 atividades, identificadas nos dois capítulos analisados (“*Sistemas Lineares e Matrizes*” e “*Determinantes*”). Para a resolução destas atividades os autores do livro B indicaram, explicitamente, os métodos de Gauss-Jordan, Eliminação Gaussiana, Matriz inversa, Regra de Cramer e Fatoração LU. No Gráfico 2 apresenta-se o percentual de atividades por método indicado.

¹⁵ Estas atividades não foram contabilizadas em nenhum método já que o livro não explicitava com que método deveriam ser resolvidos esses sistemas lineares.

Gráfico 2: Disposição das atividades de resolução de sistemas por método



Fonte: Elaborado pela autora.

Na maioria dos sistemas, como também ocorreu no livro anterior, o acadêmico poderia escolher o método de sua preferência para realizar a solução dos sistemas lineares dados, entretanto esse tipo de atividade estava localizada na seção de Eliminação gaussiana, no qual os métodos ensinados até o momento eram a própria Eliminação gaussiana e Gauss-Jordan.

Identificou-se uma atividade que exigia a resolução de um sistema de ordem 3x3 pelo método de Gauss e pela Regra de Cramer (Figura 11). Com esta atividade os autores enfatizam a quantidade de passos realizados e o tempo gasto na resolução da atividade por ambos os métodos.

Figura 11: Atividade de comparação entre métodos

31. Use a regra de Cramer para resolver em y sem resolver nas incógnitas x, z e w .

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

32. Seja $Ax = b$ o sistema do Exercício 31.

- Resolva o sistema pela regra de Cramer.
- Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.
- Qual método envolve menos contas?

Fonte: ANTON, 2012, p. 116.

Pode-se perceber que o livro A deu enfoque para o método denominado “forma escada” (escalonamento). Ressalta-se que, os livros didáticos da Educação Básica tem explorado este método, seguindo as orientações curriculares, em detrimento a Regra de Cramer (BOEMO, 2015; BATTAGLIOLI, 2008; SANTOS, 2011).

O livro B explorou uma gama maior de métodos, expondo outras maneiras de resolver um sistema linear que não apenas a Regra de Cramer. O método com mais atividades foi o método que utiliza a matriz inversa para resolver o sistema, mostrando outra possibilidade de relação de matrizes e sistemas diferentes da Regra de Cramer.

Ao analisar esta categoria nos livros-texto verifica-se que, os autores não apresentam possíveis vantagens que um método pode ter em relação ao outro, por exemplo, o método u exige menor tempo de processamento para resolver um sistema linear do que o método v.

4.7. Registros de Representação Semiótica

Nesta categoria foram investigados quais são os Registros de Representações Semióticas utilizados com maior ênfase e menor ênfase para representar os objetos de estudo desta pesquisa, Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes. Além disso, também foram averiguadas o uso das transformações cognitivas de conversão e tratamento, no decorrer das atividades, bem como, quais são os sentidos de conversão em destaque.

No Quadro 10 são apresentados os registros de representação semiótica identificados nos livros-texto analisados. Optou-se por organizar este quadro porque no decorrer deste item serão utilizadas apenas as siglas para designar cada registro.

Quadro 10: Registros de Representação mobilizados nos dois livros

Registro de Representação Algébrica	RA
Registro de Representação Matricial	RM
Registro de Representação em língua natural	RLN
Registro de Representação Gráfica	RG
Registro de Representação Figural	RF
Registro de Representação Simbólica	RS
Registro de Representação tabular	RT
Registro de Representação algébrico_matricial ¹⁶	RA_M

Fonte: Elaboração da autora.

O Quadro 11 destaca as informações obtidas sobre os Registros de Representação Semiótica explorados nos livro A e as transformações cognitivas, especificamente, nas 70 atividades categorizadas nos três capítulos analisados.

¹⁶ Neste registros encontram-se os sistemas escritos como equação matricial.

Quadro 11: Análise do livro A referente aos Registros de Representação Semiótica

Conteúdo	Total de atividades	Transformações Cognitivas		Sentido com maior ênfase	Sentido com menor ênfase
		Tratamento	Conversão		
Matrizes	18	10	7	RLN->RM	--
Sistemas de Equações Lineares	31	14	15	RA->RM	RS->RA
Determinantes e Matriz Inversa	25	14	9	RLN->RM	RF->RM

Fonte: Elaboração da autora.

O capítulo de matrizes continha 18 atividades. Destaca-se que, a última não foi analisada, por se tratar de uma pesquisa para investigar outras situações concretas¹⁷ que envolvessem as matrizes. É preciso sublinhar que, geralmente, quando se tem questões com situações-problema (registro de partida é o da língua natural) para resolvê-las há a necessidade de realizar-se uma conversão entre registros, mas, neste capítulo, a situação-problema vinha atrelada a uma matriz que representava a situação, logo era realizado apenas um tratamento no registro matricial.

Além disso, com relação às transformações cognitivas em dez das questões analisadas era necessário realizar um tratamento dentro de um mesmo registro dado, o matricial. Já sete questões foram apresentadas no registro em língua natural, sem ser apresentada a matriz a ser utilizada para a resolução, sendo assim, o estudante poderia utilizar-se de qualquer matriz dentro das características dadas, ou escrever a matriz de forma genérica (Figura 12).

Figura 12: Exemplo de atividade com conversão do RLN-RM

3. Se A é uma matriz simétrica, então $A - A' = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. Se A é uma matriz triangular superior, então A' é $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. Se A é uma matriz diagonal, então $A' = \underline{\hspace{2cm}}$.

Fonte: BOLDRINI, 1980, p.12.

O segundo capítulo compreendia o estudo de sistemas de equações lineares, a transformação cognitiva de conversão estava expressa nas atividades que contiam situações-problemas os acadêmicos, escreveriam o sistema linear partir do

¹⁷ Termo utilizado pelos autores do livro A.

RLN \rightarrow RA¹⁸ ou RF \rightarrow RA¹⁹. Bem como, as conversões também eram mobilizadas em atividades que solicitavam a resolução de um sistema linear, utilizando a representação matricial deste sistema, sendo assim as conversões eram realizadas no sentido RA \rightarrow RM²⁰.

No capítulo de determinantes, o registro com maior ênfase foi o registro matricial, em caráter de tratamento, desvinculado da aplicabilidade de determinantes para o cálculo de área de figuras, o que propiciaria, por exemplo, atividades onde os acadêmicos relaizariam a conversão do registro figural para o registro matricial..

Nestes três capítulos, tem-se um total de 36% de atividades que perpassam pelo registro algébrico, em um dos momentos, seja como registro de partida, ou registro intermediário. Tendo o registro matricial como o mais explorado, estando presente em 82% das atividades. A conversão esteve presente em 44% das atividades, o que destoa dos resultados obtido por Cardoso, Oliveira e Kato (2016) ao analisar todo o livro A, constatando que 58% das atividades resolvidas realizavam o movimento de conversão. Pode-se dizer que o livro apresenta atividades resolvidas envolvendo conversão, mas não as explora de maneira significativa nas atividades propostas. Além disso, 49% das conversões foram do sentido RLN \rightarrow RM²¹, não sendo explorada a conversão do RM \rightarrow RLN²², 35% no sentido RA \rightarrow RM²³, e os outros 16% estão divididos entre RS \rightarrow RA²⁴, RF \rightarrow RA²⁵, RG \rightarrow RA²⁶, RLN \rightarrow RA²⁷. Ressalta-se que, Duval (2003, 2013) indica que a conversão precisa ser realizada em ambos os sentidos, porém o que constatou-se foi a não exploração dos sentidos RM \rightarrow RLN²⁸, RA \rightarrow RS²⁹, RA \rightarrow RG³⁰, RA \rightarrow RF³¹, RA \rightarrow RLN³².

O Quadro 12 destaca as informações obtidas sobre os Registros de Representação Semiótica explorados no livro B e as transformações cognitivas, especificamente, nas 401 atividades dispostas nos dois capítulos analisados.

¹⁸ Registro em língua natural para o registro algébrico.

¹⁹ Registro figural para o registro algébrico.

²⁰ Registro algébrico para o registro matricial.

²¹ Registro em língua natural para o registro matricial.

²² Registro matricial para o registro em língua natural.

²³ Registro algébrico para o registro matricial.

²⁴ Registro simbólico para o registro algébrico.

²⁵ Registro figural para o registro algébrico.

²⁶ Registro gráfico para o registro algébrico.

²⁷ Registro em língua natural para o registro algébrico.

²⁸ Registro matricial para o registro em língua natural.

²⁹ Registro algébrico para o registro simbólico.

³⁰ Registro algébrico para o registro gráfico.

³¹ Registro algébrico para o registro figural.

³² Registro algébrico para o registro em língua natural.

Quadro 12: Análise do livro B referente aos Registros de Representação Semiótica

Capítulos	Seções	Total de atividades	Transformações cognitivas		Sentidos com mais ênfase	Sentido com menos ênfase
			Tratamento	Conversão		
Sistemas de Equações Lineares e Matrizes	Introdução a Sistemas de Equações Lineares	17	11	6	RA->RM	RA->RN
	Eliminação Gaussiana	40	14	26	RA->RM	RG->RA
	Matrizes e operações matriciais	30	25	5	RM->RA_M	RM->RG
	Inversas: Propriedades de Matrizes	55	35	20	RA->RM	RM->RA
	Matrizes Elementares e um método para encontrar A^{-1}	43	40	3	RLN->RM	--
	Mais sobre Sistemas lineares e matrizes invertíveis	24	0	24	RA->RM	RLN->RA
	Matrizes Diagonais, triangulares e simétricas	43	26	17	RLN->RA	RM->RA
	Aplicações	18	0	17	RF->RA	RG->RA
	Modelos Econômicos	11	0	11	RM->RA	RT->RM
	Determinantes	Determinantes por expansão de cofatores	42	41	1	RLN->RM
Calculando determinantes por meio de redução por linhas		36	36	--	RM->RN	--
Propriedades dos Determinantes; regra de Cramer		39	31	8	RA->RM	RLN->RM

Fonte: Elaboração da autora.

No livro B, os sistemas lineares e as matrizes são expostos em seu primeiro capítulo, por isso, os registros com maior destaque foram os registros algébrico e matricial para a realização de tratamentos, bem como, estes registros também fazem parte dos sentidos de conversão explorados nesse capítulo.

Já no capítulo destinado aos determinantes, o registro mais explorado foi o registro matricial, além do mais, foi o capítulo que conteve menos atividades de conversão entre registros.

Nos dois capítulos analisados do livro B, 43% das atividades mobilizam o registro algébrico em seu desenvolvimento e 84% utiliza em algum momento o RM, seja como registro de partida, ou intermediário.

A transformação cognitiva de conversão faz parte de 35% das atividades do livro B, tendo como sentido RA->RM³³ em 16% dos casos, 5% RM->RA³⁴, explorando ambos os sentidos, os outros 79% estão divididos em RG->RA³⁵, RLN->RM³⁶, RT->RM³⁷, RLN->RA³⁸, dentre outros. De modo diferente do livro anterior, no livro B a conversão é realizada num contingente maior de sentidos de registros de representação.

Nota-se que ambos os livros privilegiam atividades envolvendo tratamento, ao invés da conversão. Em relação aos registros há destaque para o registro matricial em ambos.

Se reduzir esta pesquisa apenas aos capítulos envolvendo sistemas lineares, obtém-se que no livro A 79% destas atividades perpassam em algum momento pelo registro algébrico e que no livro B, o mesmo ocorre em 77%, logo considerando somente os capítulos com sistemas Lineares têm-se resultados semelhantes às pesquisas de Boemo, (2015); Battaglioli, (2008); Jordão, (2011) e Jean-Luc Dorier (1997 *apud* FRANÇA, 2007).

No Quadro 13 são apresentados os principais resultados obtidos por categoria de análise.

³³ Registro algébrico para o registro matricial.

³⁴ Registro matricial para o registro algébrico.

³⁵ Registro gráfico para o registro algébrico.

³⁶ Registro em língua natural para o registro matricial.

³⁷ Registro tabular para o registro matricial.

³⁸ Registro em língua natural para o registro algébrico.

Quadro 13: Síntese dos resultados obtidos por categoria

Categoria	Livro A	Livro B
Localização dos Sistemas Lineares, matrizes e determinantes na Obra	Matrizes. Sistemas Lineares e Determinantes.	Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes.
Relações/Conexões (verificadas no decorrer dos capítulos)	Pode-se afirmar que as relações e conexões identificadas no livro são em sua maioria relações dentro da própria matemática, por exemplo, a conexão entre sistemas lineares e matrizes, ou a representação gráfica dos sistemas e a classificação dos mesmos.	Além da matemática, os contextos encontrados são: análise de rede (análise de fluxos de rede); projeções de padrões de tráfego; circuitos elétricos (Física); equilíbrio de equações químicas (Química); interpolação polinomial, integração aproximada (Própria Matemática).
Situações-problema (verificadas nas atividades propostas)	As situações-problema contabilizam um total de 10 atividades, com contextos variados, como a própria matemática, a física, como também situações artificiais.	Continha 7 atividades envolvendo situações-problema, cujos contextos estavam relacionados análise de redes para determinar taxas de fluxos e a economia.
<i>Softwares</i>	Constata-se que não é feita nenhuma sugestão para a utilização destes recursos no decorrer dos capítulos analisados, nem durante a resolução das atividades.	Indica o uso de ferramentas gráficas durante uma atividade de interpolação polinomial.
Argumentos	O uso de argumentação apareceu em apenas 7% das atividades propostas nos três capítulos.	As atividades propostas que exigiam a realização de uma demonstração, representa, um total de 6% das atividades.
Métodos Escolhidos para a resolução de sistemas de equações lineares	O livro apresenta os seguintes métodos, redução à forma escada, método de Gauss, regra de Cramer.	São explorados o método de Gauss-Jordan, a eliminação gaussiana, matriz inversa, Regra de Cramer, Fatoração LU.
Registros de Representação Semiótica	O registro com maior ênfase foi o RM, presente 82% das atividades. A conversão esteve presente em 44% das atividades, onde o sentido mais utilizado foi RLN-RM.	84% das atividades utilizaram em algum momento o RM. A conversão presente em 35% das atividades, as quais 16% eram no sentido RA-RM.

Fonte: Elaboração da autora.

Na próxima seção são apresentadas as considerações finais.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo analisar os encaminhamentos dados pelos livros de Álgebra Linear, presentes na bibliografia básica dos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições brasileiras de Ensino Superior, quanto ao ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes.

Para tanto, foi realizado o mapeamento das bibliografias básicas de instituições brasileiras de Ensino Superior, com o auxílio do site e-Mec. Neste site buscou-se quais eram as instituições brasileiras que oferecem cursos de Licenciatura em Matemática. Em seguida, procurou-se as páginas na web de cada instituição e nelas os Projetos Pedagógicos de Curso dos cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, foram obtidas as informações sobre as bibliografias básicas das disciplinas que englobam sistemas lineares, matrizes e determinantes. Após a realização do mapeamento foram definidos os dois livros-texto de Álgebra Linear mais citados nas bibliografias básicas dos cursos de Licenciatura em Matemática analisados.

Esta investigação possibilitou verificar que, a sequência em que os conceitos de sistemas lineares, matrizes e determinantes são apresentados é diferente nos livros analisados. No livro A constatou-se a seguinte sequência: matrizes, sistemas lineares e determinantes. Entende-se que esta ordem permite explorar outros métodos para a resolução de sistemas lineares, além da Regra de Cramer, bem como relacionar as matrizes aos sistemas lineares. O livro B exibe a seguinte sequência: sistemas lineares, matrizes e determinantes. Esta sequência está de acordo com a proposta de Cristovão e Spiller (2009) para a Educação Básica, em que o estudo de sistemas lineares não precisa ficar restrito ao ensino de matrizes e determinantes. Este tipo de abordagem propicia a “discussões e reflexões sobre os conteúdos e suas inter-relações, proporcionando uma prática intelectual com uma rica construção de significados” (CRISTOVÃO; SPILLER, 2009, p.3) importante na profissão docente.

No que tange as relações/conexões e situações-problemas presentes nos livros-texto, o que pode-se averiguar é que as mesmas emergem de relações em contextos matemáticos, necessitando explorar melhor as relações de sistemas lineares, matrizes e determinantes com outras áreas do conhecimento. Destaca-se

que com relação aos sistemas lineares o livro que explorou mais a relação deste conteúdo com contextos matemáticos e não matemáticos foi o livro B.

O uso de *softwares*, como ferramenta para a programação dos métodos de resolução de sistemas, operações envolvendo matrizes, cálculo de matrizes inversas, dentre outros, não foi explorado em nenhum dos livros analisados. Sublinha-se que é desejável que estes recursos sejam inseridos em disciplinas de Álgebra Linear, tendo em vista as suas potencialidades, por exemplo, na integração de conteúdos de Álgebra com a programação.

Constatou-se que, a presença de atividades que potencializam a argumentação em ambos os livros foi pouco explorada. Estas atividades representam 7% das atividades categorizadas no livro A e 6% das atividades categorizadas no livro B. Ressalta-se que, conforme documento da SBEM (2003) é importante que os conteúdos sejam tratados de modo que o futuro professor compreenda que a validação de uma afirmação está diretamente relacionada à consistência dos argumentos utilizados. Também, é preciso que o acadêmico saiba “noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas” (SBEM, 2003, p. 8). Por isso, a importância de explorar mais atividades deste tipo.

Ao analisar os métodos apresentados para a resolução de sistemas lineares, identificou-se que ambos os livros-texto exploraram o método de escalonamento, que é o proposto pelo OCNEM (BRASIL, 2006), o qual pode ser ensinado na Educação Básica. Outros métodos foram identificados no livro B, por exemplo, Gauss-Jordan, a eliminação gaussiana, matriz inversa, Regra de Cramer, Fatoração LU, em contrapartida no livro A, foram expostos os métodos redução à forma escada, método de Gauss, regra de Cramer.

Na análise referente aos Registros de Representação Semiótica, em particular, as transformações cognitivas, constatou-se que no livro A o registro com maior ênfase foi o RM, presente 82% das atividades. A conversão esteve presente em 44% das atividades. O sentido da conversão mais explorado foi RLN-RM. Pode-se afirmar que foram explorados poucos sentidos de conversão. Não foram identificadas atividades que solicitavam a conversão no sentido RA-RG ou RM-RG.

No livro B, 84% das atividades exploraram em algum momento o RM. A conversão foi identificada em 35% das atividades, destas 16% solicitavam a

conversão no sentido RA-RM. No entanto, foram explorados um contingente mais amplo de sentidos de conversão como: RA-RM, RM-RA, RG-RA, RF-RA, RA-RG.

Por fim, destaca-se que esta pesquisa pode ser ampliada a partir da análise de outros livros-texto de Álgebra Linear presentes de maneira significativa nas bibliografias básicas de instituições brasileiras de Ensino Superior. Como também, investigar, comparar e salientar as vantagens de se utilizar cada um dos métodos para a resolução de sistemas lineares, no que tange a programação computacional destes métodos, bem como, analisar as ligações entre os métodos estudados em Álgebra Linear e revisitados no Cálculo Numérico atrelando estes dois componentes curriculares obrigatórios na graduação em Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTON, H. RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações** Tradução técnica de Claus Ivo Doering.- 10.ed. – Porto Alegre: Bookman, 2012.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reta e Augusto Pinheiro, Edições 70, 2004.
- BARROS, P. M.; FERNANDES, J. A.; ARAÚJO, C. M. **Prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.18 n.1, pp. 43-59, 2016. Disponível em:< <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24489>> Acesso em: 19 de novembro de 2017.
- BATTAGLIOLI, C.S.M. **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos**. Dissertação de Mestrado Profissional-(PUCSP) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.
- BOEMO, M.S. **Registros de Representação Semiótica mobilizados no estudo de Sistemas Lineares no ensino médio**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática-(UFSM) Universidade Federal de Santa Maria, RS, 2015.
- BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H.G., **Álgebra Linear**. -3.ed.-São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.
- BOLETIM SBEM Fevereiro de 2013. Disponível em:<<http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>> Acesso em: 15 de junho de 2017.
- BORBA, M. de C. **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica,2004.
- BRASIL, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CES 03. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Diário Oficial da União- Brasília, 2002.
- _____, Ministério da Educação. **PCN+ do Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos PCN**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. 144 p. Brasília, p. 87-111, 2002.
- _____, Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEB, 2006.
- CARDOSO, V. C. ;OLIVEIRA, S. R. de; KATO, L. A. **Um olhar sobre os livros didáticos de álgebra linear à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 190-206, 2016. Disponível em:< <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p190> >Acesso: 19 de novembro de 2017.

CELESTINO, M.R. **Ensino-Aprendizagem de Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Dissertação de Mestrado (PUC/SP)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CRISTOVÃO, E. M; SPILLER, L. K. P. C. **Matrizes, Determinantes e Sistemas ou Sistemas, Matrizes e Determinantes?** Associação de Leitura Brasileira, 2009 Disponível em: < http://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais17/txtcompletos/sem07/COLE_4002.pdf> Acesso em: 20 de Abril de 2017.

DAMM, R. F. **Registros de Representação**. In: Machado, Silvia Dias Alcântara. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo. EDUC, pp. 167-188, 2012.

DOCUMENTO BASE DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: subsídios para a discussão de propostas para os cursos de licenciatura em matemática, no seminário nacional de licenciaturas em matemática. Salvador/abril/2003. Disponível em:<<http://www.mat.ufmg.br/syok/diretrizes/Salvador.doc>> Acesso em: 30 de abril de 2017.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.): Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

_____, **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. José Luiz Magalhães de Freitas, Veridiana Rezende. Revista Paranaense de Educação Matemática(RPEM), Campo Mourão, v.2, n.3, jul-dez,2013. Disponível em: <<http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/963>> Acesso em: 15 de maio de 2017.

ELIAS, H.R.; CARVALHO, D.F.; SAVIOLI, A. M. P. D. **A matemática na formação do professor de matemática: um estudo a partir de teóricos brasileiros**. Conferência Interamericana de Educação Matemática-CIAEM, 2015. Disponível em:<http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1059/432> Acesso em:30 de Abril de 2017.

FERREIRA, M.C.C. **Conhecimento Matemático Específico para o Ensino na Educação Básica: a Álgebra na Escola e na Formação do Professor**. Tese de Pós Graduação em Educação. Belo Horizonte, 2014

FIORENTINI, D. **A formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática**. Revista de Educação PUC-Campinas, campinas, n.18, p.107-115, junho de 2005.

FIORENTINI, D., LORENZATO S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2ª ed. rev. Campinas-SP, Autores Associados, 2006.

FONSECA, C. I. T. T. R. da. **As Funções Exponencial e Logarítmica nos manuais escolares do 12.º ano**. Dissertação de Mestrado (Educação), Universidade de Aveiro, Portugal, 2013. Disponível em:< <http://docplayer.com.br/46648067-Carla-isabel-teixeira-tavares-rebimbas-da-fonseca-as-funcoes-exponencial-e-logaritmica-nos-manuais-escolares-do-12-o-ano-departamento-de-educacao.html> > Acesso em:3 de Junho de 2017.

FRANÇA, M. V. D. de. **Conceitos fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando Geometria Dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC- São Paulo, 2007.

FREITAS, N. A. de. **Sistemas de Equações Lineares: uma proposta de atividades de diferentes abordagens de Registros de Representação Semiótica**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PUC/SP)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GRANDE, A. L. **O conceito de Independência e Dependência e os Registros de Representação Semiótica nos Livros didáticos de Álgebra Linear**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática (PUC/SP)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo,2006.

GRILO, J. de S. P.; BARBOS, J.C.;LUNA, A. V. De A. **Repercussões de disciplinas específicas na ação do professor de matemática da educação básica: Uma revisão Sistemática**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.17, n.1, pp 04-24, 2015. Disponível em:< <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/19329> > Acesso em: 19 de novembro de 2017.

JORDÃO, A.L.I. **Um estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC/SP)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

JÚNIOR, L. de C. **Um estudo sobre a abordagem de matrizes no caderno do professor do programa "São Paulo faz Escola"**. 2010. Dissertação (Mestrado em Mestrado Em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,2010.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: Um estudo sobre as Transformações Lineares na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. (PUC/SP)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MARCHETTO, R. **Utilização do software MATLAB como recurso tecnológico de aprendizagem na transformação de matrizes em imagens**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, n. 1, p. 118-130, 2016. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n1p118> >Acesso em: 29 de novembro de 2017.

MORAN, M; FRANCO, V.S. **Tratamentos Figurais e Mobilizações de Registros para a Resolução de Problemas de Geometria**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.10, n. 2, p. 61-75, 2015. Disponível em:<

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n2p61>> Acesso em: 2 de Junho de 2017.

MOREIRA, P. C. **3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática)**. BOLEMA : Boletim de Educação Matemática (Online) , v. 26, p. 1137-1150, 2012. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000400003 > Acesso em: 19 de novembro de 2017.

NEVES, K. C. R. **Investigação Sobre a Inserção e Permanência dos Determinantes no Currículo da Matemática Escolar**. In: XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. Anais do XI ENEM, 2013. Disponível em: < http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1114_192_ID.pdf > Acesso em: 20 de outubro de 2017.

PIRES, C. M. C., SANTOS, V. M. **Aprender matemática no Ensino Fundamental**. In: SECRETARIA DO ESTADO DE SÃO PAULO. Educação: fazer e aprender na cidade de São Paulo, 2008. Disponível em: <<http://portalsme.prefeitura.sp.gov.br/Projetos/BibliPed/Documentos/publicacoes/FazerAprender5.pdf>> Acesso em: 4 de abril 2017.

PONTE, J. P. D; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Ministério da Educação, 2009. Disponível em < http://aveordemsantiago.pt/pdfs/novos_programas/matematica/ensino_basico/algebra.pdf > Acessado em 15 de Maio de 2017

RAMIRES, M. R. S. **Os Sistemas de Equações Lineares nos livros didáticos do Ensino Médio e os Registros de Representação**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIBAN- São Paulo, 2012.

SANTOS, M. V. dos. **Um Estudo Sobre Demonstrações em Livros de Ensino Médio**. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso- Matemática – Habilitação Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Santa Catarina, 2009.

SANTOS, R. N. dos. **Semiótica e Educação Matemática: Registros de representação aplicados à Teoria das Matrizes**, 2011. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós- graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

SIMIÃO, F. A noção de matriz na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior. 2010. 323f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.