

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA  
CAMPUS ITAQUI-RS  
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

**MARIANE DA ROSA MINHOS**

**O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO  
FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DE PRODUÇÕES BRASILEIRAS NOS  
ÚLTIMOS DEZ ANOS**

**ITAQUI-RS**

**2016**

**MARIANE DA ROSA MINHOS**

**O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO  
FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DE PRODUÇÕES BRASILEIRAS NOS  
ÚLTIMOS DEZ ANOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para conclusão do Curso de Matemática - Licenciatura pela UNIPAMPA - Campus Itaqui-RS.

Orientador(a): Prof. Me. Leugim Corteze Romio  
Co-Orientador(a): Prof. Ma. Maria Arlita da Silveira Soares

**ITAQUI-RS**

**2016**

**MARIANE DA ROSA MINHOS**

**O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO  
FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DE PRODUÇÕES BRASILEIRAS NOS  
ÚLTIMOS DEZ ANOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
como requisito parcial para conclusão do  
Curso de Matemática - Licenciatura pela  
UNIPAMPA - Campus Itaqui-RS.

Aprovado(a) em \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Me. Leugim Corteze Romio (orientador)  
UNIPAMPA – Itaqui-RS

---

Prof. Ma. Renata da Silva Dessbesel  
UTFPR – Dois Vizinhos-PR

---

Prof. Me. Gabriel dos Santos Kehler  
UNIPAMPA – Itaqui-RS

## **AGRADECIMENTOS**

*Agradeço a Deus que é o centro e o fundamento de tudo em minha vida, por me proporcionar saúde, renovar minhas forças para lutar, conquistar, vencer e até mesmo cair e perder, e o principal, viver, guiar e iluminar meus caminhos e por colocar em minha vida anjos, em forma de amigos, professores e familiares.*

*Agradeço ao meu amado esposo Rafael e minha querida filha Ana Clara, que nos momentos de minha ausência dedicada ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente, pelo amor, apoio incondicional incentivo nas horas difíceis de desânimo e cansaço.*

*Aos meus pais Onir e Ieda e a minha Avó Leonida que sempre me ensinaram que devemos lutar pelos nossos sonhos, confiar em Deus e ter fé acima de tudo. Obrigada meus irmãos Aldoir, Kahuã e Vytória pelo incentivo e apoio.*

*Agradeço minhas amigas e colegas Mayara, Veronica, Dienifer, Jessica e Darlize que fizeram parte da minha formação e que irão continuar presentes em minha vida com certeza, pelas palavras de apoio e por sempre acreditarem que sou capaz.*

*Aos meus queridos e amados orientadores Professor Me. Leugim Corteze Romio e Professora Ma. Maria Arlita da Silveira Soares, pela dedicação, correções, contribuições e confiança.*

## RESUMO

O presente trabalho apresenta um mapeamento de pesquisas brasileiras, publicadas em periódicos da Educação Matemática, que tratam dos números racionais. Para tal, busca-se fundamentação teórica nas ideias de Onuchic e Allevato, Lamon e Romanatto, bem como na proposta curricular Parâmetros Curriculares Nacionais. A escolha metodológica é de uma pesquisa qualitativa do tipo análise documental, sendo os dados analisados por meio das etapas da análise de conteúdo. Dessa forma, pode-se constatar que poucas pesquisas foram desenvolvidas com estudantes da Educação Básica e que dentre as pesquisas identificadas o significado mais abordado é parte-todo. Além disso, são poucas as produções que apresentam sugestões de atividades envolvendo números racionais. Assim, percebe-se a necessidade de mais pesquisas envolvendo as relações existentes entre os diferentes significados dos números racionais e estudantes da Educação Básica.

**Palavras-Chave:** Número Racional; Significados; Parte-todo; Quociente; Taxa; Razão e Operador.

## **ABSTRACT**

This paper presents a mapping of Brazilian research published in journals of mathematics education, dealing with rational numbers. To this end, it seeks to theoretical foundation in ideas Onuchic and Allevato, Lamon and Romanatto and the proposed curriculum National Curriculum Standards. The methodological choice is a qualitative study of document analysis type, and the data analyzed by the steps of content analysis. Thus, it can be seen that little research has been developed with students of basic education and that among the research identified the most discussed meaning is part-whole. Moreover, few productions have suggestions for activities involving rational numbers. Thus, we see the need for more research involving the relationship between the different meanings of rational numbers and students of basic education.

**Keywords:** Rational Number; Meanings; Part-whole; Quotient; Rate; Ratio and Operator.

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1:</b> Relação quantitativa das pesquisas encontradas .....	22
<b>Quadro 2:</b> Relação quantitativa das pesquisas encontradas, com os descritores taxa, razão, quociente, parte-todo e operador .....	22
<b>Quadro 3:</b> Categorias de Análise: Significados atribuídos a representação $\frac{a}{b}$ .....	23
<b>Quadro 4:</b> Universidade e grupo de pesquisa, as quais os artigos estão ligados .....	24
<b>Quadro 5:</b> Objetivos, metodologia, fontes e sujeitos dos artigos mapeados .....	31
<b>Quadro 6:</b> Significados dos números racionais tratados em cada artigo mapeado .....	33
<b>Quadro 7:</b> Descrição das atividades compostas nos artigos mapeados .....	36

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Atividade retirada do material elaborado para a Prova Brasil .....	11
<b>Figura 2:</b> Atividade do artigo B envolvendo a operação adição .....	36
<b>Figura 3:</b> Atividade do artigo B envolvendo a operação multiplicação .....	36
<b>Figura 4:</b> Atividades trazidas no artigo I .....	38
<b>Figura 5:</b> Atividade trazida no artigo I .....	38
<b>Figura 6:</b> Atividade apresentada no artigo J, envolvendo o significado quociente .....	39
<b>Figura 7:</b> Atividade apresentada no artigo J, envolvendo o significado parte-todo .....	40
<b>Figura 8:</b> Atividade apresentada no artigo O, envolvendo o significado razão .....	40



## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO DO TRABALHO .....</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 1: REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>14</b>
<b>CAPÍTULO 2: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>20</b>
<b>CAPÍTULO 3: ANÁLISE DOS DADOS .....</b>	<b>24</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>42</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>44</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>46</b>
<b>APÊNDICE I: PUBLICAÇÕES IDENTIFICADAS NOS MAPEAMENTOS .....</b>	<b>47</b>

## APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

A importância dos números racionais tem sido destacada por vários pesquisadores (MOREIRA, DAVID, 2005; ONUCHIC, ALLEVATO, 2008; SILVA, ALMOULOUD, 2008; SOARES, 2007) e propostas curriculares (BRASIL, 1998; NCTM, 2008). Moreira e David (2005) enfatizam três perspectivas relacionadas à importância dos números racionais, a saber: perspectiva prática (os números racionais auxiliam na resolução de situações do dia a dia de várias pessoas), perspectiva psicológica (os números racionais contribuem na formação de diferentes estruturas cognitivas fundamentais ao desenvolvimento intelectual dos estudantes) e perspectiva matemática (os números racionais estão relacionados a vários outros conceitos matemáticos, por exemplo, operações algébricas). Assim,

[...] a não aquisição do conceito de número racional pelo aluno pode acarretar prejuízos na aquisição de um conjunto de informações necessárias à interpretação de fatos, fenômenos e eventos do mundo real, bem como na construção de estruturas mentais essenciais às atividades matemática e científica. (SOARES, 2007, p. 15)

Um dos fatores que justificam o interesse por investigar aspectos associados aos números racionais está relacionado à própria evolução histórica deste conceito. Outro fator está ligado ao modo como os números racionais são abordados na formação de professores, ou seja, dá-se ênfase, geralmente, a definição de números racionais, como corpo ordenado, e entende-se que as questões ligadas a estes números são apenas pré-requisitos para a definição de números reais. Contudo, compreende-se que tal abordagem não é suficiente para entender a complexidade acerca do processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, em particular, o estudo dos diferentes significados associados à representação  $\frac{a}{b}$  bem como as demais representações destes números.

Além disso, os resultados das avaliações externas (por exemplo, Prova Brasil) demonstram as dificuldades que os estudantes possuem relacionadas à representação fracionária, associada a diferentes significados dos números racionais. A título de exemplo, uma das atividades da Prova Brasil<sup>1</sup> (BRASIL, 2008), envolve a estimativa da distância percorrida por 4 (quatro) amigos (João, Pedro, Ana e Maria), em que estes saem juntos para um passeio por um mesmo percurso, sendo informada a fração do percurso total que cada amigo já percorreu e solicitado saber quais amigos encontram-se no mesmo ponto do

---

<sup>1</sup> Avaliação em larga escala para diagnóstico, desenvolvida pelo Instituto nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC) com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos.

percurso. De modo que os estudantes precisam reconhecer que um número racional pode ser representado por infinitas frações equivalentes.

Figura 1: Atividade retirada do material elaborado para a Prova Brasil

<p>Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou <math>\frac{6}{8}</math> do caminho; Pedro, <math>\frac{9}{12}</math>; Ana, <math>\frac{3}{8}</math> e Maria, <math>\frac{4}{6}</math>.</p> <p>Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são</p> <p>(A) João e Pedro.          (B) João e Ana.          (C) Ana e Maria.          (D) Pedro e Ana.</p>
--

Fonte: (BRASIL, 2008, p.180)

Nesta situação (Figura 1), somente 26% dos alunos responderam corretamente, sendo que a maioria (41%) escolheu erroneamente a alternativa “B”, possivelmente, conforme comentário presente no próprio documento de avaliação da Prova Brasil, devido à igualdade entre os denominadores das frações. E questiona: “Que sugestões podem ser dadas para melhor desenvolver essa habilidade?” (BRASIL, 2008, p. 180).

Apontando que seria importante realizar atividades em sala de aula nas quais os estudantes possam desenvolver tal habilidade, sendo que o essencial é partir de materiais concretos ou representação figural, verificando as equivalências entre peças e, posteriormente, explorar a representação de frações equivalentes, por meio de simplificação de numerador e denominador.

As dificuldades observadas, principalmente, nos resultados das avaliações externas (internacionais, nacionais e estaduais) conduziram diversos pesquisadores, dentre eles Behr, Lesh e Post (1988); Lamon (2007, 2008); e, Onuchic e Allevato (2008), a buscar compreender a natureza dos números racionais. Para Lamon (2008), a natureza dos números racionais é multiplicativa, o que requer compreender de que forma estes números se relacionam com os demais conceitos do campo multiplicativo. Em outros termos, pesquisar sobre números racionais exige analisar um campo de conceitos e suas relações. Os pesquisadores, já mencionados, identificaram vários “comportamentos” dos números racionais à medida que o contexto das situações-problema é alterado.

Estes “comportamentos” receberam ao longo do tempo diferentes denominações, a saber: interpretações (LAMON, 2007, 2008), subconstrutos (FREUDENTHAL 2002 apud LAMON, 2007; BEHR, LESH, POST apud LAMON, 2007), significados (ROMANATTO

apud SOARES, 2007; CAMPOS, MAGINA, 2008) e personalidades (ONUCHIC, ALLEVATO, 2008).

Mesmo partindo de bases epistemológicas ou critérios distintos para delimitar e caracterizar essas interpretações “parece haver consenso entre os diferentes pesquisadores de que os significados centrais ao estudo da representação fracionária dos números racionais são: quociente, razão, operador e relação parte-todo.” (NEPEM/USF 2004 apud OLIVEIRA, 2014, p. 64).

Além da análise dos subconstrutos/significados/interpretações/personalidades os pesquisadores (OLIVEIRA, 2014; ONUCHIC, ALLEVATO, 2008; ROMANATTO 1997 apud SOARES, 2007; SOARES, 2007) enfatizam o estudo/análise das várias representações do número racional. Romanatto 1997 (apud SOARES, 2007) chama atenção dos professores para verificarem se as representações estão sendo compreendidas pelos estudantes, por exemplo, os estudantes compreendem que  $\frac{3}{4}$ , 0,75 ou 75% podem ser diferentes representações para uma mesma situação-problema.

É relevante, deixar claro para o estudante que “os números racionais possuem várias representações e que elas existem porque certas relações podem ser melhor expressas ou trabalhadas operatoricamente, numa determinada notação do que em outra” (ROMANATTO 1997 apud SOARES, 2007, p. 16).

Behr 1988 (apud ONUCHIC, BOTTA, 1997) recomenda que o ensino deva ser orientado mais para o significado do que para o símbolo e que em lugar de se colocar o conhecimento como um “pacote pronto e acabado” o ensino deve encorajar os estudantes a construir seu próprio conhecimento.

Diante desse contexto, torna-se relevante compreender, com mais detalhes, as escolhas dos pesquisadores, em especial brasileiros, ao optarem por termos diferentes para a representação fracionária dos números racionais, bem como as situações-problema selecionadas para abordar esta problemática.

A justificativa para a escolha do tema deu-se na prática docente desenvolvida no componente curricular Estágio Curricular Supervisionado em Ensino de Matemática III com uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, no Estágio Curricular Supervisionado em Ensino de Matemática IV em uma turma do 1º ano do Ensino Médio, nas atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência – PIBID desenvolvidas em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental e nas discussões do grupo de pesquisa MatE<sup>2</sup> (Educação e Educação Matemática).

Com base no exposto, nossa questão de pesquisa é: Quais significados/subconstrutos/interpretações/personalidades dos números racionais foram apresentados/trabalhados/abordados nas pesquisas da Educação Matemática nos últimos dez anos, no que tange ao ensino e aprendizagem dos números racionais? Para respondê-la, definimos como objetivo: analisar as produções da área da Educação Matemática, publicadas nos últimos 10 anos, que tratam de números racionais e foram desenvolvidas com estudantes da Educação Básica, quais significados/personalidades/interpretações/ subconstrutos<sup>2</sup> dos números racionais são abordados.

A metodologia utilizada, para atingir o objetivo deste trabalho, foi de uma pesquisa qualitativa por meio de análise documental, sendo esta uma fonte de coleta de dados que está relacionada a documentos, os quais são denominados “fontes primárias”<sup>3</sup>. Na análise documental, optou-se pela técnica denominada Análise de Conteúdo para organizar e analisar os dados produzidos, a qual é constituída de três fases, a saber: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados e interpretação, que serão detalhadas nos capítulos seguintes.

Esta pesquisa está distribuída em 3 capítulos. O Capítulo 1 apresenta o aporte teórico que fundamentou o estudo, e será detalhado a seguir. O Capítulo 2 descreve a metodologia utilizada. O Capítulo 3 traz a análise dos dados. E, por fim, as considerações finais da pesquisa.

---

<sup>2</sup> No decorrer desta pesquisa será utilizado o termo significados, a fim de facilitar a escrita dos enunciados e frases.

<sup>3</sup> O termo “fontes primárias” será explicado nos capítulos seguintes.

## CAPÍTULO 1

### REFERENCIAL TEÓRICO

O ensino e a aprendizagem dos números racionais têm sido muito pesquisados nos últimos anos (ONUCHIC, ALLEVATO, 2008; OLIVEIRA, 2014; SILVA, ALMOULOU, 2008; SOARES, 2007), em especial, o trabalho com os diferentes significados deste número. Uma justificativa para este interesse pode estar relacionada com a forma a qual ele é trabalhado e/ou a complexidade da formação desses números. Moreira e Ferreira (2008) apontam que:

[...] a estrutura multiplicativa dos racionais pode ser percebida como uma extensão (seguramente mais sofisticada, em vários aspectos referentes à aprendizagem) da conhecida estrutura aritmética dos naturais e não como algo que decorre de axiomas impostos por uma lógica intrínseca à matemática e artificialmente vinculada ao mundo empírico do estudante. (p. 125)

Mesmo sendo considerada uma extensão da estrutura aritmética dos números naturais, os números racionais exigem uma análise das suas especificidades em relação aos demais conjuntos numéricos, principalmente, no que se refere a seus significados.

O trabalho com os diferentes significados tem início em meados dos anos 1970, quando Kieren 1976 (apud MOREIRA, FERREIRA, 2008) apresenta, em sua pesquisa, sete subconstrutos: fração, fração decimal, classe de equivalência de frações, razão, operador, corpo quociente ordenado e medida. Posteriormente (em meados de 1980), o mesmo autor defende a existência de apenas cinco subconstrutos (qualificando-os de subconstrutos básicos), agora com as seguintes denominações: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador.

Concomitantemente as pesquisas de Kieren, o “Projeto Número Racional” (do inglês *Rational Number Project* – RNP) apresentou uma série de resultados “de pesquisas empíricas e de reflexões teóricas sobre o ensino e a aprendizagem dos racionais” (MOREIRA, FERREIRA, 2008, p. 106). Os integrantes deste projeto, no início da década de 1980, reorganizaram a lista de Kieren (1976), sugerindo os seguintes subconstrutos: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado, corpo quociente e operador. Entretanto, em relação ao subconstruto “corpo quociente”, o RNP argumentou que o nível de sofisticação associado demandaria estruturas intelectuais que estariam fora do alcance de estudantes do Ensino Fundamental, sugerindo uma nova reorganização, a qual pareceu estabilizar-se, nas décadas seguintes (1990-2000), e que manteve os seguintes subconstrutos: relação parte-todo, medida,

razão, quociente indicado e operador, conforme sugestão do RNP (MOREIRA, FERREIRA, 2008).

Onuchic e Allevato (2008, p. 82), em seu artigo sobre as diferentes personalidades<sup>4</sup> do número racional, defendem que o trabalho com estes números deve ser realizado numa perspectiva de Resolução de Problemas. Segundo as autoras, o “trabalho com números racionais precisa ser feito de um modo diferente daquele em que regras de ‘como fazer’ são privilegiadas”. Além disso, é preciso considerar a teoria matemática a qual cada significado está submetido “a classe de situações do mundo real a que eles se aplicam, e as relações entre a teoria e estas situações” (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008, p. 85).

O conjunto dos números racionais, do ponto de vista matemático, denotado por  $\mathbb{Q}$ , é apresentado por meio da relação entre seus elementos:  $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ . Para ampliar o conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) para os números racionais ( $\mathbb{Q}$ ), deve-se garantir a propriedade estrutural que define, para um número inteiro  $n$ ,  $n \neq 0$ , deve existir um termo  $\frac{1}{n}$  (denominado inverso multiplicativo) para o qual seja válida a operação:  $n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$  (ONUCHIC, ALLEVATO, 2008).

Do ponto de vista da aprendizagem, principalmente, na Educação Básica, torna-se fundamental ir além da definição dos números racionais, pois a compreensão destes números requer um tratamento a partir de suas questões históricas. Em outras palavras, é necessário explicitar para os estudantes as atividades humanas que exigiram a ampliação dos naturais (inteiros não negativos) para os racionais (atividade de medir). Isto porque a ideia de inverso multiplicativo é uma justificativa com base na estrutura matemática, mas nem sempre potencializa a análise de diversas situações-problemas, nas quais os números racionais precisam ser mobilizados para a resolução. Assim, o processo de ensino e aprendizagem exige dos sujeitos envolvidos o estudo das especificidades dos números racionais de vários pontos de vista: histórico, matemático, cognitivo, etc.

Quanto aos significados do número racional, Onuchic e Allevato (2008) consideram que eles podem assumir os seguintes:

- *Ponto Racional*: todo número racional  $\frac{a}{b}$  ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional na reta corresponde um número racional;

---

<sup>4</sup> As autoras optaram pelo termo “diferentes personalidades” para referir-se aos diferentes significados que os números racionais podem assumir, uma vez que utilizaram os pressupostos de Ohlsson 1991 (apud ONUCHIC, ALLEVATO, 2008). Maiores detalhes podem ser visto no texto das autoras intitulado “As Diferentes ‘Personalidades’ do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas”.

- *Quociente*: seu significado é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos. Ele aparece mais frequentemente, nas aplicações do que os outros e se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação da divisão;
- *Fração*: Relação da parte com o todo, divisão do todo em  $b$  partes iguais, dá-se o nome da parte de denominador, toma-se tantas partes quantas o numerador indica:  $a$ ;
- *Operador*: tem sentido semelhante ao de “encolher/esticar”, “reduzir/ampliar”. O operador define uma estrutura multiplicativa de números racionais;
- *Razão*: comparação multiplicativa entre duas grandezas, denotada por  $\frac{a}{b} = a:b$  ( $a$  está para  $b$ ), em que  $a$  é denominado antecedente e  $b$  é denominado conseqüente. As propriedades da razão são fundamentalmente diferentes daquelas da fração;
- *Proporcionalidade*: a comparação entre as grandezas é multiplicativa, por exemplo, *se com 6 dólares podiam-se comprar 4 libras esterlinas, quantas libras se poderiam adquirir com 21 dólares?* A proporcionalidade tem a mesma natureza dos números racionais, ou seja, natureza multiplicativa. Realizar operações mecânicas com proporções não significa necessariamente compreender as ideias subjacentes ao pensamento proporcional, torna-se importante compreender as relações entre números racionais.

Romanatto 1997 (apud SOARES, 2007) elaborou um estudo teórico-metodológico, sobre o processo de ensinar e aprender números racionais, elaborando um modelo para a compreensão desses números. O modelo assemelha-se a uma “teia de aranha”, em que no centro está a notação  $\frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros e  $b$  diferente de zero, no qual há um feixe de relações (medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número), construídas ou adquiridas considerando diferentes contextos em que estes números estejam presentes.

Os significados propostos por Romanatto 1997 não são detalhados porque seguem a mesma perspectiva apresentada por Onuchic e Allevato (2008), pois ambos têm como fundamentação teórica as ideias de Kieren, RNP e Ohlsson, em que o significado medida aproxima-se do parte-todo, número corresponde a ponto racional, probabilidade se relaciona a ideia de proporcionalidade.

Outra pesquisadora que tem dedicado seus estudos ao processo de ensino e aprendizagem do número racional é norte-americana Lamon (2008). Esta pesquisadora



considera ser necessário entender as diferentes formas de representação do número racional (porcentagem, decimal, fração) e, também, as possíveis interpretações para a representação fracionária  $\frac{a}{b}$ , presentes em diferentes contextos e identificar relações coerentes que podem ser estabelecidas entre duas ou mais dessas representações (relação de proporcionalidade, equivalência ou comparação envolvendo a noção de ordem: maior, menor, igual).

Para Lamon 2008 (apud OLIVEIRA, 2014) as interpretações dos números racionais são entendidas como:

- *Parte-todo*: Esta relacionada à ideia de tomar  $a$  partes de  $b$  partes;
- *Medida*: Relacionada a quantificar certa distância a partir de um ponto zero (origem);
- *Quociente*: É a “partição” ou “divisão equitativa”, que tem a ação de quebrar ou separar um inteiro, a qual está próxima às experiências cotidianas, um quociente é interpretado como a divisão entre duas quantidades numéricas  $a$  e  $b$ ;
- *Razão*: O registro  $a/b$  (ou “ $a:b$ ” ou “ $a$  para  $b$ ”) não necessariamente representa um número, mas um par ordenado de números que expressam tamanhos relativos de duas grandezas, uma relação multiplicativa, uma comparação entre duas grandezas, quando não é possível expressar tal relação por meio dos números inteiros;
- *Probabilidade/Taxa*: É considerada como uma extensão do significado razão, pois envolve a relação entre grandezas de diferentes naturezas. Um exemplo de taxa muito conhecida é a velocidade, que indica a variação da distância percorrida por um determinado intervalo de tempo (comparação multiplicativa entre grandezas de natureza diferentes). Vale destacar que, muitas vezes, os indivíduos interpretam a velocidade como uma unidade de medida e não uma relação entre duas grandezas;
- *Operador*: Representa um grupo de instruções para desenvolver um processo de ampliação ou redução. Por exemplo, ao calcular  $\frac{4}{5}$  de uma grandeza, podemos multiplica-la por 4, em seguida dividi-la por 5. Como a segunda operação é realizada sobre o resultado da primeira, pode-se indicar uma representação fracionária que descreva a composição dessas duas operações.

Quanto à interpretação Razão, Oliveira (2014), com base em Lamon (2008), entende que o estudo deste significado deve ser explorado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, pois propicia a compreensão de ideias envolvendo proporcionalidade,

raciocínio relativo<sup>5</sup>, colaborando significativa e positivamente para a compreensão de conceitos mais elaborados nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Médio, por exemplo, os do campo algébrico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), ao tratar dos números racionais buscam fundamentação teórico-metodológica nas ideias de Behr, Post e Lesh (1988) e nas concepções de Nunes, Campos e Magina (1997) e sugerem aos professores que, ao trabalhar com esses números, destaquem os seguintes significados:

- *Parte/todo*: É apresentado quando um todo (unidade) é dividido em partes equivalentes; indicando na fração a relação existente entre um número de partes e o total de partes. A fração, por exemplo, indica a relação existente entre um número de partes e o total de partes, é o caso das divisões de figuras geométricas em partes iguais. A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), e saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas;
- *Quociente*: A interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro ( $a: b = \frac{a}{b}; b \neq 0$ ) se diferencia da interpretação anterior para os estudantes, pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente em que é preciso dividir em 2 unidades em 3 partes iguais;
- *Razão*: É usado como um índice comparativo entre duas quantidades, por exemplo, quando trabalhamos com probabilidade e porcentagem;
- *Operador*: Desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

Os PCN, ainda, sugerem que o trabalho com os diferentes significados não deve ser realizado isoladamente, pois “a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, possibilitando análise e comparação de várias situações-problema” (BRASIL, 1998, p. 103).

No que tange as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, os PCN mencionam que uma possível explicação, deve-se ao fato de que a aprendizagem desses números supõe rupturas com ideias construídas para os números

---

<sup>5</sup> Para Lamon (2008) este raciocínio é um tipo de pensamento necessário para o desenvolvimento do raciocínio proporcional (que requer a análise de mudanças entre variáveis) e é essencial no início do ensino de número racional.

naturais. Ao trabalhar com os números racionais, os estudantes acabam tendo de enfrentar vários obstáculos, por exemplo:

- Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo,  $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$ , são diferentes representações de um mesmo número;
- a comparação entre racionais: acostumados com a relação  $3 > 2$ , terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja,  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ;
- se o “tamanho” da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ( $8345 > 83$ ), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por  $\frac{1}{2}$  se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
- se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81; 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1998, p. 101)

A citação acima revela que os obstáculos de aprendizagem relacionados aos números racionais envolvem as ideias de: equivalência, ordem, operações (em especial, multiplicação e divisão) e propriedade de densidade. Assim, além do trabalho com os diferentes significados é preciso verificar quais situações estão sendo propostas com o intuito de amenizar as dificuldades na aprendizagem desses números.

A seção seguinte aborda as escolhas metodológicas adotadas para realização desta pesquisa.

## CAPÍTULO 2

### PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

As escolhas metodológicas foram definidas a partir do objetivo e da questão orientadora, mencionados na apresentação do trabalho. Inicialmente, buscou-se embasamento no referencial teórico para, então, definir-se a metodologia de pesquisa e os procedimentos a serem adotados. A metodologia de pesquisa escolhida é de cunho qualitativo. Para Bicudo (2012) a pesquisa qualitativa não necessita de técnicas estatísticas e respectivos cálculos

Entretanto, para além de uma possibilidade de aparente “facilitação de procedimentos”, gostaria de destacar aspectos epistemológicos e, também, aqueles concernentes à concepção de educação e de ser humano em formação. Aspectos esses que se entrelaçam, denotando uma complexidade específica à educação e, assim, evidenciam emaranhados com ensino, aprendizagem, políticas educacionais, ideologias, concepções de ciência, compreensões de história, de vida, possibilitando-nos adentrar em um campo cada vez mais abrangente e profundo e que, ambiguamente, se dá a conhecer e se esconde. (BICUDO, 2012, p. 2)

A pesquisa qualitativa foi realizada na forma de Análise Documental, a qual é descrita por Marconi e Lakatos (2003), como uma fonte de coleta de dados que está restrita a documentos, denominados fontes primárias. Para estes autores, as fontes primárias podem ser consideradas a literatura existente, dados históricos, bibliográficos ou estatísticos, documentação direta, documentos escritos ou não. As investigações, categorizadas como Análise Documental e que se propõem a mapear e analisar as pesquisas já realizadas sobre um determinado tema contribui no sentido de apresentar um número maior de dados e resultados sobre o assunto, bem como suscitar novas questões de pesquisa.

A técnica escolhida para organizar e analisar os dados produzidos denomina-se Análise de Conteúdo, sendo esta considerada:

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens[...] A intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não). (BARDIN, 1977, p. 38)

A Análise de Conteúdo é realizada por meio da leitura de falas, da transcrição de entrevistas, de depoimentos e de documentos. Todos estes procedimentos levam a relacionar os significantes (estruturas semânticas) com significados (estruturas sociológicas) dos enunciados e articular entre estes enunciados dos textos com os fatores que determinam suas características.

A Análise de Conteúdo esta subdividida em várias modalidades, a saber: análise lexical, análise de expressão, análise de relações, análise temática e análise de enunciação. Dentre as diferentes modalidades de análise, optamos pela análise temática, que além de ser considerada simples, mas nem por isso menos importante, é indicada para investigações qualitativas. A análise temática trabalha com a noção de tema, o qual está ligado a uma afirmação a respeito de determinado assunto; comporta um feixe de relações e pode ser graficamente representada por meio de uma palavra, frase ou resumo (GERHARDT e SILVEIRA, 2009).

A Análise de Conteúdo é constituída de três fases, a saber: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados e interpretação.

A *Pré-análise* consiste na etapa de organização do material que vai ser analisado com o objetivo de torná-lo operacional, ou seja, sistematizando as ideias iniciais; e, explorando o material por meio de várias leituras; também denominadas de “leituras flutuante”<sup>6</sup>.

A etapa de *Exploração do material* é o momento em que o material é codificado. Primeiro, faz-se um recorte do texto, em seguida, escolhem-se regras de contagem e, por último, classificam-se e agregam-se os dados, organizando-os em categorias teóricas ou empíricas. Esta fase é de suma importância, pois possibilita a riqueza das interpretações e inferências. Nesta fase, as publicações coletadas, são submetidas a uma profunda análise, orientadas pelo referencial teórico.

*O Tratamento dos resultados* é o momento no qual, se trabalham os dados brutos, permitindo destaque para as informações obtidas (GERHARDT, SILVEIRA, 2009). Em outras palavras, é o momento em que são analisados os dados encontrados, em que ocorre à condensação e o destaque das informações para a análise, é o momento da análise crítica e reflexiva.

Na pré-análise realizou-se o mapeamento das produções brasileiras publicadas, nas principais revistas da área da educação matemática, nos últimos dez anos. Para este mapeamento, foram selecionadas as seguintes revistas: Bolema, Caminhos UFS, Emteia, GPEM, Perspectiva UFMGS, Revemat, Revista Educação Matemática USP, RPEM - UFPR, Zetetike, Educação Matemática Pesquisa e Educação Matemática em revista SBEM. Conforme já mencionado, para auxiliar a escolha das produções foi utilizado o procedimento de “leitura flutuante”, bem como o uso de descritores.

---

<sup>6</sup> Leitura Flutuante: Consiste em estabelecer contato com os documentos a serem analisados, momento em que começa a conhecer os textos da coleta de dados (FRANCO; PUGLISI, 2005, p.48).

Para o levantamento dos dados utilizou-se do recurso de consulta *online*, nas revistas mencionada acima, vale ressaltar que a escolha destas revistas deu-se pelo fato das mesmas serem indicadas no portal da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, bem como por disponibilizarem acesso *online*. Foram realizados dois mapeamentos.

O primeiro utilizando os descritores: número racional e números racionais, o qual resultou em 14 publicações, conforme Quadro 1.

Quadro 1: Relação quantitativa das pesquisas encontradas com os descritores número racional/números racionais.

PERIÓDICOS	NÚMERO PUBLICAÇÕES
Zetetiké	1
Educação Matemática Pesquisa e Educação PUC/SP	0
Bolema	8
REVEMAT	4
RPEM – UFPR	1
Caminhos UFS	0
Em Teia	0
GEPEM	0
Perspectiva UFMGS	0
Revista Educação Matemática USP	0
Educação Matemática Pesquisa e Educação Matemática em revista SBEM	0
<b>Total de pesquisas</b>	<b>14</b>

Posteriormente foi realizado um segundo mapeamento, nos mesmos periódicos, com o objetivo de buscar publicações que trouxessem, em seus títulos, os significados dos números racionais, utilizando-se os seguintes descritores: taxa, razão, quociente, parte-todo e operador multiplicativo, encontrando-se somente 4 publicações, todas publicadas na revista Bolema, conforme apresentado no Quadro 2, sendo que destas quatro publicações duas já constam no primeiro mapeamento.

Quadro 2: Relação quantitativa das pesquisas encontradas, com os descritores taxa, razão, quociente, parte-todo e operador.

PERIÓDICOS	NÚMERO DE PESQUISAS ENVOLVENDO NÚMERO RACIONAL
Zetetiké	0
Educação Matemática Pesquisa e Educação PUC/SP	0
Bolema	4
REVEMAT	0
RPEM – UFPR	0
Caminhos UFS	0
Em Teia	0
GEPEM	0
Perspectiva UFMGS	0
Revista Educação Matemática USP	0
Educação Matemática Pesquisa e Educação Matemática em revista SBEM	0
<b>Total de pesquisas</b>	<b>4</b>

Pode-se perceber, com auxílio dos Quadros 1 e 2, que somente a revista *Bolema* traz publicações com os diferentes significados dos números racionais no título, além disso, ela é a revista com o maior número de publicações relacionada ao tema números racionais, perfazendo um total de 10 (8 publicações com o mapeamento número racional e 4 com o mapeamento dos significados, sendo que duas das publicações estão, também, presentes no primeiro mapeamento) das 16 publicações encontradas (O quadro com o título do artigo, autores, revista e ano de publicação dos artigos mapeados consta no Apêndice I). Vale ressaltar que dois artigos C e H não foram analisados, pois os autores fazem parte do aporte teórico elaborado para analisar as produções.

Na segunda fase, *exploração do material*, organizaram-se quadros que indicaram: objetivos, escolhas teórico-metodológicas, participantes envolvidos, atividades produzidas e significados do número racional tratados pelos pesquisadores dos textos mapeados, os quais serão detalhados e apresentados no Capítulo 3 - Análise dos Dados.

Para analisar os significados do número racional tratados pelos autores das produções mapeadas, tomou-se como referência as definições elaboradas pelos pesquisadores apresentados no Quadro 3.

Quadro 3: Categorias de Análise: Significados atribuídos a representação  $\frac{a}{b}$

<b>Onuchic e Alevato</b>	<b>Lamon</b>	<b>PCN</b>	<b>Romanatto</b>
Quociente	Quociente	Quociente	Quociente
Operador	Operador	Operador	Operador
Razão	Razão	Razão	Razão
Fração (Parte-todo)	Parte-todo/medida	Parte-todo	Medida
Proporcionalidade			
	Probabilidade		Probabilidade
Ponto racional			Número

Este quadro foi estruturado de forma a comparar os significados semelhantes elaborados pelos diferentes pesquisadores, aqui avaliados de modo que o mesmo nos ajude na análise dos dados.

O próximo capítulo apresenta a análise dos dados categorizados na pesquisa, o que compreende as fases *Exploração do Material e Tratamento dos Resultados*, da Análise de Conteúdo.

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo apresenta a análise dos dados obtidos pelo mapeamento. Os quadros apresentados, no decorrer do capítulo, foram organizados com base nas categorias definidas durante a pré-análise.

O Quadro 4, apresenta as instituições de origem das publicações, bem como os vínculos com algum grupo de pesquisa, quando explicitados nos artigos.

Quadro 4: Universidade e grupo de pesquisa, aos quais os artigos estão ligados

ARTIGOS	UNIVERSIDADE	GRUPO
A	Universidade Federal de Minas Gerais	Aspectos históricos da abordagem dos campos numéricos na matemática escolar brasileira
B	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP	-
D	Universidade Federal de Minas Gerais	-
E	Faculdade de Física/PUCRS	-
F	Universidade Federal Rural de Pernambuco	-
G	Instituto de Educação, Universidade de Lisboa	-
I	Universidade Bandeirante de São Paulo	-
J	Universidade Bandeirante de São Paulo	-
K	Universidade Federal Rural de Pernambuco	-
L	Universidade Federal de Pernambuco	-
M	Universidade Estadual de Maringá	-
N	Universidade de Brasília	-
O	Beit-Berl College, Universidade de Haifa e Israeli Science Teaching Center	-
P	Universidade do Minho, Braga, Portugal	-

Com base no quadro, pode-se perceber que das 14 publicações, somente 1 explicita que a pesquisa está vinculada a um grupo de pesquisa. O grupo citado destaca em sua linha de pesquisa investigações acerca dos campos numéricos, principalmente, números racionais no processo de ensino e aprendizagem.

O grupo intitulado Aspectos históricos da abordagem dos campos numéricos na matemática escolar brasileira, não identificou no artigo e nem no diretório de grupos de pesquisas do Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) seus objetivos, linhas de pesquisa e foco de atuação. O Quadro 4, ainda, permite considerar que a instituição que possui o maior número de artigos publicados, relacionados ao tema, é a Universidade Federal de Minas Gerais. Este resultado é bastante preocupante, pois Lamon (2007) sublinha que com a morte



de alguns integrantes do RNP são poucos os pesquisadores que colocaram em suas agendas de trabalho as investigações acerca do número racional, talvez

[...] dada a dificuldade e a complexidade do campo conceitual multiplicativo, o progresso é improvável que seja feito, se os pesquisadores não adotarem as agendas de investigação pessoais, áreas de interesse ao longo da vida que se mantenham focados em um problema significativo. (LAMON, 2007, p. 660)

A seguir, descreve-se uma síntese dos artigos mapeados, com intuito de apresentar suas propostas em relação aos números racionais.

O artigo A não trata, de forma explícita, as interpretações dos números racionais. A proposta do texto é apresentar como os números racionais foram propostos na matemática da escola secundária brasileira no século XX (até os anos 70), destacando três momentos: 1) as três primeiras décadas do século; 2) da reforma de Francisco Campos (1931) até início dos anos 60; e 3) entre os anos 60 e 70; analisando as diferenças entre estes três momentos e buscando caracterizar a abordagem adotada em cada um deles.

A pesquisadora constatou que nas três primeiras décadas do século XX, há uma conceituação de número racional como o resultado da medição de uma grandeza. Quando verifica-se que ao medir há uma relação comum da grandeza escolhida como unidade, o resultado da medição é um número inteiro ou fracionário. Conforme a pesquisadora esta conceituação possui caráter formal, pois depende de uma noção um tanto imprecisa de grandeza e apoia-se fortemente sobre a medição de comprimentos. No segundo momento analisado (da reforma de Francisco Campos (1931) até início dos anos 60), há um enfraquecimento da relação entre a ideia de fração e a medição de comprimentos.

O termo números comensuráveis não são mais utilizados nas propostas dos livros didáticos. Ganha ênfase o termo fração como uma ou mais das partes iguais em que se divide a unidade, unidade esta que deixa de ser “segmentos de retas” e passa a ser “figuras geométricas”. De acordo com a pesquisadora não percebe-se uma definição para os números racionais, bem como a não utilização desta denominação para esta classe de números. Quanto ao terceiro momento, verificou-se a ausência da noção de grandeza, bem como a desvalorização da ideia da fração como uma ou mais partes iguais em que se divide a unidade, destacando-se a definição de racionais ( $a/b$ ,  $a$  e  $b$  inteiros, com  $b$  diferente de zero). Aborda-se formalmente os números racionais de forma completamente diferente da realizada no primeiro momento.

O artigo B apresenta uma reflexão a respeito das operações com números fracionários enfatizando o significado parte-todo (visto ser a mais frequente nos livros didáticos e na prática do professor) por meio de atividades envolvendo as quatro operações fundamentais.

Estas atividades destacam a representação geométrica (figuras planas) como ponto de partida para o entendimento dos algoritmos. Além disso, nas operações de adição e subtração é destacada a equivalência de números racionais. Já nas operações de multiplicação e divisão explora-se a ideia de “tomar partes das partes de um inteiro”. As atividades apresentadas no artigo foram elaboradas com base em Kieren (1988), Behr et al (1983, 1992), Moreira e David (2005, Gomes (2006)). Cabe destacar que, estas atividades compõem a pesquisa que resultou na Tese de Doutorado da primeira autora do trabalho. Esta pesquisa foi desenvolvida com professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A pesquisadora observou

[...] a falta de autonomia desse grupo em elaborar atividades para o ensino dos números fracionários, que efetivamente colocassem os alunos em situações de ação, para a construção do próprio conhecimento. Os professores privilegiaram a idéia de fração como parte-todo e se inibiram no tratamento desta a partir de outros pontos de vista tratados [pela pesquisadora], como concepções baseadas na classificação de Behr *et al* (1983), que constroem o conceito de número racional com base nas interpretações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. (Excerto retirado do Artigo B)

Contudo, ao realizarem as atividades acerca das operações com números racionais, partindo da representação geométrica ou figural, os professores identificaram as potencialidades desta representação, bem como do significado parte-todo na atribuição de significados para os algoritmos das operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).

O artigo D trata do significado operador. Os autores justificam a escolha deste significado em função do vínculo com a operação de multiplicação, principalmente, quando o objetivo é o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica, com base nos seguintes pesquisadores Moreira, David (2008)<sup>7</sup> e Ball (2003).<sup>8</sup> Explicita também como o significado operador pode ser considerado no currículo escolar, sem se referir a uma proposta curricular em específico. Para tanto, buscam fundamentação teórica em Kieren (1976)<sup>9</sup> e Behr (1983-1993)<sup>10</sup>. Os autores concluem que com as pesquisas de Kieren e do RNP houve avanços no processo de ensino e aprendizagem do números racional, mas é preciso continuar pesquisa, principalmente, o subconstruto

<sup>7</sup> MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 11, 2008, p.23-40.

<sup>8</sup> BALL, D.L. **What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?**, 2003.

Disponível em < <http://www.ed.gov/rschstat/research/progs/mathscience/ball.html>>. Acesso em: jan de 2008.

<sup>9</sup> KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (ed.) **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p.101-144.

<sup>10</sup> BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.R.; SILVER, E.A. Rational-number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. Orlando:Academic Press, 1983, p.91-126.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational numbers: toward a semantic analysis. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (eds.) **Rational Numbers: An Integration of Research**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1993, p.13-48.

operador e sua abordagem na escola porque por meio dele pode-se explorar uma percepção algébrica de  $Q$ .

O artigo E relata uma investigação cujo objetivo é determinar se o uso de planilhas, como recurso de ensino dos números racionais na Educação básica, contribui para a aprendizagem e uma maior retenção<sup>11</sup> dessa aprendizagem em médio prazo. Para tanto, esta investigação foi realizada com uma amostra de estudantes de duas turmas da sexta série de uma escola pública de Porto Alegre, sendo que uma turma utilizou o recurso computacional (planilha) e a outra turma teve as mesmas aulas, porém sem o auxílio deste recurso.

Os resultados indicam que, no primeiro teste aplicado, o uso da planilha favorece a aprendizagem porque os estudantes participam mais, bem como conseguem visualizar os processos relacionados às operações com números racionais. O segundo teste, aplicado cinco meses após o primeiro, mostrou que os estudantes que utilizaram a planilha apresentaram uma maior retenção do conteúdo, os resultados ainda apontaram que os estudantes se sentem à vontade com a tecnologia.

O artigo F propôs investigar quais os significados e as representações dos números racionais são apresentadas no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, tendo como referência os estudos de Romanatto (1997)<sup>12</sup> e Gomes (2010)<sup>13</sup>, considerando os seguintes significados dos números racionais: medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, um número e porcentagem. Os autores utilizaram, também, como aporte teórico a teoria de Raymond Duval dos registros de representação semiótica com o intuito de identificar os registros dos números racionais que são contemplados no ENEM. Concluíram que os significados identificados nos itens relativos aos ENEM de 1998 a 2008 foram praticamente os mesmos identificados no período do novo ENEM, sendo eles porcentagem, razão, probabilidade e parte-todo. Nos itens referentes às provas de Matemática e suas Tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, o registro semiótico, dos números racionais, mais mobilizado durante as resoluções foi o registro numérico fracionário.

O artigo G apresenta uma unidade de ensino de cunho exploratório<sup>14</sup>, na qual os estudantes do 5º ano (de 10-11 anos) trabalham com várias representações dos números

---

<sup>11</sup> Este termo foi utilizado pelos autores do artigo E.

<sup>12</sup> ROMANATTO, M. C. **Número Racional: Relações necessárias à sua compreensão**. 1997. 158 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

<sup>13</sup> GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações**. 2010. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

<sup>14</sup> Os autores entendem que o estudo exploratório valoriza a descoberta de estratégias de resolução, sem se preocupar em ensinar diretamente procedimentos e algoritmos. O estudo exploratório valoriza, também, a mobilização das diferentes representações pelos estudantes.

racionais, em diferentes significados e tipos de grandeza. Os autores buscaram identificar se a unidade de ensino elaborada possibilita aos estudantes desenvolver a capacidade de comparação e ordenação de números racionais, a usar diferentes representações e processos de raciocínio informais e formais. Os resultados mostram que a unidade contribuiu no desenvolvimento da compreensão da ordenação e comparação de números racionais, bem como das representações decimal e fracionária destes números.

Os autores, ainda, sugerem que o trabalho com diferentes representações, numa abordagem exploratória, permite que os estudantes aprendam a comparar e ordenar números racionais, combinando adequadamente processos de raciocínio formais e informais. Os autores consideraram que, segundo Post et al. (1985)<sup>15</sup>, a comparação e ordenação de frações exigem diversos conhecimentos complexos, a grandeza da fração depende da relação entre os dois números naturais operada pelo símbolo de fração, que existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e a grandeza de cada parte. E que quando as frações tem o mesmo denominador há uma relação direta entre o número de partes que se tomam e a grandeza da fração.

O artigo I apresenta um aspecto significativo da construção do conceito de número racional, que segundo os autores, permanece não apropriado por estudantes até estágios de escolarização posteriores ao seu ensino formal: a ideia de unidade, sendo este um dos elementos fundamentais para a construção do conceito de fração. Os autores buscam fundamentação teórica na gênese do número racional, nas concepções de Vygotsky e Vergnaud e em pesquisas específicas sobre o conceito de fração<sup>16</sup>. A pesquisa foi desenvolvida com estudantes dos ensinos Fundamental, Médio e Superior. Identificaram-se dificuldades referentes à definição do referencial<sup>17</sup> em situações que envolvem o conceito de fração, procurando apontar possíveis causas dessas dificuldades e associá-las às práticas pedagógicas mais comumente empregadas no ensino desse objeto matemático.

O artigo J apresenta resultados de uma pesquisa realizada com 17 professoras das primeiras séries da Educação Básica em processo de formação continuada com objetivo de analisar a relação da compreensão do invariante equivalência em situações de parte-todo e quociente, com o conhecimento profissional docente. A pesquisa permitiu aos autores inferirem que o conhecimento do conteúdo está diretamente ligado tanto a prática pedagógica

---

<sup>15</sup> POST, T.; WACHSMUTH, I.; LESH, R.; BEHR, M. Order and equivalence of rational number: a cognitive analysis. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 16, n. 1, p. 18-36, jan. 1985.

<sup>16</sup> Teóricos utilizados pelos autores do artigo I para ratar de fração: Kieren e Mack (1995), Nunes e Bryant (1997-2003), Escolano e Gairín (2005).

<sup>17</sup> Objetos das questões, por exemplo, “Se pudéssemos juntar todos esses pedaços de pizza e exprimir essa quantidade como fração de uma pizza”, o referencial é a pizza (frase retirada do próprio artigo).

do professor como ao conhecimento profissional docente. As docentes, colaboradoras da pesquisa, apresentaram dificuldades relacionadas à parte conceitual do significado de fração e significado quociente, mas obtiveram melhor desempenho nas atividades que envolvem o significado parte-todo, o que dá indícios das razões pelas quais pesquisas apontam que o significado parte-todo é mais trabalhado em sala de aula pelas docentes.

O artigo L analisa as atividades de livros didáticos de matemática com o intuito de verificar como estas podem auxiliar no desenvolvimento de estratégias meta-cognitivas<sup>18</sup> dos estudantes, durante sua resolução. A pesquisa foi direcionada aos números racionais por ser um conteúdo presente no cotidiano dos estudantes e por gerar muitas dificuldades de aprendizagem. As fontes de investigação foram dois livros didáticos de matemática aprovados pelo PNLD/2011.

Os autores constataram que os livros apresentam perspectivas distintas em relação à metodologia de ensino; um mais afinado com as novas concepções de ensino e outro mais tradicional. Portanto, os resultados mostraram que os dois livros didáticos de matemática pesquisados trazem, em seus capítulos referentes aos números racionais, poucas atividades que podem favorecer o desenvolvimento de estratégias meta-cognitivas. Não percebe-se resultados em relação ao trabalho com os significados, apenas em relação as estratégias de meta-cognição que os estudantes deveriam mobilizar para a resolução das atividades. Os autores, ainda, ressaltam que o livro didático é apenas uma ferramenta utilizada pelo professor, então o desenvolvimento da meta-cognição nos estudantes estará relacionado a dependência da forma como o professor utiliza esse livro e as atividades propostas por esse material.

O artigo M trata do significado parte-todo tendo como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Os autores buscam identificar elementos da TCC - Situações, Invariantes e Representações, mediante a releitura do Trabalho *Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions* de Tirosh (2000), o qual desenvolveu uma pesquisa com 30 alunos que cursavam o segundo ano de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Professores de Israel, buscando investigar os procedimentos algorítmicos para a divisão de números racionais sob a representação fracionária. Os autores concluíram que o conhecimento dos professores sobre as concepções alternativas deve estar ligado ao seu entendimento das fontes gerais de tais concepções, ou seja, os programas de formação de professores devem familiarizar os futuros professores com

---

<sup>18</sup> Conhecimento sobre as operações mentais: a meta-atenção, meta-leitura, meta-memória, meta-aprendizagem.

vários, tipos de processos cognitivos e como eles podem levar diversas formas de pensar. Os autores ainda ressaltam importância de oferecer contraexemplos aos estudantes, como por exemplo mostrar situações multiplicativas em que o produto diminui ao invés de aumentar, e situações em que o quociente aumenta numa divisão. Sendo necessário realizar este trabalho para mostrar-lhes que com os números racionais, o dividendo nem sempre é maior do que o divisor, nem mesmo o dividendo é maior do que o quociente. Na extensão de multiplicação e divisão para outros conjuntos numéricos algumas propriedades não se conservam, por isso é necessário uma reconstrução conceitual sobre as dificuldades que os estudantes possam vir a ter.

O artigo N trata dos significados parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Para tal, os autores desenvolveram uma pesquisa bibliográfica por meio de um mapeamento nos seguintes bancos de dados: SciELO – Scientific Electronic Library; OVID; Wilson; Web of Science; Banco de Teses CAPES; General Science Abstracts Full Text; Education Full Text; ERIC (via CSA); ERIC (via US Department of Education) e PsycINFO, a partir do Portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Capes. Completou-se a pesquisa nas bibliotecas da Universidade de Campinas, Universidade de São Paulo, Universidade Estadual Paulista, Universidade Federal do Paraná, Universidade de Brasília, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade Federal de Minas Gerais e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sendo analisados 39 artigos científicos publicados em periódicos internacionais e nacionais, 5 pesquisas publicadas em livros nacionais, 7 pesquisas apresentadas em congressos científicos, 10 dissertações de mestrado e 4 teses de doutorado defendidas no Brasil. A pesquisadora afirma que os estudos analisados convergem no que se refere a compreensão lógica do sistema numérico decimal para a compreensão da lógica do algoritmo da divisão e dos racionais, bem como, no destaque dado em sala de aula para a exposição de conteúdos e a utilização de regras, em detrimento do conceito. Além disso, destacam a importância do professor na elaboração de situações de ensino que abordem os vários significados de número racional.

O artigo O apresentou elementos relacionados à criação, implementação e avaliação do impacto das chamadas “atividades investigativas autênticas”, atividades estas que focam tanto o conteúdo quanto o conhecimento pedagógico, e as atitudes na formação inicial dos professores de Matemática para os níveis de ensino elementar e médio. Os autores desenvolveram um modelo de aprendizagem, implementado e testado como parte de atividades desenvolvidas em instituições israelenses voltadas à formação de professores. Constata-se que, no estudo, os professores ao resolverem as atividades ganharam experiência

e foram expostos a situações de raciocínio proporcional “autêntico”, incorporando teoria (pela leitura e análise de relevantes textos de pesquisa) e prática – produz uma alteração significativa quanto à abordagem ao conteúdo matemático e quanto ao conhecimento pedagógico. Além disso, alterações significativamente positivas ocorreram nas atitudes e crenças desses professores em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, em geral e, em particular, em relação aos conceitos de razão e proporção, porém vale ressaltar que o foco deste artigo foi em relação ao significado razão.

O artigo P investiga a compreensão de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade acerca do conceito de razão<sup>19</sup>. No estudo participaram 81 estudantes do 2º ano da Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade portuguesa, aos quais foi aplicado um questionário, incidindo em quatro dimensões: significado de razão; usos do conceito de razão; representação simbólica de razão; e representações para explicação do conceito de razão. Os autores chegaram aos seguintes resultados: as maiores frequências foram obtidas para a ideia de razão como comparação/relação entre grandezas; crença em que o conceito de razão pode ser usado em contextos diversificados; crença em que pode ser representado através de operações envolvendo letras, números ou apenas os sinais das operações, quando é pedida a sua representação simbólica, e através de diagramas e representações gráficas, quando é solicitada a descrição da sua explicação, os quais revelam fragilidades no conhecimento matemático dos estudantes, sobretudo no que se refere à definição do conceito de razão e às suas representações.

Após descrever as propostas dos autores dos artigos mapeados, optou-se por organizar o Quadro 5 que explicita os objetivos, metodologia de pesquisa, fontes de produção de dados e participantes da pesquisa.

Quadro 5: Objetivos, metodologia, fontes e sujeitos dos artigos mapeados

<b>Art.</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>FONTES</b>	<b>PARTICIPANTES</b>
<b>A</b>	Apresentar os números racionais na matemática da escola secundária brasileira no século XX, até os anos 70, a partir da análise de alguns livros didáticos editados e utilizados nesse período.	Análise Documental	Livros Didáticos	-
<b>B</b>	A possibilidade do tratamento das operações com números fracionários a partir de representações de figuras planas	Teórica	Silva (2005)	-
<b>D</b>	Apresentar uma síntese da literatura relacionada com este tópico	Teórica	Kieren, Lamon, Behr e RNP	-

<sup>19</sup> Os autores entendem o conceito de razão como parte-parte, parte-todo e todo-todo.

	específico, oferecendo aportes que podem ser relevantes para a construção de uma visão profissional docente a respeito dos números racionais.			
<b>E</b>	Investigar se o uso da planilha como recurso favorece a aprendizagem dos números racionais	Estudo de Caso	Produção dos Estudantes	Estudantes Da 6ª série Ensino Fundamental
<b>F</b>	Investigar quais são os significados e as representações dos números racionais que são contemplados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.	Análise Documental	Provas do ENEM, (1998 – 2008 e 2009 – 2011)	-
<b>G</b>	Saber em que medida esta abordagem exploratória proporciona o desenvolvimento da capacidade dos alunos compararem e ordenarem números racionais e conhecer o modo como usam diversas representações e como se caracterizam os seus processos de raciocínio.	Estudo de Caso	Questionário, Atividades	Estudante do 5º ano (10-11 anos)
<b>I</b>	É investigar o estado em que se encontra o conceito para esses sujeitos, alguns anos após o estudo formal desses números	Estudo de Caso	Produção dos Estudantes	13 estudantes da 8ª série/Ensino Fundamental, 31 estudantes 3ºano/Ensino Médio e 29estudantes Nível Superior na área das exatas
<b>J</b>	Procuramos analisar a relação da compreensão do invariante equivalência em situações de partetodo e quociente, com o conhecimento profissional docente.	Estudo de Caso	Produção das Professoras	Professoras das primeiras séries da Educação Básica
<b>K<sup>20</sup></b>	<i>Analisar como são abordados os números racionais no ENEM, quanto aos seus significados e representações.</i>	<i>Análise Documental</i>	<i>Provas do ENEM de 1998 a 2008 e de 2009 a 2011</i>	-
<b>L</b>	Investigar em que medida as atividades de livros didáticos de matemática poderiam favorecer o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos alunos, durante a sua resolução.	Análise Documental	Livros didáticos do 6º ano aprovados pelo PNLD/2011	-
<b>M</b>	Investigar os elementos da Teoria dos Campos Conceituais – TCC, tais como identificar tipos de situações problemas da estrutura multiplicativa envolvendo números racionais na representação fracionária, bem como identificar indicativos da presença de invariantes operatórios e, representações, mobilizados por futuros professores de Matemática ao resolverem tais situações problemas.	Ensaio Teórico	Teoria dos Campos Conceituais	-

<sup>20</sup> Os artigos F e K serão analisados como únicos, pois os mesmos são idênticos, mudando somente o título e a revista em que foram publicados.



<b>N</b>	A análise do ponto de vista teórico e metodológico dessa produção e a identificação de possíveis aspectos consensuais, no que se refere tanto à prática de ensino quanto ao processo de aquisição conceitual.	Análise Documental	Artigos Publicados (1999 a 2010)	-
<b>O</b>	Apresentados elementos relacionados à criação, implementação e avaliação do impacto das chamadas “atividades investigativas autênticas” que focam tanto o conteúdo quanto o conhecimento pedagógico e as atitudes na formação inicial de professores de Matemática para os níveis de ensino elementar e médio.	Estudo de caso	Produções Professores de Matemática em formação e atuando	Professores em formação inicial e continuada
<b>P</b>	O objetivo do estudo consistiu em estudar as concepções e as representações destes futuros educadores de infância e professores dos seis primeiros anos de escolaridade acerca do conceito matemático de razão.	Estudo de Caso	Questionários	Estudantes do 2º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica

Referente aos objetivos pode-se constatar que dois artigos (15,38%) trazem de forma explícita quais os significados foram abordados nos artigos e onze artigos (84,62%) não trazem, nos objetivos, quais os significados serão trabalhos. Dois artigos (15,38%) destacam nos objetivos que abordam operações no desenvolvimento do trabalho.

Com base no Quadro 5 pode-se perceber que a metodologia escolhida pela maioria dos autores é o estudo de caso (46,15%). Estas pesquisas optaram por fontes produção de dados protocolos de estudantes e professores; questionários; observação de resolução de atividades. Quatro pesquisas (30,77%) utilizam como metodologia análise documentais, os mesmos trabalham três tipos de fontes, a saber: livros didáticos, provas do ENEM (1998 – 2008 e 2009 – 2011) e artigos publicados (1999 – 2010). Duas pesquisas (15,38%) optaram por estudos teóricos, utilizando como referências: Silva, Kieren, Lamon, Behr e o RNP e a metodologia menos utilizada é ensaio teórico em uma pesquisa (7,69%) utilizando como fonte a Teoria dos Campos Conceituais.

Organizou-se, também, o Quadro 6 com os teóricos utilizados em cada publicação, bem como os significados abordados de acordo com o Quadro 3.

Quadro 6: Significados dos números racionais tratados em cada artigo mapeado

	<b>Teóricos</b>	<b>Interpretações</b>	<b>Personalidades</b>	<b>PCN</b>	<b>Significados</b>
<b>A</b>	KIEREN	-	-	-	-
<b>B</b>	BEHR e KIEREN	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.
<b>D</b>	KIEREN, BEHR, LAMON, FREUDENTHAL	Operador.	Operador.	Operador.	Operador.
<b>E</b>	FLORES, VIALI	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo, número

					decimal.
<b>F</b>	ROMANATTO	Medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, e Porcentagem.	Medida (parte-todo), quociente, razão, operador, reta numérica.	Medida (parte-todo), quociente, razão, operador.	Medida (parte-todo), quociente, razão, operador e Porcentagem.
<b>G</b>	BEHR	Parte-todo, quociente, operador.	Parte-todo, quociente, operador.	Parte-todo, quociente, operador.	Parte-todo, quociente, operador e medida (nº decimal, fração e porcentagem).
<b>I</b>	KIEREN	Parte-todo e quociente.	Parte-todo e quociente.	Parte-todo e quociente.	Parte-todo e quociente.
<b>J</b>	NUNES, PCN	Parte-todo e quociente.	Parte-todo e quociente.	Parte-todo e quociente.	Parte-todo e quociente.
<b>L</b>	ONUCHIC E ALLEVATO, ROMANATTO	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.
<b>M</b>	KIEREN	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.	Parte-todo.
<b>N</b>	KIEREN	Parte-todo, medida, quociente, razão e operador.	Parte-todo, quociente, razão e operador.	Parte-todo, quociente, razão e operador.	Parte-todo, medida, quociente, razão e operador.
<b>O</b>	POST, BEHR, LESH	Razão	Razão	Razão	Razão
<b>P</b>	LAMON	Razão	Razão	Razão	Razão

Percebe-se que das 13 publicações 12 delas (92,31 %) citam teóricos estrangeiros e somente 5 (38,46 %) citam teóricos brasileiros para problematizar os diferentes significados dos números racionais, sendo o teórico mais citado, Kieren, em 46,15 % dos artigos mapeados.

Os artigos A, I, M e N, trazem somente as ideias de Kieren para exemplificar os significados dos números racionais, os artigos B, D, H e Q trazem além das ideias de Kieren os teóricos Behr, Post, Lesh, Lamon e Freudenthal. Somente dois artigos C e L citam Onuchic e Allevato, e o artigo L traz, também, as ideias de Romanatto. O artigo F utiliza como referencial somente Romanatto. O artigo J é o único artigo que se baseia nos Parâmetros Nacionais Curriculares e nas ideias de Nunes. O artigo P cita somente Lamon para tratar dos significados dos números racionais e o artigo E trata dos números racionais, porém não apresenta explicitamente autores que problematizam os significados de número racional, apresenta, somente, autores referentes à tecnologia e o uso de planilhas em sala de aula.

O artigo E não traz explícito no corpo do texto quais significados dos números racionais são abordados, entretanto, é possível perceber que é tratado o significado parte-todo, com base nos exemplos apresentados no decorrer da publicação.

Dos artigos mapeados percebe-se que os significados, trabalhados pelos pesquisadores e que foram organizados no Quadro 6, aparecem nos artigos com a seguinte porcentagem: parte-todo em 69,23% dos artigos, quociente em 38,46%, razão em 30,77%, operador em 30,77%, medida em 7,69%, probabilidade em 7,69%, porcentagem em 7,69% e reta numérica em 7,69% dos artigos, dos quais operador, quociente, razão e parte-todo são trabalhados por mais de um pesquisador.

Sendo que quatro artigos (30,77%) tratam somente do significado parte-todo, um artigo (7,69%) do significado operador, dois artigos (15,38%) do significado razão, cinco publicações (38,46%) tratam de mais de um significado dos números racionais, sendo que somente quatro artigos não tratam do significado parte-todo, ou seja, de 13 artigos 9 tratam do significado parte-todo ora sozinho ora juntamente a outro significado, constatando então que este significado é o mais abordado pelos autores das publicações mapeadas. O artigo A não apresenta de forma explícita os significados dos números racionais, nem no momento em que citam o teórico Kieren. Isto porque os autores se preocupam com a definição de número racional expostas em livros didáticos de diferentes épocas.

Somente dois artigos (15,38%) utilizam em seu referencial teórico a pesquisadora Lamon, a qual considera necessário entender as diferentes formas de representação do número racional (decimal, porcentagem, fração) e, também as possíveis interpretações para a representação fracionária  $a/b$ , presentes em diferentes contextos e identificar relações coerentes que podem ser estabelecidas entre duas ou mais dessas representações.

Os PCN, também sugerem que o trabalho com os diferentes significados não deve ser realizado isoladamente, pois “a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, possibilitando análise e comparação de várias situações-problema” (BRASIL, 1998, p. 103). Percebe-se, com base nos dados obtidos sobre os significados abordados nos artigos mapeados, que isto não está acontecendo, pois sete artigos (53,84%) abordam algum significado isoladamente, cinco artigos (38,46%) trabalham com mais de um significado e um artigo (7,69%) não aborda, diretamente, nenhum significado dos números racionais.

Em relação a proposição e desenvolvimento de atividades tanto para estudantes da Educação Básica quanto na formação inicial e continuada de professores envolvendo o número racional, organizou-se o Quadro 7.

Quadro 7: Descrição das atividades compostas nos artigos mapeados

ARTIGOS	ATIVIDADES	Descrição das Atividades
A	Não	
B	Sim	Constam no trabalho vinte e três atividades.
D	Não	
E	Não	
F	Não	
G	Não	
I	Sim	A pesquisa é composta de 48 atividades.
J	Sim	Duas atividades uma envolvendo o significado parte-todo e uma o significado quociente.
L	Não	
M	Não	
N	Não	
O	Sim	Cinco atividades envolvendo o significado razão.
P	Não	

Referente às atividades, de todos os artigos, quatro (B, I, J e O) apresentam atividades em seu desenvolvimento, ou seja, 30,76%. Vale ressaltar que o artigo B apresenta 23 atividades, sendo que, todas envolvem somente o significado parte-todo. Ainda, 9 atividades exigem que o estudante utilize as operações adição e subtração, 8 atividades a operação de multiplicação e 6 atividades a operação divisão. As Figuras 2 e 3, apresentam exemplos de atividades contidas no artigo B envolvendo adição e multiplicação de números racionais.

Figura 2: Atividade do artigo B envolvendo a operação adição

**Atividade 3**

Identifique a parte pintada da figura ao lado por uma fração e a represente por uma soma de frações.


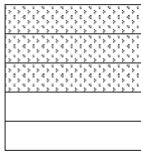


Figura 3: Atividade do artigo B envolvendo a operação multiplicação

**Atividade 5**

Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura ao lado.  
Que parte da figura você pintou?  
Qual a sentença matemática que representa essa situação?



Os autores do artigo B, como já mencionado, tinham por objetivo analisar possibilidade do tratamento das operações com números fracionários a partir de representações de figuras planas, sendo ressaltado pelos autores que as atividades apresentadas referentes à adição e subtração de números fracionários facilitam a compreensão da regra operatória da adição. Os autores também ressaltam não ser possível garantir que as atividades são suficientes para proporcionar o aprendizado desejado de modo que o estudante

compreenda que para adicionar números fracionários, com denominadores diferentes, o produto destes é uma boa escolha para a transformação em frações equivalentes. É necessário, segundo os autores, descontextualizar as situações para que as habilidades com o cálculo sejam desenvolvidas independentes das representações figurais e que os estudantes devem aprender significativamente quais regras devem ser utilizadas e não memoriza-las.

O artigo I é composto de 48 atividades, sendo que metade delas está relacionada ao significado parte-todo e a outra metade ao significado quociente, todos na forma de situações contextualizadas, envolvendo tanto grandezas contínuas quanto discretas, tendo como objetivo investigar o estado em que se encontra o conceito para os estudantes, alguns anos após o estudo formal desses números. Vale ressaltar que no texto são apresentadas somente cinco atividades, por serem consideradas pontos críticos e por apresentarem a peculiaridade de ter reflexão sobre a ideia de unidade como elemento causador das dificuldades apresentadas pelos sujeitos.

Os sujeitos da pesquisa foram 29 estudantes do Ensino Superior na área de exatas, 31 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio e 13 estudantes da oitava série do Ensino Fundamental. Os autores ressaltam, em suas considerações, que a questão mais significativa é o fato de que há uma tendência do estudante em tomar como referencial o maior conjunto de objetos ou de partes de objetos disponível para unidade, que as diferentes formas de apresentar a questão, por mais enfáticas que sejam, não impedem que um número considerável de sujeitos mantenha essa tendência e que é irrelevante o fato de se tratar de fração imprópria ou não.

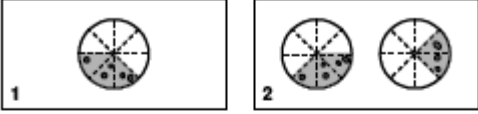
As Figuras 4 e 5 apresentam as cinco atividades trazidas no artigo, que segundo os autores foram as quais os sujeitos apresentaram mais dificuldades. Os conceitos exigidos, para o desenvolvimento das atividades, estão relacionados à fração e parte-todo, sendo que as soluções podem ser definidas em quatro etapas, segundo os autores do artigo: dividir dois ou mais todos no mesmo número de partes iguais; tomar algumas partes de cada um desses todos; reagrupar essas partes tomadas sobre um único todo e exprimir esse resultado como uma fração imprópria.

Figura 4: Atividades trazidas no artigo I

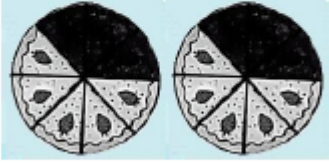
1) Observe as figuras ao lado:

a) Que fração representa a quantidade de pizza existente na mesa 1?

b) Que fração representa a quantidade de pizza existente na mesa 2?



2) Se pudéssemos juntar todos esses pedaços de pizza e exprimir essa quantidade como fração de uma pizza, qual a fração que representa a quantidade de pizza que não foi consumida?



3) Considerando sempre uma barra como o inteiro, responda:

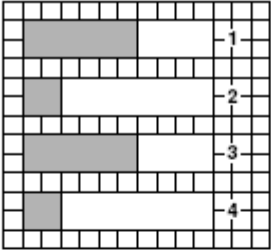
a) Que fração representa a parte pintada barra 1?

b) Que fração representa a soma das partes pintadas das barras 1 e 2?

c) Que fração representa a soma das partes pintadas das barras 1, 2 e 3?

d) Que fração representa a soma das partes pintadas das barras 1, 2, 3 e 4?

e) Que fração representa o dobro das partes pintadas das barras 1 e 2?



4) Tomando como o todo-referência uma caixa de bolinhas,

a) represente por uma única fração o total de bolinhas pintadas nas 4 caixas.

b) represente por uma fração o dobro da quantidade das bolinhas pintadas na figura abaixo

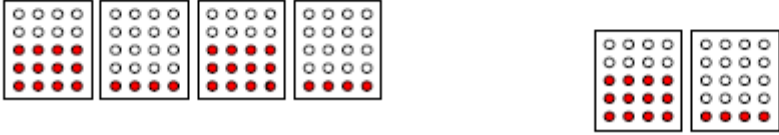


Figura 5: Atividade trazida no artigo I

5) Flávia tinha 4 pacotes iguais de contas coloridas para fazer colares. Para fazer um colar, separou as contas da seguinte maneira:

dividiu o primeiro pacote em 5 partes, das quais usou 3;

dividiu o segundo pacote em 5 partes, das quais usou uma.

dividiu o terceiro pacote em 5 partes, das quais usou 3;

dividiu o quarto pacote em 5 partes, das quais usou uma.

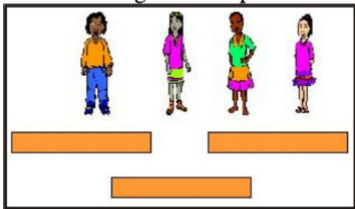
a) Que fração de um pacote de contas representa o que foi retirado dos 2 primeiros pacotes?

b) Que fração de um pacote de contas representa o que foi retirado dos 4 pacotes?

Referente ao artigo J, o mesmo expõe, em seu desenvolvimento, duas atividades, uma envolvendo o significado parte-todo e outra o significado quociente, tendo por objetivo analisar a relação da compreensão do invariante equivalência em situações de parte-todo e quociente, com o conhecimento profissional docente, tendo como sujeitos, 17 professores das primeiras séries da Educação Básica e os, respectivos, alunos destes professores para que os mesmos mobilizassem a representação figural, língua natural e numérica.

As Figuras 6 expõe uma questões do artigo J que envolve o significado quociente. Esta atividade permitiu aos autores inferirem que os docentes apresentam dificuldades relacionadas ao significado quociente, esta questão foi trabalhada anteriormente em uma pesquisa de Nunes et al. (2003), os quais sugeriam que as sequencias de ensino poderiam ser iniciadas pelo processo de divisão indicada partindo do conhecimento informal. Segundo os autores do artigo foi observado, referente aos acertos, que os docentes compreenderam a situação, pois todos acertaram o primeiro item e no segundo somente dois responderam de forma incorreta, entretanto para expressar a fração, que representa a situação, ou seja, mostrar a compreensão do significado operador, somente cinco docentes responderam corretamente.

Figura 6: Atividade apresentada no artigo J, envolvendo o significado quociente

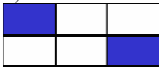

<p>Questão 6 Significado <i>quociente</i>, grandezas contínuas, representação icônica</p>	<p>Resposta correta a) não b) sim c) <math>\frac{3}{4}</math></p>	
<p>Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.</p>		
	<p>a) Cada criança receberá 1 chocolate inteiro? Sim ( ) Não ( )</p> <p>b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate? Sim ( ) Não ( )</p> <p>c) Que fração de chocolate cada criança receberá?</p>	
<p>a) 17 acertos (100%)</p>	<p>b) 15 acertos (88,23%)</p>	<p>c) 5 acertos (29,41%)</p>

Referente às respostas dos estudantes os autores perceberam que os mesmos tiveram um índice alto de acertos no primeiro e segundo itens como seus professores, porém para o item c que solicitava a fração de chocolates foi registrado o mesmo percentual de acertos dos professores 23,4%, o que levou os autores a considerarem que é preciso pesquisar muito mais acerca de como fazer com que os estudantes compreendam a equivalência de frações em situações que envolvam os significados parte-todo e quociente. Para os professores a formação continuada poderia ser um espaço importante para pensar e repensar sobre esta temática.

A segunda questão, apresentada na Figura 7, que envolve o significado parte-todo, os autores destacam que o desempenho dos docentes foi melhor do que na atividade que envolve o significado quociente, o que confirma que este significado parece ser o mais trabalhado pelos professores. Entretanto, o resultado dos estudantes não foi positivo, para este significado, algo muito preocupante uma vez que este significado é o mais trabalhado nas escolas e em pesquisas como o nosso próprio mapeamento mostra, tal fato leva a inferir que o

processo de ensino e aprendizagem não vem ocorrendo na mesma proporção em que os docentes consideram ensinar.

Figura 7: Atividade apresentada no artigo J, envolvendo o significado parte-todo

Questão 8	
Significado <i>parte-todo</i> , grandezas contínuas, representação icônica	Resposta correta a) $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4}$
Observe o desenho abaixo e responda qual a fração que representa as partes pintadas da figura em relação ao total da figura	
a)  15 acertos (88,23%)	b)  12 acertos (70,59%)

O artigo O apresenta cinco atividades investigativas relacionadas ao raciocínio proporcional, envolvendo o significado razão, através de situações-problema. A Figura 8 exemplifica uma das atividades propostas no artigo.

Figura 8: Atividade apresentada no artigo O, envolvendo o significado razão

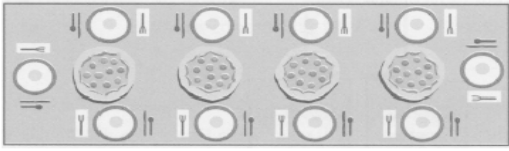
**Atividades investigativas autênticas relacionadas ao RP - RAZÃO**

**Atividade 03: Dividindo uma pizza**

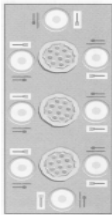
Todo mês, os amigos de Daniel encontram-se num restaurante para comer pizza. Daniel, como sempre, está atrasado, mas como seus amigos gostam muito dele, ficam esperando sua chegada. Eles reservaram para Daniel um lugar em cada uma das mesas (1 e 2) que o grupo de amigos ocupou no restaurante.

Finalmente, depois de um tempo, Daniel chegou e tinha que decidir em qual lugar sentar: ele deveria juntar-se aos amigos da mesa 1 (na qual havia 4 pizzas grandes e 9 pessoas) ou deveria sentar-se à mesa 2 (onde havia 3 pizzas grandes e 7 pessoas)?

**Mesa 1**



**Mesa 2**



As atividades tinham por objetivo apresentar elementos relacionados à criação, implementação e avaliação do impacto das chamadas “atividades investigativas autênticas” que focam tanto o conteúdo quanto o conhecimento pedagógico e as atitudes na formação inicial de professores de Matemática para os níveis de ensino elementar e médio, as quais foram desenvolvidas por quinze estudantes do quarto ano da graduação, os mesmos tinham que comparar razões, aplicar propriedades e encontrar uma determinada parte de um todo ou,



dado o todo, encontrar dele uma parte, a atividade sobre razão enfatiza conexões com os tópicos frações, decimais e porcentagens, permitindo tornar cada vez mais claro o significado de algumas operações aritméticas, especialmente, os diferentes significados da operação de divisão, considerando a divisão por inclusão e a divisão por partes. Os autores concluíram que as atividades propostas são adequadas e contribuem para possibilitar que o professor em formação conheça e compreenda os tópicos razão e proporção.

É importante destacar que, com base nos dados do mapeamento, ainda são poucas as pesquisas que apresentam atividades para o estudo dos diferentes significados do número racional. E, apesar de as representações dos números racionais serem abordadas por diferentes artigos, ainda merecem um trabalho mais detalhado.

A seguir serão apresentadas as considerações finais, a partir das considerações detalhadas no Referencial Teórico e na Análise dos Dados - *Exploração do Material e Tratamento dos Resultados*.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na questão de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais, percebeu-se que o número de publicações é pequeno, sendo identificadas somente 16 publicações em um período de 10 anos, constatou-se também que das onze revistas utilizadas para o mapeamento a revista *Bolema* foi a que se encontrou o maior número de publicações referentes ao assunto (números racionais e seus diferentes significados), totalizando 69,23% das publicações encontradas.

Constatou-se que somente uma publicação (7,69%), está ligada a um grupo de pesquisa, um resultado bastante preocupante, pois Lamon (2007) sublinha que com a morte de alguns integrantes do RNP são poucos os pesquisadores que colocaram em suas agendas de trabalho as investigações acerca do número racional, talvez

[...] dada a dificuldade e a complexidade do campo conceitual multiplicativo, o progresso é improvável que seja feito, se os pesquisadores não adotarem as agendas de investigação pessoais, áreas de interesse ao longo da vida que se mantenham focados em um problema significativo. (LAMON, 2007, p. 660)

Além disso, constatou-se que a metodologia mais trabalhada nas pesquisas é estudo de caso em 46,15% das publicações, os quais optaram por produção de dados protocolos de estudantes e professores; questionário e observação de resolução de atividades. A metodologia menos utilizada foi ensaio teórico (7,69% das publicações) tendo a Teoria dos Campos Conceituais como fonte.

O objetivo desta pesquisa era de analisar, nas produções da área da Educação Matemática publicadas nos últimos 10 anos que tratam de números racionais e foram desenvolvidas com estudantes da Educação Básica. Sendo possível perceber que poucas publicações foram desenvolvidas com estes estudantes, ou seja, somente três publicações 23,07%, um número muito pequeno comparado ao período em que foi analisado.

Referente aos diferentes significados dos números racionais constatou-se que o significado mais trabalhado foi o significado parte-todo em 69,23%, o qual é abordado por mais de um teórico e, os significados menos trabalhados são: probabilidade em 7,69%, porcentagem em 7,69% e reta numérica em 7,69% dos artigos. Vale ressaltar que estes significados são trabalhados pelos teóricos Romanatto, Lamon, Onuchi e Alevato, que coincidentemente, também, foram os teóricos menos citados nos artigos mapeados.

Algo que de acordo com os dados obtidos não acontece, pois sete artigos (53,84%) abordam algum significado isoladamente, cinco artigos (38,46%) trabalham com mais de um

significado e um artigo (7,69%) não aborda, diretamente, nenhum significado dos números racionais.

Outro fator importante e que vale ressaltar é que somente quatro publicações, ou seja, 30,77% trazem atividades, sendo que dessas quatro publicações, uma traz 23 atividades envolvendo somente o significado parte-todo, duas publicações trabalham atividades envolvendo os significados parte-todo e quociente e outra publicação traz atividades envolvendo o significado razão. Ainda, destes artigos, a metade não cita os sujeitos do trabalho.

Assim, percebe-se a necessidade de mais pesquisas envolvendo a relação entre os diferentes significados dos números racionais no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica, para um melhor entendimento dos diferentes significados pelos estudantes, uma vez que, foi perceptível a tendência ao trabalho somente com o significado parte-todo.

Como trabalhos futuros sugere-se realizar o mapeamento de publicações relacionadas ao Número Racional e seus diferentes significados, também, em bancos de dados *online* (por exemplo, portal de periódicos da CAPES, Scielo, entre outros), além da possibilidade de expandir o mapeamento atual para períodos superiores a 10 anos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edição 70, 1977.

BICUDO, M. A. V.; A pesquisa em Educação Matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **R. B. E. C. T.**, vol. 5, núm. 2, mai-ago. 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: **Prova Brasil: Ensino Fundamental - Matrizes de Referência, Tópicos e Descritores**. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008.

BEHR, M.J.; LESH, R.; POST, T.R; SILVER, E.A. Rational number concepts. In: Lesh, R & Landau, M (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press: Nova York, 1983, p.91-126.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational Number, Ratio, and Proportion. In: Grouws, D. A. (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992, p. 296-333.

CAMPOS, T.; MAGINA, S.. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, Ano 21, nº 31, 2008, p. 23 a 40.

FRANCO, B.; PUGLISI, M. L. **Análise de Conteúdo**. 2ª edição. Brasília, 2005.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Editora UFRGS. 1ª edição, Porto Alegre, 2009.

LAMON, S. J. Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. In: LESTER, F. K. (org.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Charlotte:IAP/NCTM, 2007.

\_\_\_\_\_. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers**. 2. ed. Londres:Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In J. HIEBERT; M. BEHR (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades** (p. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. 1988. p. 93-118.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. Editora Atlas. 5ª edição. São Paulo, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, nº 28, 2005, p. 50 a 63.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M.C.C. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema**, Rio Claro, SP, Ano 21, nº 31, 2008, p. 103 a 127.

ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problema. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, n. 31, 2008, p. 79 a 102.

ONUCHIC, L. de L. R.; BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática. São Paulo: SBEM**, ano 5, n. 3, p. 5-8, 1997.

OLIVEIRA, L. M. C. P. **Aprendizagens no empreendimento estudo do raciocínio proporcional**. Editora: Londrina, 2014.

ROMIO, L. C.; SOARES, M. A. da S.; LIMA, Q. F. de; ABI, T. de S. **Conjuntos Numéricos no Ensino Médio**: Relato de Atividades Desenvolvidas no Estágio Curricular. Santiago/RS.

SILVA, M. J. F.; ALMOLOUD, S. A. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. **Bolema**. Rio Claro (SP), Ano 21, n. 31, 2008, p. 55-78.

SOARES, M. A. da S. **Os Números Racionais e os Registros de Representação Semiótica**: Análise de Planejamentos das séries finais do Ensino Fundamental. Ijuí: UNIJUI. 2007. Dissertação. (Mestrado em Educação nas Ciências). Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijuí).

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE I

ARTIGO	REVISTA	Nº/ANO	TÍTULO	AUTOR (ES)
<b>A</b>	Bolema	<b>25/2006</b>	Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira.	Maria Laura Magalhães Gomes
<b>B</b>	Bolema	<b>31/2008</b>	As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo	Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
<b>C</b>	Bolema	<b>31/2008</b>	As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas	Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato
<b>D</b>	Bolema	<b>31/2008</b>	A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas.	Plínio Cavalcanti Moreira e Maria Cristina Costa Ferreira
<b>E</b>	Bolema	<b>31/2008</b>	Utilizando Recursos Computacionais (Planilha) na Compreensão dos Números Racionais	Rosane Ratzlaff da Rosa e Lori Viali
<b>F</b>	Bolema	<b>50/2014</b>	Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM	Fernanda Andréa F. Silva, Mônica Maria Lins Santiago e Marcelo Câmara dos Santos.
<b>G</b>	Bolema	<b>50/2014</b>	Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória	João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma.

<b>H</b>	Bolema	<b>21/2004</b>	Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica.	Plinio Cavalcanti Moreira e Maria Manuela Martins Soares David.
<b>I</b>	Revemat	<b>2007</b>	A idéia de unidade na construção do conceito do número racional	Tânia Maria Mendonça Campos <sup>1</sup> e Wilson Roberto Rodrigues.
<b>J</b>	Revemat	<b>2009</b>	Conhecimento profissional docente de professoras das séries iniciais da educação básica acerca da equivalência de números racionais na representação fracionária em um processo de formação continuada	Tânia Maria Mendonça Campos e Angélica da Fontoura Garcia Silva.
<b>K</b>	Revemat	<b>2013</b>	Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações	Fernanda Andrea Fernandes Silva, Mônica Lins Santiago e Marcelo Câmara dos Santos
<b>L</b>	Revemat	<b>2013</b>	A metacognição no livro didático de matemática: um olhar sobre os números racionais	Alexandre Marcelino Lucena, Lúcia de Fátima Araújo e Marcelo Câmara dos Santos
<b>M</b>	RPEM - UFPR	<b>05/2014</b>	Estrutura multiplicativa de números racionais na Representação fracionária: indicativos de teoremas em Ação.	Marlí Schmitt Zanella e Rui Marcos de Oliveira Barros.
<b>N</b>	Zetetike	<b>37/2012</b>	A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise	Maria Helena Fávero e Regina da Silva Pina Neves.



<b>O</b>	Bolema	<b>31/2008</b>	Atividades Investigativas Autênticas” para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio	David Ben-Chaim, Bat-Sheva Ilany e Yaffa Keret
<b>P</b>	Bolema	<b>51/2015</b>	Compreensão do Conceito de Razão por Futuros Educadores e Professores dos Primeiros Anos de Escolaridade	José António Fernandes e Laurinda Leite