

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – CAMPUS ITAQUI
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

KAREN CAMARGO DE ALDERETE

**ONDAS ESTACIONÁRIAS: CORDA
VIBRANTE DE UM VIOLÃO**

**Itaqui
2021**

KAREN CAMARGO DE ALDERETE

**ONDAS ESTACIONÁRIAS: CORDA
VIBRANTE DE UM VIOLÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Leonel Giacomini Delatorre

**Itaqui
2021**

A361o Alderete, Karen Camargo de

Ondas estacionárias: corda vibrante de um violão / Karen Camargo de Alderete. – maio, 2021.

46 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemática, 2021.

“Orientação: Leonel Giacomini Delatorre”.

1. Equação da Onda. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Séries de Fourier. I. Título.

KAREN CAMARGO DE ALDERETE

**ONDAS ESTACIONÁRIAS: CORDA VI-
BRANTE DE UM VIOLÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura em Matemática como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 1 de Maio de
2021.

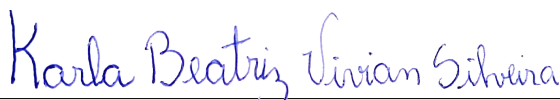
Banca examinadora:



Prof. Me. Leonel Giacomini Delatorre
Orientador



Prof. Ma. Daiane Campara Soares
Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui



Profa. Ma. Karla Beatriz Vivian Silveira
Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui

Dedico este trabalho aos meus pais e meus irmãos, que muito me apoiaram durante a minha graduação.

AGRADECIMENTO

A todos os mestres que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional durante a minha vida.

Aos meus irmãos Fabiola, Andrielle e João Pedro por sempre estarem ao meu lado, e me darem força para seguir quando as coisas complicavam, sendo em palavra ou carona para ir a universidade.

Agradeço ao meu namorado que sempre esteve ao meu lado durante o meu percurso acadêmico.

À Universidade e todos os seus professores que sempre proporcionaram um ensino de alta qualidade.

Ao meu orientador Leonel, pela sua paciência e dedicação durante o projeto. Obrigada por sempre me atender, estar disposto a explicar mesmo em dias de descanso. Os seus conhecimentos com certeza fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho.

A professora Karla, que graças ao puxão de orelha dela, foquei nos estudos e hoje estou aqui.

A minha mãe Luciola e meu pai do coração Carlos que foram o meu alicerce durante todo o período da graduação, sempre cuidaram de mim, sendo no emocional, na alimentação e até mesmo nos recortes durante as atividades acadêmicas.

Ao meu pai João Pedro, que sempre me incentivou a ser uma pessoa melhor, sempre que precisei estava disposto a ajudar, e as caronas de caminhão fizeram toda a diferença.

Por fim, a Deus, por ter me dado saúde, e mesmo em tempos tão difíceis, minha família e eu estamos aqui para comemorar essa conquista.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.”

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso tem como temática as Equações Diferenciais Parciais (EDP's), mais precisamente a equação da onda, a qual pode ser utilizada para modelar, por exemplo, o deslocamento vertical de uma corda de violão, que se mantém fixa nas extremidades e sofre uma alteração de modo a entrar em um padrão vibratório estacionário. Assim, objetivamos estabelecer uma regra que rege o deslocamento $u(x, t)$ – em um ponto qualquer x e num instante de tempo $t > 0$ – de uma corda de violão de comprimento L , esticada, flexível e fixa em ambos as extremidades, ao entrar em modo de vibração. Como fundamentação teórica para a resolução do problema, demandou-se retomar e ampliar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias e Séries de Fourier, além da apropriação de novos conhecimentos e métodos inerentes às equações diferenciais parciais. Metodologicamente, a fim de resolver o problema de pesquisa, a saber,

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

fez-se necessário reescrevê-lo na forma de dois problemas auxiliares, A e B , resolvendo-os separadamente, por meio das 3 etapas seguintes: transformar a equação da onda (Equação Diferencial Parcial) em duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) por meio do método da Separação de Variáveis; utilizar as condições de contorno e uma das condições iniciais de forma a recairmos em um problema regular de Sturm-Liouville, obtendo, assim, soluções por meio de autovalores e autofunções; utilizar o princípio da superposição para, aliado à última condição inicial, reconhecer coeficientes de uma série de Fourier em Senos, obtendo soluções respectivas aos problemas A e B . A soma das soluções de tais problemas é, então, reconhecida como a solução do problema de pesquisa, sujeita à algumas hipóteses sobre f e g .

Palavras-chave: Equação da Onda. Equações Diferenciais Parciais. Séries de Fourier.

ABSTRACT

The present undergraduate final work has as its theme the Partial Differential Equations (PDE's), more precisely the wave equation, which can be used to model the vertical displacement of a guitar string, for example, which remains fixed in the extremities and experiences a change, in order to enter a stationary vibratory pattern. Thus, we aim to establish a rule that governs the displacement $u(x, t)$ – at any point x and in an instant of time $t > 0$ – of a guitar string of length L , stretched, flexible and fixed at both ends when it goes into vibration mode. As a theoretical foundation for solving the problem, it was necessary to retake and expand the concepts of Differential and Integral Calculus, Linear Algebra, Ordinary Differential Equations and Fourier Series, in addition to the appropriation of new knowledge and methods inherent to partial differential equations. Methodologically, in order to solve the research problem, namely,

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

it was necessary to rewrite it in the form of two auxiliary problems, A and B , solving them separately, through the following 3 steps: transform the wave equation (Partial Differential Equation) into two Ordinary Differential Equations (ODE's) using the Variable Separation method; use the boundary conditions and one of the initial conditions in order to get a regular Sturm-Liouville problem, obtaining solutions through eigenvalues and eigenfunctions; use the principle of superposition, coupled with the last initial condition, to recognize coefficients of a Fourier Sine Series, obtaining respective solutions to the problems A and B . The sum of the solutions to such problems is then recognized as the solution to the research problem, requiring some assumptions about f and g .

Keywords: Wave equation. Partial Differential Equations. Fourier series.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 METODOLOGIA	14
3 REFERENCIAL TEÓRICO	16
3.1 Ondas Estacionárias	16
3.2 Séries de Fourier	16
3.2.1 Considerações iniciais	16
3.2.2 Coeficientes de Fourier: Motivação	17
3.2.2.1 Motivação para o coeficiente a_0	17
3.2.2.2 Motivação para o coeficiente a_n	18
3.2.2.3 Motivação para o coeficiente b_n	18
3.2.3 A Série de Fourier – Definição e Convergência	19
3.2.4 Séries de Fourier do Cosseno e do Seno	19
3.2.5 Prolongamento Periódico	20
3.2.6 Extensão par e extensão ímpar	20
3.2.7 Série em Cossenos	22
3.2.8 Série em Senos	22
3.3 Existência e Unicidade de Soluções para EDOs	23
3.4 Equações e Operadores Diferenciais	24
3.4.1 Linearidade	24
3.4.2 Princípio da Superposição	25
3.5 Problema de Sturm-Liouville	27
3.5.1 Problema regular de Sturm-Liouville	27
3.5.2 Problemas Relacionados	30
3.6 Método da Separação de Variáveis	32
4 CORDA VIBRANTE	33
4.1 Contextualização	33
4.1.1 O Problema de Pesquisa	34
4.1.2 Solução do Problema A	34
4.1.3 Solução do Problema B	38
4.1.4 Solução do Problema de Pesquisa	41

4.2 Convergência da Solução em Série.....	42
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	44
REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como finalidade investigar e resolver detalhadamente a temática “Ondas Estacionárias: Cordas Vibrantes”, através de uma Equação Diferencial Parcial (EDP): a Equação da Onda. Essa temática apresenta muitas aplicações na física e nas engenharias Civil, Elétrica e de Produção. Entretanto num contexto matemático, salientamos que, apesar do processo de resolução de problemas — que envolvem a equação da onda — ser apresentado em diversas bibliografias como Zill e Cullen (2001) e Boyce e DiPrima (2013), acreditamos ser pertinente mobilizar conceitos de componentes curriculares do curso de Matemática – Licenciatura, de forma a promover uma fundamentação teórica para o problema e os objetivos desse TCC. Nessa perspectiva, analisamos a “equação da onda” — uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem — caracterizada pela modelagem das vibrações transversais em uma corda. Então, consideramos uma corda de violão, mantida fixa e tensa nas extremidades, de modo que o seu comprimento L apresente uma relação com o eixo x , em $x = 0$ e $x = L$ e, ainda, que a corda seja homogênea, de massa ρ por unidade de comprimento constante e que não apresente resistência à flexão. Supomos também que, a corda tenha a sua posição inicial de equilíbrio alterada e é liberada no instante $t = 0$, entrando em vibração transversal — perpendicular ao eixo x — de tal forma que seu movimento se verifique no plano xy . Ao analisarmos a corda de um violão, é possível identificar que cada ponto da corda se movimenta em uma direção perpendicular ao eixo x , gerando vibrações transversais e o deslocamento vertical em um ponto arbitrário, representado por $u(x, t)$ medido a contar do eixo x para $t > 0$. Notamos que quando a corda está em vibração o seu deslocamento $u(x, t)$ — deflexão da corda — é pequeno quando comparamos com a extensão L desta, podemos observar também que em todos os pontos x ocorrem uma pequena inclinação da curva. A tensão T exerce uma força tangencial à corda e seu módulo T é constante em todos os pontos, sendo grande quando esta é comparada com a força da gravidade — sem ação de forças externas agindo sobre ela, utilizando a 2ª Lei de Newton e tomando limites apropriados o problema descrito através da equação da onda como motiva em Zill e Cullen (2001).

Esse trabalho justifica-se pela curiosidade em compreender, matematicamente, os movimentos ondulatórios realizados pelas cordas de instrumentos musicais, quando estas são dedilhadas. Disto, surge a necessidade de conhecer e entender o processo

de resolução de problemas que envolvem a equação da onda, ao modelar a vibração de uma corda de um violão, por exemplo. No entanto, cabe salientar que as aplicações desta equação não estão restritas a este modelo em particular, mas também relacionam-se com estudos mais gerais, envolvendo fenômenos ondulatórios. Conforme Halliday (2012, p. 117), “as ondas são um dos principais campos de estudo da física [...]”, muito utilizadas na indústria musical, podendo ser transmitidas de várias formas, seja nos meios sólidos ou pelo ar. Silva *et al.* (2001, p. 1), afirma que na Engenharia de Reabilitação, é comum o uso do *dinamômetro biomédico*, composto por sensores à corda vibrante. Esses servem para medir as forças exercidas por pacientes, principalmente em seus membros superiores e inferiores. Tal instrumento possui cordas fixas e tensas nas extremidades e, por meio dos sensores mencionados, sua posição de equilíbrio é alterada, produzindo vibração de acordo com a necessidade do paciente. Neste sentido, pesquisaremos um problema relacionado a uma equação diferencial parcial, a saber, “a equação da onda”, que é muito utilizada em Matemática Aplicada (BOYCE; DIPRIMA, 2013, p. 486). Deste modo, temos como problema de pesquisa a seguinte questão: **Como utilizar a equação da onda para estabelecer uma função $u(x, t)$ que rege as vibrações transversais de uma corda de violão, determinadas pelo deslocamento de sua posição inicial de equilíbrio em um dado instante $t = 0$, após ser liberada em um ponto qualquer x ?**

A fim de detalharmos o problema de pesquisa, partimos das hipóteses norteadoras supracitadas. Consideramos, então, uma corda fixa nas extremidades, determinando as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad t > 0. \quad (1)$$

Além disso, infere-se que o movimento da corda depende de seu *deslocamento* e *velocidade iniciais*, ou seja, da observação do fenômeno em cada posição x , no instante $t = 0$. Podemos representar estas últimas grandezas, respectivamente, por $f(x)$ e $g(x)$ obtendo, portanto, as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2)$$

Assim, o problema de pesquisa resume-se em encontrar uma função $u(x, t)$ que satisfaça a equação da onda, sujeita às condições iniciais e de contorno descritas em (1) e (2). Ou seja, buscaremos encontrar uma solução para o Problema de Valor Inicial e

de Contorno (PVIC):

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3)$$

Ressaltamos que a constante a que aparece na equação da onda deve ser maior que zero, pois esta representa a velocidade da propagação da onda na corda. O seu valor será dado em cada problema. Como a equação da onda é unidimensional, podemos observar o movimento de oscilação somente no eixo das abscissas.

Em termos de objetivo geral, procuramos investigar a equação da onda de forma a estabelecer uma regra que rege os deslocamentos $u(x, t)$ de uma corda de violão de comprimento L , esticada e fixa em ambas as extremidades, ao entrar em vibração, em um ponto qualquer x e num instante $t > 0$. Em termos de objetivos específicos, procuramos:

- Conhecer e entender os princípios físicos envolvidos para estabelecer condições iniciais e de contorno;
- Mobilizar conceitos dos componentes curriculares do curso de forma a resolver o problema de pesquisa;
- Investigar e compreender novos conceitos matemáticos a serem utilizados;
- Exibir uma solução da equação da onda unidimensional, sujeita às condições iniciais e de contorno.

Por fim, salientamos que esse TCC foi organizado em capítulos. Inicialmente, define-se a metodologia e o referencial teórico – este último está dividido em 6 importantes seções, a saber: Ondas Estacionárias; Séries de Fourier; Existência e Unicidade de Soluções para EDOs; Equações e Operadores Diferenciais; Problema de Sturm-Liouville e o Método da Separação de Variáveis. O capítulo seguinte, intitulado “Corda Vibrante”, apresenta uma resolução detalhada do problema de pesquisa, enquanto o último capítulo é destinado a algumas considerações finais.

2 METODOLOGIA

No intuito de respondermos à questão de pesquisa, vamos apresentar uma solução não nula, que satisfaça a equação da onda, sujeita a condições iniciais e de contorno. Esta é uma questão abordada em diversas referências sobre EDP's que trazem as equações protótipo, a saber, Equação do Calor, Equação da Onda e Equação de Laplace. No entanto, faz-se necessário explicitar conceitos matemáticos envolvidos, validando resultados e criando uma sequência lógica que justifique os passos utilizados na obtenção de tal solução. Neste sentido, metodologicamente, caracterizamos este trabalho como uma pesquisa explicativa, visto que este tipo de pesquisa:

[...] têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Esse é o tipo de pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. (GIL, 2002, p.42)

Nesta perspectiva, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, amparada por diversos materiais publicados (livros, periódicos, artigos científicos, etc.) os quais apresentavam equações diferenciais parciais (EDPs), mais especificamente, a equação do calor e da onda e suas propriedades matemáticas, pois ambas têm processos de resolução semelhantes, então na maioria dos livros consultados uma resolução complementava a outra. O desenvolvimento do trabalho contemplou algumas etapas metodológicas, abaixo descritas.

- Etapa 1: análise de material bibliográfico selecionado;
- Etapa 2: leitura analítica e interpretativa do material (escolhido na etapa anterior) seguida da realização de apontamentos, e síntese dos principais conceitos e resultados;
- Etapa 3: Estudo do procedimento para obtenção da solução do problema de pesquisa, explicando, de maneira mais detalhada, cada passo da resolução.

Quanto problema de pesquisa, estamos interessados no processo de obtenção da solução do problema de valor inicial e de contorno (PVIC) que passa, em um primeiro momento, em separá-lo em dois problemas auxiliares. São eles:

Problema A:

$$\begin{cases} a^2 v_{xx} = v_{tt} \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (4)$$

Problema B:

$$\begin{cases} a^2 w_{xx} = w_{tt} \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (5)$$

Cada um desses problemas será resolvido separadamente de forma a obtermos duas soluções $v(x, t)$ e $w(x, t)$, cuja soma $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ é solução para o nosso problema de pesquisa.

Os problemas *A* e *B* apresentam processos de resolução metodologicamente análogos que passam por: aplicar o método da Separação de Variáveis $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ – com uma constante de separação " λ "– e escrever a equação da onda $a^2 u_{xx} = u_{tt}$, na forma de duas EDO's que, juntamente com as condições de fronteira, podem ser associadas a um problema de autovalores $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$ e autofunções ($X_n(x)$); obter uma função $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, que é uma solução da equação, para cada $n \in \mathbb{N}$; utilizar o princípio da superposição para escrever $u(x, t)$ na forma de uma solução em série

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, t). \quad (6)$$

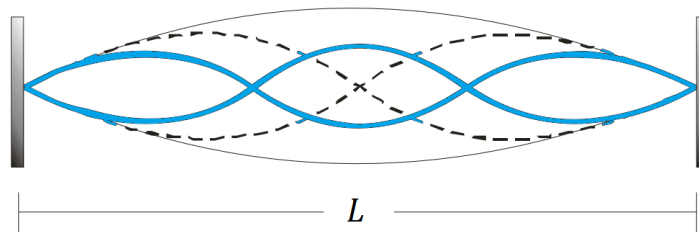
Finalmente, para que esta solução esteja completa, precisamos determinar os coeficientes c_n que estarão associados a série de Fourier em senos da função f .

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Ondas Estacionárias

Ondas Estacionárias são formadas a partir de uma superposição de duas ondas idênticas, porém em sentidos opostos que, como resultado, determinam um padrão estacionário de vibração. Por exemplo, quando um violão é dedilhado, automaticamente as cordas são colocadas em modo de vibração, produzindo ondas. Como cada corda está fixa em ambas as extremidades, é nestes locais em que as ondas se refletem e superpõem-se àquelas que estão propagando-se em sentido oposto, ocasionando um padrão vibratório estacionário, ou seja, ondas estacionárias, conforme figura abaixo. É nesse sentido que estaremos entendendo o modelo da corda vibrante de um violão, neste trabalho.

Figura 1 – Possibilidades de ondas estacionárias em uma corda de comprimento L com ambas extremidades fixas.



Fonte: <https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/wp-content/uploads/sites/4/2020/05/Ondas_estacionarias_em_corda.pdf>

3.2 Séries de Fourier

3.2.1 Considerações iniciais

A fim de entendermos e motivarmos o estudo das Séries de Fourier, precisamos utilizar o conceito de *ortogonalidade* de funções, presente, muitas vezes, no currículo de Álgebra Linear.

Consideramos, para tal, o conjunto de funções

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{3\pi x}{p}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{p}\right), \dots \right\} \quad (7)$$

que é ortogonal no intervalo $[-p, p]$ em relação ao produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-p}^p f(x) \cdot g(x) dx.$$

Suponha, ainda, que f seja uma função definida no intervalo $[-p, p]$, que possa ser escrita na forma da série trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right). \quad (8)$$

Resta, agora, determinar os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$. Utilizaremos, para tal, as relações de ortogonalidade.

3.2.2 Coeficientes de Fourier: Motivação

3.2.2.1 Motivação para o coeficiente a_0

Primeiramente, integramos (formalmente) a expressão (8) no intervalo $[-p, p]$ e obtemos:

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx \right). \quad (9)$$

Note, então, que as integrais dentro do somatório valem 0, visto que as funções “ $\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ ” e “ $\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ ” são ortogonais à função “1”, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois pertencem ao conjunto (7). Daí, segue que:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx. \quad (10)$$

3.2.2.2 Motivação para o coeficiente a_n

Para encontrar os coeficientes a_n , retornamos à expressão (8), multiplicamos por “ $\cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)$ ” e integramos (formalmente) no intervalo $[-p, p]$. Daí,

$$\int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx + b_n \int_{-p}^p \sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx \right). \quad (11)$$

Pelas relações de ortogonalidade provenientes do conjunto (7), temos que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= 0 \\ \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ p, & \text{se } m = n \end{cases} \\ \int_{-p}^p \sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Retornando à expressão (11), resta apenas

$$\int_{-p}^p f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = a_n \cdot p,$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx \quad (12)$$

3.2.2.3 Motivação para o coeficiente b_n

A fim de encontrar os coeficientes b_n , retornamos à expressão (8), multiplicamos por “ $\sen\left(\frac{m\pi x}{p}\right)$ ” e integramos (formalmente) no intervalo $[-p, p]$. Por processo análogo, encontramos:

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cdot \sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx. \quad (13)$$

3.2.3 A Série de Fourier – Definição e Convergência

A série trigonométrica definida em (8) com coeficientes a_0 , a_n e b_n – definidos, respectivamente, por (10), (12) e (13) – é chamada de **Série de Fourier** da função f .

Definição 3.1. A série de Fourier de uma função f definida no intervalo $(-p, p)$ é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad e \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx.$$

É importante salientar que a simples expressão da série não garante a convergência, por isso é indispensável estabelecer hipóteses sobre f para garantir a convergência pontual de uma série de Fourier.

Teorema 3.2. (Teorema da Convergência de Fourier) Sejam f e f' parcialmente contínuas no intervalo $(-p, p)$, isto é, sejam f e f' contínuas exceto, possivelmente, em um número finito de pontos no intervalo e tendo apenas descontinuidades finitas nesses pontos. Então:

- i) em um ponto de continuidade da função, a série converge para $f(x)$;
- ii) em um ponto de descontinuidade da função, a série converge para

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2},$$

em que $f(x_+)$ e $f(x_-)$ denotam os limites de f em x à direita e à esquerda, respectivamente.

Prova. Ver Teorema 2.1 em Iório (2007, p. 121). □

3.2.4 Séries de Fourier do Cosseno e do Seno

Definição 3.3. Uma função é dita **par** se o seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se $f(x) = f(-x)$, para cada x no domínio de f . Analogamente, uma

função é dita **ímpar** se o seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se $f(-x) = -f(x)$, para cada x no domínio de f .

Teorema 3.4. (Propriedades elementares de funções pares e ímpares)

1. O produto de duas funções pares é par.
2. O produto de duas funções ímpares é par.
3. O produto de uma função par por uma função ímpar é ímpar.
4. A soma (diferença) de duas funções pares é par.
5. A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar.

6. Se f é par então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

7. Se f é ímpar então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Prova. Ver Zill; Cullen (2001, p. 213). □

3.2.5 Prolongamento Periódico

Uma série de Fourier – por ser uma série trigonométrica – não só representa a função no intervalo $(-p, p)$ mas também dá o *prolongamento periódico* de f fora desse intervalo. Isto quer dizer que podemos aplicar o Teorema 3.2 ao prolongamento periódico de f ou então podemos admitir de saída que a função dada é periódica com período $2p$ (isto é, $f(x + 2p) = f(x)$). Quando f é parcialmente contínua e existem as derivadas à direita de $x = -p$ e à esquerda de $x = p$, então a série converge para a média

$$\frac{f(p_-) + f(-p_+)}{2}$$

nesses pontos extremos. O mesmo ocorre para os valores de prolongamento periódico: $\pm 3p, \pm 5p, \pm 7p, \dots$ (ZILL; CULLEN, 2001, p.210)

3.2.6 Extensão par e extensão ímpar

No processo da resolução de nosso problema de pesquisa, estaremos trabalhando especificamente com duas funções, f e g , que são definidas no intervalo $[0, L]$.

Para representá-las como uma expansão em séries de Fourier em *senos* ou em *cosenos*, devemos definir extensões periódicas ímpares ou pares, respectivamente, de forma a obtermos funções estendidas, \tilde{f} e \tilde{g} .

Definição 3.5. Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Podemos definir para f :

(i) extensão periódica par, denotada por f_1 , dada por:

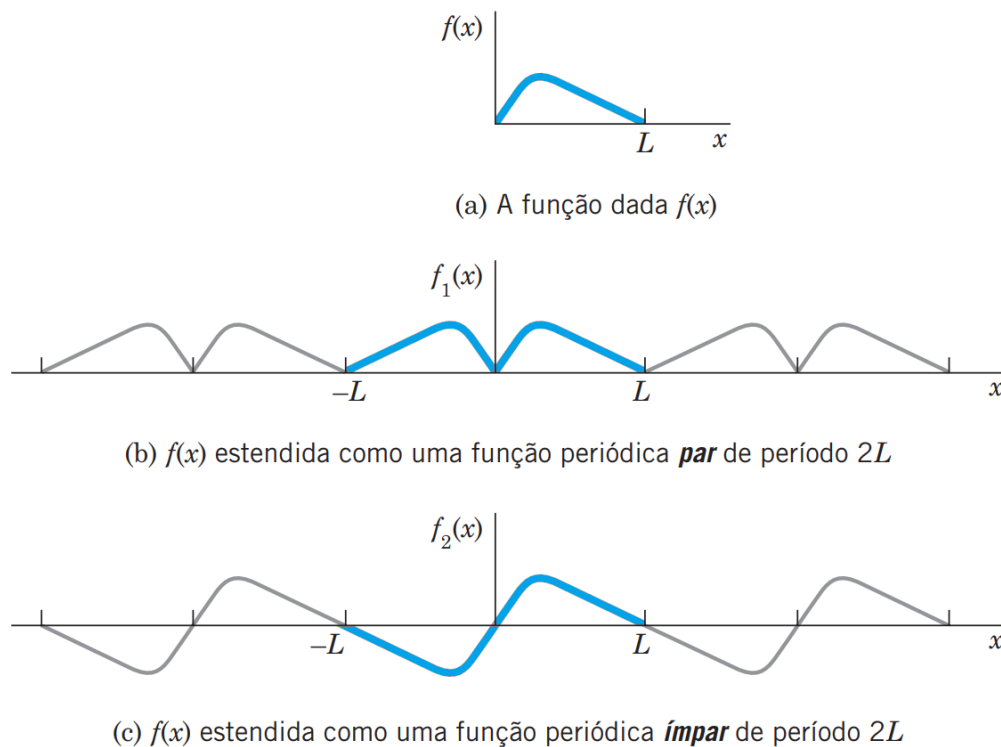
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ f(-x), & -L \leq x < 0, \end{cases} \quad f_1(x + 2L) = f_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

(ii) extensão periódica ímpar, denotada por f_2 , dada por:

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & -L \leq x < 0, \end{cases} \quad f_2(x + 2L) = f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Para representar esta ideia, apresentamos a figura abaixo:

Figura 2 – Extensão par e extensão ímpar.



3.2.7 Série em Cossenos

Considere uma função f par, definida em $-L \leq x < L$, com prolongamento periódico em que $p = 2L$. Fazendo uso de propriedades, enunciadas anteriormente no Teorema 3.4, concluímos que:

1. $f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ é par, pois é o produto de funções pares.
2. $f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ é ímpar, pois é o produto de uma função par por uma função ímpar.

Como consequência das propriedades relacionadas à integral, segue, então, que os coeficientes de Fourier de f são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, f tem uma série de Fourier em cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Em outras palavras, a série de Fourier de qualquer função par é formada apenas pelas funções trigonométricas pares “ $\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ ” e pelo termo constante.

3.2.8 Série em Senos

Considere, agora, uma função f ímpar, definida em $-L \leq x < L$, com prolongamento periódico em que $p = 2L$. Utilizamos, novamente, propriedades enunciadas no Teorema 3.4 e concluímos que:

1. $f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ é ímpar, pois é o produto de uma função ímpar por uma função par.

2. $f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ é par, pois é o produto de funções ímpares.

Como consequência das propriedades relacionadas à integral, segue, então, que os coeficientes de Fourier de f são dados por:

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, f tem uma série de Fourier em senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right).$$

Em outras palavras, a série de Fourier de qualquer função ímpar é formada apenas pelas funções trigonométricas ímpares “ $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ ”.

3.3 Existência e Unicidade de Soluções para EDOs

Teorema 3.6 (Existência e Unicidade de Soluções para EDOs). *Sejam $a_n(x)$, $a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I e seja $a_n(x) \neq 0$ para todo x nesse intervalo. Se $x = x_0$ for um ponto qualquer em I , então existe uma única solução $y(x)$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (16)$$

Prova. Ver em Zill; Cullen (2001, p. 143). □

3.4 Equações e Operadores Diferenciais

A fim de compreendermos melhor a equação da onda, iremos estabelecer algumas classificações e entendimentos que nos fornecem subsídios para estabelecer um percurso metodológico adequado.

Definição 3.7. *Equação Diferencial (ED) é uma equação que apresenta em sua formulação derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma ou mais variáveis independentes. Podemos classificá-la como:*

- (i) *Equação Diferencial Ordinária (EDO) no caso em que apresenta derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente.*
- (ii) *Equação Diferencial Parcial (EDP) no caso em que apresenta derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a duas ou mais variáveis independentes.*

A partir disso, podemos afirmar que a Equação da Onda, amplamente discutida neste trabalho, a saber

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

classifica-se como uma EDP de *segunda ordem*, visto que essa é a ordem da derivada mais alta presente na equação. Além disso, poderemos classificá-la como uma EDP *linear* e obter um resultado muito importante: o Princípio da Superposição (Infinito/Estendido), conforme veremos nas subseções seguintes.

3.4.1 Linearidade

De uma maneira geral, utilizando a notação $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ para denotar a possibilidade de n variáveis independentes x_1, \dots, x_n , definimos:

Definição 3.8. *Seja $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então a equação*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot D_j u(x) + c(x) \cdot u(x) + d(x) = 0 \quad (17)$$

é dita uma Equação Diferencial Parcial Linear de Segunda Ordem, na qual $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ denotam derivadas parciais.

Observação 3.9. Note que a equação da onda (unidimensional) trata-se de uma EDP Linear de Segunda Ordem com: $n = 2$, $a_{11}(x) = a^2$, $a_{22}(x) = -1$, $a_{12}(x) = a_{21}(x) = b_1(x) = b_2(x) = c(x) = d(x) = 0$.

Perceba, ainda, que podemos reescrever a equação (17), na forma

$$Lu = f, \quad (18)$$

ao tomar $f(x) = -d(x)$ e definir

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot D_j u(x) + c(x) \cdot u(x). \quad (19)$$

Sendo Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e as funções a_{ij}, b_j e c , $1 \leq i, j \leq n$, contínuas em Ω , definimos o *operador diferencial* parcial linear de segunda ordem

$$L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega) \quad (20)$$

$$u \mapsto Lu$$

em que Lu é dado pela expressão (19) e entendemos $C^2(\Omega)$ como o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são duas vezes continuamente diferenciáveis. De maneira geral, podemos definir funções k vezes continuamente diferenciáveis:

Definição 3.10. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser de classe C^0 , quando for contínua em todos os pontos de Ω . De maneira geral, diremos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possui, em cada ponto de Ω , todas as derivadas de ordem k , as quais são funções contínuas em Ω , é uma função de Classe C^k . Escreve-se, então, $f \in C^k(\Omega)$.

3.4.2 Princípio da Superposição

O Princípio da Superposição consiste, basicamente, na possibilidade de obtermos uma solução mais geral de uma equação diferencial por meio de combinações lineares (finitas) de soluções conhecidas. Porém, mostraremos que, sob certas hipóteses, existe uma forma infinita para tal princípio, apresentada no teorema a seguir, nas condições da equação diferencial parcial que estaremos trabalhando, a saber, a Equação da Onda.

Teorema 3.11 (Princípio da Superposição). *Seja L um operador diferencial parcial linear de segunda ordem cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^2 em Ω , satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$. Então, se $(a_m)_{m=1}^{+\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_m \cdot u_m(x) \quad (21)$$

é convergente e duas vezes diferenciável termo a termo em Ω , temos que u satisfaz $Lu = 0$.

Prova. A demonstração segue, essencialmente, ideias apontadas por Iório (2012, p. 8). Suponha, inicialmente, que convirjam as séries

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cdot u_m(x); \quad (22)$$

$$D_j u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cdot D_j u_m(x); \quad (23)$$

$$D_i D_j u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cdot D_i D_j u_m(x); \quad (24)$$

quaisquer que sejam $x \in \Omega$ e os índices $1 \leq i, j \leq n$.

Sendo L um operador diferencial parcial linear de segunda ordem, podemos substituir (22), (23) e (24) em (19), obtendo:

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \underbrace{D_i D_j u(x)}_{(24)} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot \underbrace{D_j u(x)}_{(23)} + c(x) \cdot \underbrace{u(x)}_{(22)} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cdot D_i D_j u_m(x) \right) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cdot D_j u_m(x) \right) \\ &\quad + c(x) \cdot \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \cdot u_m(x) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cdot \underbrace{\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \cdot D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot D_j u_m(x) + c(x) \cdot u_m(x) \right]}_{=(Lu_m)(x)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cdot (Lu_m)(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (25)$$

No entanto, como $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^2 em Ω , satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$, obtemos que $Lu_m = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, de (25), obtemos que u satisfaz

$$Lu = 0, \quad (26)$$

como queríamos. \square

3.5 Problema de Sturm-Liouville

3.5.1 Problema regular de Sturm-Liouville

Definição 3.12. *Sejam as funções contínuas p, q, r e r' com valores $x \in [a, b]$, sendo r' a derivada de r e estes estando em um intervalo real, tal que $r(x) \equiv 0$ e $p(x) \equiv 0$ para todo x no intervalo. O problema de contorno de dois pontos*

$$\frac{d}{dx}[r(x) \cdot y'] + (q(x) + \lambda \cdot p(x)) \cdot y = 0 \quad (27)$$

sujeito a condições de contorno homogêneas

$$\alpha_1 \cdot y(a) + \beta_1 \cdot y'(a) = 0 \quad (28)$$

$$\alpha_2 \cdot y(b) + \beta_2 \cdot y'(b) = 0 \quad (29)$$

é chamado um problema regular de Sturm-Liouville (ZILL; CULLEN, 2001, p.226).

Nas equações (28) e (29) supõe-se que os coeficientes são números reais e independentes de λ e tomamos os pares (α_1, β_1) e (α_2, β_2) não nulos.

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do Problema Regular de Sturm-Liouville se a equação (27) tem solução $y \not\equiv 0$ (ou seja, solução não trivial) que satisfaz as condições de contorno (28) e (29). Neste caso, a solução $y = y(x)$ é chamada de autofunção, associada ao autovalor λ .

Observação 3.13. *Sendo a equação diferencial (27) homogênea, o problema de Sturm-Liouville sempre admite a solução trivial $y \equiv 0$. No entanto, ao propósito que nos serve, não estamos interessados em obter autovalores cujas autofunções correspondentes sejam triviais.*

Teorema 3.14 (Propriedades do Problema Regular de Sturm-Liouville).

- (a) Existe um número infinito de autovalores reais que podem ser dispostos em ordem crescente $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ tais que $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (b) Para cada autovalor há apenas uma autofunção (exceto para múltiplos não-zero).
- (c) As autofunções correspondentes a diferentes autovalores são linearmente independentes.
- (d) O conjunto de autofunções correspondente ao conjunto de autovalores é ortogonal em relação à função peso $p(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Prova. Ver Zill; Cullen (2001, p. 227) □

Exemplo 3.15. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Observe que (30) é um Problema Regular de Sturm-Liouville nas seguintes condições: $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $p(x) = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $a = 0$ e $b = L$, conforme as equações (27), (28) e (29).

Os valores de λ para os quais existem soluções não triviais para o problema (30) são chamados de **autovalores** e as soluções não triviais são chamadas de **autofunções**.

Vamos considerar, separadamente, três casos: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

Caso 1: $\lambda > 0$.

Sendo λ positivo podemos escrever (de maneira conveniente) $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$, e a equação se torna

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad (31)$$

cuja equação característica é

$$r^2 + \mu^2 = 0, \quad (32)$$

com raízes $r = \pm i\mu$, de modo que a solução geral é

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x). \quad (33)$$

Como $X(0) = 0$, temos

$$c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \cdot 1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Como $X(L) = 0$ e $c_1 = 0$, temos

$$c_2 \cdot \sin(\mu L) = 0. \quad (34)$$

Como estamos procurando soluções não triviais, só pode ocorrer $c_2 \neq 0$ e, portanto,

$$\sin(\mu L) = 0. \quad (35)$$

Sabemos que a função seno tem valor zero em todos os múltiplos inteiros de π . Assim, só pode ocorrer uma quantidade infinita de valores reais, dados por

$$\mu_n \cdot L = n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ou seja, $\mu_n = \frac{n\pi}{L}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Desta forma, como $\lambda = \mu^2$, temos uma sequência infinita de autovalores reais

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad (36)$$

associados às autofunções correspondentes

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (37)$$

Caso 2: $\lambda = 0$.

Neste caso, temos $X'' = 0 \xrightarrow{\text{integração}} X' = c \xrightarrow{\text{integração}} X = cx + d$.

Daí,

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c \cdot 0 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

$$X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c \cdot L + d = 0 \quad \Rightarrow \quad c \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

A solução seria, portanto, $X(x) = 0$ (solução trivial) que não nos interessa.

Caso 3: $\lambda < 0$.

Neste caso, podemos supor $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$. Temos a equação

$$X'' - \mu^2 X = 0 \quad (38)$$

cuja equação característica é $r^2 - \mu^2 = 0$, com raízes $r = \pm\mu$.

Desta forma, a solução geral escreveremos, convenientemente, na forma

$$X(x) = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x. \quad (39)$$

Então, temos

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow c_2 \sinh(\mu L) = 0$$

Como $\mu > 0$, temos que $\sinh(\mu L) \neq 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Assim, $X(x) = 0$ (solução trivial) que não nos interessa.

Concluimos, portanto, que apenas podemos obter autovalores e autofunções para o problema (30) no caso em que $\lambda > 0$.

3.5.2 Problemas Relacionados

Exemplo 3.16. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} T'' + \left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2}\right) T = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases} \quad (40)$$

O problema apresenta equação característica

$$r^2 + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} = 0$$

e, portanto, tem como solução geral a equação

$$T(t) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right). \quad (41)$$

O problema nos dá o valor da derivada no ponto $t = 0$. Sendo assim, devemos derivar a equação (41) de forma a obter

$$T'(t) = -c_1 \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) + c_2 \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{L} t \right), \quad (42)$$

e, então, como $T'(0) = 0$:

$$T'(0) = \underbrace{-c_1 \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi a}{L} 0 \right)}_{=0} + c_2 \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \underbrace{\cos \left(\frac{n\pi a}{L} 0 \right)}_{=1} = 0. \quad (43)$$

Assim, $c_2 = 0$ e c_1 é qualquer. Dessa forma, de (41), temos uma família de soluções:

$$T_n(t) = \cos \left(\frac{n\pi a}{L} t \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

Exemplo 3.17. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} Z'' + \left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \right) Z = 0 \\ Z(0) = 0 \end{cases} \quad (45)$$

Como o exemplo é análogo ao anterior (somente o que difere é a condição de contorno dada $Z(0) = 0$) utilizaremos expressão análoga a (41) para $Z(t)$, a saber,

$$Z(t) = c_1 \cos \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) + c_2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi a}{L} t \right). \quad (46)$$

Desta forma,

$$Z(0) = c_1 \underbrace{\cos \left(\frac{n\pi a}{L} 0 \right)}_{=1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi a}{L} 0 \right)}_{=0} = 0 \quad (47)$$

Neste caso, concluímos que $c_1 = 0$ e c_2 é qualquer. Assim, de (46), temos:

$$Z_n(t) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi a}{L} t \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (48)$$

3.6 Método da Separação de Variáveis

No intuito de resolver o problema de pesquisa, estamos em busca de soluções não triviais para um problema envolvendo a equação da onda. Sendo esta uma EDP, como vimos anteriormente, uma das ferramentas mais eficientes (para este caso) é conhecida como o **método da separação de variáveis**. Este método consiste, basicamente, em assumir uma solução para a equação diferencial na forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (49)$$

isto é, supõe-se a solução como um produto de duas funções de uma variável, X e T , dependentes da posição x e do tempo t , respectivamente.

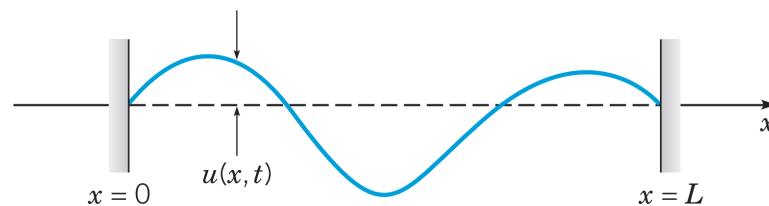
Quando aplicado à equação da onda, o método da separação de variáveis permite “transformá-la” em duas equações diferenciais ordinárias que, aliadas às condições inicial e de contorno, recaem em problemas já resolvidos nesta seção.

4 CORDA VIBRANTE

4.1 Contextualização

Neste trabalho iremos nos aprofundar nas ondas mecânicas, porém sabemos que existem vários tipos de propagações de ondas, como as ondas da água, as ondas eletromagnéticas, sonoras, entre diversas outras. Retornando ao problema a ser estudado, vamos imaginar uma corda de violão, sabemos que ela se mantém fixa nas extremidades, tendo um tamanho L qualquer. Esta corda permanece em estado inerte horizontalmente, supomos que a corda sofra uma alteração, sendo puxada por exemplo, logo esta entrará em estado oscilatório. Segue o gráfico ilustrando os movimentos circulares da corda.

Figura 3 – Corda Vibrante.



Fonte: Boyce e DiPrima (2013, p. 487).

Como podemos ver no gráfico, a posição da corda coincide com o eixo x , e como os movimentos oscilatórios são pequenos comparados com o comprimento da corda, levamos em consideração somente o eixo das abscissas para observar o movimento desta, e utilizamos como parâmetros x e t , os quais representam a posição e o tempo, respectivamente.

4.1.1 O Problema de Pesquisa

Em resumo, definimos nosso problema de pesquisa na forma do seguinte PVIC:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}; \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x); \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (50)$$

que engloba, respectivamente, a Equação da Onda, as condições de contorno e as condições iniciais.

Para resolver o problema (50) iremos separá-lo em dois problemas auxiliares, problemas A e B, sendo eles:

- Problema A:

$$\begin{cases} a^2 v_{xx} = v_{tt}; \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ v(x, 0) = f(x); \quad v_t(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (51)$$

- Problema B:

$$\begin{cases} a^2 w_{xx} = w_{tt}; \\ w(0, t) = w(L, t) = 0; \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = 0; \quad w_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (52)$$

Depois de resolvidos, mostraremos que a soma deles, $v(x, t) + w(x, t)$, também será solução para o sistema em (50).

4.1.2 Solução do Problema A

Queremos encontrar uma solução do tipo

$$v(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (53)$$

Para isso vamos utilizar o método da separação de Variáveis, descrita na seção (3.6). Então iniciaremos substituindo (53) na equação da onda apresentada em (51), veja que

$$v_x = X'(x) \cdot T(t) \quad (54)$$

$$v_{xx} = X''(x) \cdot T(t) \quad (55)$$

e

$$v_t = X(x) \cdot T'(t) \quad (56)$$

$$v_{tt} = X(x) \cdot T''(t) \quad (57)$$

Substituindo (55) e (57) chegamos em (51)

$$a^2 X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T''(t) \quad (58)$$

Vamos utilizar agora o método da separação de variáveis e isolar as variáveis x e t , dessa forma vamos obter

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (59)$$

uma igualdade independente, ou seja, os membros direito e esquerdo dessa igualdade, são independentes de x e t , ou seja, o membro esquerdo depende somente de x e o membro direito depende somente de t , isto é, cada membro da equação deve ser igual a uma constante. Então, seja $-\lambda$ essa tal constante. Temos que:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (60)$$

E, portanto,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (61)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (62)$$

É interessante observar que o Método da Separação de Variáveis nos auxiliou para que conseguíssemos transformar uma equação diferencial parcial (51) em duas equações

parciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (63)$$

No problema A, (51), apresentamos as condições de fronteira $v(0, t) = v(L, t) = 0$, as quais iremos substituir em (53), obtemos

$$\begin{cases} 0 = v(0, t) = X(0) \cdot T(t) \\ 0 = v(L, t) = X(L) \cdot T(t) \end{cases} \quad (64)$$

Devemos tomar $T(t) \neq 0$, pois se tivéssemos $T(t) = 0$, encontraríamos $v(x, t) = 0$ em (53), o que seria a solução trivial, e isso não tornaria interessante o nosso trabalho. Então temos

$$X(0) = 0 \quad e \quad X(L) = 0. \quad (65)$$

Agora vamos substituir a condição inicial $v_t(x, 0) = 0$, também disposta no problema A (51), em (53) obtendo

$$0 = v_t(x, 0) = X(x) \cdot T'(0) \quad (66)$$

Novamente, não estamos interessados na solução trivial, então vamos usar $X(x) \neq 0$, dessa forma deve ocorrer

$$T'(0) = 0 \quad (67)$$

Note que, aliando (63), (65), e (67), temos dois problemas de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (68)$$

e

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases} \quad (69)$$

Os dois problemas já foram resolvidos na seção 3.5 que aborda problemas de Sturm-Liouville, e garantimos que (68) possui soluções não triviais, se, e somente se, λ é um autovalor positivo, sendo ele

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (70)$$

e $X(x)$ é proporcional às autofunções correspondentes $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Assim, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (71)$$

conforme Exemplo 3.15.

Usando λ dado em (70), obtemos

$$T_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (72)$$

conforme Exemplo 3.16.

Dessa forma, as funções

$$v_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (73)$$

satisfazem as condições de contorno $v(0, t) = v(L, t) = 0$ e a condição inicial $v_t(x, 0) = 0$. Resta ainda, satisfazer a condição inicial $v(x, 0) = f(x)$.

Observe que as soluções $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ são funções de classe C^2 em $\mathcal{R} := (0, L) \times (0, +\infty)$, então vamos considerar

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (74)$$

que ainda é uma solução, pelo Princípio da Superposição, a saber, o Teorema 3.11.

Resta apenas determinar os coeficientes c_n .

Fazendo $t = 0$, temos

$$f(x) = v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) \quad (75)$$

como $\cos 0 = 1$, teremos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (76)$$

Observe que os coeficientes c'_n s são exatamente os mesmos coeficientes na série de Fourier em senos para uma extensão periódica ímpar de f , denotada por \tilde{f} , com período $2L$ (ver Definição 3.5). Como no intervalo $[0, L]$, temos $\tilde{f}(x) = f(x)$, podemos afirmar que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (77)$$

Portanto, obtemos a solução desejada, a saber

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (78)$$

em que,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (79)$$

Logo, chegamos a solução do problema A, sempre que a série convergir.

4.1.3 Solução do Problema B

Da mesma forma que trabalhamos o anteriormente, vamos supor que

$$w(x, t) = Y(x) \cdot Z(t) \quad (80)$$

Observe que as condições de contorno e a equação da onda apresentadas no problema B em (52) são exatamente iguais as do problema A e (51). Por isso, de imediato obtemos

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad (81)$$

$$Y(0) = Y(L) = 0 \quad (82)$$

$$Z'' + \lambda a^2 Z = 0 \quad (83)$$

Neste novo contexto, utilizaremos a condição inicial $w(x, 0) = 0$ e a separação (80) para garantir que

$$0 = w(x, 0) = Y(x) \cdot Z(0) \quad (84)$$

Como $Y(x) \neq 0$, decorre que

$$Z(0) = 0 \quad (85)$$

De (81), (82) e (83), obtemos os problemas de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0 \\ Y(0) = Y(L) = 0 \end{cases} \quad (86)$$

e

$$\begin{cases} Z''(t) + \lambda a^2 Z(t) = 0 \\ Z(0) = 0 \end{cases} \quad (87)$$

O problema (86) é exatamente igual ao problema (68) e portanto

$$Y_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (88)$$

conforme Exemplo 3.15.

O problema (87) tem solução

$$Z_n(t) = \text{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (89)$$

conforme Exemplo 3.17.

Desta forma, as funções

$$w_n(x, t) = Y_n(x) \cdot Z_n(t) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (90)$$

satisfazem as condições de contorno e condição inicial $w(x, 0) = 0$, dadas no Problema B (52).

Observe que as soluções $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$ são funções de classe C^2 em $\mathcal{R} = (0, L) \times (0, +\infty)$, então vamos considerar

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (91)$$

que ainda é uma solução, pelo Princípio da Superposição, a saber, o Teorema 3.11.

Resta, mais uma vez, determinar os coeficientes k_n .

Para isso, vamos considerar a condição inicial $w_t(x, 0) = g(x)$, ainda não utilizada. Note que precisamos derivar, com relação a t , a série dada em (91). Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[\frac{n\pi a}{L} \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n\pi a}{L} \cdot k_n}_{:=\alpha_n} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \end{aligned} \quad (92)$$

Fazendo $t = 0$, temos

$$g(x) = w_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (93)$$

Observe, novamente, que os coeficientes α_n 's são exatamente os mesmos coeficientes na série de Fourier em senos para uma extensão periódica ímpar de g , denotada por \tilde{g} , com período $2L$ (ver Definição 3.5). Como no intervalo $[0, L]$, temos $\tilde{g}(x) = g(x)$, podemos afirmar que:

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (94)$$

Retornando para k_n , temos

$$\frac{n\pi a}{L} \cdot k_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (95)$$

Ou ainda,

$$k_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (96)$$

Assim, obtemos a solução desejada,

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (97)$$

em que,

$$k_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (98)$$

Sendo esta a solução do problema B, sempre que a série convergir.

4.1.4 Solução do Problema de Pesquisa

Seja $v(x, t)$ a solução do problema A, expressa em (78) e $w(x, t)$ a solução do problema B descrita em (97). Mostremos agora que

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (99)$$

é solução do problema (50). Vejamos que

$$a^2 u_{xx} = a^2 (v_{xx} + w_{xx}) = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} \quad (100)$$

Utilizando as equações da onda descritas nos problemas A e B, temos

$$a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} = v_{tt} + w_{tt} = (v + w)_{tt} = u_{tt} \quad (101)$$

Assim, $u(x, t)$ dada em (92) satisfaz a equação da onda em (50). Agora observe que utilizando as condições de contorno dadas em (50), temos

$$u(0, t) = v(0, t) + w(0, t) = 0 \quad (102)$$

$$u(L, t) = v(L, t) + w(L, t) = 0 \quad (103)$$

Portanto, $u(0, t) = u(L, t) = 0$ satisfazendo as condições de contorno em (50). Por fim, utilizando a posição inicial e velocidade inicial dada em (50),

$$u(x, 0) = v(x, 0) + w(x, 0) = f(x) + 0 = f(x) \quad (104)$$

$$u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = 0 + g(x) = g(x) \quad (105)$$

e, portanto, $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, satisfazendo as condições iniciais em (50). Disso temos,

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + k_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \quad (106)$$

com

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad e \quad k_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (107)$$

Esta, então, é a solução do nosso problema de pesquisa (sempre que a série convergir) a qual nos propomos obter neste trabalho de conclusão de curso.

4.2 Convergência da Solução em Série

Alguns questionamentos podem aparecer a partir de todo o processo de obtenção da solução que é formal, ou seja, sem preocupações com o rigor, visto que não apresentamos nenhuma hipótese sobre as funções f e g .

Para que, de fato, obtenhamos uma solução para o nosso problema de pesquisa, devemos impor algumas condições em f e g para que, nesse caso, a solução dada por (106) e (107) seja efetiva.

Enunciaremos tais condições por meio do resultado a seguir.

Teorema 4.1. *Suponha que f e g sejam dadas em $[0, L]$ de forma que f, f', f'', g, g' sejam contínuas e f''', g'' sejam seccionalmente contínuas. Suponha ainda que*

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0.$$

Então,

(i) c_n e k_n estão bem definidos por (107);

(ii) são válidas as igualdades

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad e \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} \cdot k_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);$$

(iii) A expressão

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\frac{n\pi at}{L} + k_n \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} \right]$$

dada em (106), define uma função contínua em $\overline{\mathcal{R}}$, de classe C^2 em \mathcal{R} , que satisfaz a equação da onda em \mathcal{R} .

Prova. Ver Figueiredo (2012, p. 137). □

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da pesquisa aqui apresentada, trabalhamos com um notório conjunto de técnicas associadas às equações diferenciais parciais, com enfoque na equação da onda. Para isso foi preciso retomar, lembrar, estudar e ampliar conceitos presentes no currículo de graduação, principalmente no que se refere ao Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e Séries de Fourier, além da apropriação de novos conhecimentos e métodos inerentes às Equações Diferenciais Parciais (EDP's). Em resumo, a fim de aprofundar a pesquisa nessa temática, foram indispensáveis diversos estudos sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), que nortearam o referencial teórico e a seleção dos resultados, ao passo que transformamos a equação da onda, por meio da técnica da separação de variáveis, em duas EDO's. Além do mais, ao associar tais EDO's à condição inicial e às condições de contorno recaímos em soluções associadas a autovalores e autofunções, provenientes dos clássicos problemas regulares de Sturm-Liouville. Com isso, após o princípio da superposição (infinito/estendido), foi possível entender o contexto de séries de Fourier e suas relações de ortogonalidade, presentes na Álgebra Linear, de forma a encontrar os coeficientes de Fourier associados. Destaca-se assim, minimamente, a importância dos conteúdos utilizados.

Mais do que isso, durante o desenvolvimento do trabalho, em estudos sobre as equações diferenciais e suas diversas aplicações, foi possível perceber a importância da equação da onda tanto na matemática, quanto na física e nas Engenharias Civil, Elétrica, de Produção, etc. Dentre as aplicações destacamos, também, que a equação da onda é muito utilizada na indústria musical e na Engenharia de reabilitação com o uso do *dinamômetro biomédico*.

Ressaltamos que muito do trabalho realizado é formal, ou seja, ainda necessita de um aprofundamento teórico e uma análise de hipóteses mínimas. No entanto, apresentamos no Teorema 4.1 algumas exigências sobre a posição e velocidade iniciais da corda, f e g , que, quando garantidas, tornam válida a solução a qual nos propomos obter neste trabalho de conclusão de curso. Esta preocupação é muito importante para entendermos que uma fundamentação teórica adequada depende, essencialmente, das hipóteses assumidas.

Neste sentido, considero ser interessante a possibilidade de expandir esse trabalho para um estudo mais aprofundado dos resultados aqui apresentados. Essa mo-

nografia abriu horizontes de curiosidade no estudo da matemática, pois no mundo em que vivemos tudo é matemática, e relacionar o meio em que vivemos com a matemática aplicada é muito importante para despertar nas pessoas uma visão ampliada desta disciplina.

Enquanto licencianda em Matemática, tal trabalho foi de fundamental importância na minha formação profissional, visto que possibilitou um estudo de vários conceitos vistos durante a graduação, retomando e ampliando conhecimentos da matemática escolar e superior, que culminaram na escrita desta monografia, a qual foi ficando mais interessante a medida que eram lembrados conteúdos e enfatizava-se a importância de cada componente curricular em meu desenvolvimento acadêmico.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, William. E.; DIPRIMA, Richard. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- GIL, Antonio C. **Como elaborar Projeto de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2002.
- HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- IÓRIO, Valéria. **EDP, um curso de graduação**. 2. ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- KREYSZIG, Erwin. **Matemática superior para engenharia**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v.2.
- SILVA, Tony I. *et al.* **Desenvolvimento de um sensor a corda vibrante para aplicações em Engenharia de Reabilitação**. Habana, 2001.
- ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2001. v. 1.
- ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2001. v. 2.