

Um Modelo de Equações a Diferenças Integrais para o Crescimento e Propagação do Arroz Branco e Arroz Vermelho (*Oryza sativa l.*)¹

Naiane Fernanda Ribas Rocha ³

Elisa Regina Cara ²

Resumo

Este trabalho tem por objetivo principal analisar a dinâmica de crescimento e propagação do arroz branco *Oryza sativa l.* e do arroz vermelho *Oryza sativa l.*, através de um modelo composto por equações a diferenças integrais, discretas no tempo e contínuas no espaço. Escolhemos esse modelo pois o mesmo descreve bem a evolução temporal de plantas anuais com bancos de sementes e que dispersam suas sementes à distâncias próximas da planta que as produziu. Os valores para os parâmetros presentes no modelo foram obtidos na literatura, com o objetivo de analisar as diferenças de crescimento e propagação entre os dois tipos de arroz. O arroz vermelho é uma planta daninha, se considerarmos que o objetivo dos produtores é o cultivo do arroz branco. O modelo adotado considera a competição intraespecífica (dependência da densidade) entre as plantas por água, luz e nutrientes. Dessa forma, realizamos simulações numéricas para verificar como a variação na dependência da densidade altera a produtividade e quantidade de plantas adultas por ciclo, para ambos os tipos de arroz. Isso foi verificado através da quantidade de sementes e plantas adultas geradas a partir de uma quantidade inicial, por metro de terreno cultivado. Além disso, o arroz vermelho (praga) se propaga mais rapidamente, de modo que a sua sobrevivência é maior, devido ao processo de dormência que pode ser de até 12 anos. Finalmente, após a utilização do programa Mathematica, concluímos que as simulações numéricas foram indispensáveis para a análise dos resultados, visto que, o modelo adotado não pode ser analisado analiticamente e os valores dos parâmetros para ambos os tipos de arroz são muito parecidos.

Palavras-chave: Equações a Diferenças Integrais. Arroz Branco. Arroz Vermelho.
Dependência da Densidade. Competição Intraespecífica.

1 Introdução

A orizicultura, cultivo agrícola do arroz, é a maior fonte de riquezas do estado do Rio Grande do Sul, sendo a cidade de Uruguaiana, localizada na fronteira oeste, a responsável

¹Trabalho de Conclusão de Curso para a obtenção do grau de Especialista em Ciências Exatas e Tecnologia pela Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui

³Aluna de Especialização em Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui.

e-mail: naianerrocha@outlook.com

²Orientadora, Professora Adjunta da Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui
e-mail: elisacara@unipampa.edu.br

por cerca de 5% da produção nacional do cereal. Estima-se que produza anualmente 590.329 toneladas, superando a segunda colocada a cidade de Itaqui em cerca de 132 mil toneladas, conforme dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2007).

Muitas plantas completam seu ciclo em um ano, iniciando pela germinação das sementes, crescimento da planta e findando em sua colheita. Anualmente, existe uma quantidade de sementes que permanecem dormentes no solo por um período que pode durar anos, ou até mesmo décadas. O que faz com que sejam consideradas plantas daninhas, pois podem emergir a qualquer instante dependendo do estímulo que recebem, e assim competir com as sementes que foram plantadas (LAGO, 2008).

Atualmente, a *Oryza sativa l.*, também conhecido como a praga do “arroz vermelho”, totalmente prejudicial à lavoura, é a semente que a cada safra fica mais parecida esteticamente com o arroz branco (*Oryza sativa l.*), pertencendo a mesma espécie. É possível identificá-lo, visto que, cresce fora dos parâmetros estabelecidos, no caso específico, plantio em linha. Quanto mais a indústria de insumos agrícolas investe em sementes modificadas para tolerar a química utilizada para exterminar com a planta daninha, mais tolerante e resistente o arroz vermelho fica (MARCHEZAN, 1994). O arroz vermelho é cultivado principalmente em áreas da Índia e no sudeste asiático, sendo que em menor quantidade nos Estados Unidos e na França. Trata-se de um arroz integral e é um dos mais consumidos do planeta. Porém no Brasil não despertou o interesse de seu consumo, a lei da demanda o tornou muito caro, visto necessitar de um tempo bem maior de cozimento, e nosso país ter a cultura do imediatismo.

O arroz vermelho ainda se propaga no solo devido a plantações caseiras em pequenos hectares, onde o produtor rural não possui grandes recursos financeiros para investir em tecnologia, ao separar as sementes acaba por disseminar no solo. Já em lavouras de alta produtividade, ele insiste em se propagar devido à dormência da semente, que pode ser de até 12 anos. Isso ocorre devido a impermeabilidade do oxigênio, por mais que o produtor invista em insumos e sementes modificadas a cada arada no solo, pode despertar sementes até então dormentes, e estas gerarem plantas imunes aos insumos aplicados na safra (MARCHEZAN, 1994).

O arroz branco e o arroz vermelho competem por luz, nutrientes e espaço físico. O que os diferencia é que a planta do arroz vermelho é mais alta, apresenta coloração verde mais claro, as sementes apresentam coloração vermelha do pericarpo, degradê natural com alto grau de umidade do grão e latência das sementes (MARCHEZAN, 1994).

Devido às definições biológicas, e decorrentes de algumas pesquisas, têm sido demonstrado que os modelos não lineares simulam melhor os eventos de desenvolvimento, do que os modelos lineares. Isso pode ocorrer em diferentes culturas, como trigo, batatas, melão e mudas de eucalipto (LAGO, 2008).

Dessa forma, este trabalho tem por objetivo aplicar um modelo de Equações a Diferenças Integrais para descrever a dinâmica de crescimento e dispersão do arroz branco e do arroz vermelho, considerando que há bancos de sementes. O modelo considera que o crescimento

das plantas é dependente da densidade, como um efeito da competição intraespecífica. Essa é uma característica que afeta fortemente a fecundidade das plantas e, portanto, é crucial para a dinâmica de uma população de plantas (MACDONALD and WATKINSON, 1981; PACALA, 1986). Além disso, consideramos, com esse modelo, que ocorre dispersão não-local de sementes num ambiente unidimensional finito, homogêneo e constante no tempo.

Sendo assim, na Seção 2, faremos uma breve introdução aos conceitos mais importantes sobre Equações a Diferenças Integrais e como é a formulação de um modelo matemático utilizando este tipo de equações. Na Seção 3, apresentaremos um modelo com equações a diferenças integrais para o crescimento e dispersão de plantas anuais que será utilizado para simular o crescimento do arroz branco e do arroz vermelho. Na Seção 4, serão feitas simulações numéricas com o modelo apresentado na Seção 3 utilizando dados, presentes na literatura, sobre ambos os tipos de arroz e compararemos os resultados. A Seção 5 é reservada para as considerações finais.

2 Equações a Diferenças Integrais

De acordo com Kot (1992), os modelos de Equações a Diferenças Integrais, são discretos no tempo e contínuos no espaço. Tais equações são adequadas para descrever a dinâmica de organismos que apresentam crescimento e dispersão em etapas de tempo bem definidas, e que podem realizar movimentação de longo alcance.

No decorrer dos anos 80, através dos trabalhos de Kot e Schaeffer (1986), tornou-se possível a descrição da dispersão não local em modelos aplicados à Ecologia. Podemos citar alguns exemplos, como: a dispersão de sementes (ANDERSEN, 1991; HART and GARDNER, 1997), dispersão em sistemas presa-predador (NEUBERT and LEWIS, 1995); dispersão de abelhas africanizadas (MISTRO et al., 2005a), dispersão de plantas anuais com banco de sementes (MISTRO et al., 2005b), invasões populacionais (CARA, 2012), dentre outros.

Com enfoque na dispersão de sementes de uma população de plantas, podemos analogamente dizer que as sementes são os indivíduos da população, e por intermédio delas, ocorre a reprodução e dispersão da população. As sementes são semeadas por diferentes mecanismos, como animais, arremessos ou pela ação do tempo (vento). De acordo com a espécie de planta, tais sementes podem fixar-se a uma certa distância da planta originária, caracterizando assim, um processo não local (ANDERSEN, 1991; ALLEN et al., 1996; MISTRO et al., 2005b).

2.1 Formulação de Um Modelo

Inicialmente, para construirmos modelos para crescimento e dispersão de uma população, discretos no tempo e contínuos no espaço, devemos determinar a dinâmica de crescimento local da população. Posteriormente, acoplamos a dispersão através de operadores integrais contínuos

no espaço.

Consideramos que os indivíduos adultos morrem após a reprodução, sendo substituídos por seus descendentes. Um exemplo desse fato, são plantas monocárpicas, como o arroz, que floresce apenas uma vez na vida e depois morre (KOT, 2001).

Podemos estabelecer uma função $f(N_t)$, em geral, uma função não-linear de N_t que descreverá as características principais de crescimento da população. Durante o estágio sedentário (sem dispersão), podemos descrever o crescimento local dos indivíduos por uma equação do tipo

$$N_{t+1} = f(N_t). \quad (1)$$

Para $f(N_t)$ podemos considerar, entre outros, o crescimento de Ricker (1954)

$$f(N_t) = N_t \exp \left[r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right]. \quad (2)$$

No caso da população estar continuamente distribuída, consideramos:

- r : taxa de crescimento intrínseca;
- K : capacidade de suporte;
- x : variável contínua;
- $N_t(x)$: densidade da população na posição x no início da t -ésima geração.

A população é mapeada em $f(N_t(x))$ durante o estágio sedentário, e durante o estágio de dispersão há uma realocação dos indivíduos, devido a migração (KOT and SCHAFFER, 1986). Estes dois processos podem ser descritos pela equação a diferenças integral

$$N_{t+1}(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(N_t(y)) dy \quad (3)$$

- Ω : domínio unidimensional;
- $k(x, y)$: núcleo de redistribuição;
- $k(x, y)dy$: probabilidade de um indivíduo no intervalo $(y, y + dy)$ migrar para a posição x durante o estágio de dispersão.

O núcleo de redistribuição, por ser uma função densidade de probabilidade, para a dispersão dos indivíduos a partir de uma posição y (KOT et al., 1996), deve satisfazer

$$\int_{\Omega} k(x, y) dy = 1, \quad (4)$$

ou seja, não há mortalidade durante o processo de dispersão.

Suponhamos que o meio seja homogêneo, logo a probabilidade de instalação de um indivíduo em uma determinada posição x depende apenas da distância relativa entre esta posição, e a posição original y do indivíduo. Desta forma, o núcleo de redistribuição depende apenas da diferença $k(|x - y|)$

$$N_{t+1}(x) = \int_{\Omega} k(|x - y|)f(N_t(y))dy. \quad (5)$$

Quando o meio for heterogêneo, a probabilidade de instalação dos indivíduos em uma determinada posição pode depender da posição x de instalação e/ou da posição y de partida, em razão de uma atratividade (que pode ocorrer por meio de taxa) ou repulsão de cada posição (MISTRO et al., 2005; RODRIGUES e MISTRO, 2007).

Dependendo do organismo que está sendo considerado, a forma do núcleo de redistribuição pode variar, mas deve refletir o comportamento da espécie. Para o núcleo de redistribuição, podemos considerar, entre outros, o núcleo de redistribuição de Laplace ou exponencial

$$k(x - y) = \frac{1}{2}\eta \exp(-\eta|x - y|). \quad (6)$$

De acordo com esse núcleo de redistribuição (ilustrado na Figura 1), há maior probabilidade de que os indivíduos permaneçam “próximos” à posição de origem. Um exemplo, é o caso da dispersão de sementes de algumas espécies de plantas.

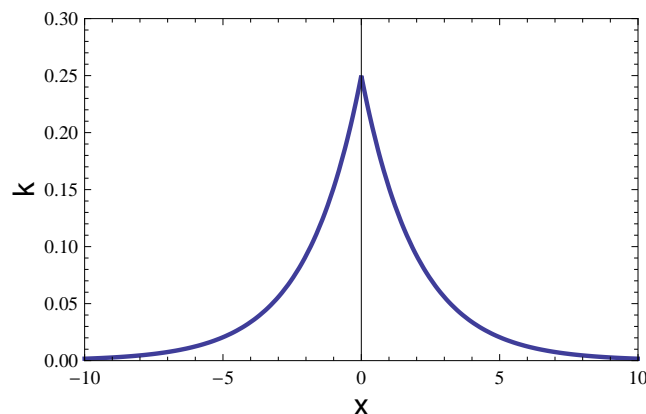


Figura 1: Representação do núcleo de redistribuição de Laplace.

3 Um Modelo para Dispersão do Arroz

Muitas plantas podem completar um ciclo inteiro em um ano. O ciclo de plantas anuais começa com a germinação das sementes e o crescimento das plantas, o qual, em seguida, espalham as suas sementes e finalmente morrem. As sementes que sobrevivem ao próximo inverno irão suportar a geração seguinte. No entanto, como uma estratégia de sobrevivência, nem todas as sementes germinam durante o ano seguinte a sua propagação. Todos os anos, uma quantidade substancial de sementes permanece dormente no chão por um período que pode durar

anos ou mesmo décadas (MISTRO et al., 2005b).

Podemos considerar o arroz vermelho como planta daninha que causa sérios problemas na maior parte das áreas cultivadas. Isso ocorre devido à dormência de suas sementes, que se mantém viáveis no solo por um período de até doze anos (LARINDE, 1979). A planta do arroz vermelho é tipicamente mais alta que a planta do arroz cultivado, suas sementes possuem a coloração avermelhada, porém, devido ao cruzamento natural entre o arroz vermelho e o cultivado, surgem plantas com características morfológicas semelhantes ao arroz cultivado, mas com pericarpo vermelho, tornando difícil sua diferenciação (MARCHEZAN, 1994).

O modelo matemático a seguir, assume que as sementes de mais de dois anos de idade não são mais viáveis e assim, o banco de sementes é considerado para durar no máximo dois anos.

3.1 O Modelo sem Dispersão

Suponhamos que s_t e p_t representam, respectivamente, o número de sementes que germinam (isto é, as mudas) e plantas adultas, na geração t , num ambiente espacialmente homogêneo e constante. Desta forma, o número de panículas (mudas) no início de geração $t + 1$ é dada por

$$s_{t+1} = \alpha\sigma\gamma p_t + \beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma p_{t-1}, \quad (7)$$

onde (EDELSTEIN-KESHET, 1988):

- α : fração de sementes de um ano que germinam;
- β : é a fração de sementes de dois anos de idade que germinam;
- γ : descreve o número de sementes produzidas por planta;
- σ : fração de sementes que sobrevivem a um inverno.

O primeiro termo à direita na equação (7) representa o número de sementes que sobrevivem a um inverno e germinam, o segundo termo à direita representa o número de sementes que sobrevivem a um inverno e não germinam no próximo ano, sobrevivem a outro inverno e em seguida germinam no ano $t + 1$. Os parâmetros α , β e σ não têm unidades, enquanto que a dimensão de γ é $[\gamma] = \frac{\text{sementes}}{\text{plantas}}$.

As mudas competem entre si por nutrientes, luz e espaço, de modo que a densidade de plantas adultas terá crescimento dependente da densidade de mudas (ANDERSEN, 1991; MARCHEZAN, 1994). Para descrevermos este fato, usamos a função de crescimento de Ricker (1954). Assim, a população de plantas adultas no final da geração $t + 1$ é dada por

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= a s_{t+1} \exp(-b s_{t+1}) \\ &= a [\alpha\sigma\gamma p_t + \beta\sigma(1 - \alpha)\sigma\gamma p_{t-1}] \exp[-b(\alpha\sigma\gamma p_t + \beta\sigma(1 - \alpha)\sigma\gamma p_{t-1})], \end{aligned} \quad (8)$$

onde (ANDERSEN, 1991),

- a : indica a fecundidade per capita dos brotos;
- b : representa o grau em que a fecundidade é reduzida pelos efeitos da dependência da densidade.

Os parâmetros a e b apresentam as seguintes dimensões:
 $[a] = \frac{\text{planta}}{\text{semente}}$ e $[b] = \frac{1}{\text{semente}}$.

3.2 O Modelo com Dispersão

Para representarmos a dispersão do arroz, vamos considerar que:

- $S_t(x)$: representa a densidade de mudas na posição x no início da geração t , após as plantas adultas das duas gerações anteriores espalharem suas sementes;
- $P_t(x)$: representa a densidade de plantas adultas no final da geração t , na posição x .

Assim, a densidade de mudas em x no início da geração $t+1$ está relacionada à densidade de plantas adultas nas gerações t e $t-1$ pelo operador integral (MISTRO et al., 2005b)

$$S_{t+1}(x) = \alpha\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x,y)P_t(y)dy + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x,y)P_{t-1}(y)dy, \quad (9)$$

onde:

- Ω : é o domínio unidimensional finito;
- $k(x,y)$: é o núcleo redistribuição;
- $[y, y + dy]$: descreve a probabilidade de uma semente da planta da região cair na posição x durante a fase de dispersão.

Suponhamos que o núcleo redistribuição depende apenas da distância entre x e y , e não explicitamente da sua posição absoluta, isto é, $k(x,y) = k(x-y) = k(y-x)$. Assim, a dispersão das sementes é homogênea e isotrópica.

Em cada posição do habitat, as mudas competem por espaço, luz e nutrientes. Assim, a densidade de plantas adultas na geração $t+1$ na posição x , será descrita pelo operador

$$\begin{aligned} P_{t+1}(x) &= aS_{t+1}(x) \exp[-bS_{t+1}(x)] \\ &= a \left[\alpha\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_t(y)dy + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_{t-1}(y)dy \right] \times \\ \odot & \exp \left[-b \left(\alpha\sigma\gamma \int_{\Omega} k(x-y)P_t(y)dy + \beta\sigma(1-\alpha) \int_{\Omega} k(x-y)P_{t-1}(y)dy \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

4 Simulações

Com o objetivo de analisar a dinâmica de crescimento e dispersão do arroz branco e do arroz vermelho, e compararmos os resultados, realizamos simulações numéricas. Para isso, utilizamos o modelo a diferenças integrais definido nas equações (9) e (10), com núcleo de redistribuição de Laplace, definido pela equação (6). Como ambas as espécies de arroz possuem a mesma dinâmica de crescimento, utilizamos o mesmo modelo, mas alguns valores dos parâmetros são distintos, conforme estabelecidos nas Tabelas 1 e 2, cujos valores foram obtidos em dados do IBGE, conversas informais com agrônomos e validados através de informações contidas no trabalho de Marchezan (1994).

Tabela 1: Valores dos Parâmetros para o Arroz Branco

α	σ	γ	β	a	b	η
0,9	0,005	1400	0,2	0,9	0,1	0,2

Tabela 2: Valores dos Parâmetros para o Arroz Vermelho

α	σ	γ	β	a	b	η
0,1	0,09	1400	0,1	0,9	0,1	0,3

Os valores dos parâmetros descritos nas Tabelas 1 e 2, são decorrentes de estudos sobre a lavoura, sendo alguns valores aproximados devido a necessidade de trabalhar com parâmetros reais. Além disso, para a realização das simulações, consideramos que o domínio em que ocorre o plantio é de 1 metro e unidimensional, e que o tempo é medido em escala de dias.

Salientando a semelhança das plantas e sua essência biológica, é possível verificar que o fator α de fecundidade de ambas é idêntica, bem como, a redução no grau de fecundidade pelo efeito de dependência da densidade e competição intraespecífica, conforme representado pelo parâmetro b . O arroz branco possui uma germinação maior gerando mais plantas adultas que o arroz vermelho, porém o arroz vermelho produz mais sementes e possui uma maior dispersão.

Inicialmente, consideramos que foram plantadas 30 sementes de arroz branco. Ao final do ciclo, geraram 1600 sementes (Figura 2 (a)) e aproximadamente 250 plantas adultas (Figura 3 (a)). Já para o arroz vermelho, consideramos que foram plantadas 10 sementes, o que ao final do ciclo resultou em aproximadamente 4800 sementes (Figura 2 (b)), e em média 38 plantas adultas (Figura 3 (b)).

De acordo com os resultados obtidos, podemos verificar pelos gráficos representados na Figura 2, (a) e (b) que ao final do ciclo, o arroz branco, planta que se quer cultivar, tem menor população de sementes, todavia a então praga (arroz vermelho), apresenta uma alta populacional, mostrando sua dominância. Decorrente das medidas de prevenção e tentativas de extinção externa ao final do ciclo é possível visualizar na Figura 3, a superioridade das plantas adultas do arroz branco (Figura 2 (a)), porém mesmo sofrendo intercorrências, o arroz vermelho consegue chegar a fase adulta.

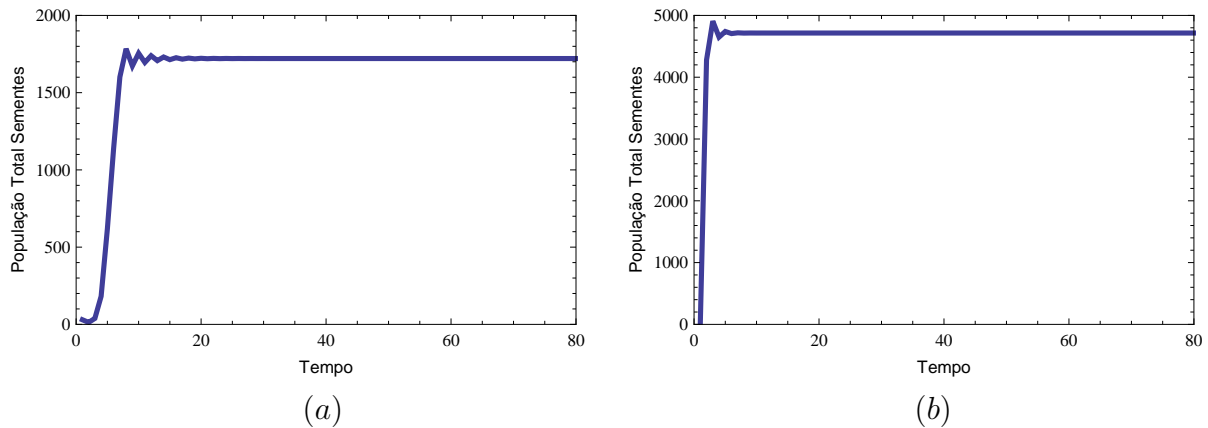


Figura 2: (a) Total de sementes de arroz branco ao final do ciclo; (b) Total de sementes arroz vermelho ao final do ciclo.

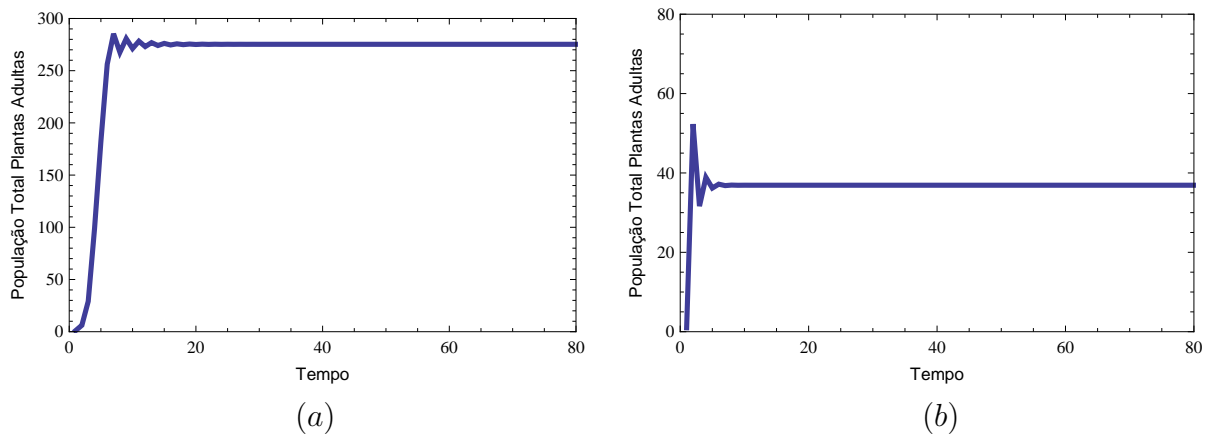


Figura 3: (a) Total de plantas adultas de arroz branco, ao final do ciclo ; (b) Total de plantas adultas de arroz vermelho ao final do ciclo.

Com ênfase no parâmetro b (como o grau de fecundidade é reduzido pelo efeito da dependência e competição intraespecífica), salientamos que devido as plantas competirem diretamente por luz, nutrientes e espaço físico, ao parâmetro sofrer uma leve alteração, levará à extinção da planta daninha. Ao observar o comportamento nas Figuras 4 e 5, considerando que apenas o parâmetro b sofreu alteração, passando de 0,1 para 0,2, é claramente visível a decadência da praga.

Em decorrência do aumento do parâmetro b para 0,3, é ainda mais evidente o decréscimo da praga, conforme ilustrado nas Figuras 6 e 7. Na Figura 7, observamos que quando a competição intraespecífica é muito grande, as plantas adultas do arroz vermelho (praga) são levadas à extinção, mesmo sendo tão resistente e suas sementes podendo ficar em dormência por tantos anos. Esse resultado é relevante, pois conjecturamos que aumentando essa dependência e competição entre as plantas do arroz branco e vermelho, poderia ser um caminho para livrar as lavouras da praga.

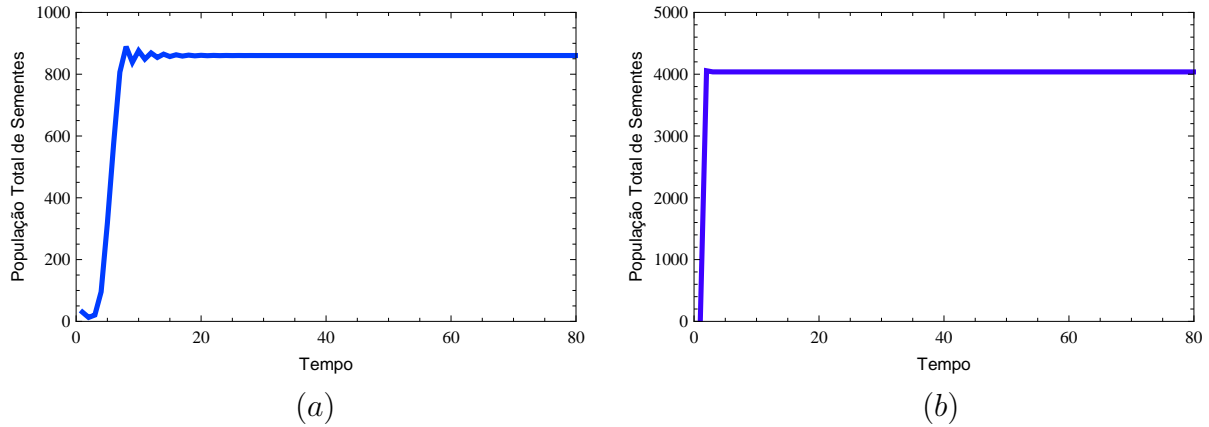


Figura 4: (a) Total de sementes de arroz branco ao final do ciclo; (b) Total de sementes arroz vermelho ao final do ciclo.

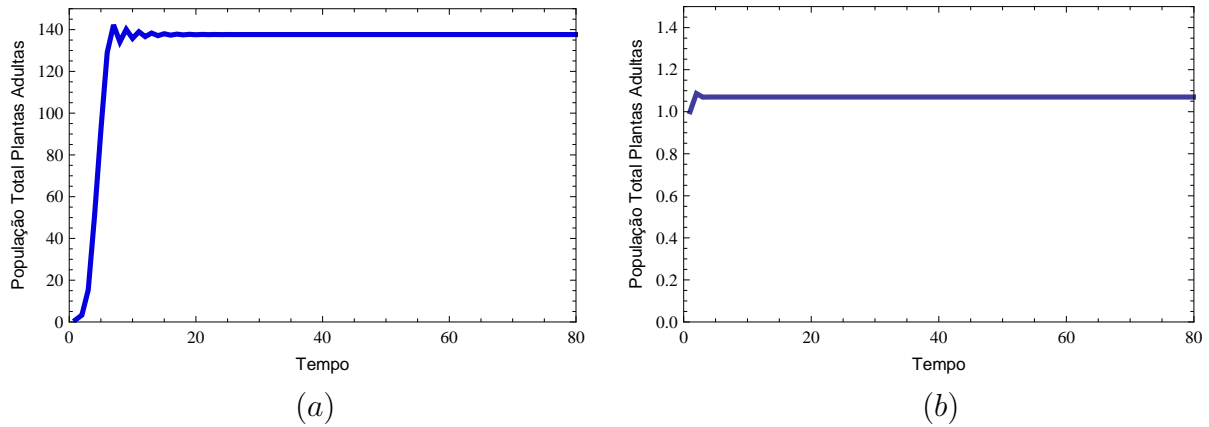


Figura 5: (a) Total de plantas adultas de arroz branco, ao final do ciclo, onde $b=0,2$; (b) Total de plantas adultas de arroz vermelho ao final do ciclo, onde $b=0,2$.

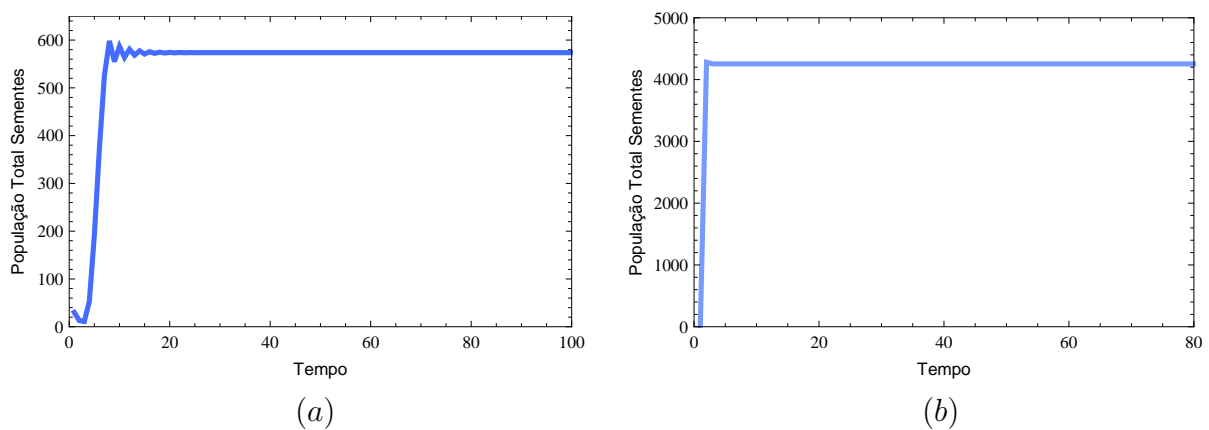


Figura 6: (a) Total de sementes de arroz branco, ao final do ciclo; (b) Total de sementes arroz vermelho ao final do ciclo.

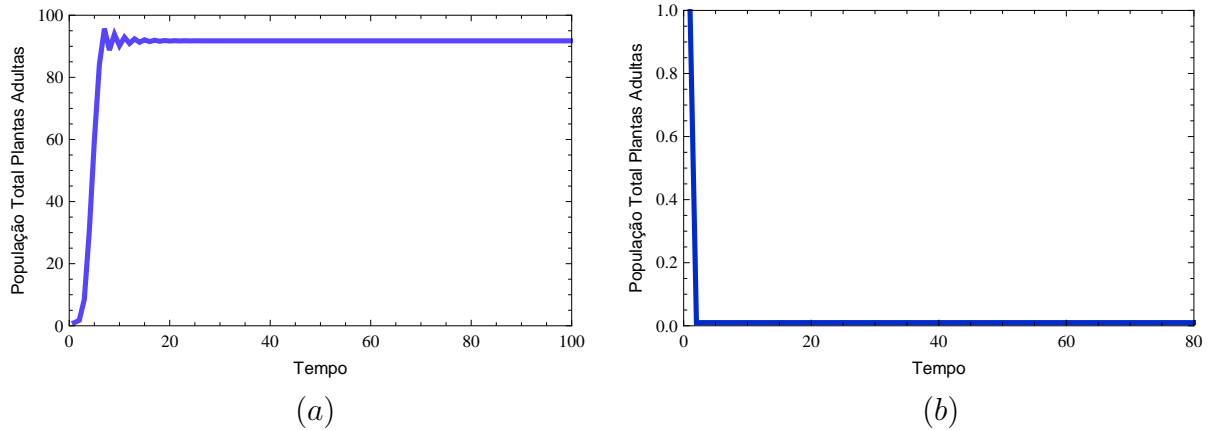


Figura 7: (a) Total de plantas adultas de arroz branco, ao final do ciclo, onde o $b=0,3$; (b) Total de plantas adultas de arroz vermelho ao final do ciclo, onde o $b=0,3$.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos um modelo que descreve o crescimento e dispersão de plantas anuais, o qual foi adaptado para a descrição do crescimento e dispersão do arroz branco e do arroz vermelho. Este modelo foi formulado utilizando equações a diferenças integrais, as quais são discretas no tempo e contínuas no espaço. Este tipo de equação descreve muito bem a interação entre indivíduos que crescem e se dispersam em etapas bem definidas de tempo, com movimentação não local (sementes são lançadas a uma certa distância da planta que as produziu).

Analisando biologicamente, é notória a resistência do arroz vermelho, pois o mesmo pode ficar dormente no solo por mais de uma década, e mesmo assim germinar e desenvolver-se normalmente. Ao trabalharmos com o modelo, observamos que os parâmetros das plantas do arroz branco e do arroz vermelho são muito semelhantes. Contudo, podemos afirmar que a praga do arroz vermelho apresenta maior dispersão e por tal motivo, apresenta maior sobrevida.

Através das simulações numéricas, utilizando os parâmetros obtidos na literatura, foi possível identificar a importância do parâmetro b , que representa a dependência da densidade e competição intraespecífica. Verificamos como a produtividade é reduzida, quanto maior for esse parâmetro. Além disso, a produtividade do arroz vermelho poderá ser tão afetada que levará a planta à extinção. Esse resultado é muito importante, pois se o objetivo do produtor é produzir somente o arroz branco, a extinção do arroz vermelho (planta daninha) é considerada ideal.

Finalmente, devido a complexidade do modelo estudado e quantidade de parâmetros que o mesmo apresenta, concluímos que as simulações numéricas foram uma ferramenta indispensável para a realização deste trabalho, pois os resultados não poderiam ter sido obtidos analiticamente.

6 Referências Bibliográficas

ALLEN, E. J.; ALLEN, L. J. S.; XIAONING, G. **Dispersal and Competition Models for Plants**. Journal of Mathematical Biology, vol. 34, pp. 455-481, 1996.

ANDERSEN, M. **Properties of sommer density-dependent integrodifference equation population models**. Mathematical Biosciences, vol. 104, pp. 135-157, 1991.

CARA, E. R. **Efeito Allee e Dispersão Não Local em Processos de Invasão**. Dissertação de Mestrado, Santa Maria, 2012.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. McGraw-Hill, New York, 1988.

HART, D. R.; GARDNER, R. H. **A spatial model for the spread of invading organisms subject to competition**. J. Mathematical Biosciences, vol. 35, pp. 935-948, 1997.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **PAS - Pesquisa Anual de Serviços**, 2007. [online] Disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/economia/comercioeservico/pas/pas2007>, consultado em 01 de Junho de 2018.

KOT, M.; SCHAFFER, W. M. **Discrete-time growth-dispersal models**. Mathematical Biosciences, vol. 80, pp. 109-136, 1986.

KOT, M. **Discrete-Time Travelling Waves: Ecological Examples**. Journal Mathematical Biology, vol. 30, pp. 413-436, 1992.

KOT, M.; LEWIS, M. A.; van den DRIESSCHE, P. **Dispersal Data and the Spread of Invading Organisms**. Ecology, vol. 77, pp. 2027-2042, 1996.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

LAGO, I. **Desenvolvimento do Arroz e do Arroz Vermelho: Modelagem e resposta à mudança climática**. Dissertação de Mestrado, Santa Maria, 2008.

LARINDE, M. A. **Seed maturation, development and release dormency in red rice**. Master Spience Thesis, Mississippi State University, Mississippi, 1979.

MACDONALD, N.; WATKINSON, A. R. **Models of an Annual Plant Population With a Seedbank.** J. Theor. Biol., vol.93, pp. 643-653, 1981.

MARCHEZAN, E. **Arroz Vermelho: Caracterização, Prejuízos e Controle.** Ciência Rural, Vol. 24, n2, pp. 415-421, Santa Maria, 1994.

MISTRO, D. C.; RODRIGUES, L. A. D.; FERREIRA JR., W. C. **The Africanized Honey Bee Dispersal: a Mathematical Zoom.** Bulletin of Mathematical Biology, vol. 67, pp. 281-312, 2005a.

MISTRO, D. C.; RODRIGUES, L. A. D.; SCHMID, A. B. **A Mathematical Model for Dispersal of Annual Plant Population wit Seed Bank.** Ecological Modelling, vol. 188, pp. 52-61, 2005b.

NEUBERT, M. G.; LEWIS, M. A. **Dispersal and Pattern Formation in a Discrete-Time Predator-Prey Model.** Theoretical Population Biology, vol. 48, pp. 7-43, 1995.

PACALA, S. **Neighborhood Models of Plant Population Dynamics.** Single-species and multispecies models of annuals with dormant seeds, Am. Nat. 128, pp. 859-878, 1986.