UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

JOSIANE MARTINS MARTINS

LADRILHAMENTO NO PLANO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENGENHARIA DIDÁTICA

Bagé
2021

JOSIANE MARTINS MARTINS

LADRILHAMENTO NO PLANO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Acadêmico em Ensino da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Corrêa Ferreira

Coorientadora: Profa. Dra. Sonia Maria da Silva Junqueira

Bagé
2021

.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

M386l Martins, Josiane Martins
Ladrilhamento no plano: uma experiência de engenharia didática / Josiane Martins Martins.
68 p.

Dissertação(Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa, MESTRADO EM ENSINO, 2021.
"Orientação: Cristiano Côrrea Ferreira".

1. Engenharia didática. 2. Ladrilhamento. 3. Geometria plana. 4. Polígonos regulares. I. Título.

JOSIANE MARTINS MARTINS

LADRILHAMENTO NO PLANO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino.

Dissertação defendida e aprovada em: 30, julho e 2021.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Cristiano Corrêa Ferreira

Orientador

(UNIPAMPA)

Prof. Dra. Sonia Maria da Silva Junqueira

Coorientadora

(UNIPAMPA)

Prof. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

(ULBRA)

Prof. Dra. Vera Lúcia Duarte Ferreira

(UNIPAMPA)

Assinado eletronicamente por **CRISTIANO CORREA FERREIRA**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 20/08/2021, às 18:43, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com asnormativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **VERA LUCIA DUARTE FERREIRA**, **PROFESSOR DO MAGISTERIOSUPERIOR**, em 20/08/2021, às 18:56, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **SONIA MARIA DA SILVA JUNQUEIRA**, **PROFESSOR DO MAGISTERIOSUPERIOR**, em 20/08/2021, às 21:05, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0597158** eo código CRC **C4A93FDA**.

AGRADECIMENTO

A Deus, por guiar meus passos e me dar forças para enfrentar as dificuldades encontradas no caminho.

À minha família, em especial aos meus pais, Iara e Felipe, e minha irmã, Daiane, por todo o amor e carinho e pelo apoio de todos os momentos.

Ao Willian, por sempre estar ao meu lado, me incentivando e apoiando em todos meus projetos.

Ao Prof. Dr. Cristiano Corrêa Ferreira, pela orientação, paciência, e dedicação durante todo o tempo do mestrado.

À prof. Dra. Sonia Maria da Silva Junqueira por compartilhar seus conhecimentos e por sua excelente coorientação.

As professoras Prof. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Prof. Dra. Vera Lúcia Duarte Ferreira por aceitarem participar da banca de qualificação e defesa e de suas valiosas contribuições.

Aos alunos da Universidade, pela carinhosa e prestativa acolhida.

Aos meus colegas de trabalho, Andréa, Carolina, Cássio, Daiana e Gisele pelas palavras de apoio e motivação que me ajudaram a seguir em frente.

A todos colegas e professores do PPGMAE, que contribuíram na minha formação de forma significativa.

Aos meus amigos, que marcaram essa jornada com seu apoio, carinho e atenção.

A todos que contribuíram de uma forma direta ou indireta que eu chegasse até aqui.

Meu muito obrigada!

RESUMO

Este trabalho está vinculado ao projeto intitulado “Investigações Matemáticas e Interdisciplinares em Projetos de Aprendizagens” e tem como objetivo geral mostrar a experiência de estudantes do curso de matemática-licenciatura na técnica de ladrilhamento por meio das fases da Engenharia Didática. A presente pesquisa relata o desenvolvimento de um curso concebido durante a pandemia COVID19 e, por esse motivo, estruturado em ambiente virtual, com atividades remotas no software Geogebra Book e síncronas no Google Meet. O propósito do curso é de estimular formas de explorar princípios e generalização de padrões a partir da composição de polígonos no plano por meio da técnica do ladrilhamento. O público alvo é formado por acadêmicos do curso de matemática-licenciatura, matriculados no sexto e oitavo semestre do curso. O objetivo do curso é de analisar o ambiente virtual de aprendizagem com 4 acadêmicos quando submetidos a uma atividade de ladrilhamento por meio de uma engenharia didática. A concepção teórica-metodológica-conceitual é a Engenharia Didática, por meio da qual foram desenvolvidas as seguintes fases: análises prévias; concepção e análise a priori; experimentação, análise a posteriori e validação. Os resultados mostraram que a E.D. contribuiu para a ampliação e construção de conhecimento matemático geométrico, pois foi possível detectar que os acadêmicos compreendem de forma contextualizada a relação entre elementos de um polígono regular e sua aplicação na técnica de ladrilhamentos, assim como foram capazes de realizar conjecturas e generalizações representáveis por meio de afirmações e fórmulas.

Palavras-Chave: Engenharia didática. Ladrilhamento. Geometria plana. Polígonos regulares.

ABSTRACT

This work is linked to the project entitled “Mathematical and Interdisciplinary Investigations in Learning Projects” and aims to show the experience of undergraduate mathematics students in the tiling technique through the phases of Didactic Engineering. This research reports the development of a course conceived during the COVID19 pandemic and, for this reason, structured in a virtual environment, with remote activities in Geogebra Book software and synchronous in Google Meet. The purpose of the course is to encourage ways to explore principles and generalization of patterns from the composition of polygons in the plane through the technique of tiling. The target audience is made up of academics from the undergraduate mathematics course, enrolled in the sixth and eighth semester of the course. The objective of the course is to analyze the virtual learning environment with 4 students when submitted to a tiling activity through a didactic engineering. The theoretical-methodological-conceptual conception is Didactic Engineering, through which the following phases were developed: previous analyses; design and a priori analysis; experimentation, a posteriori analysis and validation. The results showed that E.D. contributed to the expansion and construction of geometric mathematical knowledge, as it was possible to detect that academics understand in a contextualized way the relationship between elements of a regular polygon and their application in the tiling technique, as well as were able to carry out conjectures and representable generalizations through of statements and formulas.

Keywords: Didactic engineering. Tiles. Plane geometry. Regular polygons.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

BNC Formação - Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica

ED – Engenharia Didática

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

PPC – Projeto Pedagógico do Curso

TSD – Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A problemática descrita neste projeto de pesquisa durante o Mestrado Acadêmico em Ensino da Universidade Federal do Pampa tem sua origem durante a vida acadêmica da pesquisadora, quando sua curiosidade com a área de Geometria foi aguçada, por meio de reflexões, observações e vivências durante os estágios, participação em projetos institucionais e trabalhos observados no campo educacional.

Diante dessa inserção no ambiente escolar, durante sua formação inicial, a pesquisadora percebe a dificuldade dos alunos em relação a conceitos próprios da Geometria, além do pouco aprofundamento do conteúdo e da falta de contextualização desse ensino com a realidade dos alunos.

Nessa direção, entende-se que as dificuldades dos alunos não é um problema recente, pois é alvo de inúmeras pesquisas relacionadas a essa temática. A esse respeito, Stefani *et al.* (2019) mencionam a partir de seus estudos, que muitas vezes os professores deixam o ensino de geometria para o final do ano letivo, seja por falta de domínio e/ou tempo, o que para esses autores seria causa do pouco aprendizado do conteúdo. Para Teixeira (2018), muitos docentes não conseguem relacionar a geometria das figuras planas, vistas nos livros com a geometria encontrada no cotidiano dos alunos, ficando presos aos métodos apresentados pelos livros didáticos.

Já para Teixeira (2018), uma forma de despertar interesse nos estudantes é utilizar objetos encontrados no cotidiano deles. Para autores como Afini *et al.* (2013), Zanella *et al.* (2018) utilizar softwares de geometria dinâmica também contribuem na compreensão dos conceitos e propriedades dos objetos geométricos.

A preocupação com contexto significativo para aprendizagem é evidenciada no documento da Base Nacional Comum curricular (BNCC), como destaca:

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 299).

Assim, além de enfatizar a importância do contexto no qual o aluno está inserido na sociedade, através de suas vivências familiar, social e cultural, a BNCC também leva em conta o protagonismo dos estudantes em uma cultura digital de multimídias como sons, imagens, vídeos e animações. Por meio do texto da BNCC percebe-se que a ideia principal é: “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo”. (BRASIL, 2017, p. 267)

Diante do exposto, propõe-se uma pesquisa que envolva a técnica de Ladrilhamentos como proposta de contribuição para reduzir a problemática em relação a uma das dificuldades encontradas na área de Geometria Plana. Ladrilhamento é uma arte que consiste em cobrir inteiramente um plano sem superposições de figuras, nem espaços vazios entre elas. Essa técnica possibilita diferentes relações entre campos distintos do conhecimento geométrico, conforme se verifica na habilidade (nº EF07MA27) do texto da BNCC:

> Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. (BRASIL, 2017, p. 309).

Essa habilidade, possibilita que o estudante investigue e participe de forma ativa no seu aprendizado. Nesse sentido, essa técnica contribui no aprendizado do estudante, conforme destacam os autores Mello (2015) e Gumieri (2018) que a partir dos resultados de suas pesquisas concluíram que o manuseio dos polígonos em busca de ladrilhar o plano torna o aprendizado mais interessante, dinâmico e significativo, pois os ladrilhos são encontrados no dia a dia dos estudantes, como em pisos de cerâmicas e madeira, forros, estampas de tecidos, crochês e empilhamentos de objetos iguais.

Desse modo, apresenta-se o desenvolvimento de um esquema experimental, baseado na realização, observação e análise de uma sequência didática para “conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados”. (BRASIL, 2017, p. 545).

A proposta metodológica utilizada é a Engenharia Didática. Essa metodologia, segundo Machado (2012) permite que a pesquisadora entenda, planeje e analise as contribuições que a fase da experimentação proporcionará com a técnica de ladrilhamentos. A Engenharia Didática se divide em quatro fases: pesquisa preliminar; concepção e análise a priori; experimentação e análise a posteriori e validação.

Neste estudo destaca-se o desenvolvimento dessas quatro fases por meio da busca das principias causas de dificuldades dos alunos e de principais métodos e recursos utilizados que supram a carência do ensino nesta área, do planejamento de sequências didáticas de ladrilhamentos, de experimentação proposta em atividades de investigação e generalização de padrões.

Para viabilizar a pesquisa durante a pandemia de COVID-19 foi necessário utilizar os recursos do Geogebra. Pois, esse software possui, também a funcionalidade de Geogebra Book. De acordo com Azevedo (2018) trata-se de um livro digital que é disponibilizado gratuitamente na web, onde é possível de maneira hipertextual elencar vídeos, áudios, textos, recursos digitais e exercícios. Nóbriga (2020) destaca também que esse livro, pode ser utilizado de forma presencial ou a distância.

Assim, diante dos aspectos apresentados, espera-se responder ao longo da pesquisa à seguinte questão: “A utilização da Engenharia Didática aliada à técnica de ladrilhamentos contribui para a realização de conjecturas e generalizações de padrões matemáticos a partir dos tipos e composições de polígonos em estudantes de graduação do curso de licenciatura em matemática?”

Desse modo, esta pesquisa tem como objetivo geral investigar a experiência de estudantes do curso de matemática-licenciatura na técnica de ladrilhamento por meio das fases da E.D.

E como objetivos específicos destacam-se os seguintes:

- Apresentar reflexões teóricas acerca do alcance da Engenharia Didática para o ladrilhamentos no plano;

- Reconhecer os padrões, tipos e composições de polígonos regulares no ladrilhamento bem-comportado a partir das representações de estudantes do curso de matemática-licenciatura;

- Validar ou refutar as hipóteses da Engenharia didática propostas para uma técnica de ladrilhamento no plano.

1.1 Organização do projeto

A pesquisa está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1 encontra-se a introdução com a problemática, questão e objetivos da pesquisa;

No capítulo 2, apresenta-se a revisão de literatura, com a apresentação de estudos que fundamentam e justificam a Engenharia Didática e os ladrilhamentos;

O capítulo 3 compreende o referencial teórico da Engenharia Didática salientando sua origem e contextualização, assim como, suas fases.

O capítulo 4 apresenta a metodologia, por meio da qual espera-se responder à questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos;

O capítulo 5 mostra os resultados e discussão, através da análise dos quatro participantes. Essa seção corresponde a quarta fase, a análise a posteriori e validação, da ED;

O capítulo 6 é apresentado as conclusões;

Por fim, o capítulo 7 são apresentadas as sugestões de trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Essa revisão está constituída pela apresentação da síntese de artigos e dissertações relacionados à temática da Engenharia Didática e da técnica de ladrilhamentos e tem a finalidade de realizar um levantamento de pesquisas recentes que confirmam também a problemática da existência de dificuldades no aprendizado de Geometria Plana na Educação. Por meio dessa revisão, busca-se reconhecer como são explicitadas as dificuldades dos alunos em relação a conceitos próprios da Geometria, além de verificar aspectos relacionados ao aprofundamento do conteúdo e à contextualização desse ensino. Desse modo, destacam-se os estudos de (ASSUMPÇÃO, 2015; ALVES, 2016; SOUZA *et al.,* 2018; SANTOS *et al.,* 2018, SALLUM, 2016; DOMINGUEZ *et al.,* 2013; SANTOS, 2012; GUTIERREZ, 2011; AFINI, 2013; JULIO *et al.,* 2018; MELLO, 2015; GUMIERI, 2018; SANTIAGO *et al.,* 2021) desenvolvidos por pesquisadores das áreas de Educação e de Ensino.

2.1 Engenharia Didática e o ensino de perímetros e áreas de polígonos

De acordo com Assumpção (2015), o aprendizado da Geometria para alunos do 7° ano do Ensino Fundamental pode ser obtido também por meio de conceitos de perímetros e áreas de polígonos. Desse modo, tem como objetivo propor uma sequência didática que utilize um ambiente dinâmico a partir do aporte teórico dos registros de representação semiótica de Duval.

Para obter esse aprendizado, Assumpção (2015) utilizou a proposta metodológica da Engenharia Didática e suas fases. Assim, na fase preliminar da Engenharia Didática desenvolvida em sua pesquisa, realiza-se uma investigação sobre pesquisas que procuraram compreender melhor as áreas e perímetros de polígonos, assim, foram encontrados assuntos relativos à Geometria no contexto brasileiro, destacando o papel dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e dos livros didáticos nessa temática. Esse autor avalia também o ensino e aprendizagem de

Geometria aliado ao uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de ambiente de geometria dinâmica, o Geogebra[1].

Na segunda fase da Engenharia Didática o autor realiza ações e previsões de possíveis estratégias e dificuldades que podem surgir, bem como o estudo das ferramentas que podem ser utilizadas durante a atividade.

Na terceira fase detalha como ocorreu a experimentação e destaca pontos como: dificuldades e facilidades apresentadas pelos alunos e as diferentes formas de resolução das atividades.

Na última fase, o autor reavalia os objetivos traçados na segunda fase, faz comparação entre as fases e verifica se o *software* auxilia nas resoluções de problemas como: o cálculo de área e do perímetro com o olhar das representações semióticas de Duval (2003, 2005, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2013).

Ao final, Assumpção (2015) conclui que a metodologia aplicada fez com que alunos desmotivados demonstrassem interesse e participassem de forma ativa na resolução de problemas, além disso, percebeu que os estudantes melhoraram a interpretação das representações geométricas.

A partir da pesquisa mencionada, percebe-se que trabalhar de uma forma dinâmica seja por *softwares* como GeoGebra ou outras formas manipuláveis como objetos, contribuem para que o estudante participe de uma forma ativa, além de permitir visualizar melhor os diferentes tipos de representações que ajudam na obtenção de um melhor resultado. Desse modo, encontra-se na proposta metodológica uma possibilidade de contribuição para desenvolver atividades dinâmicas com subsídios de referenciais teóricos que contribuem para que o ensino seja mais significativo.

2.2 Engenharia Didática e TSD[2] na Sequência de Fibonacci[3]

Outro estudo na área matemática é o de Alves (2016) que aplica as propriedades da sequência de Fibonacci através da implementação da Engenharia Didática.

---

[1] O GeoGebra é um software matemático dinâmico gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino que une geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em um pacote fácil de usar. Disponível em: https://blog.geogebra.org/2014/09/geogebra-goes-3d/

[2] Segundo Brousseau (1986) a Teoria das Situações Didáticas caracteriza-se por ser uma metodologia de ensino que se desmembra em quatro etapas dissemelhantes: Situação de ação, formulação, validação e institucionalização.

[3] Segundo Alves (2016) a Sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/20879/pdf.

Alves (2016) fundamenta seu trabalho em uma análise epistemológica que faz parte da primeira fase da Engenharia Didática, por meio de assuntos relacionados ao ensino, a ação didática, análise das concepções dos alunos e a análise atual da situação acadêmica, por meio de buscas através de livros didáticos, artigos, sites e vídeos.

Na segunda fase, Alves elabora e analisa uma sequência de atividades com a finalidade de responder questões e validar hipóteses constituídas na primeira fase da Engenharia Didática. O autor, também analisa o grau de conhecimento dos alunos acerca da sequência de Fibonacci e a noção de indução matemática[4].

Na terceira fase, o autor, descreve o público alvo, os instrumentos de coleta de dados, descrição do que foi abordado em cada encontro com os estudantes e como ocorreu cada Situação Didática (ação, formulação, validação e institucionalização) da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986).

Na quarta fase, analisa as respostas obtidas e discute as questões abordadas pelos alunos durante as atividades.

Alves conclui seu estudo mostrando que foi de grande valia a sequência de ensino, pois os estudantes conseguiram conjecturar a possibilidade de evolução da sequência de Fibonacci.

Essa pesquisa é relevante pois assim fica claro as fases da Engenharia Didática, bem como a importância dos subsídios teóricos das Situações Didáticas. Nota-se que a utilização de situações-problemas em sequências de ensino contribui para que o aluno seja ativo no seu processo de aprendizagem. Salienta-se que as atividades quando bem planejadas contribuem na construção do conhecimento.

2.3 Engenharia Didática e TSD na Sequência de Jacobsthal

Já Souza *et al*. (2018) aplicam a Engenharia Didática para sistematizar e organizar uma pesquisa na qual fazem a descrição do tema Sequência de Jacobsthal[5] através da Teoria das Situações Didáticas.

---

[4] Indução matemática de acordo com Alves (2016), serve muitas vezes não apenas para provar coisas, “mas também para definir coisas”. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/20879/pdf

[5] Segundo Souza (2018) os números de Jacobsthal são uma sequência numéricas recursivas. Tal sequência recebe esse nome como referência ao matemático Ernest Erich Jacobsthal. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/3119

Na primeira fase da Engenharia Didática, os autores usam as dimensões didática, epistemológica e cognitiva. Na dimensão didática, analisam a sequência de Jacobsthal através de pesquisa de cunho bibliográfico referentes ao objeto de estudo. Com essa análise, mostram a possibilidade de transformar o estudo científico em conteúdo para ser ministrado em sala de aula. Na dimensão epistemológica, buscam a origem e o progresso dos conceitos relativos à sequência de Jacobsthal, nessa etapa associam a sequência a outros conteúdos e constroem analogias, que vão desde o ensino médio até o ensino superior. Na dimensão cognitiva recorrem a situações didáticas para que o aluno consiga manifestar e diferenciar a intuição, de modo a obter um raciocínio lógico dedutivo.

Na segunda fase utilizam somente as variáveis microdidáticas que estão relacionadas com os fenômenos encontrados no interior da sala de aula sobre o ensino da história da matemática, especificamente, o conteúdo referente a Sequência de Jacobsthal. Ainda nessa fase, os autores analisam e planejam os conceitos previstos nas sequências didáticas e na Teoria das Situações Didáticas. Para isso, discutem cada situação problema que foi tratada em sala de aula.

Ao final, concluem que as fases da Engenharia Didática contribuem tanto na elaboração das sequências didáticas como na construção das situações de ensino citadas na Teoria das Situações Didáticas. Além de permitir que o estudante generalize os conceitos matemáticos e estabeleça relações entre os conteúdos da sequência de Jacobsthal.

Em relação a essa pesquisa, assim como na anterior percebe-se que a metodologia utilizada complementa a Teoria das Situações Didáticas.

Além disso, contribui para que o aluno se torne ativo no seu processo de aprendizagem. Essas técnicas devem ser bem planejadas porque assim, garantem que o aluno alcance o objetivo proposto no decorrer do aprendizado.

2.4 Engenharia Didática na temática da olimpíada de matemática

Os estudos de Santos *et al*. (2018) apresentam a aplicação da Engenharia Didática na temática da olimpíada de matemática, para definição e construção de conceitos sobre Geometria Plana com o uso do software GeoGebra.

Na primeira fase da Engenharia Didática, os autores enfatizam os seguintes temas: estudar a origem histórica do objeto de estudo através de livros e dissertações e analisar o conhecimento prévio do estudante. Na segunda fase, utilizam somente as variáveis microdidáticas e para descrição e elaboração da situação didática, fundamentaram-se na Teoria das Situações Didáticas.

Ao final, esses autores concluem que a situação problema aplicada faz os estudantes se tornarem ativos no seu processo de aprendizagem através da participação em um ambiente de discussão que se tem como objetivo adquirir conhecimento matemático. Além de permitir a generalização e conjecturação dos elementos envolvidos.

Essa pesquisa é pertinente porque reforça, ainda mais, que as duas primeiras fases são fundamentais para desenvolver uma boa ED.

2.5 Engenharia Didática na estruturação da situação didática olímpica

Santiago *et al.* (2021) realiza uma ED expondo uma estruturação de situação didática olímpica, onde destaca o ensino de Geometria Plana através do recurso tecnológico, o Geogebra.

Na primeira fase da ED, os autores realizam um estudo bibliográfico de conteúdos relacionados ao contexto e o ensino das olímpiadas internacionais de matemática; o ensino de geometria plana; as situações didáticas sob o olhar da TSD, bem como, o documento da BNCC. Já na segunda fase, os autores, através da análise da fase anterior, decidem a situação-problema que será trabalhada, bem como, apresentam a proposta didática olímpica com a resolução dos problemas e as situações didáticas utilizadas.

Santiago *et al.* (2021) concluem que a ED junto ao software Geogebra é importante, pois permite que o professor pesquisador de matemática faça um estudo prévio dos problemas comuns do ensino de geometria, contribuindo na diminuição e superação de tais dificuldades.

Nesse sentido, encontra-se na proposta da Engenharia Didática uma possibilidade de tornar viável e significativo o ensino de Geometria Plana tanto na Educação Básica como no Ensino Superior.

Através da revisão realizada, pode-se concluir que a Engenharia Didática, bem como, a Teoria das Situações Didáticas, permitem realizar pesquisas cuja finalidade recai sobre a autonomia dos estudantes na construção do conhecimento matemático. Dessa maneira, admite-se que esses campos teóricos se mostram viáveis para estudar e refletir sobre as necessidades cognitivas dos alunos na construção do conhecimento geométrico, o que vai ao encontro do objetivo desta pesquisa, que é mostrar a experiência de estudantes do curso de matemática-licenciatura na técnica de ladrilhamento por meio das fases da ED.

2.6 Ladrilhamento

Segundo Sallum (2016), as primeiras peças de ladrilhos foram encontradas no Egito há cerca de 5000 anos a. C. e outros povos como os romanos e mediterrâneos, além de mouros, árabes e cristãos também retratavam as pessoas e a natureza através de figuras geométricas, entrelaçadas conforme se contempla ainda nos dias de hoje, como no palácio de Granada na Espanha. Essa arte nada mais é do que o preenchimento do plano por formas sem buracos ou superposição.

A técnica do ladrilhamento aparece em várias aplicações do cotidiano, como em pisos de cerâmicas e madeira, forros, estampas de tecidos, crochês e empilhamentos de objetos iguais. Por exemplo, na cidade de Bagé é comum encontrar ladrilhamentos cerâmicos nas igrejas, fachadas e calçamentos.

Em relação ao aparecimento de ladrilhos na região, segundo Dominguez *et al.* (2013), ocorre a partir do intercâmbio entre as cidades de Bagé, Jaguarão e Pelotas, em razão das constantes viagem culturais dos filhos de fazendeiros, charqueadores e comerciantes ao Rio de Janeiro ou à Europa, em meados do século XIX. Assim, Pelotas cresceu inspirada nas influencias arquitetônicas e de planejamento da Europa e dessas viagens, trouxeram também os ladrilhos hidráulicos, que foram fabricados e se espalharam em revestimentos de pisos no chão das áreas frias das construções pelotenses. Na cidade de Pelotas, nos meses sem tarefas com o gado era produzido ladrilhos hidráulicos e telhas.

No ano de 1884, segundo Santos (2012), foi construída uma estrada de ferro que liga Rio Grande, Pelotas e Bagé formando o tripé econômico (Porto, Charque e Gado), favorecendo as exportações, importações e trocas de mercadorias. A partir dessa interligação entre as cidades, conforme Gutierrez (2011), Bagé assemelha-se às características de Pelotas em relação à urbanização e ao uso de ladrilhos, a partir da construção do segundo loteamento da cidade de Bagé, situado nas proximidades da Catedral de São Sebastião.

A Figura 1 a seguir mostra alguns ladrilhos encontrados na obra arquitetônica Palacete Pedro Osório em Bagé, (a) visão frontal; (b) revestimento área externa e (c) revestimento interno.

Figura 1 (a, b, c): Ladrilhos encontrados no Palacete Pedro Osório em Bagé

(a)	(b)	(c)

Fonte: Autora (2019)

Conforme Imenes (2002) esses ladrilhamentos não são encontrados somente na construção do homem, mas também na natureza, como em favos de mel, cascos de tartaruga, casca de abacaxi, escamas de peixe e etc.

Segundo Salum (2016) existem 11 tipos de ladrilhamentos que consequentemente obedecem às seguintes condições: são polígonos regulares; a intersecção de dois polígonos é sempre um lado ou um vértice ou vazia; a distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

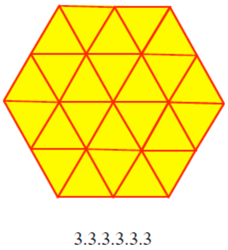
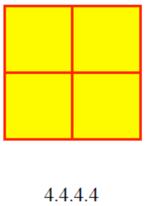
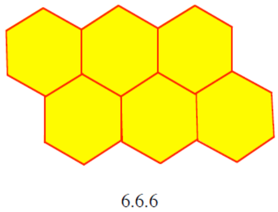
Serão regulares se todos os ladrilhos forem congruentes e semirregulares se conter 2 ou 3 tipos de ladrilhos. Dos 11 tipos, 3 são do tipo regular e os 8 restantes semirregulares.

Para os mosaicos serem regulares obedecem às condições acima, de modo que os ladrilhos de cada mosaico sejam congruentes. Existem apenas 3 tipos possíveis: 6 triângulos equiláteros (serão indicados por 3.3.3.3.3.3); 4 quadrados (serão indicados por 4.4.4.4); 3 hexágonos (serão indicados por 6.6.6).

Os padrões, 3.3.3.3.3.3, por exemplo, referem-se à quantidade de triângulos que precisam para fechar o vértice. Nesse caso, são necessários 6 triângulos e o número 3 utilizado refere ao número de lados. Assim, quando referir-se a quadrados, são necessários 4 polígonos com número de lados 4, no qual teremos 4.4.4.4. Assim como, no caso do hexágono são necessários 3 com número de lados igual a 6, formando 6.6.6. E assim constrói-se os demais padrões dos ladrilhamentos.

As Figuras 2 e 3 a seguir mostram imagens das 11 tipologias, sendo a figura 2, os 3 do tipo regular e a figura 3, os 8 semirregulares.

Figura 2: Tipos de ladrilhamentos regulares

		
1	2	3

Fonte: Sallum (2016, p. 8-9)

Figura 3: Tipos de ladrilhamentos semirregulares

(continua)

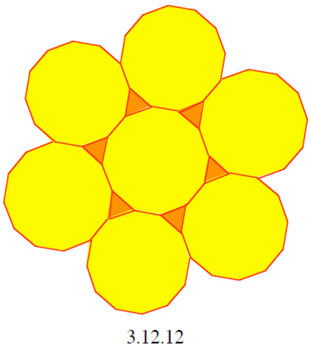
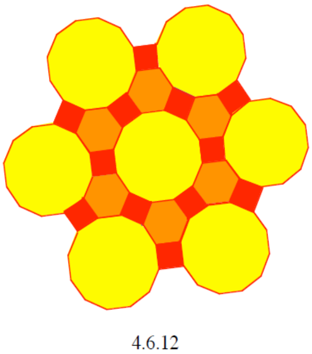
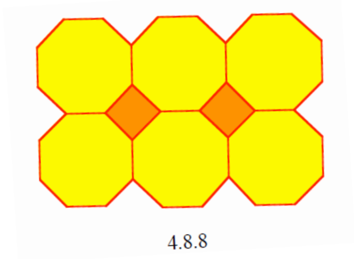
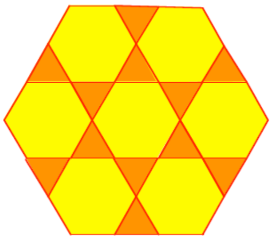
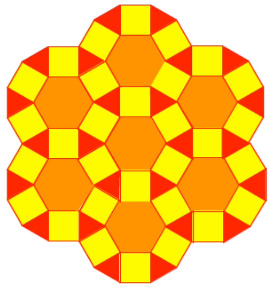
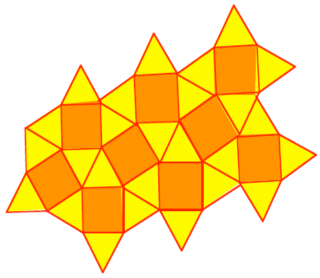
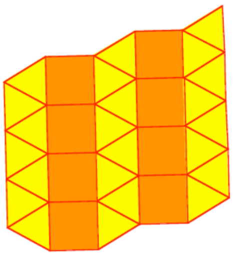
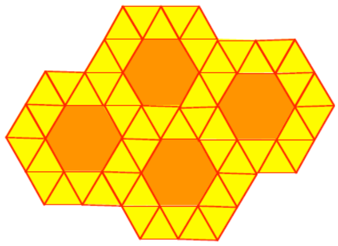
		
1	2	3

Figura 3: Tipos de ladrilhamentos semirregulares

(conclusão)

 3.6.3.6	 3.4.6.4	 3.4.3.3.4
4	5	6
 3.3.3.4.4	 3.3.3.3.6	
7	8	

Fonte: Sallum (2016, p. 8-9)

Conforme Afini (2013) para descobrir o padrão que forma o ladrilhamento com diferentes polígonos pode-se usar uma equação, que leva em conta que para ladrilhar é necessário um mínimo de três polígonos e a soma interna dos ângulos é 360°. Como na equação 1 a seguir:

$$\frac{(n_1-2)\,.180º}{n_1} + \frac{(n_2-2)\,.180º}{n_2} + \frac{(n_3-2)\,.180º}{n_3} = 360° \qquad (1)$$

n é o número de lados do polígono, onde n_1 corresponde ao polígono 1, n_2 corresponde ao polígono 2 e n_3 polígono 3.

Após manipulações algébrica, obtém- se a equação 2 a seguir:

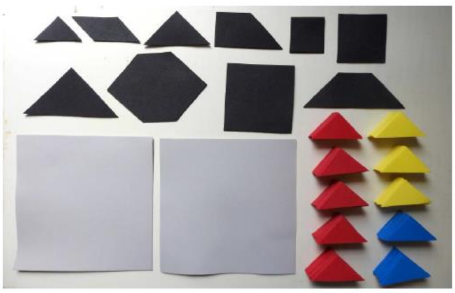
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Onde os n é o número de lados, com essas equações é possível encontrar o padrão que formará um ladrilhamento.

Além de sua parte histórica os ladrilhos podem ser explorados na sua parte matemática, como verifica-se nas pesquisas a seguir:

Na pesquisa de Julio *et al.* (2018), os autores apresentam um produto educacional para formação inicial e continuada para professores dos anos finais de Ensino Fundamental, proposta pela Secretaria Municipal de Educação de Alfenas-MG. Nesse trabalho, os autores destacam a importância de utilizar objetos manipuláveis, envolvendo ladrilhamentos e educação matemática para o ensino e aprendizagem de Geometria. Essa proposta tem o objetivo de localizar números racionais na reta através das medições, perímetro, área e outras conexões que envolvam a matemática e a arte. Destacam também que para trabalhar a partir dos ladrilhamentos na educação matemática foram inspirados nos elementos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL,1998) no que se refere à composição e decomposição de figuras e cálculo de áreas. Para realização das atividades inicialmente os autores criaram kits em EVA e sugestão de atividades. Em outro momento, trouxeram atividades que envolvesse a proposta inicial. Em suas considerações finais, acreditam que esse método discutido no trabalho possa contribuir para os processos de planejamento e desenvolvimento dos professores na área da matemática. A seguir a Figura 4 mostra uma imagem das peças utilizadas no respectivo projeto.

Figura 4: Kits em EVA do projeto



Peças do projeto

Fonte: Julio *et al.* (2018)

Mello (2015), apresenta em sua pesquisa a experiência de trabalhar com possíveis ladrilhamentos no plano com polígonos regulares, respeitando seus conceitos e o Teorema de Kepler[6] para estudantes do terceiro ano no qual tem-se como objetivo um estudo mais significativo e atrativo. Para explorar essas possibilidades o estudo é construído pela investigação sem precisar memorizar as definições e os padrões de ladrilhamento pois buscava-se que esses padrões sejam deduzidos e entendidos, de maneira mais significativa pelo estudante. Em suas considerações finais, conclui que através do manuseio e visualização dos materiais manipuláveis favorece o levantamento de conjecturas [7] e experimentação de hipóteses tornando o aprendizado mais significativo e interessante. Os estudantes percebem e constroem as 11 possibilidades de ladrilhar no plano com a utilização de polígonos regulares e encontram os padrões de ladrilhamentos.

Gumieri (2018) em sua pesquisa buscou explorar os conceitos de ângulos internos e externos de polígonos regulares utilizando o ladrilhamento no plano. Onde o objetivo é estimular o interesse em investigar o campo geométrico em alunos do ensino fundamental (7º ano). Percebe-se que com essa aprendizagem dinâmica os estudantes se sentem mais à vontade e descontraídos e que eles colaboram e ajudam uns aos outros e ficou evidente que eles não possuem um bom conhecimento prévio sobre os conceitos de Geometria. Conclui também que essas atividades lúdicas e com o professor mediando o processo de aprendizagem aumentam a motivação dos alunos. As atividades práticas como jogos, desafios e peças de ladrilhamento torna o ensino de geometria mais prazeroso pois além de desenvolver os conceitos da Geometria plana como a soma dos ângulos, simetria, rotação, os polígonos e a comparação de figuras também estimulam a criatividade dos estudantes.

Portanto, a utilização de ladrilhos é uma boa técnica para motivar o aluno a aprender, pois com ela é possível que o estudante construa seu aprendizado de forma mais dinâmica e contextualizada.

[6] Nesta pesquisa de Teorema de Kepler refere-se a obra que explorou três aspectos: geometria, música e astronomia no qual apresentou como resultado que existem exatamente onze maneiras de cobrir o plano utilizando- se exclusivamente polígonos regulares sujeitos a condições de bom comportamento.
[7] Hipótese admitida como verdadeira sem que haja comprovação formal.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática surge na década de 80 com a finalidade de analisar situações didáticas na área de Educação Matemática.

Segundo Artigue (1995), o termo “Engenharia Didática” refere-se à analogia feita ao trabalho de um engenheiro, que planeja um projeto minuciosamente, com essa metodologia o professor-engenheiro idealiza a realização de um projeto de aprendizagem para um certo número de alunos com uma sequência de aula organizada e articulada num período estipulado pelo professor.

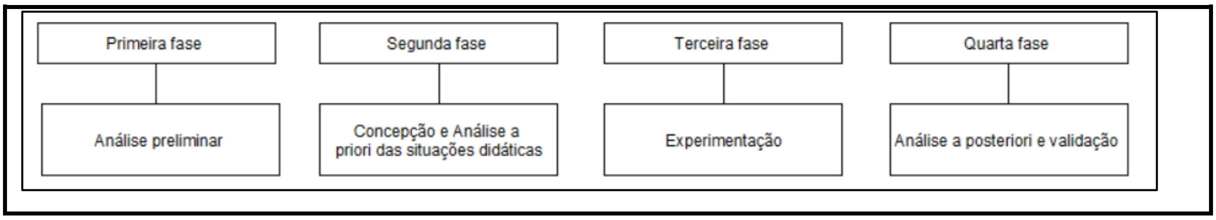
Para Artigue (1995, p. 36, tradução nossa), a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa “[...] caracteriza-se em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado nas "realizações didáticas" na aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino”.

Desse modo, a autora ressalta que a Engenharia Didática é todo o ensino de determinado conteúdo desde sua construção até a observação e análise das sequências realizadas pelos alunos.

3.1.1 As fases da Engenharia Didática

A Engenharia Didática é dividida em 4 (quatro) fases, conforme a Figura 5.

Figura 5: Fases da engenharia didática



Fonte: Adaptado de Artigue (1995).

A primeira fase é a ***Análise Preliminar***, onde são feitas considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos (MACHADO, 2012). Nessa fase deve ser realizada a análise das dificuldades e empecilhos no aprendizado do estudante, assim como análise do ensino atual e a forma como é contemplado no ensino a análise epistemológica dos conteúdos.

Assim, nessa fase, segundo Artigue (1995) o estudo pode ser distinguindo em três dimensões (Epistemológica, Cognitiva e Didática), conforme diferenciação descrita a seguir:

> • A dimensão epistemológica associada às características do conhecimento em jogo;
> • A dimensão cognitiva associada às características cognitivas do público a quem o ensino é direcionado;
> • A dimensão didática associada às características do funcionamento do sistema de ensino. (ARTIGUE, 1995, p. 40, tradução nossa)

Desse modo, para exemplificar Machado (2012) apresenta como objeto de aprendizagem a função polinomial do 2º grau, no qual distingue as dimensões da seguinte maneira:

> - Epistemológica, associada à função polinomial do 2º grau, sua gênese, seu lugar na diversidade dos problemas;
> - Cognitiva, associada a alunos de 8ª série;
> - Didática, associada ao sistema de ensino vigente. (MACHADO, 2012, p. 240)

Assim, nota-se a relevância da primeira fase da Engenharia Didática ao permitir que o pesquisador, através de uma visão geral do tema escolhido da pesquisa, contribua para que seu trabalho tenha um bom resultado.

Almouloud (2007) destaca que um dos objetivos da primeira fase é “[...] identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a (s) questão (ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa”.

Dessa maneira, segundo Almouloud (2007), essa fase pode abranger 3 vertentes: 1) **Estudo da organização matemática:** investigação da origem do tema, suas aplicabilidades e barreiras epistemológicas; análise do ensino cotidiano e seus resultados; apresentação dos entendimentos e conhecimentos tanto matemáticos como culturais e pessoais do saber que se almeja ensinar; análise de quais condições são necessárias para construir uma situação de ensino e respeitar os objetivos específicos da pesquisa. 2) **Análise da organização didática do objeto matemático escolhido:** análise das instituições de ensino que será aplicado a metodologia; análise dos documentos norteadores do ensino como propostas curriculares e PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais); análise crítica dos métodos utilizados no livro didático; elaboração e aplicação de instrumentos para coletar dados na verificação de quais são as concepções dos alunos e/ou professores em relação ao objeto de aprendizagem; levantamento de referências bibliográficas (artigos, revistas, livros, dissertações e teses) sobre as razões que influenciam no ensino e aprendizagem do tema em questão. E por fim, 3) **Definição da (s) questão(ões) da pesquisa:** a partir dos dois tópicos anteriores é possível definir a(s) questão(ões) e hipóteses da pesquisa.

Machado (2012) destaca que essa fase serve para embasar a elaboração da Engenharia Didática, porém sempre que necessário ela deve ser resgatada e aprofundada no decorrer da pesquisa.

A segunda fase é a ***Concepção e Análise a Priori*** das situações didáticas, onde a delimitação do número de variáveis depende das determinações obtidas nas análises preliminares onde são, nomeadas variáveis de comando, quais são os conteúdos que correspondem ao que pode ser ensinado nas escolas e qual é a melhor forma de atuar nas turmas.

Nessa etapa, distinguem-se duas variáveis de comando como: as macrodidáticas ou globais e as microdidáticas ou locais. Machado (2012) destaca que:

> Essas variáveis podem ser tanto de ordem geral como específica, isto é, depender do conteúdo didático a ser ensinado. Por exemplo, caso a variável seja do tipo microdidático, tem-se as variáveis intrínsecas ao problema, que são de ordem geral e as variáveis que dependem da situação, ligadas à organização e a gestão do meio, que são específicas. (MACHADO, 2012, p. 241)

Dessa forma, percebe-se que as variáveis escolhidas nessa fase são de suma importância na pesquisa, conforme menciona Artigue (1995), os efeitos globais ou macrodidáticos referem-se a decisões como: quais ferramentas serão utilizadas, quais requisitos são necessários para ensinar o que se pretende, a retomada do estudo do conteúdo que se almeja ensinar, destacando a forma que será feita e, também, os métodos que serão utilizados no estudo qualitativo. Já as microdidáticas tem por objetivo o estudo de um determinado assunto e referem-se principalmente às dificuldades encontradas no interior da sala de aula.

Machado (2012) ressalta que as escolhas globais antecedem a apresentação das fases da Engenharia Didática e elas interferem nas escolhas locais. Portanto, mesmo que as variáveis possam aparecer separadamente elas são interdependentes, ou seja, a ordem geral é capaz de intervir na organização e desenvolvimento de situações locais.

O objetivo da concepção e análise a priori é determinar se as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos, pois, através disso, consegue-se planejar as atividades e prever seus eventuais problemas.

Machado (2012) destaca que essa fase se embasa na teoria de controle das relações abordadas na Teoria das Situações Didáticas que busca controlar as relações de sentido e situações.

Dessa forma, segundo Machado (2012), a segunda fase contém uma parte descritiva e outra previsiva, quando são criadas as situações adidáticas[8] que serão aplicadas na experimentação. Então, na análise a priori, deve-se: expor as variáveis locais (as relacionando com as variáveis globais) e caracterizar a escolha de cada situação adidática; além de verificar o problema resultante da ação, escolha, decisão e validação das situações propostas aos alunos durante a experimentação. E por fim, essa autora ressalta que a realização de uma previsão dos possíveis comportamentos dos alunos nessa fase possibilita controlar os possíveis problemas, assegurando que os estudantes desenvolvam o conhecimento almejado.

Almouloud (2007) destaca que o pesquisador, levando em conta os resultados do estudo preliminar, deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema. Essas situações referem-se à seleção de questões abertas e/ou fechadas que envolvem domínios do saber e do conhecimento matemático.

As situações-problema devem garantir que o professor tenha um papel de orientador e mediador e que o aluno tenha condições de agir, refletir e evoluir no seu processo de autoaprendizagem, adquirindo assim novos conhecimentos. Para alcançar esses objetivos é necessário que o pesquisador escolha as variáveis didáticas que podem causar mudanças desejadas no processo de ensino-aprendizagem do conhecimento matemático.

Almouloud (2007) ressalta que essa fase é muito importante, pois a partir da sua qualidade é que depende o sucesso da situação-problema. Além disso, permite ao professor controlar a prática das atividades realizadas, além de compreender e identificar os casos observados.

[8] Definição proposta por Brousseau (1986) na Teoria das Situações Didáticas no qual se caracteriza por momentos em que o aluno trabalha de maneira independente no seu processo de aprendizagem do conteúdo matemático, sem sofrer interferência pelo professor.

A terceira fase é a ***Experimentação***, na qual Machado (2012) aponta que ela é aplicada a uma quantidade limitada de alunos. Há uma aplicação dos instrumentos da pesquisa e é registrado as observações feitas durante a experimentação (observação descrita em relatório e transcrição dos audiovisuais). Durante a aplicação, devemos respeitar as escolhas e deliberações da análise a priori, para que esse fato não prejudique a confrontação entre as análises a priori e posteriori.

Almouloud (2007) destaca que nessa fase é imprescindível discutir e fundamentar os seguintes aspectos: discutir os quadros teóricos e os objetivos que sustentam a terceira fase; detalhar o contexto e as condições da experimentação; justificar o experimento em relação a questão e hipótese de pesquisa; apresentar o organograma das fases do trabalho, assim como o cronograma do experimento.

A quarta e última fase se refere a análise ***a Posteriori e Validação***, com os dados colhidos durante a experimentação, através das observações realizadas durante cada sessão e das produções dos estudantes tanto em sala de aula como fora dela. Para melhor compreensão, muitas vezes, é necessário complementar os dados com questionários e entrevistas durante ou no fim da experimentação.

Almouloud (2007) enfatiza que na análise a posteriori embasa-se na análise a priori em relação aos fundamentos teóricos, nas hipóteses e na problemática de pesquisa. Nessa análise são utilizados embasamentos teóricos, como a Teoria das Situações Didáticas para recolher os dados que servirão como protocolo na pesquisa e a partir disso o pesquisador confrontará com a priori.

Dessa forma, com a confrontação das análises a priori e a posteriori é possível validar ou refutar as hipóteses levantadas no início da Engenharia Didática.

4 METODOLOGIA

A metodologia da pesquisa é de natureza qualitativa e descritiva (Bogdan; Biklen, 1994; Gil, 2002). Como técnica, para desenvolver o curso em análise neste artigo, serão aplicadas as quatro fases da E.D. Com base nos objetivos, toma-se a pesquisa do tipo descritiva, da qual cabe considerar o conhecimento do objeto em estudo por parte do pesquisador, gerado a partir de resultados de pesquisas (GIL, 2002). Nesse tipo de pesquisa, recorre-se à descrição de processos, mecanismos e relacionamentos que se mostram na realidade do fenômeno estudado.

Bogdan & Biklen (1994) transcrevem habilmente as características da investigação qualitativa e trazem as seguintes considerações: os materiais produzidos devem ser revistos na totalidade pelo investigador pois, são os instrumentos chave da análise, da mesma forma, apontam que os investigadores qualitativos entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observados no ambiente de ocorrência. Um outro aspecto a considerar é, que quando a investigação qualitativa é descritiva, os investigadores necessitam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, a forma como estes foram registrados ou transcritos, bem como, são previstos que nesse tipo de investigação ocorra naturalmente um interesse maior pelo processo do que simplesmente pelo resultado.

Nessa direção, na pesquisa qualitativa não há quantificações ou técnicas estatísticas de qualquer natureza, pois essa abordagem busca, com base em dados qualificáveis, compreender a realidade de determinados fenômenos, a partir da percepção dos diversos atores sociais (GIL, 2002).

Em síntese, a pesquisa qualitativa desenvolvida neste estudo envolveu a obtenção de dados a partir das produções geradas pelos acadêmicos em respostas a atividades propostas na fase de experimentação, terceira fase da ED, assim como a questões encaminhadas em questionários nas fases análise à priori e análise à posteriori, segunda e quarta fases da ED, respectivamente.

4.1 Sujeitos e local da pesquisa

Os sujeitos da pesquisa são acadêmicos do curso de Matemática-Licenciatura do campus Bagé, da UNIPAMPA. O curso foi iniciado com doze acadêmicos, e ocorreu nos meses de fevereiro e março de 2021. Desse número inicial de participantes, 9 concluíram todas as etapas do curso, sendo dois alunos do 6º semestre e sete alunos do 8° semestre. Contudo, para essa pesquisa, foram analisados os resultados produzidos por 4 dos 9 participantes. Sendo que, com a intenção de analisar semestres diferentes foram escolhidos dois acadêmicos do 6º semestre e mais dois do 8° semestre, visto que dois do último semestre já tinham experiência em trabalhar com ladrilhamento, dessa forma, para não comprometer a análise da pesquisa foram escolhidos dos cinco que sobraram aleatoriamente dois participantes.

Devido à pandemia de COVID-19, que impôs necessidade de distanciamento físico e proibição de acesso ao campus para atividades presenciais, as atividades síncronas do curso foram realizadas por meio das plataformas Google Meet e Geogebra Book, para compartilhamento e realização das atividades síncronas.

4.2 As fases da pesquisa

As quatro fases da Engenharia didática serão tomadas como campo de organização, categorização e análise neste estudo, são elas: análise preliminar; concepção e análise a priori; experimentação e análise a posteriori e validação.

Na análise preliminar foram realizadas pesquisas a artigos, livros e dissertações sobre o assunto Geometria Plana, com a finalidade de entender os obstáculos encontrados na educação Básica e Superior, bem como de compreender as principais ações realizadas pelos professores no planejamento das atividades desenvolvidas em sala de aula. Essa fase foi subdivida em aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos.

Em relação aos aspectos epistemológicos, foram investigadas as principais dificuldades e empecilhos encontrados para a aprendizagem da Geometria Plana no decorrer do ensino básico, na sala de aula e na área de Geometria Plana, destacando-se os estudos de Pereira (2017), Teixeira (2018), Penteado *et al.* (2019), Stefani *et al.* (2019).

Em relação aos aspectos didáticos, foram estudados os documentos Projeto Pedagógico do Curso de Matemática (PPC) e o texto da BNC formação (2019) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio (Brasil, 2017), a fim de compreender aspectos curriculares que envolvem a formação do futuro educador matemático. Foram estudadas também sequências didáticas relativas ao tema ladrilhamentos, dentre as quais, destacam-se Martins (2018), Caetano (2010) e o caderno do professor de matemática (SÃO PAULO, 2009).

Em relação aos aspectos cognitivos, foram estudadas as práticas desenvolvidas em sala de aula. Essa etapa permitiu perceber a importância de práticas pedagógicas que resultem na construção do conhecimento de forma ativa, pois refletem a autonomia em processos de aprendizagem. Destacam-se nessa fase os estudos de Afini *et al.* (2013), Teixeira (2018) e Zanella *et al.* (2018), em razão da utilização de *softwares* matemáticos, do trabalho com objetos do cotidiano, e das contribuições que apontam no aprendizado da matemática.

Na fase concepção e análise a priori, foram elaboradas hipóteses e as sequências didáticas, assim como destacadas as variáveis micro e macro didáticas. Também, nessa fase, constatou-se as possíveis resoluções da sequência didática elaborada. Como hipótese principal, destaca-se que: “Através das atividades com a técnica de ladrilhamentos, o acadêmico é capaz de se aprofundar em conteúdos referentes à Geometria Plana”. Quanto às variáveis Macrodidáticas (relacionadas à organização global), entende-se: a) ensino de conceitos de Geometria Plana; b) ênfase nas dificuldades de aprendizagem dos conceitos; e c) diferentes formas de ensino da Geometria Plana.

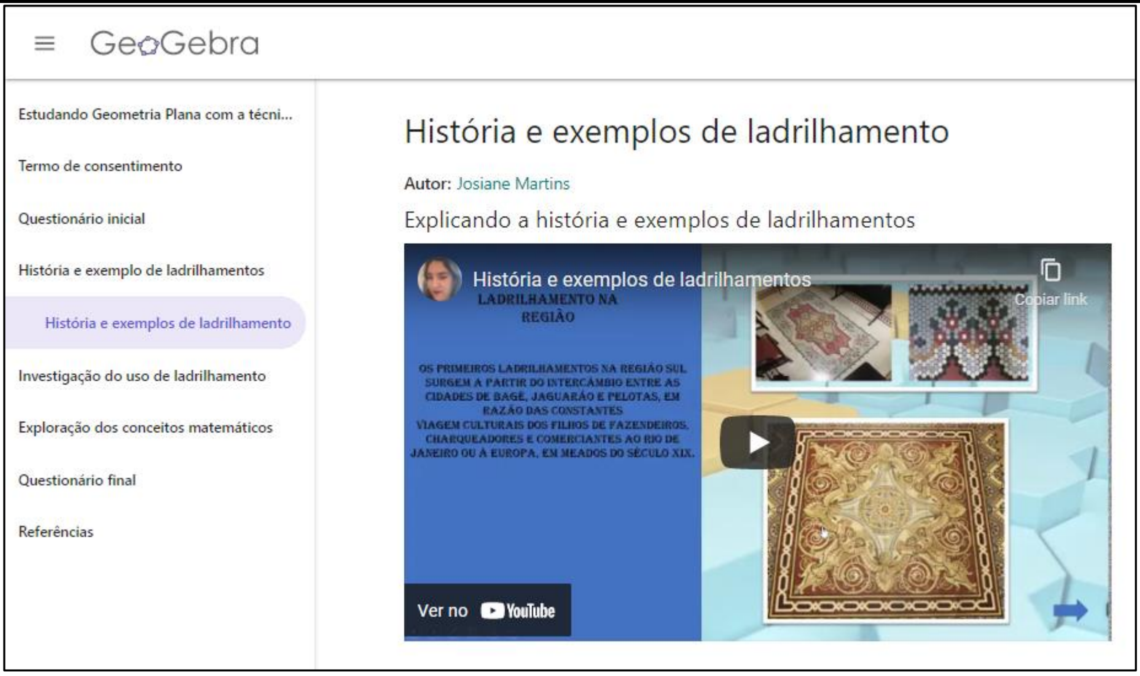
E como variáveis Microdidáticas (relativas à organização local), consideram-se: a) livro dinâmico no Geogebra Book, construído de forma compartilhada com os acadêmicos; b) manipulação de polígonos regulares no Geogebra para resolução de problemas de ladrilhamento; c) construção e reprodução de conceitos relacionados à Geometria Plana na construção de ladrilhamentos.

Na fase da experimentação, a aplicação da sequência didática, por meio do curso de ladrilhamento, caracterizou o experimento, mediante o GeoGebra Book intitulado “Estudando Geometria Plana com a técnica de ladrilhamento[9]” destacando-se atividades em que a descoberta e investigação matemática foram necessárias para o encontro de conjecturas e exploração de conceitos.

A experimentação, contudo, foi antecedida por dois momentos de exposição pela pesquisadora, em que se apresentou a história e exemplos de ladrilhamentos e o uso das ferramentas do Geogebra, ambos foram realizados com apoio de vídeos elaborados pela pesquisadora, conforme verifica-se nas Figuras 6(a) e (b).

[9] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/njtsgrws

Figura 6: Vídeos do primeiro encontro



(a)

(b)

Fonte: Autora (2021)

A Figura 6(a) mostra a tela do vídeo apresentado pela pesquisadora, durante a seção história e exemplos de ladrilhamentos, onde mostra conteúdos relativos a história do ladrilhamento com ênfase para os ladrilhos produzidos na nossa região, bem como, exemplos de ladrilhamentos na natureza.

Enquanto na Figura 6(b), aparece a tela do vídeo durante a subseção conceitos do Geogebra, onde mostra as ferramentas básicas do software.

Considerou-se que essas atividades pré-experimento foram relevantes e necessárias, em virtude da contextualização sobre o tema e da familiarização com os recursos do Geogebra, pois refletem diretamente na etapa da experimentação, propriamente dita. Na experimentação, portanto, foi solicitado inicialmente que os acadêmicos respondessem quatro questões, em que também deveriam construir polígonos regulares, a partir do número de vértices e nomeá-los. Em seguida, deveriam achar os ângulos de todos os polígonos construídos, assim como as medidas de cada lado, e por fim, deveriam responder o que conseguiram observar com a atividade, permitindo que pudessem fazer conjecturas e estabelecer relações entre conceitos. A fase da experimentação ocorreu em quatro encontros.

Dessa forma, iniciou-se o novo encontro, dividindo-os novamente em dois momentos. O primeiro, tratou da manipulação e exercícios de ladrilhamentos, conforme verifica-se na Figura 7, em que os acadêmicos utilizaram os polígonos construídos pelos autores no Geogebra, para manipulação e apoio na resolução dos problemas propostos.

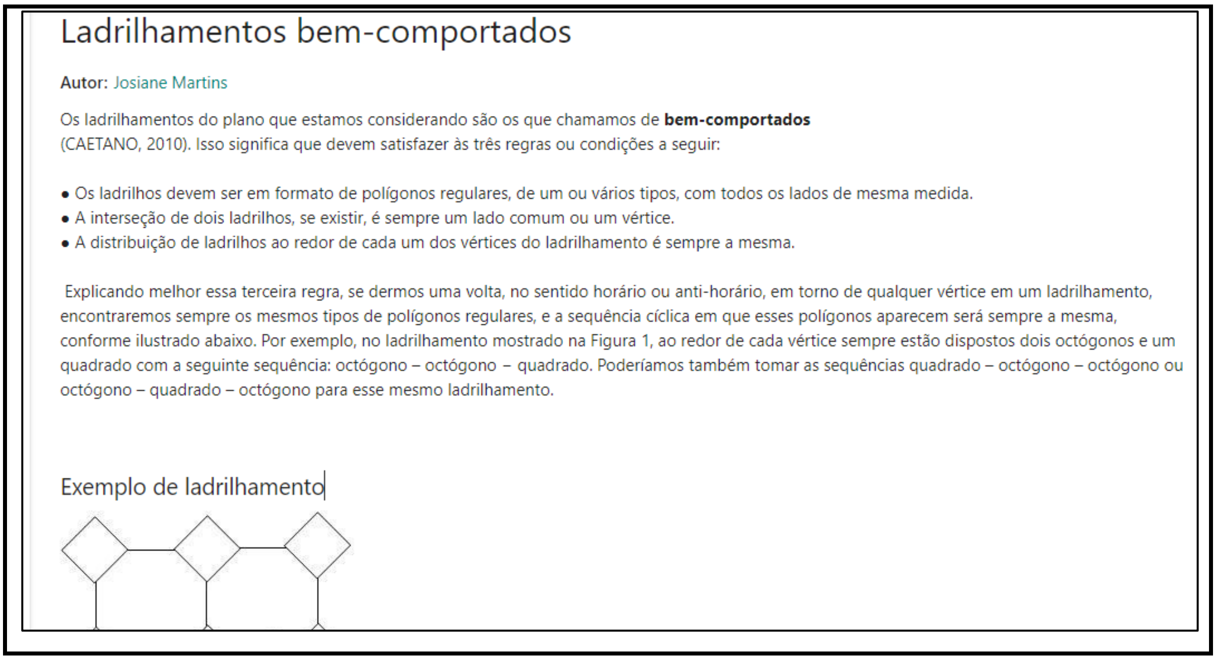
Figura 7: Layout da página Manipulações e exercícios de ladrilhamento

Fonte: Autora (2021)

A Figura 7 exibe a tela da subseção Manipulação e exercícios de ladrilhamentos, nela consta algumas informações através de texto, bem como o software com os polígonos, no qual permite os estudantes arrastarem e copiarem, caso for preciso responder questões.

No primeiro momento, as questões envolviam encontrar quantos e quais foram os padrões de ladrilhamentos com ladrilhos iguais e com ladrilhos diferentes, e qual o princípio utilizado para preencher um ladrilhamento. No segundo momento, o conceito de ladrilhamentos bem-comportados, foi apresentado aos acadêmicos, conforme Figura 8, para em seguida serem propostos os seguintes questionamentos: Se todos os ladrilhamentos encontrados eram bem-comportados? Quais foram os ladrilhamentos que não atenderam às três regras de bom comportamento? Para fundamentar as respostas foram exigidas justificativas e, também era necessário citar exemplos e locais de ladrilhamentos bem-comportados.

Figura 8: Layout da página Ladrilhamentos bem-comportados



Ladrilhamentos bem-comportados

Autor: Josiane Martins

Os ladrilhamentos do plano que estamos considerando são os que chamamos de **bem-comportados** (CAETANO, 2010). Isso significa que devem satisfazer às três regras ou condições a seguir:

- Os ladrilhos devem ser em formato de polígonos regulares, de um ou vários tipos, com todos os lados de mesma medida.
- A interseção de dois ladrilhos, se existir, é sempre um lado comum ou um vértice.
- A distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

Explicando melhor essa terceira regra, se dermos uma volta, no sentido horário ou anti-horário, em torno de qualquer vértice em um ladrilhamento, encontraremos sempre os mesmos tipos de polígonos regulares, e a sequência cíclica em que esses polígonos aparecem será sempre a mesma, conforme ilustrado abaixo. Por exemplo, no ladrilhamento mostrado na Figura 1, ao redor de cada vértice sempre estão dispostos dois octógonos e um quadrado com a seguinte sequência: octógono – octógono – quadrado. Poderíamos também tomar as sequências quadrado – octógono – octógono ou octógono – quadrado – octógono para esse mesmo ladrilhamento.

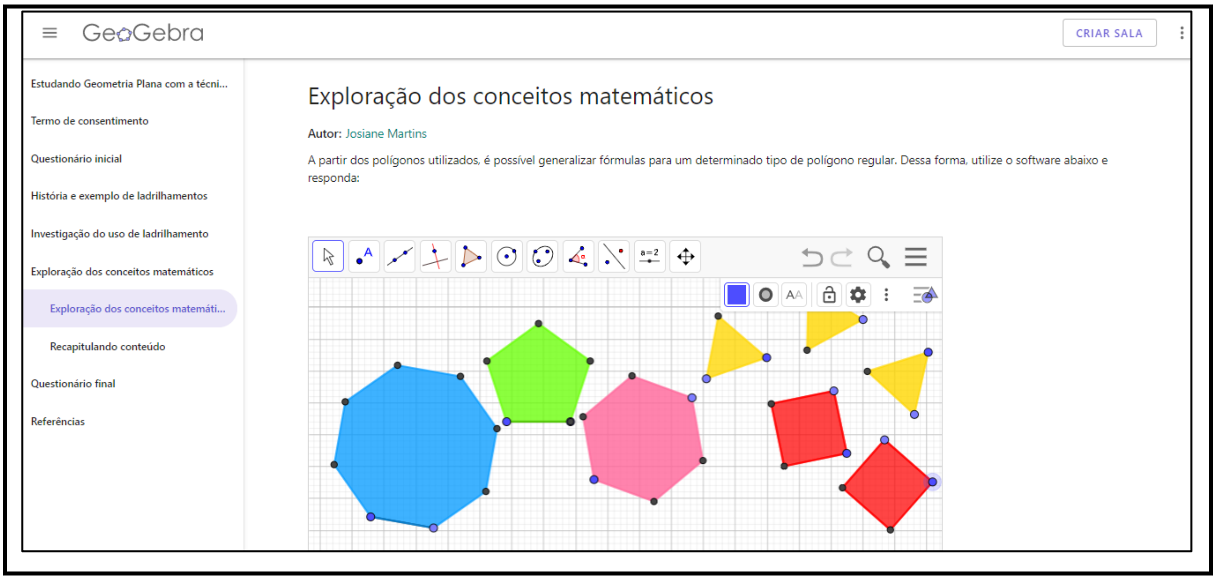
Exemplo de ladrilhamento

Fonte: Autora (2021)

Na Figura 8 verifica-se a tela da subseção Ladrilhamentos bem-comportados, nela consta a explicação de tal conceito, bem como, uma figura exemplificando.

No terceiro encontro, ocorreu a seção exploração dos conceitos matemáticos, conforme Figura 9, com a finalidade de levar os acadêmicos a descobrir a generalização de fórmulas, como a soma dos ângulos internos e externos de um polígono, além de outras relações matemáticas envolvendo ângulo e número de lados de polígonos regulares. Depois dessa incursão, os acadêmicos foram questionados sobre quais e quantas são as combinações de ladrilhos regulares que preenchem perfeitamente o plano, e por fim, provocados a definir o conceito de ladrilhamento.

Figura 9: Layout da página exploração dos conceitos matemáticos



Fonte: Autora (2021)

A Figura 9 mostra a tela da subseção Exploração dos conceitos matemáticos, nela consta o software com os polígonos.

No quarto e último encontro, a pesquisadora destacou e resumiu todos os pontos importantes dos encontros anteriores e fez um fechamento das atividades, apresentando um vídeo que explicava o conceito de ladrilhamentos, conforme Figura 10.

Figura 10: Layout do vídeo explicativo

Fonte: Autora (2021)

A Figura 10 apresenta a tela de encerramento do curso, no qual apresenta-se um vídeo do youtube[10] que exemplifica o conceito de ladrilhamento.

Em seguida, os acadêmicos foram solicitados a responder a um questionário pós-experimento, a fim de saber se a experimentação foi interessante no seu processo de aprendizagem. Basicamente, foi explorado por meio do questionário o que eles acharam das aulas sobre ladrilhamentos e geometria, se acharam fácil ou encontraram dificuldades nas atividades, se a técnica de ladrilhamento facilita a compreensão de conceitos da Geometria Plana e se o software Geogebra ajudou na compreensão de tais conceitos.

Por fim, na quarta fase da ED, tem-se a análise a posteriori e validação, que foi realizada por meio da comparação das respostas previstas na análise a priori com os resultados obtidos na experimentação.

A seguir, no âmbito da análise e resultados, tem-se a apresentação detalhada da quarta fase da ED, em que será mostrado se os objetivos foram alcançados e se o experimento realizado contribuiu para a validação da pesquisa.

[10] TV escola. Matemática em toda parte: Construção- Pavimentação com polígonos. (1 vídeo 2':58"). [*S.l; s.n*], 2009. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=y__0a7TDbfs. Acesso em: 29 out. 2019.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Compõem esta seção, as observações e discussões relativas às descrições provenientes da fase de experimentação, a argumentação a partir da comparação entre os questionários iniciais e finais aplicados nesta E.D. com o propósito de apresentar resultados capazes de validar ou refutar as hipóteses desta pesquisa. Nesse sentido, os resultados e discussões serão organizados a partir dos quatro encontros conduzidos no processo de experimentação e das interações realizadas com os participantes auto identificados pelos pseudônimos de Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo.

5.1 Encontro 1

No primeiro encontro, os participantes foram estimulados a indicar quais tipos de ladrilhamentos conheciam, a partir da atividade História e exemplos de ladrilhamentos. Foi apresentada a seguinte questão aos participantes: Através de suas lembranças do dia a dia, descreva e/ou desenhe quais ladrilhamentos você conhece?

O participante Lastonico respondeu que "são sempre polígonos, mais comum é serem quadrados", enquanto o participante Gauss respondeu, "Conheço alguns ladrilhos triangulares e muitos que são quadrangulares. Eu identifico alguns nas calçadas de praças, e também em prédios históricos da cidade de Bagé/RS". Já Guerreiro respondeu que são: "mosaicos, quadrados, triângulos, hexágono (6 triângulos equiláteros ou quatro quadrados)". Para Ichigo são "Ladrilhamento em formato triangular, quadrangular e hexagonais".

As respostas dos quatro participantes além da relação imediata com o cotidiano, como era esperado a partir da formulação da questão, mostrou que todos reconhecem elementos da Geometria Plana nos ladrilhamentos, pois mencionam expressões como quadrados, triângulos, quadrados e hexágonos em vez de expressões que remetam a ideia de pisos e lajotas.

Na segunda questão, foram perguntados: Por que é usual utilizar polígonos regulares iguais no ladrilhamento da cobertura dos pisos? E o que essa técnica contribui na construção de casas e prédios? Lastonico respondeu que essa técnica

“Economiza material porque preenche sem deixar espaços”, enquanto Gauss destacou que “Isso porque todos os polígonos regulares pavimentam um plano, ou seja, eles conseguem preencher um plano sem se sobrepor. Aliás, são apenas aqueles polígonos que tenham o ângulo divisor de 360º, como o hexágono, quadrado e triângulo equilátero. Assim é possível cobrir o plano, e obter lindos padrões, por isso, esse tipo de figura é muito procurada por ceramistas e fabricantes de azulejos”. Para Guerreiro a resposta é: “porque facilita o preenchimento do plano sem superposição ou buracos nos espaços. essa técnica contribui na construção em evitar o desperdício de material, bem como, economia na quantidade a ser utilizada”. Já Ichigo destacou que: “É usual por motivos de ser bonito na sua aplicação de papel de parede, pisos decorativos com cerâmicas ou pedras e pode auxiliar nas construções civis como retro de um ambiente.”

É possível inferir que as respostas dos participantes Lastonico, Gauss e Guerreiro demonstram conhecimento sobre a técnica do ladrilhamento, uma vez que mencionam o fato de cobrir perfeitamente o plano. Já Ichigo responde diferente dos demais participantes, pois ele destaca que o ladrilhamento tem fins visuais nas construções civis. A resposta mais completa de Gauss mostra também que o participante observa a relação entre os ângulos dos polígonos e a cobertura do plano sem sobreposição das formas. Enquanto a resposta do Ichigo mostra que ele não observa conceitos matemáticos, quando diz que, os ladrilhamentos são utilizados para fim estético.

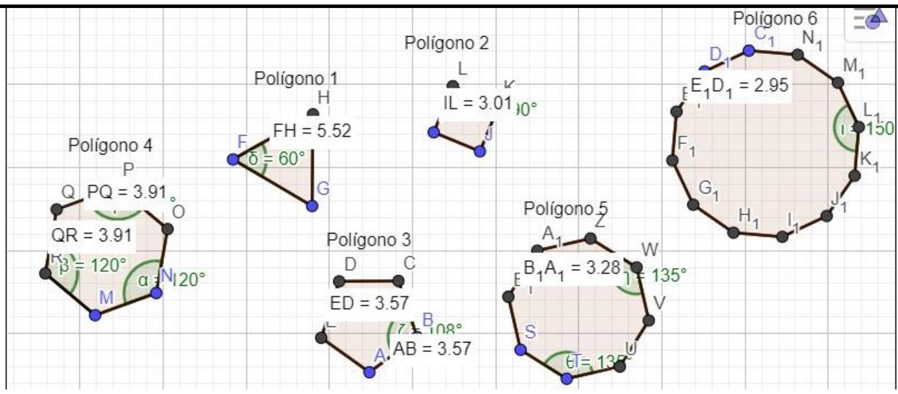
Assim, ao analisar as respostas dadas pelos participantes foi possível identificar que três deles demonstram, no atual momento do curso, conhecer os princípios de formação e preenchimento dos ladrilhos, embora, de acordo com Santos (2014), essas propostas e discussões precisem ser mais aplicadas para comprovar sua eficiência, pois essas atividades fogem do padrão tradicional comum nas aulas de matemática.

Ainda no encontro 1, na atividade Conceitos do Geogebra, os participantes foram solicitados a construir polígonos regulares no Geogebra, a nomeá-los em relação ao número de lados e a determinar a medida de seus ângulos internos correspondentes. Ainda nessa atividade foram instigados a escrever sobre o que observaram a partir da construção finalizada.

Conforme mostram os procedimentos dos participantes na Figura 11(a), o participante Lastonico, embora tenha realizado a construção de todos os polígonos solicitados e indicado nas figuras de forma correta as medidas de seus ângulos internos correspondentes, não os nomeou em relação ao número de lados. O participante Gauss, Figura 11(b), concluiu a tarefa adequadamente, pois destacou as medidas congruentes dos lados, apresentou os ângulos internos correspondentes e nomeou adequadamente cada polígono. O participante Guerreiro, Figura 11(c), embora não tenha nomeado junto com a construção dos polígonos, nomeou corretamente na pergunta destinada a saber: Indique os seguintes números de vértices (3, 4, 5, 6, 8 e 12) e os nomeie, sendo sua resposta “3 - triângulo, 4 - quadrado, 6 - hexágono, 8 - octógono, 12 - dodecágono”. Em relação ao Ichigo, Figura 11(d), suas respostas foram incompletas, pois não informou a distância do segmento de reta. Mas, sobre a nomenclatura, ele respondeu corretamente. Entretanto, enquanto os demais participantes escreveram em relação aos ângulos, Ichigo escreveu em função do número de lados.

Figura 11: Construção de polígonos no Geogebra

(continua)



(a) Construção final do Lastonico

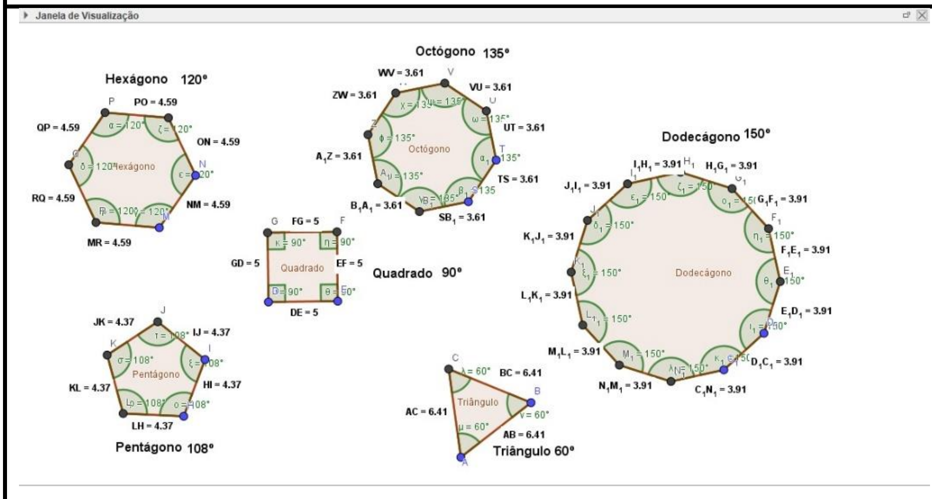
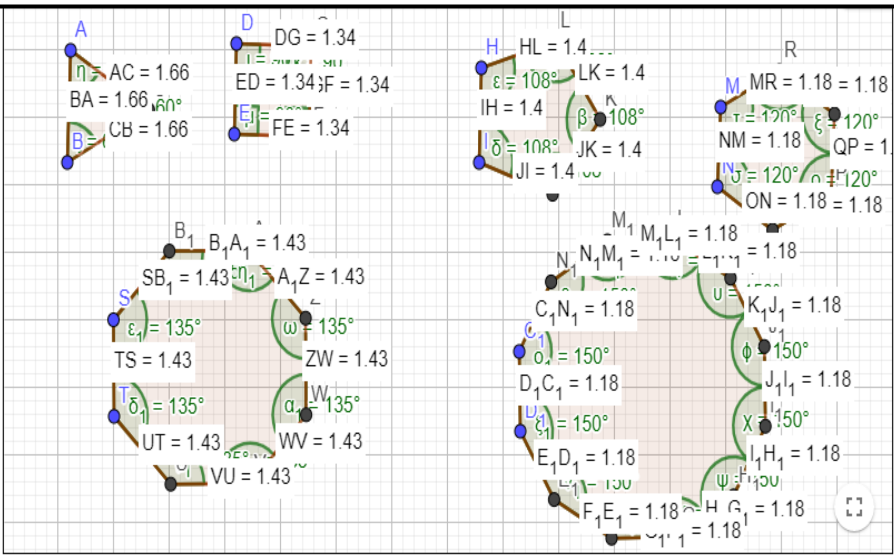


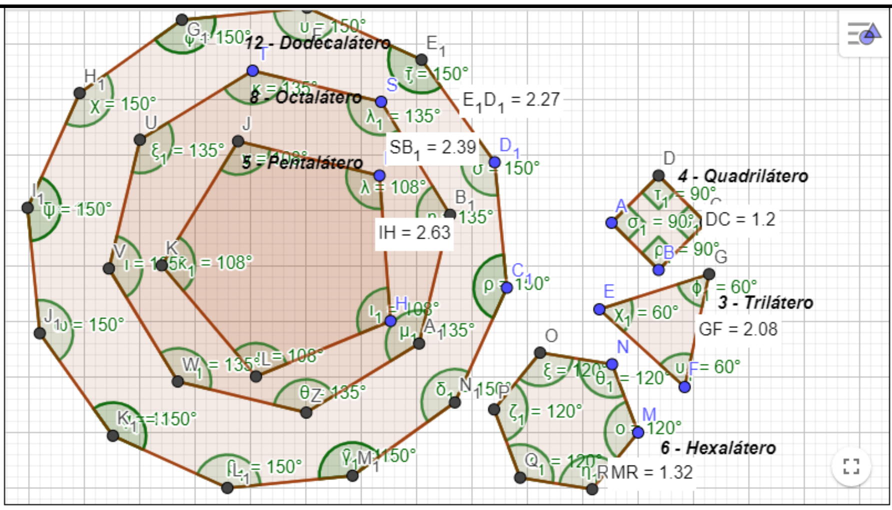
Figura 11: Construção de polígonos no Geogebra

(conclusão)

(b) Construção final do Gauss



(c) Construção final do Guerreiro



(d) Construção final do Ichigo

Fonte: Autora (2021)

A respeito das observações dos participantes, Lastonico apontou que “Todos os ângulos internos são iguais, e a distância entre os vértices também”, enquanto o participante Gauss respondeu “Observo que cada um dos polígonos regulares, gerados no Geogebra, a partir dos vértices, possuem lados e ângulos iguais. O participante Guerreiro, respondeu que: “todos os lados de cada polígono e os ângulos tem a mesma medida.” Já Ichigo salientou que: “Em cada polígono, tem suas mesmas distâncias e ângulos.”

Das inferências possíveis a partir das observações dos participantes, Lastonico, Guerreiro e Ichigo mencionam que há uma relação de igualdade entre as medidas e os ângulos, no entanto, tal argumento não é válido e não permite afirmar que conceitos geométricos foram relacionados no desenvolvimento da atividade por Lastonico, Guerreiro e Ichigo. A observação de Gauss, no entanto, permite inferir que há para esse sujeito uma compreensão que relaciona conceitos matemáticos geométricos à construção realizada pelo software, pois sua observação confirma a construção da figura com o apoio da ferramenta e confirma a relação de congruência entre os lados e ângulos internos de um polígono regular.

Cabe destacar que na análise a priori se propôs como previsão de respostas dos participantes para os questionamentos do encontro 1: os ladrilhamentos presentes em prédios históricos, em cozinhas e banheiros e a utilização de ladrilhos iguais para economia de materiais. E em relação à atividade Conceitos no Geogebra: a construção dos polígonos nomeados e seus ângulos indicados e a observação pelos alunos da definição de polígonos regulares de possuírem lados e ângulos congruentes. As respostas dos participantes confirmaram em parte essa previsão inicial, pois em alguns aspectos não foram conclusivas a respeito do conhecimento matemático evidenciado.

5.2 Encontro 2

No segundo encontro foram conduzidas as subseções denominadas de Manipulação e exercícios de ladrilhamento e Ladrilhamentos bem-comportados.

A subseção Manipulação e exercícios de ladrilhamento caracterizou-se pela realização de cinco questionamentos, sendo o primeiro: Quantos e quais foram os padrões de ladrilhamentos do plano que possuíam somente ladrilhos iguais? O participante Lastonico respondeu que “Pelo menos três: padrão 4 por 4 com quadrados, com triângulos 3.3.3.3.3.3, e com hexágono 6.6.6”. O participante Gauss, informou que “São três possíveis. Podemos agrupar em seis triângulos equiláteros, quatro quadrados e três hexágonos.” Já o participante guerreiro respondeu “3 padrões/ 4.4.4 / 3.3.3.3.3.3 / 6.6.6.”. Enquanto o participante Ichigo respondeu “4 Quadrado - 4.4.4.4; 6 Triângulo - 3.3.3.3.3.3”.

Analisando as respostas dos participantes é possível afirmar que embora parecidas, não são as mesmas, em razão da certeza dos participantes Gauss e

Guerreiro em relação às três combinações possíveis. No entanto, os participantes sinalizaram que entendem a lógica do padrão em torno de um vértice, referindo-se de forma correta às relações existentes na formação dos ladrilhamentos do plano com ladrilhos iguais, em relação ao número de polígonos e ao número de seus lados.

Na questão 2 e 4 os participantes foram solicitados a inserir na plataforma do Geogebra Book as suas construções de ladrilhamentos com polígonos iguais e com polígonos diferentes, respectivamente, conforme mostra a Figura 12.

Figura 12: Ladrilhamentos reproduzidos pelos participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo.

(continua)

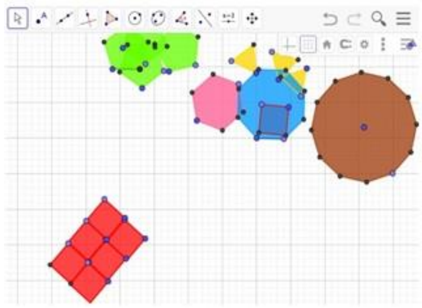
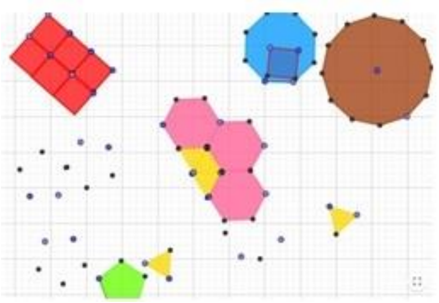
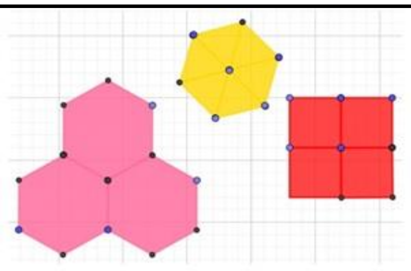
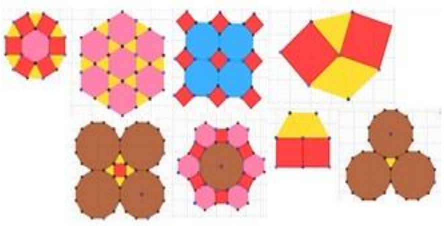
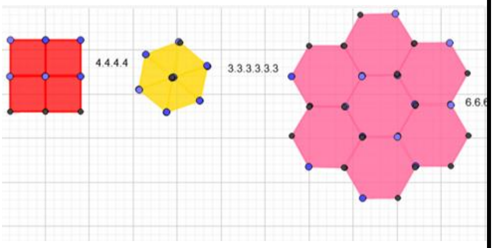
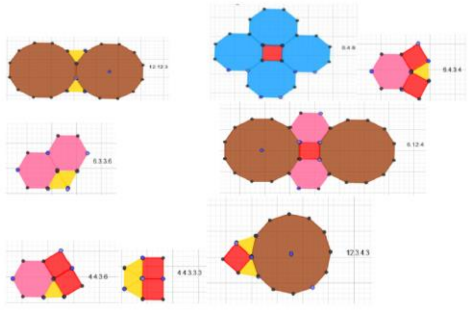
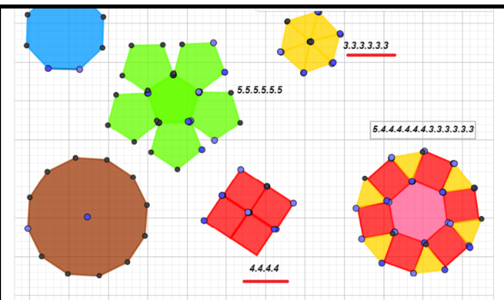
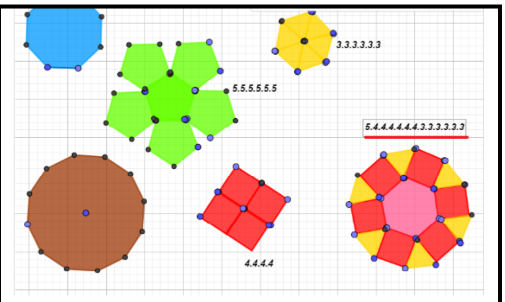
Participante	Questão 2 (Figura a)	Questão 4 (Figura b)
Lastonico		
Gauss		
Guerreiro		

Figura 12: Ladrilhamentos reproduzidos pelos participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo.

(conclusão)

Ichigo		

Fonte: Autora (2021).

Para essa análise cabe ressaltar que o participante Ichigo anexou as mesmas imagens tanto na questão 2 como na 4, conforme examinaremos nas imagens da Figuras 12. Enquanto o participante Lastonico percebe-se na Figura 12 (a), a apresentação de apenas 1 ladrilhamento com uso de ladrilhos iguais e os demais polígonos da Figura 12 (b) indicam que foram feitas tentativas que não foram finalizadas pelo participante. No entanto, na resposta dada na questão 1, esse participante demonstra conhecer pelo menos três composições possíveis. Por outro lado, as Figuras 12 (a), com as representações elaboradas por Gauss e Guerreiro, respectivamente, mostram que eles conseguiram representar e concluir os três ladrilhamentos com polígonos iguais mencionados na questão 1. Já Ichigo representa os dois tipos de ladrilhamento, conforme Figura 12 (a), indo ao encontro da resposta da questão 1.

Para a terceira questão: Quantos e quais foram os padrões de ladrilhamentos do plano formados com ladrilhos diferentes? Lastonico respondeu que “Pelo menos um, com hexágono e triângulo” conforme, observa-se na Figura 12b. Já Gauss disse: “Eu consegui realizar 8 padrões. Eles utilizavam: (Quadrado, triângulo, hexágono); (Hexágono e triângulo); (Octógono e quadrado); dois ladrilhos diferentes compostos por quadrados e triângulos; (Dodecágono e triângulo); (Dodecágono, triângulo e quadrado); (Dodecágono, hexágono e quadrado).” A Figura 12 ratifica a informação desse participante. Para Guerreiro as respostas foram: “8 padrões/ 12.12.3 / 8.4.8 / 6.4.3.4 / 6.3.3.6 / 6.12.4 / 4.4.3.6 / 4.4.3.3.3 / 12.3.4.3.” Já Ichigo respondeu “1 Pentágono – 5; 6 Quadrado - 4.4.4.4.4.4; 6 Triângulos - 3.3.3.3.3.3.”

A análise mostrou que os participantes Lastonico e Ichigo demonstraram conhecimento da manipulação de ladrilhos diferentes, mas não desenvolveram outros modelos, ou seja, representaram apenas uma composição. Por outro lado, Gauss representou as oito combinações possíveis com ladrilhos diferentes, contudo na compreensão acerca dos padrões a serem explorados deixou dúvidas, uma vez que Gauss, embora tenha indicado a composição (Quadrado, triângulo, Hexágono) não retratou a formação em torno de um vértice, que seria 4,3,6,4, ou seja, dois quadrados, um triângulo e um hexágono em torno de um mesmo vértice. De forma análoga, quando Gauss menciona (Hexágono, triângulo) não se refere à formação 6,3,6,3 com dois hexágonos e dois triângulos, conforme visualizado na figura. Cabe mencionar que a posição dos números na sequência indica a ordem dos polígonos no ladrilhamento, conforme o número de lados do polígono. Nessa compreensão, Lastonico também não mostrou a posição e quantidade de ladrilhos na sua composição, mesmo estando correta a formação 6,6,3,3 mostrada na figura 12b.

Já Guerreiro embora tenha conseguido encontrar os 8 tipos de ladrilhamentos, Figura 12b, eles não estavam de acordo com o previsto na análise a priori, sendo que os previstos tratavam-se de ladrilhamentos bem comportados. Dessa forma, os ladrilhos que vão ao encontro do previsto são cinco: 12,12,3/ 8,4,8/ 6,4,3,4/ 6,12,4/ 4,4,3,3,3. Os outros não possibilitam formar ladrilhamentos bem-comportados.

Na questão cinco os alunos foram perguntados sobre: Qual é o princípio utilizado para preencher um ladrilhamento? Lastonico respondeu que “Os polígonos precisam ser regulares; a distribuição em volta de um vértice tem que ser a mesma”. Nota-se que a resposta de Lastonico é insuficiente, pois nem toda formação com polígonos regulares preenche o plano. Para Gauss “O preenchimento será satisfeito se os ângulos formados pelos polígonos formam uma volta de 360º”, o que está correto e permite inferir que conceitos matemáticos foram articulados e significados por esse participante na execução da atividade. Para guerreiro a resposta é “ocupar todos espaços sem deixar buracos”. Observa-se com essa resposta que o participante desenvolveu um conhecimento satisfatório em relação a técnica que foi utilizada. Já Ichigo respondeu que “Juntando os vértices vai formar um ladrilhamento.” Com essa resposta percebe-se que o participante tem um conhecimento insatisfatório, sendo que nem toda a junção dos vértices formam ladrilhamento.

Na subseção Ladrilhamentos bem comportados foram realizados quatro questionamentos sobre se o comportamento dos ladrilhos bem-comportados.

Para o primeiro questionamento: Todos os ladrilhamentos encontrados eram bem-comportados? As respostas foram pontuais, Lastonico, Guerreiro e Ichigo responderam que não, e, Gauss disse que sim. Essas respostas foram fornecidas em função dos ladrilhamentos que eles representaram nas imagens da Figura 12.

Diante das respostas das questões 2 e 4, nota-se que os participantes Lastonico e Gauss tinham somente formações de ladrilhamentos bem-comportado. Já os participantes Guerreiro e Ichigo além dos ladrilhamentos bem comportados. Tinham ladrilhamentos mal-comportados. Por exemplo, Guerreiro criou 3 ladrilhamentos mal-comportados (6.3.3.6/ 4.4.3.6 / 12.3.4.3) dos 8 que encontrou. Ichigo, encontrou o padrão 5,5,5,5,5,5 que não satisfaz a segunda e a terceira regra porque tem um espaçamento entre eles. Dessa forma, Gauss estava correto, pois nas suas construções todos os ladrilhamentos eram bem-comportados. Já Lastonico, respondeu que nem todos os ladrilhamentos eram bem-comportados, sendo que eram. Diante disso, nota que Lastonico ainda não construiu corretamente a percepção de ladrilhamentos bem-comportado, conforme trabalhado no experimento com base em Caetano (2010). Por outro lado, Guerreiro e Ichigo ao responder que não, ratifica a análise em torno de suas respostas e mostra a compreensão do conceito apresentado.

Para a questão 2: Quais foram os ladrilhamentos que não atenderam às três regras de bom comportamento. Por quê? - o participante Lastonico respondeu que “O ladrilhamento de triângulo e hexágono (3 de cada), não atende à regra que diz que a distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices é sempre a mesma”. Gauss afirma que “Os compostos por pentágonos. Pois, o pentágono viola as condições para ladrilhos bem-comportados”. Já guerreiro escreveu que “6.3.3.6 / 6.12.4 / 4.4.3.6 / 4.4.3.3.3 / 12.3.4.3. porque não seguem a regra de mesma distribuição ao redor de cada vértice.” Para Ichigo “O (6.6.3.3) não permite seguir o padrão em volta de todos os vértices.”

A resposta de Lastonico demonstra que há uma compreensão sobre o bom comportamento nos ladrilhamentos, pois apesar do ladrilhamento ser constituído de polígonos regulares e de seguir a segunda regra de bem-comportados, ele possui distribuições diferentes de polígonos ao redor do vértice, conforme verifica-se no livro de Dias e Sampaio (2010). O ladrilhamento exemplificado por Lastonico, na figura 12b, significa que essa sequência de polígonos regulares permite dois tipos de padrões ao redor do vértice (3,3,3,3,3,3/ 3,3,6,6) indo de encontro as regras de bom comportamento. Gauss descreve algo que não representou na figura 12, mas sua resposta demonstra conhecimento da definição de ladrilhamento bem-comportado, pois o exemplo dado pelo participante é de fato de um ladrilhamento que não atende à regra. Em relação a resposta do participante Guerreiro, demonstra que ele tem um bom entendimento, sendo que dos cinco tipos de ladrilhamentos que ele considera não ser bem comportados, três de fato não são. Já o participante Ichigo exemplifica corretamente o padrão que não permite um bom comportamento, no entanto, esse padrão não se encontra em suas construções, conforme verifica-se nas figuras 12a e 12b. Já o padrão 5.5.5.5.5.5 representa o que de fato ele fez e foi o que não foi exemplificado como mal-comportado.

Para a terceira questão: Quais foram os ladrilhamentos bem-comportados encontrados? - o participante Lastonico respondeu “O ladrilhamento de 4 quadrados. Porque atendem todas as condições”. Já para Gauss “Os compostos por polígonos regulares obedeceram à regra de ladrilhos bem-comportados. Porque eles seguem as seguintes regras: Os ladrilhos devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos; A interseção de dois ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice; A distribuição de ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma”. O participante Guerreiro respondeu que “12.12.3 / 8.4.8 / 6.4.3.4. Porque satisfazem as 3 condições para ser ladrilhamento bem comportado.” O participante Ichigo afirmou que são “(3.3.3.3.3.3); (4.4.4.4). Porque tem o mesmo padrão, tanto no sentido horário quanto anti-horário.”

A resposta de Lastonico embora apresente um tipo de ladrilhamento bem-comportado está incompleta, pois todos os outros ladrilhamentos que atenderam as regras de bom comportamento poderiam ser citados. Cabe mencionar que a participante também poderia inferir a partir da soma 360º dos ângulos ao redor de um vértice para apresentar outras respostas para a questão. Gauss respondeu de forma correta e conclusiva, demonstrando segurança na escrita completa dos princípios do ladrilhamento bem-comportado. Guerreiro, respondeu corretamente, embora de uma forma incompleta, pois os padrões utilizados na resposta eram bem comportados, no entanto, faltaram os padrões: 6.12.4/ 4.4.3.3.3. Nesse sentido, percebe-se que esse aluno compreendeu o conceito de ladrilhamento bem comportado. Já Ichigo exemplifica corretamente os padrões, no entanto, não apresenta outro padrão encontrado em suas representações, conforme verifica-se na figura 12b, o padrão

6.4.3.4. Em síntese, percebe-se que o aluno não compreendeu integralmente tais conceitos.

A quarta questão é: Você conhece algum exemplo de ladrilhamento bem-comportado? Onde? - busca uma relação com a realidade, que é imediatamente apresentada pelos participantes, pois Lastonico respondeu “Sim, 4.4.4.4. na cozinha”. Enquanto Ichigo respondeu “Sim. Ladrilho regular (3.3.3.3.3.3). Azulejos”. Essas respostas estão relacionadas às composições de pisos e azulejos. Os outros participantes: Gauss, afirmou que “Eu vi alguns presentes em calçadas aqui na cidade de Bagé, mas não recordo quais ruas”, e Guerreiro respondeu que “Sim, já vi em praças, só não consigo confirmar qual delas agora, não lembro direito”. Esses dois participantes remetem a contextualização histórica trabalhada no primeiro encontro da experimentação.

Sobre as respostas esperadas para as atividades do encontro 2, ressalta-se que as expectativas são superadas em relação aos participantes Gauss e Guerreiro e parcialmente atingidas em relação aos participantes Lastonico e Ichigo.

5.3 Encontro 3

No terceiro encontro, foi realizada a subseção denominada de Exploração dos conceitos matemáticos, esta caracterizou-se por seis questionamentos. O primeiro refere-se a: Qual é o número de lados (n), o número de triângulos a partir do vértice e, por fim, a soma dos ângulos internos de cada polígono? Responda para os seguintes polígonos regulares (triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono). Os participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo responderam, respectivamente, conforme figura 13.

Figura 13: Tabela respondida pelos participantes

Polígonos regulares	Nº de lados (n)	Número de triângulos a partir do vértice	Soma dos ângulos internos
	3	1	180
	4	2	360
	5	4	540
	6	6	420
	7	7	900
	12		1800

(a) Resposta do participante Lastonico

Polígonos Regulares	Nº de lados (n)	Número de triângulos a partir do vértice	Soma dos ângulos internos
	3	1	180º
	4	2	360º
	5	3	540º
	6	4	720º
	8	6	1080º
	12	10	1800º

(b) Resposta dos participantes Gauss, Guerreiro e Ichigo.

Fonte: Autora (2021).

Nessa questão, os pesquisadores deixaram como exemplo as respostas relacionadas ao triângulo e os acadêmicos deviam responder a tabela com o número de lados (coluna 2), o número de triângulos a partir do vértice (coluna 3) e, por fim, a soma dos ângulos internos (coluna 4) dos polígonos quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono (coluna 1). Essa questão exigiu que os acadêmicos reconhecessem que a soma dos ângulos internos de qualquer triangulo é 180° e como cada polígono pode ser decomposto em triângulos. Portanto, bastava multiplicar o número de triângulos a partir de um vértice do polígono, por 180º para descobrir o valor da soma dos ângulos internos do polígono correspondente (coluna 4).

Como os participantes Gauss, Guerreiro e Ichigo responderam igualmente e no mesmo formato a tabela, então foi unificado a imagem em uma única figura: Figura 13b. Analisando nota-se que Lastonico respondeu corretamente à questão para os polígonos quadrado e pentágono. Já os polígonos hexágonos, octógonos e dodecágono, ele responde parcialmente, conforme Figura 13a. Já os participantes Gauss, Guerreiro e Ichigo respondem corretamente as três colunas da tabela, conforme figura 13b. O uso da caneta e não da caixa de texto pode ter dificultado a escrita da resposta na tabela por Lastonico, pois é evidente que o acadêmico reconhece o processo de padronização ao preencher parcialmente os dados solicitados e ao reconhecer os elementos da fórmula na questão seguinte.

O segundo questionamento é: A partir da resposta anterior, generalize a fórmula e calcule a soma dos ângulos internos dos polígonos regulares: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono?

Lastonico afirmou que: “diminuir dois do número de lados e multiplicar por 180.” Já Gauss respondeu que “A fórmula da soma dos ângulos internos está associada ao número de lados e também ao ângulo encontrado no menor polígono: Sn = (n - 2)*180º. Com isso, temos para cada polígono o seguinte: triângulo (180º); quadrado (360º); pentágono (540º); hexágono (720º); octógono (1080º); Dodecágono (1800º).” Guerreiro demonstrou, conforme Figura 14, a fórmula e o cálculo da soma dos ângulos internos:

Figura 14: Fórmula e cálculo da soma dos ângulos internos

Fórmula será o número de lado do Polígono (n) menos 2 multiplicado por 180 graus ou ainda o nº de triângulos a partir do vértice (NV) multiplicado por 180 graus
(n - 2) x 180 ou NV x 180
Usando a 2ª fórmula NV x 180
TRIÂNGULO - 1 x 180º = 180º
QUADRADO - 2 x 180º = 360º
PENTÁGONO - 3 x 180º = 540º
HEXÁGONO - 4 x 180º = 720º
OCTÓGONO - 6 x 180º = 1080º
DODECÁGONO - 10 x 180º = 1800º

Fonte: Autora (2021).

Já o participante Ichigo respondeu “Sn = (n - 2). 180º.”

As respostas dos participantes, mostrou que todos conseguiram encontrar as fórmulas, comprovando que entenderam os conceitos relacionados à fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono. A descoberta da fórmula, corrobora que ela favoreceu o entendimento da questão, não por meio de uma explicitação pelo professor de uma fórmula pré-existente à atividade, mas pela descoberta motivada por um processo de sistematização e busca de padrões que permitem chegar à fórmula.

É importante lembrar que o participante Lastonico respondeu parcialmente a tabela da questão 1, que foi elaborada com o intuito de conectar as duas primeiras questões e chegar ao reconhecimento dos elementos da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, o que confirma nossa inferência anterior sobre o preenchimento parcial da tabela. Nesse sentido o objetivo almejado na análise a priori foi alcançado.

Na terceira questão: Determine a fórmula e calcule a medida dos ângulos internos dos polígonos regulares: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono. O participante Lastonico respondeu “triangulo 1*180=180; quadrado 2*180=360; pentágono 3*180=540; hexágono 4*180=720; octógono 6*180= 1080; dodecágono 10*180=1800.” Enquanto Gauss afirmou “A fórmula da medida dos ângulos internos está relacionada com a da soma dos ângulos internos dividindo pelo número de lados. Sendo assim temos: a = (180º*(n-2))/n.”. O participante Guerreiro afirmou a fórmula e o cálculo dos ângulos internos, conforme Figura 15.

Figura 15: Fórmula e cálculo dos ângulos internos

Se a soma dos ângulos internos NV x 180 então o valor do ângulo interno é (NV x 180) dividido pelo número de lados (n):
Usando então (NV x 180)/n

TRIÂNGULO - (1 x 180) / 3 = 60º
QUADRADO - (2 X 180) / 4 = 90º
PENTÁGONO - (3 x 180) / 5 = 108º
HEXÁGONO - (4 x 180) / 6 = 120º
OCTÓGONO - (6 x 180) / 8 = 135º
DODECÁGONO - (10 x 180) / 12 =150º

Fonte: Autora (2021).

Já Ichigo respondeu que “3^ = 60º; 4^ = 90º; 5^ = 180º; 6^ = 120º; 8^ = 135º; 12^ = 150º.”

Lastonico não generalizou a fórmula da medida dos ângulos internos solicitada, e respondeu com dados que remetem à soma dos ângulos internos dos polígonos.

Dessa forma, o participante demonstrou que ainda não consolidou o conhecimento objetivado com a atividade. Nesse sentido, caberia considerar a necessidade de outras abordagens, a fim de estabelecer relações necessárias para que o conhecimento seja ressignificado pelo participante. Já Gauss generalizou corretamente a fórmula, no entanto, não expôs as medidas dos ângulos internos de cada polígono, porém, ele sinalizou compreender bem o conceito matemático envolvido. O participante Guerreiro generalizou corretamente a fórmula, assim como, calculou corretamente a medida dos ângulos internos, dessa forma, ele mostrou entender bem tais conceitos. Assim, admite-se como completa a resolução de Gauss e Guerreiro, pois esses participantes demostraram maturidade e rigor matemático em suas respostas até o momento. Em relação a resposta do Ichigo, ele não generalizou a fórmula, no entanto, respondeu corretamente, os cálculos da medida dos ângulos internos. No entanto, o participante ratificou que ainda não atingiu o objetivo almejado.

A quarta questão refere-se a: Quais os ladrilhos iguais que preenchem perfeitamente o plano? - Para os quatro participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo as respostas são: “triangulo; quadrado e hexágono.”

Na previsão da análise a priori, esperava-se que eles resolvessem matematicamente a resposta, utilizando a expressão $[(n\text{-}2).180]\div n$ e substituíssem o n por números inteiros maiores que 2 e menores que 13. E os resultados que fossem números divisores de 360° preencheriam o plano. Ao analisar as respostas, percebe-se que todos os participantes responderam corretamente, no entanto, não é possível afirmar que o objetivo com a resposta esperada tenha sido alcançado, uma vez que a inserção dos ladrilhamentos com polígonos iguais foi trabalhada na questão 2 e pode ter interferido nessa resposta. Dessa forma, acredita-se que a manipulação e inserção dos ladrilhamentos no Geogebra contribuiu para que eles respondessem corretamente à questão e, com isso, caberia uma nova abordagem a fim de verificar a compreensão da relação entre os polígonos e os divisores de 360º no ladrilhamento de um plano.

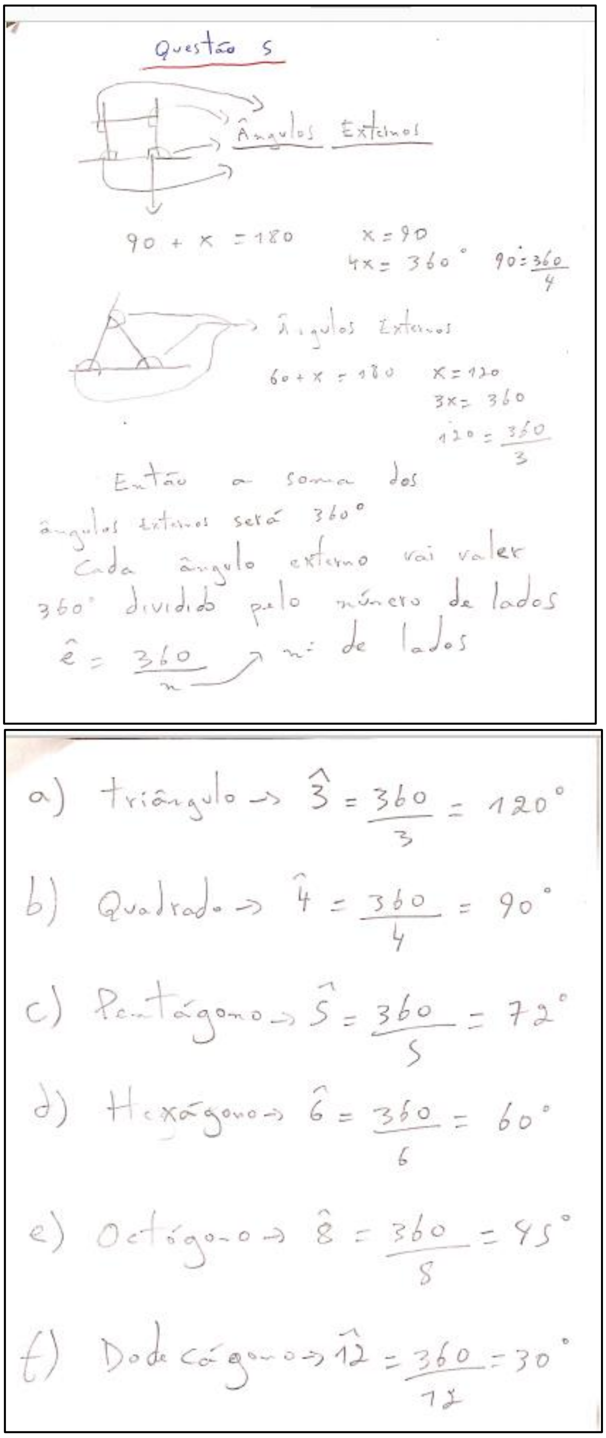
Na quinta questão, perguntou-se o seguinte: Determine a fórmula e calcule os ângulos externos dos polígonos regulares triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono?

Lastonico respondeu que “sabendo que a soma de um ângulo inteiro com o externo tem que dar 180º, então: triangulo 180-60=120; quadrado 180-90=90; pentágono 180-108=72; hexágono 180-120=60; octógono 180-135=45; dodecágono

180-150=30.” Já Gauss afirmou que “A partir da utilização da fórmula da soma dos ângulos internos dos polígonos é possível verificar que para quaisquer polígonos regulares a soma será igual a 360º.”

O participante Guerreiro, respondeu, conforme observa-se na Figura 16.

Figura 16: Fórmula e cálculo dos ângulos externos



Fonte: Autora (2021).

O participante Ichigo respondeu da seguinte forma: “S = 360º/n; 3^ = 120º; 4^ = 90º; 5^ = 72º; 6^ = 60º; 8^ = 45º; 12^ = 30º.”

Os participantes Lastonico e Gauss não descreveram a fórmula, no entanto responderam corretamente em suas considerações. Faltou a ambos mencionar a relação entre o número de lados e a soma dos ângulos externos de um polígono regular, uma vez que essa é, conforme apresentado por Gauss, sempre 360º. Portanto, para encontrar a fórmula do ângulo externo de um polígono regular bastaria mencionar a relação 360º/n. Enquanto Guerreiro e Ichigo, descreveram a fórmula e responderam corretamente os cálculos relacionados aos ângulos externos. Considera-se, no entanto, que as respostas estão corretas e demonstram que os participantes entenderam os conceitos.

A sexta questão é: A partir de todas as atividades que foram realizadas, como você define o conceito de ladrilhamento? Para Lastonico a resposta é “o angulo interno precisa ser divisor de 360”. Gauss respondeu: “O ladrilhamento ocorre a partir do preenchimento de um plano sem deixar espaços em branco e sem ocorrer uma superposição dos polígonos.”

O participante Guerreiro apontou que “É a arte de se utilizar formas de polígono regulares para preencher áreas planas sem deixar espaços ou buracos entre as partes, preenchendo completamente os espaços sem modificar o formato original dos polígonos.” Já o participante Ichigo responde que “Consiste no preenchimento do plano com polígonos, cobrir todas as partes do plano que não sobrem espaços ou buracos.”

Analisando essas respostas, percebe-se que o participante Lastonico não ampliou o conceito de ladrilhamento para polígonos diferentes, uma vez que para polígonos iguais, essa resposta é válida. Contudo, o ângulo interno não necessariamente precisa ser divisor de 360°, que são os casos do octógono e dodecágono, que tem 135° e 150°, respectivamente, pois 2 octógonos e 1 quadrado, permitem ladrilhamento um ladrilhamento do tipo 8,8,4 ou ainda, dois dodecágonos e 1 triângulo, permitem um ladrilhamento do tipo 12,12,3, além de outras composições que somam 360º ao redor de um vértice, ou seja, cobrem perfeitamente o plano, sem deixar espaço e sem sobreposição. No entanto, Gauss, Guerreiro e Ichigo responderam corretamente.

Sobre as respostas esperadas para as atividades do encontro 3, destaca-se que as expectativas foram superadas em relação ao participante Gauss, Guerreiro, Ichigo e parcialmente atingidas em relação ao participante Lastonico.

5.4 Encontro 4

No quarto encontro, foi feita a última subseção denominada de questionário pós-experimento, composta por cinco questões, sendo a primeira: O que você achou das aulas sobre ladrilhamento e geometria plana? Por quê? A essa questão Lastonico respondeu: “Excelente, porque teve teoria na medida certa e a parte pratica foi bem interessante.”. Para Gauss a resposta foi: “Boa, porque analisar os ladrilhamentos, da perspectiva geométrica, permite entender quais as características desse material, como os ângulos e quais figuras permitem realizar o ladrilhamento. Eu acredito que seja muito relevante trabalhar com esse contexto, pois facilita o entendimento do indivíduo para o estudo da Geometria Plana, e dos ângulos”. O participante Guerreiro respondeu: “Excelente, por que aprendi com muita facilidade, devido a maneira como se desenvolveu todas as atividades, de forma muito prática e dinâmica, de fácil compreensão por parte do aluno.” Já Ichigo respondeu: “Excelente, pois acredito que mostra a teoria da matemática (ângulos etc) em figuras planas em nosso cotidiano como lajotas, demonstrando para o aluno que a matemática está presente.”

Verifica-se nas respostas dos participantes uma boa receptividade a esse formato de atividade matemática, com caráter mais voltado para investigação e descoberta, contrapondo-se ao modelo mais expositivo. Durante os encontros foi possível perceber o engajamento dos acadêmicos em relação ao estudo e apropriação de conceitos matemáticos relacionados ao ladrilhamento, o que pode ser corroborado na resposta à questão 2.

Na segunda questão: O que você considerou fácil nesse experimento? - Lastonico respondeu que: “compreender os conceitos que envolvem a prática de ladrilhar.” Gauss afirmou que: “Realizar os ladrilhos de polígonos iguais. Como os compostos apenas por triângulos, hexágonos e quadrados.” Guerreiro explicou que: “Somente a parte inicial, depois tive um pouco de dificuldade, mas consegui pegar bem o conhecimento.” Ichigo respondeu que: “A identificação dos polígonos.”

Mesmo com respostas distintas e alguma dificuldade maior demonstrada por Lastonico durante os encontros anteriores, no decorrer do encontro 3, os participantes demonstraram ampliação da compreensão dos conceitos iniciais, seja na visualização dos polígonos com suas medidas e relação entre ângulos, assim como, na constatação de que é necessário 360° ao redor de um vértice para se obter um ladrilhamento, além de outras conjecturas apresentadas pelos participantes.

Na terceira questão os acadêmicos foram solicitados a descrever se: O uso da técnica de ladrilhamento facilitou sua compreensão dos ângulos e polígonos? E se você aprendeu a identificar melhor os conceitos de Geometria Plana depois dessas atividades? Todos os participantes mencionaram que tal técnica os ajudaram no entendimento. Percebemos isso, quando Lastonico e Ichigo concluíram com sucesso a etapa de “Exploração dos conceitos matemáticos”, pois responderam de forma satisfatória a todas as questões, reforçando tal entendimento. Em relação aos participantes Gauss e Guerreiro, pode-se afirmar que eles demonstraram domínio na compreensão e elaboração de conjecturas quando relacionados aos conceitos da Geometria Plana. Durante sua construção de ladrilhamentos com ladrilhos iguais (polígonos regulares iguais) e com ladrilhos diferentes (polígonos regulares diferentes), assim como em suas respostas no encontro referente a “Exploração dos conceitos matemáticos”, Gauss e Guerreiro encontraram as fórmulas solicitadas e fizeram observações pertinentes e teoricamente validadas em relação aos conceitos explorados.

Na quarta questão foram questionados: Em quais figuras planas você gostou mais de fazer ladrilhamentos e por que você gostou de trabalhar com essas figuras?

Lastonico respondeu que “foram as figuras triângulo e hexágono, por que aprendi conceitos novos.” Gauss destacou que: “as figuras triângulo, quadrado e octógonos, porque as figuras planas menores possuem maior flexibilidade na construção desses ladrilhos. Quanto ao octógono, gostei do resultado do seu ladrilho, combinado com quadrados.” Guerreiro respondeu que: “foram as figuras triângulo, quadrado e pentágono, talvez porque elas encontravam os preenchimentos dos espaços mais facilmente, e os ângulos também são de fácil resolução.” Já Ichigo destacou que: “foram as figuras triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágonos, por ser outro tipo de ferramenta utilizada na matemática, não é somente cálculo e sim a utilização de polígonos e sua identificação. A utilização e o manuseio no Geogebra, além de utilizar o software como um aprendizado.”

As respostas dos participantes sinalizam para a aprendizagem de novos conceitos, o que fica mais explícito na afirmação de Gauss, uma vez que esse participante consegue relatar exatamente o que mais chamou atenção em sua produção de ladrilhamentos. Cabe acrescentar que o reconhecimento pelos participantes de um aprendizado novo remete a consolidação de conhecimentos, o que foi corroborado nas atividades concluídas pelos participantes, em maior ou menor nível de aprofundamento.

Na quinta questão foi perguntado se: Você encontrou dificuldade nas atividades propostas? Os participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo responderam que não tiveram tais dificuldades. No entanto, cabe destacar que houve respostas parciais apresentadas por Lastonico, e Ichigo que podem ser devidas à uma dificuldade relativa, relacionada com a matemática e ou com o uso da ferramenta Geogebra.

Ao concluir esta análise, conclui-se que os participantes demostraram ampliação na compreensão de conceitos relacionados à Geometria Plana por meio da atividade de ladrilhamentos.

6 CONCLUSÕES

A Engenharia didática realizada, por meio de ladrilhamentos permitiu comparar conhecimentos iniciais e observar a evolução dos participantes ao longo do experimento realizado, desse modo, conclui-se que os estudantes alcançaram as respostas esperadas da sequência didática, bem como foi confirmada a hipótese de que através das atividades com a técnica de ladrilhamentos, o acadêmico é capaz de se aprofundar em conteúdos referentes à Geometria Plana. Nesse sentido, destaca-se que as previsões de respostas, em sua maioria, foram alcançadas ao longo das produções e discussões conduzidas durante o curso.

Analisou-se no decorrer da pesquisa os participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo. No primeiro encontro, na primeira parte referente a história e exemplos de ladrilhamentos os participantes Lastonico, Gauss, Guerreiro e Ichigo mostraram reconhecer ladrilhamentos em seu cotidiano. No entanto quando questionado o porquê usar tal técnica, os participantes Lastonico, Gauss e Guereiro mostraram entender matematicamente. Já Ichigo respondeu que a técnica serve para fins estéticos. Na segunda parte, referente a conceitos do Geogebra, os participantes mostraram através de suas construções no geogebra, Figura 11, ter domínio do software, no entanto, quando questionado, o que eles observaram em suas construções, os participantes Lastonico, Guerreiro e Ichigo embora tenham respondido corretamente, não foi possível afirmar que o argumento foi válido. Enquanto, Gauss prova na sua resposta tal entendimento. Dessa forma, nesse encontro os participantes mostraram alcançar o previsto na análise a priori de uma forma parcial.

Na primeira parte, do segundo encontro nomeado Manipulação e exercícios de ladrilhamento, foram elaboradas cinco questões, nas quais duas delas precisavam apresentar os padrões com ladrilhos iguais e suas construções no geogebra. As outras duas precisavam mostrar os padrões com ladrilhos diferentes e suas construções. Já a última tratava-se de saber o princípio utilizado para preencher o plano. Em relação aos ladrilhos iguais, os participantes demonstraram entender tal conceito, embora Lastonico e Ichigo tenham respondido parcialmente. Já nas construções, conforme figura 12, Gauss e Guerreiro, ratificaram suas respostas anteriores, através de suas imagens. Quanto aos ladrilhos diferentes, Lastonico e

Ichigo demonstraram a construção de somente um ladrilhamento, bem como, responderam os padrões erroneamente. Já Gauss e Guerreiro, construíram corretamente os padrões, no entanto, Gauss não escreveu os padrões, mas sim os polígonos utilizados, enquanto Guerreiro escreveu corretamente. Em relação, a última questão, os participantes Lastonico e Ichigo demonstraram um conhecimento insatisfatório. Em contrapartida, Gauss e Guerreiro demonstraram um conhecimento satisfatório.

Na segunda parte, do segundo encontro nomeado Ladrilhamentos bem-comportados, foram feitas quatro questões. Dentre as respostas percebe-se que o participante Lastonico foi o que menos mostrou entendimento do conceito de ladrilhamentos bem-comportados. Já Guerreiro e Ichigo demonstraram ter um conhecimento satisfatório e o Gauss demonstrou entender perfeitamente o conceito.

No terceiro encontro, intitulado Exploração dos conceitos matemáticos, foram realizados seis questionamentos. O participante Lastonico não respondeu corretamente a tabela da primeira questão, no entanto, demonstrou no decorrer das perguntas ter um entendimento satisfatório. Enquanto Gauss, Guerreiro e Ichigo, mais uma vez, demonstraram ter um bom conhecimento matemático.

No quarto e último encontro, os participantes ao responder o questionário, afirmaram que gostaram das atividades. Mencionaram também, que a técnica de ladrilhamento facilita na compreensão dos ângulos e polígonos. Podemos ver isso, no decorrer dos encontros, quando os participantes Gauss, Guerreiro respondem corretamente e os participantes Lastonico e Ichigo respondem parcialmente corretos, a seção exploração dos conceitos matemáticos. Em relação, as dificuldades encontradas, os participantes disseram não as encontrar, no entanto, conforme analisado, percebe-se que o Lastonico e Ichigo não conseguiram fazer os exercícios em relação a manipulação dos polígonos.

Salienta-se também que, no decorrer da ED, foram alcançados os objetivos almejados da pesquisa, onde foram apresentadas as reflexões teóricas acerca do alcance da Engenharia Didática para ladrilhamentos no plano; reconhecidos os padrões, tipos e composições de polígonos regulares no ladrilhamento bem-comportado a partir das representações de estudantes do curso de matemática-licenciatura, assim como, foi validada a hipótese da Engenharia didática proposta.

Conclui-se, portanto que a E.D. contribuiu para a ampliação e construção de conhecimento matemático geométrico, uma vez que no decorrer dos encontros foi possível detectar que os acadêmicos compreenderam de forma contextualizada a relação entre elementos de um polígono regular e sua aplicação na técnica de ladrilhamentos, assim como foram capazes de realizar conjecturas e generalizações representáveis por meio de afirmações e fórmulas.

7 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

- Criar sequências didáticas utilizando outros conceitos de Geometria Plana através da técnica de ladrilhamentos;
- Utilizar objetos concretos para realizar a etapa da manipulação dos polígonos;
- Avaliar a metodologia de uma forma que os estudantes pudessem trabalhar em grupos para que eles pudessem discutir entre eles as respostas;
- Desenvolver a atividade com grupos maiores;
- Realizar as oficinas com estudantes do ensino básico.

REFERÊNCIAS

AFINI, Dais Capucho; SOUZA JÚNIOR, José Carlos de. Mosaicos, pavimentações do plano e o ensino da geometria. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais eletrônicos** [...]. Curitiba: ENEM, 2013. Disponível em: =http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2842_780_ID.pdf. Acesso em: 8 jun. 2019.

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, abr. 2016. ISSN 1983-3156. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/20879. Acesso em: 14 fev. 2020.

ARTIGUE, Michéle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis. **Ingeniería didáctica en educación matemática**. 1 ed. Bogotá: Grupo Editorial Iberoámerica, 1995. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/277733635_Ingenieria_didactica_en_educacion_matematica. Acesso em: 04 abril 2019.

ASSUMPÇÃO, Paula Gabrieli Santos de. **Perímetro e área:** uma engenharia didática utilizando o geogebra sob o olhar das representações semióticas. 2015. 233 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2518919. Acesso em: 02 mar. 2019.

AZEVEDO, Thiago de; ESQUINCALHA, Agnaldo; LOZANO, Abel Rodolfo Garcia. Geogebra Book, smartphones e ladrilhamentos no plano. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 185-194, jan./abril 2018. ISSN 2238-2380. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/5030/2653. Acesso em: jan. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf. Acesso em: 10 jun. 2020

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. Disponível: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 13 maio 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file. Acesso em: 10 jan. 2021

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodoes de la didactiquedes mathématiques. Recherches em didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Peensée Sauvage Éditions, 1986.

CAETANO, Paulo Antonio Silvanie; DIAS, Claúdio Carlos; SAMPAIO, João Carlos Vieira; ROSA, Marlusa Benedetti. **A arte no plano**: Confeccionando ladrilhos e construindo ladrilhamentos. São Carlos: UFSCAR, 2010. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=20850. Acesso em: 05 nov. 2019.

DIAS, Cláudio Carlos; SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Matem@tica na pr@tica**. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/~sampaio/DesafioGeometricoModuloI.pdf. Acesso em: 02 fev. 2021.

DOMINGUEZ, Andréa do Amaral; SANTOS, Carlos Alberto Ávila. Tapetes em massa de cimento: ladrilhos hidráulicos em Pelotas. **Revista XVII Seminário de História da Arte,** Pelotas, n. 4, p. 1-9, 2014. ISSN 2237-1923. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/Arte/article/download/4927/3685. Acesso em: 24 jun. 2019.

GUMIERI, Antônio Cláudio. **Aplicação da técnica de ladrilhamento com polígonos regulares nos anos finais do ensino fundamental.** 2018. 100 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6430569. Acesso em: 21 jun. 2019.

GUTIERREZ, Ester Judite Bendjouya; NEUTZLING, Simone. O patrimônio urbano da rainha da fronteira. Bagé. RS. **Revista Memória em Rede**, Pelotas, v. 2, n. 5, p. 71-86, abr./jul. 2011. ISNN 2177-4129. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/Memoria/article/view/9525. Acesso em: 24 jun. 2019.

IMENES, Luis Márcio; LELLIS, Marcelo. **Geometria dos mosaicos**. 12. Ed. São Paulo: Scipione. 2002. (Coleção Vivendo a Matemática)

JULIO, Rejane Siqueira; SILVA, Guilherme Henrique Gomes; NOGUEIRA, Vinícius Gabriel Silva; OLIVEIRA, Andréia do Carmo de. Ladrilhamentos como um produto educacional: possibilidades para a formação inicial e continuada de professores de matemática. **Boletim Online de Educação Matemática,** Joinville, v. 6, n. 10, p. 123-144, ago. 2018. ISNN 2357-724X. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11821. Acesso em: 10 jun. 2019.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didatica. *In:* MACHADO, Silvia Dias Alcantara (org.), **Educação matemática**: uma (nova) introducao. 3.ed. Sao Paulo: Editora da PUC, 2012.

MARTINS, Rosilaine Sanches. **Ângulos em polígonos**: construindo mosaicos e ladrilhamentos. [*S.l: s. n*.], 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1527/angulos-em-poligonos-construindo-mosaicos-e-ladrilhamentos. Acesso em: 08 jun. 2019.

MELLO, Leila Inês Pagliarini. Ladrilhamentos no plano: uma atividade para o ensino médio. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Caxias do Sul, v. 1, n. 2, p. 1-10, jan. 2015. ISNN 2447-2689. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1275. Acesso em: 14 jun. 2019.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa; SIPLER, Ivanete Zuchi. Livros Dinâmicos de matemática. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.9, n.2, p. 78-102, 2020. ISSN 2237-9657. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/qzsm6spt. Acesso em: 10 jun. 2021

PENTEADO, Daniele Regina; PEREIRA, Ana Lúcia; BRANDT, Célia Finck. Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 8, n. 16, p. 48-81, jul./dez. 2019. ISSN 2238-5800. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/vFiew/1854. Acesso em: 10 jul. 2019.

PEREIRA, Lucas Rodrigues. **Práticas de ensino em geometria plana.** 2017. 174 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2017. Disponível em: https:e/sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5010188. Acesso em: 26 mar. 2019.

SALLUM, Elvia Mureb. **Ladrilhamento**. São Paulo: USP. 2016. Disponível em: https://www.slideshare.net/WilsonMarques8/ladrilahamento. Acesso em: 08 jun. 2019.

SANTIAGO, Paulo Vitor da Silva; ALVES, Francisco Régis Vieira; MAIA, Beatriz Maria Pereira. Sobre a noção de Situação Didática Olímpica aplicada ao contexto das Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v.18, p. 1-20, 2021. ISSN 2526-9062. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/533/262. Acesso em: 10 jun. 2021.

SANTOS, Ana Paula Rodrigues Alves; ALVES, Francisco Régis Vieira. A engenharia didática para o ensino de olimpíadas de matemática: situações olímpicas com o amparo do software geogebra. **Revista Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, Bogotá, v. 13, n. 1, p. 33-54, jan./jun. 2018. ISSN 2665-3303. Disponível em: http://doi.org/10.14483/23464712.11732. Acesso em: 20 maio 2019.

SANTOS, Carlos Alberto Ávila. Influências francesas na organização dos espaços verdes de pelotas e nos edifícios da cidade: 1870-1931. **JURIS Revista da Faculdade de Direito**, Rio Grande, v. 17, p. 153-173, 2012. ISSN: 1413-3571. Disponível em: https://periodicos.furg.br/juris/article/view/3612. Acesso em: 25 jun. 2019.

SÃO PAULO. Secretaria da educação. **Caderno do professor:** matemática, ensino fundamental: 6º série. São Paulo: SEE, 2009. v. 2

SOUZA, Thamires Silva Aquino de; ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia didática como instrumento metodológico no estudo e no ensino da Sequência de Jacobsthal. **# Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas, v. 7, n. 2, p. 1-19, 2018. ISSN 2238-8079. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/3119. Acesso em: 30 maio 2019.

STEFANI, Amanda; PROENÇA, Marcelo Carlos de. Análise das dificuldades de alunos dos anos finais do ensino fundamental na resolução de problemas de perímetro e área. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 8, n. 16, p. 97-118, jul./dez. 2019. ISSN 2238-5800. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1902. Acesso em: 10 jul. 2019.

TEIXEIRA, Rackel de carvalho. **Uma maneira dinâmica de aprender área e perímetro de figuras planas a partir de situações concretas e lúdicas.** 2018. 120 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes. 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6360927. Acesso em: 27 mar. 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA. **Projeto Pedagógico do curso de matemática-Licenciatura**. Bagé: UNIPAMPA, 2017. Disponível em: http://dspace.unipampa.edu.br/bitstream/riu/89/6/PPC%20Matem%c3%a1tica_Bag%c3%a9.pdf. Acesso em: 11 jan.2021

ZANELLA, Idelmar André; FRANCO, Valdeni Soliani; CANAVARRO, Ana Paula. Realizar construções geométricas com o geogebra: a contribuição do ambiente de geometria dinâmica para o futuro professor de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 7, n. 14, p. 179-207, jul./dez. 2018. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1706. Acesso em: 14 jul. 2019.