UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

JULIANA ALVES D’ÁVILA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO

Bagé
2018

JULIANA ALVES D'ÁVILA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais

Coorientador: Profª. Dra. Vera Lúcia Duarte Ferreira

Bagé
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

D259s D'Avila, Juliana Alves

Sequência didática como proposta metodológica para a aprendizagem significativa da geometria espacial no ensino médio / Juliana Alves D'Avila.

109 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2018.

"Orientação: Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais".

1. Geometria espacial. 2. Intervenção pedagogia. 3. Aprendizagem significativa. 4. Sequência didática. I. Título

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Universidade Federal do Pampa

JULIANA ALVES D'ÁVILA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO PROPOSTA METODOLÓGICA PARA A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 29/11/ 2018.

Banca examinadora:

____

Prof. Dra. Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais

Orientador

UNIPAMPA

____

Prof. Dr. Anderson Luis Jeske Bihain

UNIPAMPA)

Prof. Dr. Márcio Marques Martins
UNIPAMPA

Assinado eletronicamente por **ANDERSON LUIS JESKE BIHAIN, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/04/2021, às 23:19, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **DENICE APARECIDA FONTANA NISXOTA MENEGAIS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/04/2021, às 18:34, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **MARCIO MARQUES MARTINS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/04/2021, às 20:05, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0496027** e o código CRC **0471073A**.

Referência: Processo nº 23100.005429/2021-01 SEI nº 0496027

Dedico esse trabalho ao meu Esposo por acreditar sempre em minha capacidade e me encorajar a prosseguir nessa trajetória.

A minha querida mãe, Maria Eunice que por suas razões me ensinou acima de tudo conquistar as coisas com muito trabalho. A conquista é minha, mas a vitória é de vocês.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, pela fé e força, para realização de mais esta etapa da minha vida.

Ao meu esposo Dinossane Saraiva pelo seu permanente incentivo, por acreditar incondicionalmente no meu potencial, pelo amor e paciência em toda minha caminhada.

Aos meus pais que com muito carinho, amor e compreensão, tiveram papel fundamental na minha formação.

Às minhas orientadoras Profª. Dra. Denice Menegais e Profª. Dra. Vera Lúcia Ferreira por acreditar em mim, pela sabedoria, compreensão, paciência e orientação dedicada a esse trabalho para que fosse realizado da melhor forma.

A todos os professores do Curso Matemática-Licenciatura da UNIPAMPA que participaram da minha formação, pelos inúmeros aprendizados e saberes que futuramente contribuirão para meu desenvolvimento profissional.

Aos meus colegas de curso, pelos quais muito aprendi durante esse período de convivência e aos que se tornaram verdadeiros amigos Lucas Freitas e Daiane Fagundes pelas inúmeras horas de estudo no decorrer das disciplinas, pelo incentivo, amizade e parceria.

Aos amigos e amigas que estiveram presentes, me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação durante esta trajetória.

A todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho. Meus mais sinceros agradecimentos.

“*A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original’.*

Albert Einstein

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo analisar o efeito da aplicação de uma sequência didática quanto à compreensão e desempenho de estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Bagé - RS sobre alguns conteúdos de Geometria Espacial. Adotou-se como metodologia uma abordagem quanti-qualitativa. Na abordagem qualitativa foi analisada a aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo de Geometria Espacial à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1968). Já para abordagem quantitativa, foi utilizado o cálculo de ganho de aprendizagem descrito na metodologia de Hake (2002). Como resultados obteve-se um ganho médio positivo de 69,23%. Tal ganho também foi percebido no decorrer das atividades, em que os estudantes manifestaram mudanças tanto no que diz respeito à sua postura e motivação frente aos desafios propostos. Ao final da aplicação da Sequência Didática, conclui-se que a interação do professor-estudante e estudante-estudante com as diversificadas situações de aprendizagem, oportunizaram o desenvolvimento de competências e de habilidades, viabilizando assim um ganho de aprendizagem significativa.

Palavras-Chave: Geometria espacial. Intervenção pedagogia. Aprendizagem significativa. Sequência didática.

ABSTRACT

This research aims to analyze the effect of applying a didactic sequence regarding the comprehension and performance of 3rd year high school students from a public school in the city of Bagé - RS on some spatial geometry contents. A quanti-qualitative approach was adopted as methodology. In the qualitative approach, student's learning in relation to the content of spatial geometry was analyzed in light of Ausubel's Significantive Learning Theory (1965). For the quantitative approach, the learning gain calculation described in the Hake methodology (2002) was used. As results, an average positive gain of 69,23% was obtained. This gain was also noticed in the course of the activities, in which the students showed changes both in their posture and motivation in face of the challenges proposed. At the end of the application of the Didactical Sequence, it is concluded that the interaction between teacher-student and student-student with the diversified learning situations, enabled the development of skills and abilities, thus enabling a significant learning gain.

Keywords: Geometry spatial. Pedagogical intervention. Significantive learning. Didactical sequance.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SD – Sequência Didática

TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

PCN – Parâmetro Curricular Nacional

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma área do conhecimento utilizada de forma prática desde o tempo dos antigos egípcios, principalmente para medir terrenos e realizar construções. Em particular, a Geometria Espacial é um tema da Matemática com muitas aplicações práticas. Apesar disso, os estudantes da educação básica, de modo geral, apresentam muita dificuldade para compreendê-lo. Nesse sentido, percebemos a necessidade de utilização de diferentes abordagens, capazes de incentivar o aprendizado sem abrir mão dos conceitos teóricos intrínsecos ao assunto. Como é possível verificar, na tentativa de ensinar o conteúdo de geometria, os professores esbarram em dificuldades tais como, a vida apressada dos tempos atuais, a falta de infraestrutura muitas vezes encontradas em escolas públicas, entre outros fatores, situações essas que acabam por desmotivar o docente a inserir práticas pedagógicas diferenciadas, principalmente no ensino de Geometria Espacial.

De acordo com os PCN, “quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante”. (BRASIL, 2006, p. 53)

As propostas metodológicas baseadas na exposição de conteúdos, que se utilizam da memorização e da repetição como única forma de ensinar e aprender matemática, não atendem às necessidades do contexto contemporâneo, “uma vez que, no mundo profissional contemporâneo ninguém lhe diz que fórmula usar, o sucesso reside na habilidade de resolver problemas de maneiras novas e criativas” (KHAN, 2013, p. 61).

Diante do exposto acima, buscou-se, então desenvolver uma sequência didática sobre alguns conteúdos de Geometria Espacial para estudantes do 3º ano do ensino médio, que intenciona promover a aprendizagem significativa, partindo de habilidades que os estudantes já dominam para alcançar níveis que eles ainda precisam dominar, isso significa inserir a Geometria Espacial por meio de práticas pedagógicas diferenciadas como, por exemplo, a utilização de materiais concretos e o uso do *software* Geogebra. É importante ressaltar que tais técnicas têm propósito ferramental para obter um melhor entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos tornando-os mais aceitáveis e atrativos para os mesmos.

Este estudo será desenvolvido em uma abordagem quanti-qualitativa. Na abordagem qualitativa será analisada a aprendizagem dos estudantes em relação ao conteúdo de Geometria Espacial. Já na abordagem quantitativa será utilizado o cálculo de ganho de aprendizagem dos estudantes descrito na metodologia de Hake (2002), através da aplicação de uma sequência didática. A sequência didática (SD) é um conjunto de atividades planejadas e interligadas para o ensino de um conteúdo, organizadas de acordo com o objetivo que o professor pretende alcançar para a aprendizagem dos seus estudantes, partindo de habilidades que já dominam para alcançar os níveis que eles ainda precisam dominar. Nesse contexto, a pesquisa fundamenta-se na Teoria de Aprendizagem Significativa – TAS (AUSUBEL,1965).

Vale ressaltar, que para o autor supracitado o conjunto de conhecimentos que o estudante traz consigo é a variável mais importante que o professor deve levar em consideração no ato de ensinar. Diante desse cenário, a presente pesquisa tem por objetivo analisar a eficácia de uma sequência didática com relação à compreensão e ao desempenho de estudantes do 3º ano do ensino médio sobre alguns conteúdos de Geometria Espacial.

Neste trabalho, apresenta-se inicialmente uma breve fundamentação teórica sobre a aprendizagem significativa de David Ausubel (1965) e o ensino de Geometria Espacial que nortearam a pesquisa, bem como, os estudos relacionados sobre a utilização de materiais concretos e o uso do *software* Geogebra no ensino de Geometria Espacial. Em seguida, apresenta-se a metodologia que será utilizada, a análise dos resultados e as considerações finais.

2 JUSTIFICATIVA

A geometria está presente de diversas formas e em variadas situações na nossa vida, seja na natureza, nas artes, nos objetos, nas construções, etc. Ela faz parte da vida do ser humano desde a antiguidade, sendo um dos ramos mais antigos da matemática. Dessa forma, o caráter interdisciplinar da geometria pode ser abordado em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, no auxílio da interpretação de mapas, nos gráficos estatísticos, nos conceitos de medições.

Nesse cenário, muito se discute sobre algumas habilidades que as escolas devem desenvolver nos estudantes, sendo que uma delas diz respeito à compreensão dos conceitos geométricos e áreas afins, não de forma isolada e sem relação com outros conceitos, mas de uma maneira ordenada e que conduza o estudante à resolução adequada e significativa de problemas. Embora estudos evidenciem a preocupação com o ensino de geometria, permanece ainda a ênfase em um ensino que avalia a capacidade de memorização e não a compreensão. Lorenzato (1995), destaca a importância do ensino de geometria para desenvolver a habilidade do pensamento geométrico ou o raciocínio visual para resolver situações de vida de forma geometrizadas.

Corroborando com a ideia de Lorenzato os PCN (BRASIL, 2002, p. 120) salientam que:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

O Exame Nacional do Ensino Médio (BRASIL, 2009), também apresenta competências e habilidades necessárias que os estudantes devem dominar ao concluir a Educação Básica. Por exemplo, (BRASIL, 2009), enfatiza como competência a utilização do conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade, interpretando a localização e a movimentação de pessoas e objetos no espaço tridimensional, bem como sua representação no espaço bidimensional. E como habilidades, os estudantes devem identificar figuras planas ou espaciais para resolver situação-problema do cotidiano que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma. Com base nos PCN, observa-se que a Geometria

Espacial pode ser trabalhada levando em consideração o cotidiano do estudante, uma vez que estamos rodeados de elementos geométricos.

Diante do exposto acima, este trabalho justifica-se pela busca de uma estratégia de ensino que despertasse nos estudantes o interesse pelo estudo de Geometria Espacial, promovendo a aprendizagem significativa, por meio de uma prática pedagógica diferenciada, que utiliza materiais concretos e o uso *software* Geogebra.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Analisar o efeito da aplicação de uma sequência didática quanto à compreensão e desempenho de estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Bagé sobre alguns conteúdos de Geometria Espacial.

3.2 Objetivos Específicos

- Identificar conhecimentos prévios dos estudantes sobre o assunto abordado através da aplicação de um pré-teste com questões objetivas;
- Elaborar e aplicar uma sequência didática sobre alguns conteúdos de Geometria Espacial;
- Comparar os resultados obtidos com a aplicação do pré-teste e pós-teste utilizando o cálculo do ganho de aprendizagem de Hake;
- Fazer uma análise estatística dos resultados obtidos com a aplicação do pré-teste e pós-teste;
- Analisar a eficácia na aprendizagem dos estudantes referente a aplicação da sequência didática.

4 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo está estruturado em duas seções: “A Aprendizagem Significativa de David Ausubel”, em que apresenta-se uma discussão a respeito da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), levando em conta os conceitos propostos por Ausubel (1978, 2000) e Moreira (1999, 2011); e “Estudos Relacionados”, em que busca-se pesquisas relacionadas a TAS no ensino de Geometria Espacial, bem como a utilização de materiais concretos e o uso do software Geogebra.

4.1 A Aprendizagem Significativa de David Ausubel

A teoria da aprendizagem significativa é o processo que permite que uma nova informação recebida pelo sujeito se relacione com um aspecto relevante da sua estrutura. Para Moreira (1999), a aprendizagem significativa é aquela em que o significado do novo conhecimento resulta da interação de maneira não-arbitrária e não-literal entre uma nova informação e um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do aprendiz. A aprendizagem significativa ocorre quando um novo conhecimento ancora-se em outros conhecimentos prévios do aprendiz. Esses conhecimentos prévios são definidos como subsunçores. Ausubel (2000), argumenta que o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Quando a nova informação interage com um conceito já existente na estrutura cognitiva do estudante ocorre a modificação do conceito subsunçor, tornando-o mais elaborado e inclusivo e este servirá de base para novas informações mais abrangentes.

Em contraposição à aprendizagem significativa há a aprendizagem mecânica definida por Ausubel como as novas informações que são aprendidas sem ter interação com conceitos presentes na estrutura cognitiva do estudante, em que a nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com a já existente. Convém realçar que esses dois tipos de aprendizagem fazem parte de um contínuo e não são uma simples dicotomia. Assim, não são excludentes e, em certos, casos, podem coexistir. Segundo Ausubel (2000), por não estarem bem ancorados, os materiais aprendidos por memorização são mais suscetíveis ao esquecimento e possuem uma capacidade de retenção inferior àqueles aprendidos de maneira não literal e não arbitrária. O material deve possuir significado lógico ou potencial, isto é, os elementos que o compõem devem estar organizados em uma estrutura e não apenas sobrepostos de forma arbitrária. Para facilitar o estabelecimento de relações significativas entre material e o que precisa ser aprendido recomenda que se usem organizadores prévios para servirem de ancoradouro para um novo conhecimento. Esses organizadores prévios são constituídos por materiais introdutórios que devem ser usados antes do ensino dos conceitos a serem aprendidos, favorecendo a ligação entre o que o aprendiz já sabe com o que se quer ensinar. Dessa forma, os organizadores prévios possuem uma importante função para a aprendizagem significativa e o desenvolvimento cumulativo da estrutura cognitiva do estudante.

De acordo Ausubel (1978) “a principal função do organizador prévio é servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa saber para que possa aprender significativamente a tarefa com que se depara”. Os organizadores prévios vêm preencher uma lacuna entre o que o estudante sabe e o que ele precisa saber, a fim de que o novo conhecimento possa ser aprendido de forma significativa.

Para que haja aprendizagem significativa é preciso que o estudante relacione o novo material à sua estrutura cognitiva para que esse seja potencialmente significativo, ou seja, o novo material deve ser relacionável ou incorporável à estrutura cognitiva do estudante. Tal condição deve ocorrer simultaneamente no processo de aprendizagem, porque mesmo que o material seja potencialmente significativo ao estudante, se sua intenção for de memorizá-lo mecanicamente não haverá a aprendizagem significativa. Da mesma forma, se estudante estiver predisposto a incorporar o novo conhecimento de forma não arbitrária, mas o material não for potencialmente significativo a aprendizagem se tornará mecânica (MOREIRA, 2011).

É relevante ressaltar, que o conteúdo deve ser apresentado aos estudantes, a partir dos princípios de “Diferenciação Progressiva” e “Reconciliação Integrativa”. Na Diferenciação Progressiva o material deve ser apresentado a partir de conceitos mais gerais para depois serem diferenciados progressivamente em conceitos mais específicos. Já no princípio da Reconciliação Integrativa, as relações entre ideias devem ser exploradas apontando semelhanças e diferenças importantes e indicando desconexões reais ou aparentes separando ideias.

4.2 Estudo Relacionados

Os estudos relacionados deste trabalho foram direcionados a pesquisas referentes a TAS no ensino de Geometria Espacial, a utilização de materiais concretos e o uso do *software* Geogebra. Os trabalhos apresentados se aproximam da proposta desta pesquisa, quanto a realização de atividades pedagógicas diferenciadas, que averigua indícios de aprendizagem potencialmente significativa para o ensino da Geometria Espacial.

4.2.1. A Aprendizagem Significativa no Ensino de Geometria Espacial

Ao verificar a existência de pesquisas relacionadas a TAS no Ensino de Geometria Espacial, optou-se por considerar somente o Banco de Teses e Dissertações da Plataforma Sucupira da CAPES, utilizando-se a busca *Geometria Espacial*+*Ausubel*, a partir do ano de 2015 para mestrados e doutorados, foram identificadas cinco dissertações e serão descritas a seguir.

Tavares (2016), na sua dissertação intitulada “A Geometria no Ensino Médio: uma sequência didática utilizando a fotografia, os ambientes não formais de ensino e os objetos virtuais de aprendizagem” utilizou como metodologia uma sequência didática desenvolvida em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, com intuito de investigar a utilização do registro fotográfico, bem como a utilização de objetos de medição como trenas, fitas métricas em uma trilha ecológica do Cerrado e de objetos virtuais de aprendizagem como metodologias no ensino de geometria plana e espacial, utilizando a TAS. A autora salienta que a SD proposta não tem a pretensão de sanar as dificuldades enfrentadas pelos professores no ensino de geometria. O que se propõe é apenas uma possibilidade de sequência de atividades que podem promover um ensino contextualizado e que ao motivar o estudante para a aprendizagem poderá alcançar o objetivo de promover uma aprendizagem significativa da geometria plana e espacial. Como conclusão, a pesquisa enfatiza que o desenvolvimento da proposta despertou a vontade e o interesse dos estudantes, o que considerou ser um passo essencial para a aprendizagem, pois ninguém aprende se não tiver vontade, o que pode ser despertado utilizando de estratégias e recursos didáticos apropriados.

Fernandes (2015), na sua dissertação intitulada “Aprendizagem Significativa: uma proposta de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana Espacial no Ensino Médio” que teve por objetivo desenvolver uma abordagem pedagógica para alunos da 2ª série do Ensino Médio, à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa, utilizando para isso conteúdos relacionados à geometria euclidiana espacial. A pesquisa foi realizada com 31 estudantes da 2ª série do Ensino Médio do Centro de Ensino Valnice Bertoldo Lima Cordeiro, localizando no município de Capinzal do Norte/MA. Adotou como estratégia metodológica a pesquisa-ação, acompanhada de uma observação participante, utilizando um variado número de instrumentos coletores de dados como a avaliação diagnóstica, a estratégia de Mapas Conceituais, o uso de materiais concretos, a utilização de *software* livre Poly. Concluiu que a estratégia pedagógica desenvolvida permitiu expandir os conhecimentos sobre os conteúdos geométricos dos estudantes, por meio das experiências práticas vivenciadas.

Nascimento (2015), na sua dissertação intitulada “O estudo da Geometria Espacial por meio da construção de sólidos com materiais alternativos” teve por objetivo analisar a ocorrência de aprendizagem significativa em cálculos de superfícies e volumes a partir da construção de sólidos geométricos com canudinhos de refrigerante e linha, jujubas (goma de mascar) e palito (palito de dente), cartolina, papel-cartão. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma com quinze alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola púbica. Foi adotada a pesquisa-ação como metodologia para intervenção, desenvolvimento e mudança dos sujeitos pesquisados. O autor destaca que o uso do material manipulável contribui para a compreensão dos conceitos da Geometria Espacial, pois cada ação praticada pelo estudante gira em torno do concreto, de algo que está em suas mãos, diante dos seus olhos. Concluindo com a pesquisa que essa prática pedagógica se constituiu como uma ferramenta metodológica eficiente para o ensino de Geometria Espacial.

Santos (2017), na sua dissertação intitulada “Unidade de Ensino Potencialmente Significativa com Modelagem Matemática para a aprendizagem do conceito de volume em uma Escola Militar do RS” teve como objetivo investigar o processo de aprendizagem significativa do conceito de volume por alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar, quando envolvidos em uma sequência didática, segundo os passos de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, subsidiada por atividades de Modelagem Matemática. A pesquisa foi realizada com

23 estudantes do terceiro ano do ensino médio da Escola Militar Colégio Tiradentes na cidade de Santa Maria/RS. O autor destaca que ao verificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos conceitos de geometria plana e sua transição para a Geometria Espacial, observou certa fragilidade de conceitos subsunções da geometria plana, necessários para ancoragem dos conceitos da Geometria Espacial. Concluindo que ao avaliar a Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, como um todo, identificou a motivação dos estudantes quanto ao envolvimento nas atividades propostas, também a necessidade de promover mais instrumentos, que resgatem os conceitos da geometria plana.

Silva (2017), na sua dissertação intitulada "O Uso do Geogebra 3D e a Aprendizagem Significativa da Geometria Espacial no Ensino Médio" realizada com estudantes da terceira série do ensino médio regular da rede estadual do Rio de Janeiro teve por objetivo principal a busca de estratégias que potencializem o ensino de Geometria Espacial envolvendo os conceitos de prismas, pirâmides, cones, cilindros e esfera. E como objetivos específicos a construção do produto educacional com a intenção de contribuir para o ensino de matemática e a inserção do *software* Geogebra 3D como recurso tecnológico a ser utilizado pelos estudantes e professores, com o intuito de investigar sua contribuição para a aprendizagem significativa. Durante a aplicação do produto tanto na versão estudantes, quanto na versão professor, a pesquisadora obteve respostas muito favoráveis no que diz respeito à contribuição do Geogebra 3D como material facilitador e potencializador no ensino de Geometria Espacial. Concluindo que é imprescindível a procura por atividades que despertem no estudante o desejo de adquirir conhecimentos geométricos, compreender significativamente tais conceitos e utilizá-los corretamente, o que requereu participação ativa dos estudantes, onde os mesmos protagonizam a ação pedagógica.

4.2.2. A Utilização de Materiais Concretos e a Utilização do *Software* Geogebra na Geometria Espacial

A fim de identificar pesquisas relacionadas a utilização de materiais concretos e do *software* Geogebra no ensino de Geometria Espacial, optou-se por considerar somente o Banco de Teses e Dissertações da Plataforma Sucupira da CAPES, utilizando a busca *Geometria Espacial+Materiais concretos* e posterirormente

Geometria Espacial+Geogebra para mestrados e doutorados, foram identificadas nove dissertações mais relevantes para este trabalho e serão descritas a seguir.

Santos (2015), na sua dissertação intitulada “A utilização de materiais concretos para o ensino de geometria plana e espacial: Um estudo de caso” buscou investigar a eficácia do uso de materiais concretos para o ensino de geometria plana e espacial. A pesquisa foi realizada em uma escola pública do município de Juazeiro-BA com trinta e dois alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Concluiu que os estudantes que manusearam os materiais concretos apresentaram um desempenho mais satisfatório que os estudantes que não fizeram uso do material, demonstrando que a formação dos professores poderá contribuir para uma nova visão metodológica do ensino de geometria. Destacou também que durante a pesquisa constatou que a metodologia do uso de materiais concretos deve ser muito bem planejada, para que os professores não corram o risco desses recursos didáticos serem manipulados de modo aleatório, utilizados como ‘brinquedos’ e haja uma dispersão dos reais objetivos da aula.

Pontes (2018), na sua dissertação intitulada “Materiais concretos: Uma estratégia para o ensino aprendizagem de Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio São Luís” investigou a influência da utilização de materiais concretos como estratégia para o ensino da Matemática. Participaram da pesquisa 49 alunos da 1ª série do Ensino Médio e 10 professores de Matemática da escola estadual CE Prof. Barjonas Lobão, localizada em São Luís/MA. Com base nos dados coletados concluiu que trabalhar com geometria plana e espacial através de materiais concretos de forma lúdica e diferente daquela já praticada pelo ensino tradicional pode ser uma estratégia para despertar o interesse e melhorar o rendimento dos estudantes.

Paraizo (2012), na sua dissertação intitulada “Ensino de Geometria Espacial com Utilização de Vídeos e Manipulação de Materiais Concretos: Um estudo no Ensino Médio” buscou investigar possibilidades e limitações emergentes da utilização de vídeos didáticos e da manipulação de materiais concretos no ensino de áreas de regiões planas/espaciais e de volumes de sólidos geométricos. A pesquisa foi realizada com doze participantes do terceiro ano de uma escola pública de Minas Gerais. Na análise dos dados, observou que ocorreram problemas na aprendizagem tanto com a utilização de vídeo quanto com a manipulação de materiais concretos. A pesquisa destaca ainda o papel significativo da manipulação de materiais concretos pelos participantes, assim como o papel mediador do professor, ao longo de todo o processo. Concluiu que a forma como foram conduzidos os experimentos (exibição de vídeo, manipulação e discussão) contribuiu para melhorar a compreensão sobre áreas de regiões planas/espaciais e de volumes de sólidos geométricos, além de ter despertado o interesse desses estudantes por estudar geometria.

Vidaletti (2009), na sua dissertação intitulada “Ensino e aprendizagem da Geometria Espacial a partir da manipulação de sólidos” teve como objetivo sugerir, apresentar, aplicar e avaliar uma metodologia alternativa de trabalho, para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. A pesquisa foi realizada numa turma de terceiro ano do Ensino Médio da cidade de Lajeado, composta de 20 alunos. Concluindo que a Geometria Espacial dos sólidos, através da construção de embalagens, cálculo do aproveitamento e do desperdício das mesmas, representam um suporte à aprendizagem significativa deste conteúdo, capaz de organizar e representar o conhecimento em termos de conceito e prática. A autora destaca ainda que cabe ao professor adequar os conteúdos à realidade do momento, fazendo da sala de aula um ambiente sem paredes, onde ele também se sinta motivado a querer fazer algo novo, acreditando na sua capacidade e na dos estudantes, tendo consciência de que a construção do conhecimento é uma (re)construção, que deve levar em conta os conhecimentos prévios e a realidade diária.

Borsoi (2016), na sua dissertação intitulada “Geogebra 3d no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial” teve por objetivo discutir os processos de aprendizagem no contexto da Geometria Espacial no Ensino Médio e, também, investigar o potencial do uso do Geogebra 3D no desenvolvimento de habilidades espaciais. A pesquisa foi realizada em turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Farroupilha/RS, no ano de 2015. A metodologia utilizada foi uma sequência didática que explorou conceitos da Geometria Espacial através da utilização do *software* de geometria dinâmica Geogebra. Concluiu que houve uma mudança de atitude dos estudantes frente as situações propostas, nas quais atuaram com mais autonomia, interesse e com maior desenvoltura para argumentar matematicamente, mostrando que o *software* Geogebra se constituiu em um potencializador do diálogo entre representações e imagens mentais, contribuiu no avanço do raciocínio em Geometria Espacial.

Leme (2017), na sua dissertação intitulada “O uso do Geogebra no ensino da Geometria Espacial para alunos do 2º ano do Ensino Médio” teve por objetivo apresentar estratégias didáticas, com o uso do *software* de geometria dinâmica Geogebra, para tornar o ensino da Geometria Espacial mais perceptível e eficaz aos alunos do 2º ano do Ensino Médio. A pesquisa foi realizada com duas turmas de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estatual do município de Itaberá do Estado de São Paulo e está localizada na zona urbana do município de Itaberá/SP. Apenas uma das turmas utilizou o Geogebra durante as aulas, no intuito de avaliar a contribuição do uso da tecnologia e ao no final das atividades foi aplicada uma avaliação comparando os resultados de ambas as turmas que participaram desta pesquisa. Concluindo que as aulas com o uso do Geogebra proporcionaram um ambiente mais agradável e prazeroso, além de sanar dúvidas e questões que nas aulas expositivas com quadro e giz não foram possíveis responder.

Santos (2017), na sua dissertação intitulada “Possibilidades de uso do Geogebra para compreensão de conceitos geométricos da Geometria Espacial: uma experiência com alunos do terceiro ano do Ensino Médio” teve por objetivo analisar o desempenho dos alunos, mediante a utilização do *software* Geogebra nas aulas de matemática do Ensino Médio, no estudo de Geometria Espacial. A pesquisa foi desenvolvida com 22 alunos do 3° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Dr. Waldemar Neves da Rocha na cidade de Teófilo Otoni, MG. A metodologia adotada foi a Pesquisa Participante do tipo Intervenção. Concluindo que os resultados obtidos se mostraram positivos, visto que houve um maior interesse, envolvimento, participação e compreensão dos conceitos abordados, quando comparados às aulas tradicionais em sala de aula. Sendo assim, houve pontos significativos na utilização do Geogebra como ferramenta didática no ensino da Geometria Espacial.

A identificação e análise destas pesquisas mostram a importância de desenvolver atividades pedagógicas diferenciadas, que facilitem na compreensão e apropriação dos conceitos ou conteúdos matemáticos, permitindo ao estudante formar conexões conceituais capazes de ancorar-se nos conhecimentos prévios e desse modo promover a construção de conhecimentos potencialmente significativos.

5 METODOLOGIA DE PESQUISA

A abordagem metodológica para o desenvolvimento desta pesquisa foi a intervenção pedagógica, segundo Damiani (2013), este tipo de pesquisa tem por objetivo a intervenção no fazer pedagógico para a melhoria da aprendizagem, seguido de uma avaliação dos efeitos dessa intervenção.

A pesquisa será desenvolvida dentro de uma abordagem quali e quantitativa, a qual pretende avaliar a eficácia da aprendizagem dos estudantes referente à aplicação da SD.

Na pesquisa qualitativa, Moreira (2011) explica que o interesse central é a interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações. Desse modo o pesquisador fica imerso no seu fenômeno de interesse. Segundo este mesmo autor a pesquisa qualitativa é o estudo do fenômeno em seu acontecer natural. Dessa forma, se enfatiza os aspectos individuais do comportamento humano, o mundo do sujeito, suas experiências cotidianas e os significados que dá a essas experiências.

Dentro dessa perspectiva, Stake (2016) afirma que na pesquisa qualitativa, o próprio pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos, e ao desempenhar uma função subjetiva no estudo intencionalmente, utiliza sua experiência pessoal para fazer as interpretações.

A pesquisa qualitativa busca por acontecimentos importantes e observa como esses são determinados no contexto em que ocorrem registrando e interpretando tais observações.

Para a pesquisa quantitativa, este trabalho segue a metodologia descrita por Hake (2002), na qual busca estabelecer a porcentagem de ganho em aprendizagem por meio da aplicação de instrumentos de coleta de dados. O autor ainda descreve que os estudantes compreendem melhor um conceito quando eles os constroem ao invés de serem informados sobre o que devem aprender e depois simplesmente tenham que aplicá-lo em alguma situação avaliativa.

Vale comentar que nessa metodologia a “aprendizagem ativa” é uma estratégia em que os estudantes fazem previsões sobre os resultados de uma situação hipotética por meio de compartilhamento de informações em diferentes tipos de aulas e discussões. No intuito de avaliar o quanto um estudante está envolvido em atividades de “aprendizagem ativa” e o quanto progrediu na compreensão de um determinado assunto, Hake (2002) propôs uma equação, Eq 1, que calcula o ganho médio normalizado <g>, a qual é definida como:

$$g = \frac{\%\,(Ganho)}{\%\,(Ganho)_{max}} \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad g = \frac{[\%(\,pós-tes\quad)-\%(pré-teste)]}{100-\%(pré)} \quad (2)$$

%(Ganho) é a percentagem de aumento de acertos do estudante entre o pré-teste e o pós-teste.

%(pré-teste) é a percentagem de acertos do estudante individual ou da turma no pré-teste

%(pós-teste) é a percentagem de acertos do estudante individual ou da turma no pós-teste.

5.1. A Intervenção Pedagógica

A intervenção pedagógica tem como objetivo analisar as contribuições da utilização do *Software* Geogebra e materiais concretos para a aprendizagem do conteúdo de Geometria Espacial. Para isso, a SD foi elaborada e aplicada com estudantes do 3ª ano do ensino médio.

Primeiramente, foi aplicado um pré-teste a fim de identificar os conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes no que se refere ao conteúdo de Geometria Espacial.

A TAS enfatiza que o conhecimento prévio é a variável isolada que mais influência na aprendizagem, portanto, sendo imprescindível que esse conhecimento seja diagnosticado e que as aulas sejam elaboradas de acordo com estas informações. Dessa forma, as atividades foram planejadas de modo a serem desenvolvidas com os estudantes durante as aulas. É importante ressaltar, que o planejamento da SD deve observar condições concretas e específicas de como o material deve ser desenvolvido para maximizar o aprendizado.

A SD pode trazer uma série de benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, pois permitem incorporar diversas formas distintas de representação da informação, como a utilização de materiais concretos e uso do *software* Geogebra. Tais elementos contribuem para uma aprendizagem não linear e que pode adaptar-se às diferentes necessidades de aprendizagem dos estudantes, no caso da Geometria Espacial em que a visualização das figuras é indispensável. Isso seria algo um tanto quanto difícil de realizar usando apenas quadro e giz. Além do que, utilizar um *software* como um recurso didático, oferece aos estudantes envolvidos no processo a possibilidade de utilizar esse recurso em horários e em locais que ultrapassam as barreiras da sala de aula, promovendo um aprendizado mais flexível e não formal.

Quanto ao aspecto aprendizagem, considera-se que o estudante “aprendeu” um assunto se ele conseguir por conta própria observar que a mesma informação é exibida de forma progressivamente diferente em cada nova atividade. Assim sendo, espera-se observar a aprendizagem dos estudantes nas respostas do teste aplicado antes e após a realização das atividades didáticas do projeto.

E para a avaliação desta SD, análises quantitativas serão discutidas durante e depois do processo da aplicação e de acordo com a metodologia de Hake, o ganho normalizado na aprendizagem também será analisado. De forma que este trabalho obtenha resultados que poderão ser discutidos de forma quali e quantitativa.

6 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Durante o desenvolvimento da SD, foi utilizada a metodologia da intervenção pedagógica e analisadas as diversas produções dos estudantes diante de diferentes perspectivas sobre alguns conteúdos de Geometria Espacial, bem como o processo de aprendizagem via pré-teste e pós- teste.

A próxima subseção, apresenta um relato da intervenção, a descrição da SD, bem como das atividades aplicadas durante a execução da SD.

6.1. Relato da Sequência Didática

A SD aconteceu no período de seis semanas consecutivas durante o segundo e o terceiro trimestres do ano corrente, conforme descrita no Quadro 1.

Quadro 1 – Atividades e tópicos a serem abordados.

(continua)

ATIVIDADES	TÓPICOS
Atividade 1: <u>Planificação de embalagens de produtos comerciais</u>	• Área de fíguras planas (quadrado, retângulo, triângulo e trapézio) • Poliedros (definição) • Poliedros concâvos e convexos • Poliedros regulares e não regulares • Área de figuras espaciais • Relação de Euler
Atividade 2: <u>Construção dos Poliedros de Platão</u>	• História e curiosidades sobre os poliedros de Platão • Poliedros de Platão (definição) • Planificação • Área do lateral e total do cubo, tetraedo e octaedro • Altura e apótema da pirâmide • Diagonal do cubo

Quadro 1 – Atividades e tópicos a serem abordados.

(conclusão)

Atividade 3: <u>Volume do cubo, pirâmide e prisma</u>	• Volume do Cubo (definição) • Volume dos prismas (definição) • Volume da pirâmide (definição)
Atividade 4: <u>Construção dos sólidos no *Software* Geogebra</u>	• Área do cubo, pirâmide e paralelepípedo • Volume do cubo, pirâmide e paralelepipedo Diagonal do cubo e paralelepípedo

Fonte: Autora (2018)

6.2. Diário de Atividades

A SD foi dividida em quatro atividades principais. O quadro 2 apresenta uma síntese das atividades que foram realizadas durante a aplicação da SD.

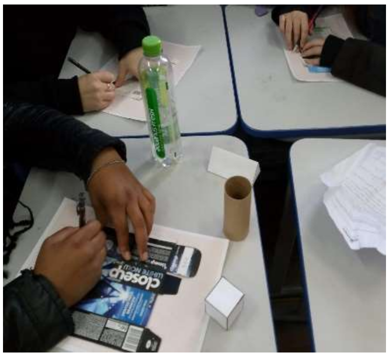
Quadro 2 - Síntese das atividades que foram realizadas na SD

(continua)

SEMANAS	AULAS
1ª Semana 	**1ª aula: Apresentação do projeto (1h/aula)** **2ª e 3ª aulas: Aplicação do Pré-teste (2h/aula)**

Quadro 2 - Síntese das atividades que foram realizadas na SD.

(continuação)

2ª Semana 	**4ª e 5ª aulas: Aula prática - Planificação e área de figuras planas e espaciais (2h/aula)** **6ª e 7ª aulas: Aula Teórica - Poliedros e Relação de Euler (1h/aula)**
3ª Semana 	**8ª e 9ª aulas: Aula prática – Construção dos Poliedros de Platão, diagonal do cubo, altura de pirâmides e área das figuras espaciais (2h/aula)** **10ª e 11ª aula: Aula Teórica - Poliedros de Platão, diagonal do cubo, altura de pirâmides e área das figuras espaciais (2h/aula)**
4ª Semana 	**12ª e 13ª aulas: Aula prática – Volume do Cubo, pirâmide e prisma (2h/aula)** **14ª e 15ª aulas: 15ª aula: Aula de Exercícios (2h/aula)**
5ª Semana 	**16ª e 17ª aulas: Aula prática – Apresentação do *software* Geogebra e Construção dos sólidos (2h/aula)** **18 ª e 19ª aulas: Aula prática – Exercícios no *software* Geogebra (área e volume do cubo, pirâmide e paralelepípedo) (2h/aula)**

Quadro 2 - Síntese das atividades que foram realizadas na SD.

. (conclusão)

6ª Semana 	**20ª e 21ª aulas: Aplicação do Pós-teste**

Fonte: Autora (2018)

6.3. Análise da Intervenção Pedagógica

Nesta seção serão apresentadas as análises obtidas na aplicação do pré-teste e do pós-teste.

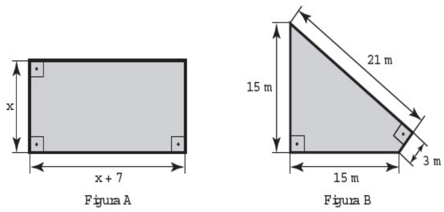
6.3.1. Análise Quantitativa

Conforme mencionado anteriormente na Metodologia deste trabalho, foi aplicado um pré-teste (Quadro 3) no primeiro dia da execução da SD (Seção 6.2), o qual teve por objetivo avaliar os saberes prévios dos estudantes sobre alguns tópicos de Geometria Plana e Espacial.

Quadro 3 - Questões do pré-teste

(continua)

1) (ENEM, 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



Quadro 3 - Questões do pré-teste

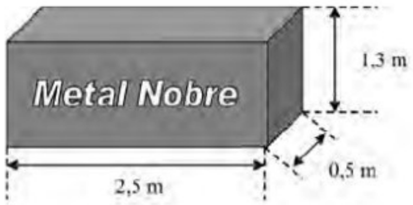
(continuação)

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente.

a) 7,5 e 14,5 b) 9,0 e 16,0 c) 9,3 e 16,3 d) 10,0 e 17,0 e) 13,5 e 20,5

---

2) (ENEM, 2010) A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo espacial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.

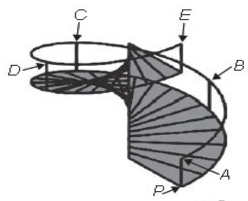


O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

a) massa b) volume c) superfície d) capacidade e) comprimento

---

3) (ENEM, 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.



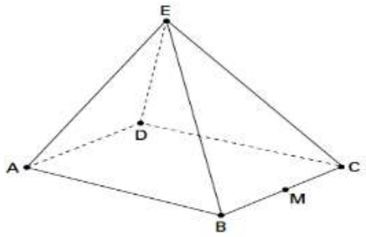
a)  b)  c)  d)  e)

---

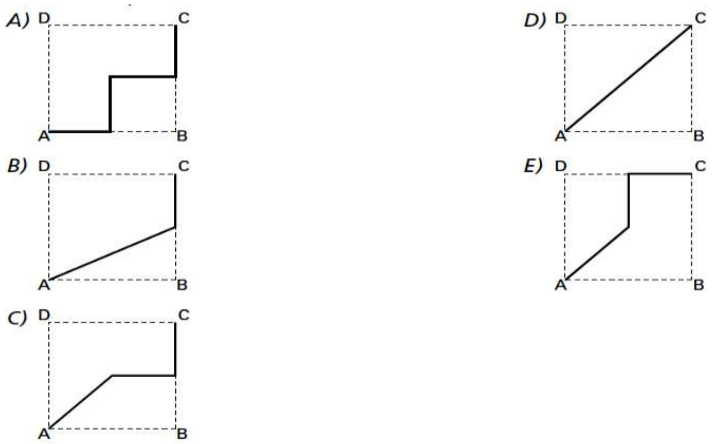
4) (ENEM, 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

Quadro 3 - Questões do pré-teste

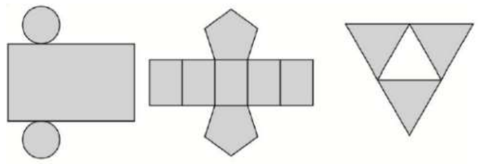
(continuação)



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é



5) (**ENEM, 2012)** Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



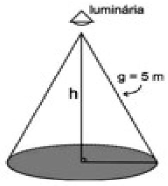
Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide
c) Cone, tronco de pirâmide e prisma
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma
e) Cilindro, prisma e tronco de cone

6) (**ENEM, 2010)** Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

Quadro 3 - Questões do pré-teste

(conclusão)

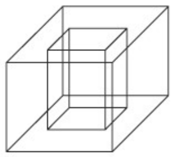


Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28{,}26\,m^2$, considerando $\pi = 3{,}14$, a altura h será igual a?

a) 3 m b) 4 m c) 5 m d) 9 m e) 16 m

---

7) (**ENEM, 2010)** Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.

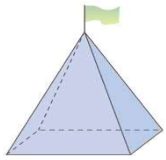


O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

A) 12 cm^3 B) 64 cm^3 C) 96 cm^3 D) 1 216 cm^3 E) 1 728 cm^3

---

8) (VUNESP, 2002) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.

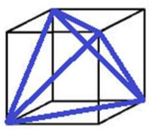


Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m. O volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será:

a) 36 b) 27 c) 18 d) 12 e) 4

---

9) (**FUVEST – 2013**). Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é?



a) $2\sqrt{3}$ b) 4 c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) 6

Fonte: Autora (2018)

Ressalta-se que o mesmo teste (descrito no quadro 3), chamado agora de pós-teste, foi aplicado após a realização da SD, com o intuito de avaliar o ganho de aprendizagem em relação aos conhecimentos adquiridos no decorrer desta pesquisa.

Buscando estabelecer o nível de significância segundo o teste estatístico t de Student, apresenta-se no Quadro 4 a evolução do desempenho dos estudantes entre o pré-teste e o pós-teste.

Quadro 4: Evolução do desempenho dos estudantes entre o pré e pós-testes.

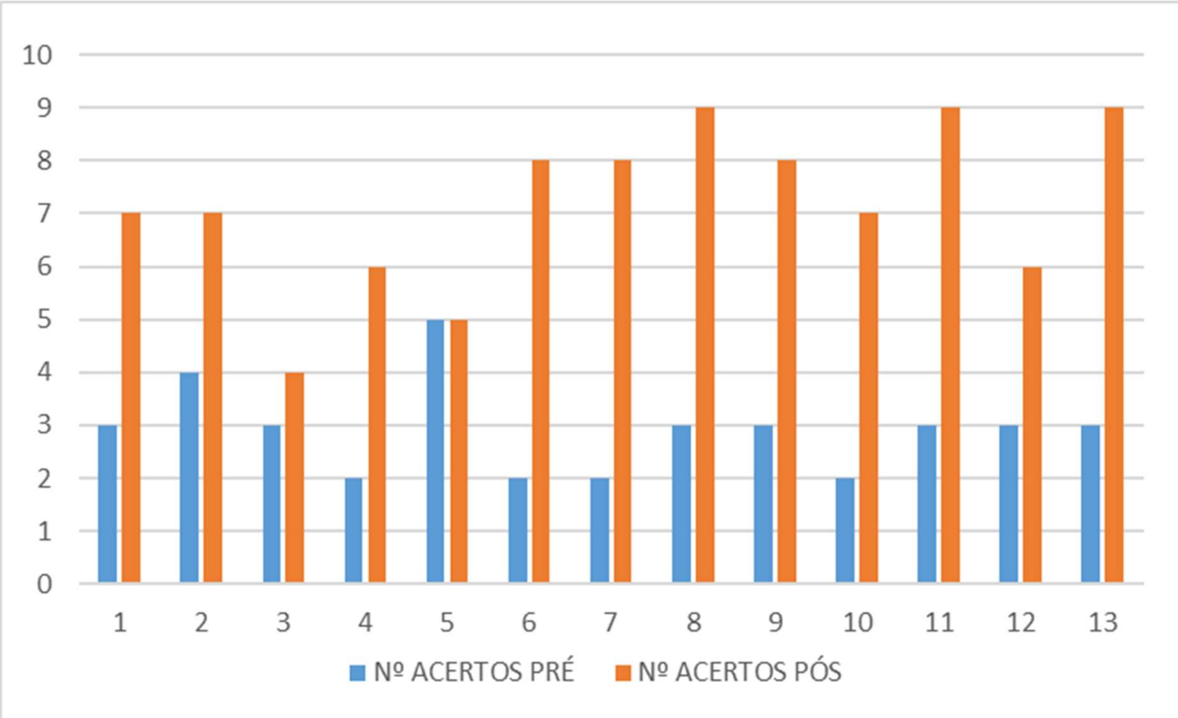
Média geral (ganho médio)	4,23
Desvio padrão geral (do ganho médio)	2,00
Desvio padrão geral da média	0,55
Média geral do pré-teste	2,92
Desvio padrão geral do pré-teste	0,86
Desvio padrão geral do pré-teste da média	0,24
Média geral do pós-teste	7,15
Desvio padrão geral do pós-teste	1,57
Desvio padrão geral do pós-teste da média	0,44
Nível de significância estatística entre as médias do pré e pós teste	Menor que 0,01 (t = 7,60)

Fonte: Autora (2018)

Observa-se no Quadro 4, o nível de significância estatística obtido foi menor que 0,01, valor este encontrado em uma tabela de valores de teste-t de Student. Esse nível de significância indica que a probabilidade de que as alterações no ganho (desempenho dos estudantes ao responder as perguntas dos pré e pós-testes) tenham ocorrido por acaso é menor que 1%. Como já mencionado na seção metodologia, vale comentar que as questões selecionadas para o pré e pós-teste todas foram oriundas de vestibulares nacionais como o ENEM, as quais são contextualizadas.

A Figura 1 apresenta uma comparação entre o número de acertos do pré-teste e pós-teste de cada um dos 13 sujeitos participantes dessa pesquisa, que responderam um total de 10 questões (pré-teste e pós-teste). Observando o gráfico de barras, pode-se perceber que praticamente todos os estudantes apresentaram um desempenho melhor após a aplicação da sequência didática (barras em vermelho).

Figura 1 - Gráfico de barras comparativo entre pré e pós-testes



Fonte: Autora (2018)

Para melhor compreender o crescimento na relação escore-questão dos resultados, foi realizado um outro tipo de análise quantitativa, o método do ganho na aprendizagem tal como descrito por Hake (2002), que utiliza uma equação bastante simples, a qual permite avaliar o quanto um estudante envolvido em atividades de aprendizagem progrediu na compreensão de um determinado tópico em particular.

A seguir apresenta-se no quadro 5, o índice de aproveitamento no pré-teste e pós-teste bem como a diferença de desempenho entre esses mesmos dois testes:

Quadro 5 – Desempenho percentual dos estudantes

ESTUDANTES	%ACERTOS PRÉ-TESTE	%ACERTOS PÓS-TESTE	DIFERENÇA ENTRE PRÉ E PÓS-TESTE (%)
1	33,33 %	77,78%	44,44 %
2	44,44 %	77,78%	33,33 %
3	22,22 %	33,33 %	11,11 %
4	22,22 %	66,67%	44,44 %
5	44,44 %	55,56%	11,11 %
6	22,22 %	88,89%	66,67 %
7	22,22 %	88,89%	66,67 %
8	44,44 %	100%	55,56 %
9	33,33 %	88,89%	55,56 %
10	22,22 %	77,78%	55,56 %
11	33,33 %	100%	66,67 %
12	33,33 %	66,67%	33,33 %
13	33,33 %	100%	66,67 %

Fonte: Autora (2018)

Observa-se no quadro 5, que os estudantes 3 e 5 (cor laranja) apresentaram a menor diferença de desempenho entre pré-teste e pós-teste, ficando com apenas 11,11% respectivamente. Quatro estudantes (6,7,11,13), na cor verde apresentaram a maior diferença no desempenho entre pré-teste e pós-teste, 66,67%. Já 11 estudantes (1,2, 4, 6, 7, 8, 9,10,11,12 e 13), obtiveram melhora no desempenho com percentual acima de 30%. Destaca-se que de um total de 13 estudantes, esses 11 sujeitos representam 84,61% da turma, mostrando assim, que a aplicação da SD apresentou um aproveitamento satisfatório em relação à aprendizagem dos estudantes, visto que não só esses 11, mas os 13 estudantes participantes obtiveram um ganho relevante no desempenho entre o pré-teste e o pós-teste.

Para avaliar o ganho na aprendizagem da turma, foi utilizado o método de Hake (2002), o qual calcula a porcentagem de acertos pré-teste (%<pré-teste>) e pós-teste (%<pós- teste>) com base na equação 2 descrita no (Capítulo 5), os resultados são exibidos no quadro 6.

Quadro 6 - Valores percentuais de acerto nos pré-testes e pós-testes e o ganho normalizado na aprendizagem da turma, (%<g>) calculados segundo o método de Hake (2002).

%<pré-teste>	%<pós-teste>	%<g>máx	%<g>
31,62 %	78,38 %	68,37 %	69,23%

Fonte: Autora (2018)

Para Hake (2002), uma turma que apresenta um ganho normalizado na aprendizagem entre 70% e 30% são classificados como cursos de ganho médio e, portanto, são caracterizados por uma maior interatividade, promovem um elevado envolvimento interativo entre os estudantes, devido à variedade de atividades que devem realizar para aprender o conteúdo. Pode-se considerar que um ganho de 69,23% é positivo, fornecendo assim, indícios de que a SD associada a utilização de materiais concretos e ao *software* Geogebra contribuiu para a melhora no desempenho dos estudantes em relação à aplicação dos conhecimentos sobre Geometria Espacial na resolução de questões contextualizadas relacionados a essa temática.

6.3.2. Análise Qualitativa

Nesta secção foram retomados os objetivos específicos originalmente propostos pela pesquisa a fim de discutir os resultados obtidos.

Quanto ao primeiro objetivo, identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre alguns tópicos de Geometria Espacial via a aplicação de um pré-teste com questões objetivas (vestibular e ENEM), concluiu-se que a maioria dos estudantes não possuíam os subsunçores necessários para dar início ao conteúdo de Geometria Espacial, sendo preciso intervir no sentido de formar uma estrutura cognitiva prévia capaz de ancorar estes novos conhecimentos construindo assim uma "[...] ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa saber para que possa aprender significativamente a tarefa com que se depara" (AUSUBEL,1978, p.171). Com isto, foram retomados alguns tópicos do conteúdo da Geometria Plana (subsunçores) necessários a Geometria Espacial.

Em relação ao segundo objetivo, elaborar e aplicar uma SD sobre alguns tópicos de Geometria Espacial foi plenamente atingido. Dentro da elaboração da SD, foram aplicadas várias atividades práticas com a utilização de material concreto e do *software* Geogebra. Essas atividades estimularam os estudantes a refletir e discutir sobre conceitos básicos relacionados tanto a Geometria Plana quanto a Espacial. Durante a realização das aulas conceitos como área e volume, entre outros, foram trabalhados de forma prática no intuito de possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de reflexões elaborando assim suas próprias conclusões a partir da observação e discussão entre os pares.

Através da aplicação do pré e pós-teste foi possível atingir o terceiro e o quarto objetivo relacionado a comparação dos resultados obtidos com a aplicação do pré-teste e pós-teste utilizando o cálculo do ganho de aprendizagem de Hake. E finalmente, fazer uma análise estatística dos resultados, como já mencionado na Seção 6.3.1.

Quanto a análise da eficácia da aprendizagem dos estudantes referente a aplicação da sequência didática, obteve-se um ganho médio com resultados positivos o que pode-se observar através do ganho de aprendizagem que foi de 69,23 conforme metodologia descrita por Hake (2002). Esse ganho também foi percebido no decorrer das atividades, em que os estudantes manifestaram mudanças tanto no que diz respeito à sua postura e motivação frente aos desafios propostos, quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, além disso, os estudantes apresentaram mais autonomia a cada atividade proposta.

Por fim, a análise quantitativa da SD através dos instrumentos de coleta (pré e pós- testes) e a análise qualitativa indicam que o estudo de Geometria Espacial aliada aos recursos didáticos interativos contribuiu para a melhora do desempenho dos estudantes.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso das tecnologias digitais e a utilização de materiais diversificados na sala de aula podem ser aliados ao ensino de geometria no intuito de explorar as habilidades tecnológicas dos estudantes para construção dos conhecimentos matemáticos, cabendo ao professor utilizar estratégias pedagógicas diferenciadas, que permitam ao estudante ser um sujeito ativo no processo, favorecendo o ensino e a aprendizagem.

Cabe lembrar que toda atividade pedagógica deve possuir objetivos claros e concisos, pois apenas inserir materiais diversificados não garante a aquisição do conhecimento. Portanto, faz-se necessário a intervenção constante do professor, questionando e despertando a curiosidade dos estudantes. Especificamente o ensino de Geometria Espacial não se resume a aplicação de fórmulas prontas, pois dessa forma não contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico do sujeito. É necessário atualizar a metodologia de trabalho do professor, buscando novas possibilidades de abordar o assunto, estimulando o estudante a compreender o tópico estudado, desenvolvendo habilidades e competências, relacionando os conhecimentos científicos utilizados cotidianamente, tornando assim a aprendizagem em algo potencialmente significativo.

A partir das produções elaboradas pelos estudantes, foi possível observar indicadores de desenvolvimento na visualização de objetos tridimensionais durante a sequência didática. Além disso, os estudantes mostraram constantes progressos no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, estabelecendo relações entre objetos geométricos e percebendo propriedades importantes dos objetos 3D. Há indícios que essa melhora nas habilidades de visualização espacial está intrinsicamente relacionada a utilização de materiais concretos e ao *software* Geogebra. A esse respeito, Bozza (2015, p. 3) pontua que a utilização de materiais diversificados “além de favorecer o aluno no processo de uma melhor visualização, as aulas se tornam mais dinâmicas e divertidas [...]”.

A abordagem tradicional da Geometria Espacial, que em alguns casos, vêm se restringindo ao estudo de área e volumes, está distante de mostrar ao estudante que a Geometria se relaciona com o mundo que o cerca não promovendo o desenvolvimento de habilidades e do pensamento geométrico (BOZZA, 2015). Diante disso, entende-se que o trabalho com a Geometria deve ser mais investigativo, instigando o estudante a explorar e analisar situações geométricas.

Ao final da aplicação da Sequência Didática, pode-se concluir que a interação do professor-estudante e estudante-estudante com as diversificadas situações de aprendizagem, oportunizaram o desenvolvimento de competências e de habilidades, viabilizando assim um ganho de aprendizagem significativa à luz da teoria da Ausubel (1965).

Com esta proposta, buscou-se algumas estratégias que permitiram tornar o ensino de Geometria Espacial, mais eficaz, via a exploração de conceitos através de visualizações concretas, de utilização do *software* Geogebra, como forma de contribuir de modo significativo no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos trabalhados. Vale enfatizar que pretende-se dar continuidade a esta pesquisa, visto que as metodologias diferenciadas, como por exemplo as tecnologias digitais, fazem-se presentes cada vez mais no cotidiano dos estudantes. Portanto, não estão esgotadas as possibilidades de utilizá-las no ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **A cognitive structure view of word and concept meaning**. ***In*** ANDERSON, R.C e AUSUBEL, D. P. Readings in the Psychology of Cognition. New York: Holt, Rinehart and Winston. 1965.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. **Educational psychology**: a cognitive view. 2nd. ed. New York, Holt Rinehart and Winston, 1978.

AUSUBEL, D. P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York, Grune and Stratton. 2000.

BORSOI, C. **Geogebra 3d no Ensino Médio: Uma Possibilidade para a Aprendizagem da Geometria Espacial.** 159 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre (RS), 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3790837. Acesso em: 12 jun. 2018.

BOZZA, M. Thinking about the Teaching of Spatial Geometry: Didactic Strategies using GeoGebra Software and Concrete Materials. **Scientia cum Industria**, 2015. v. 3, n. 3, p.134-138. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/view/4115. Acesso em: 13 nov. 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. PCN + Ensino Médio. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 15 mai. 2018.

BRASIL. Ministério da educação e cultura. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino médio. Volume 2: Ciências da natureza, matemática e tecnologia. Brasília: MEC, 2006.

DAMIANI, M. F. *et al*. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de educação**, 2013. n. 45, p. 57–67. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/viewFile/3822/3074. Acessado em 21 jun. 2018.

FERNANDES, L. T. **Aprendizagem significativa: uma proposta de Ensino e Aprendizagem da Geometria Euclidiana Espacial no Ensino Médio**. 154f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal (RN), 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2823025. Acesso em:12 jun.2018.

FONTES, V. A. **Materiais Concretos: Uma estratégia para o ensino aprendizagem de Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio São Luís.** 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual do Maranhão, Rio de Janeiro (RJ), 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6311944. Acesso em: 13 jun. 2018.

HAKE, R.R. 2002. **Assessment of Student Learning in Introductory Science Courses**. ***In***. PKAL Roundtable on the Future: Assessment in the Service of Student Learning, Duke University. 2002. v. 5, p. 1-24. Disponível em: https://www1.physics.indiana.edu/~hake/ASLIS.Hake.060102f.pdf

KHAN, S. **Um mundo, uma escola**: a educação reinventada. Tradução George Schlesinger. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013, p.255.

LEME, C. B. **O uso do Geogebra no Ensino da Geometria Espacial para os alunos do 2º ano do Ensino Médio**. 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Rio de Janeiro (RJ), 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5539393. Acesso em: 13 jun. 2018.

LORENZATTO, S. **Por Que Ensinar Geometria**? Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, ano III, n. 4, 1995.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Matriz de Referência para o ENEM 2009. Brasília: INEP/MEC, 2009. Disponível em : https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acessado em 07 de jun de 2018,

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1999.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. Porto Alegre: Livraria da Física, 2011.

NASCIMENTO, J. B. S. **O Estudo da Geometria Espacial por meio da construção de sólidos com materiais alternativos**. 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas), Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado (RS), 2013. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=303503. Acesso em: 14 jun. 2018.

PARAIZO, R. F. **Ensino de Geometria Espacial com Utilização de Vídeos e Manipulação de Materiais Concretos – Um estudo no Ensino Médio**. 196 f. Dissertação (Profissionalizante em Educação Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em: http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/09/PRODUTO-EDUCACIONAL-RFP2.pdf. Acesso em: 14 jun. 2018.

SANTOS, A. X**. Unidade de Ensino potencialmente significativa com Modelagem Matemática para a Aprendizagem do conceito de volume em uma Escola Militar do RS**. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física), Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria (RS), 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5226551. Acesso em: 13 jun.2018.

SANTOS, A. M. A. **A Utilização de Materiais Concretos para o Ensino de Geometria Plana e Espacial: Um Estudo de Caso**. 50 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal do Vale do São Francisco, Rio de Janeiro,2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2520199. Acesso em: 12 jun. 2018.

SANTOS, E. L. D. **Possibilidades de uso do Geogebra para compreensão de conceitos geométricos da Geometria Espacial: Uma experiência com Alunos do terceiro ano do Ensino Médio.** 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5484686. Acesso em: 14 jun. 2018.

SILVA, Q. O. V. **O Uso do Geogebra 3d e a Aprendizagem Significativa da Geometria Espacial no Ensino Médio**. 77 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino das Ciências), Universidade do Grande Rio - Prof Jose de Souza Herdy, Duque de Caxias,2017. Disponível em https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5977031. Acesso em: 12 jun. 2018.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso Editora, 2016.

TAVARES, L. C. M. **A Geometria no Ensino Médio: Uma Sequência Didática utilizando a Fotografia, os Ambiente não Formais de Ensino e os Objetos Virtuais de Aprendizagem.**115 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências),
Universidade Estadual de Goiás, Anápolis, 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3686708. Acesso em: 13 jun. 2018.

VIDALETTI, V. B. B. **Ensino e aprendizagem da Geometria Espacial a partir da manipulação de sólidos.** 109 f. Dissertação (Profissionalizante em Ensino de Ciências Exatas), Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado (RS), 2009. Disponível em: https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/82/1/VangizaVidaletti.pdf. Acesso em: 14 jun. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de Consentimento e Livre Esclarecimento

unipampa

Universidade Federal do Pampa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Dados de Identificação

Título do Projeto: **Sequência Didática como Proposta Metodológica para a Aprendizagem Significativa da Geometria Espacial no Ensino Médio**

Orientadora: Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais

Co-orientadora: Vera Lúcia Duarte Ferreira

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **Sequência Didática como Proposta Metodológica para a Aprendizagem Significativa da Geometria Espacial no Ensino Médio**, conduzida por Juliana ales D' Ávila, aluna regular matriculada no curso Matemática – Licenciatura na Universidade Federal do Pampa – Unipampa – campus Bagé. Este estudo tem por objetivo analisar a eficácia de uma sequência didática com relação à compreensão e ao desempenho de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre o ensino de Geometria Espacial. Os dados obtidos por meio desta pesquisa serão confidenciais e não serão divulgados os nomes, visando assegurar o sigilo de sua participação.

Em casos de dúvidas, os voluntários poderão enviar mensagem eletrônica para o endereço juliana.alves.davila@gmail.com

Eu, ____, RG nº ________ declaro ter sido informado e concordo em participar como voluntário, do projeto de pesquisa acima descrito.

Bagé, _______ de _____________de 2018.

____

Nome do aluno

____

Nome e assinatura do responsável

APÊNDICE B – Sequência Didática

unipampa Universidade Federal do Pampa	UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Orientadora: Denice Aparecida Fontana Nisxota Menegais

Coorientadora: Vera Lúcia Duarte Ferreira

Acadêmica: Juliana Alves D'Ávila

Disciplina: Matemática

Série: 3º ano

Tema: Poliedros: Primas e Pirâmides

Conteúdo(s):

- ✓ Área de figuras planas
- ✓ Área e volume de figuras espaciais
- ✓ Poliedros regulares e não regulares
- ✓ Poliedros de Platão
- ✓ Diagonal do cubo e paralelepípedo

Objetivo geral: Analisar as contribuições da utilização do Software Geogebra e materiais concretos para a aprendizagem do conteúdo de geometria plana e espacial.

Objetivos específicos:

- ✓ Estabelecer relações do cotidiano do estudante com as formas geométricas;
- ✓ Desenvolver a capacidade de observar diferenças ou semelhança da forma dos objetos;
- ✓ Calcular a área de algumas figuras planas;
- ✓ Calcular a área de figuras espaciais;

- ✓ Calcular o volume dos poliedros: cubo, pirâmide e prismas com base triangulares e quadrangulares;
- ✓ Utilizar o Geogebra para resolução de exercícios.

Desenvolvimento do(s) conteúdo(s):

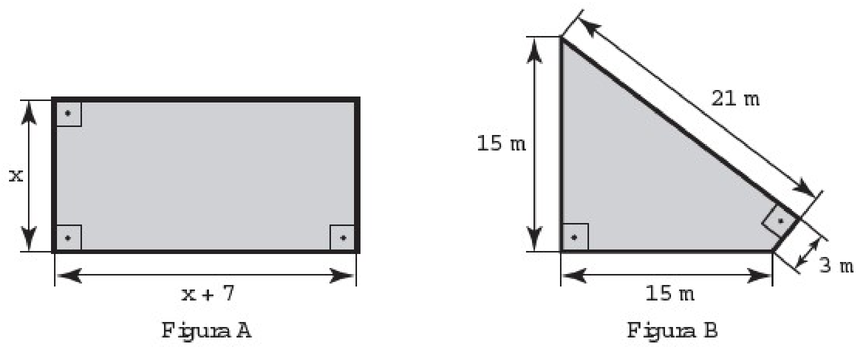
A professora iniciará a aula aplicando o pré-teste, o qual será realizado individualmente e sem consulta.

<u>PRÉ-TESTE</u>

Prezado aluno(a):

Você está sendo convidado, como voluntário(a), a colaborar na pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), campus Bagé, a partir do pré-teste elaborado pela acadêmica Juliana Alves D'Ávila, sobre os conhecimentos prévios de geometria plana e geoemtria espacial. Responda com tranquilidade, não se preocupe, pois não valerá nota. Muito obrigado!

1) (**ENEM, 2016)** Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

Registre seu cálculo aqui

a) 7,5 e 14,5

b) 9,0 e 16,0

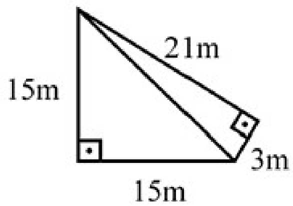
c) 9,3 e 16,3

d) 10,0 e 17,0

e) 13,5 e 20,5

RESOLUÇÃO:

O triângulo da figura B pode ser decomposto em:



A área da figura B é dada por:

$$S = (15)(15)/2 + (3)(21)/2 = 225/2 + 63/2 = \frac{288}{2} = 144\,m^2$$

A área da figura A é dada por:

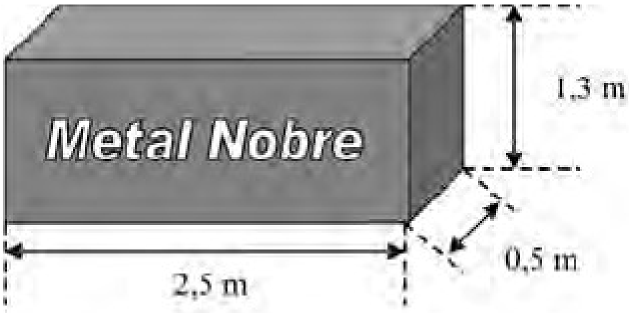
S = x (x + 7)

Como as áreas das duas figuras são iguais, tem-se:

S = x (x + 7) ⇔ 144 = x (x + 7)

Dois números que multiplicados resulte em 144 são 9 e 16.

2) (ENEM, 2010) A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo espacial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

A) massa

Registre seu cálculo aqui

B) volume

C) superfície

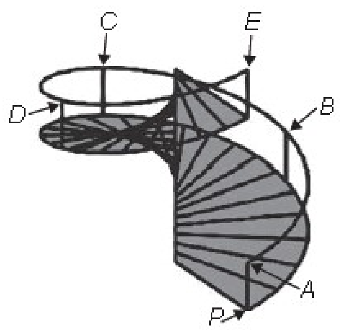
D) capacidade

E) comprimento

RESOLUÇÃO:

2,5m(comprimento)x0,5m (largura)x1,3m (altura) = volume do paralelepípedo

3) (ENEM, 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

a) 

b) 

c) 

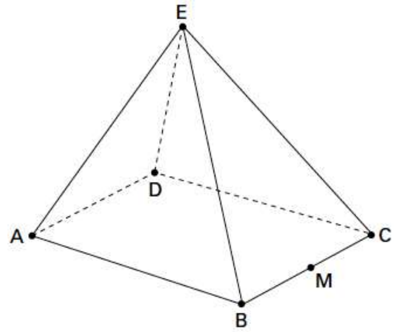
d) 

e) 

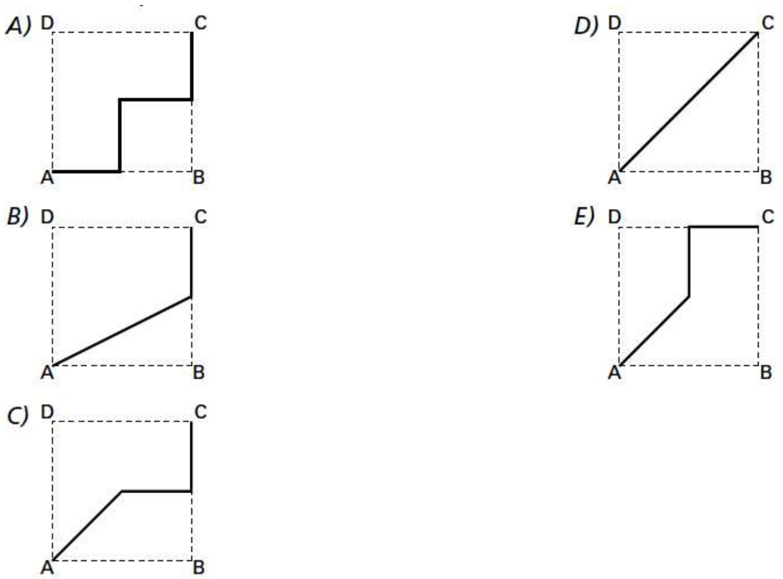
RESOLUÇÃO:

Para obter a projeção ortogonal, imagine observar a escada circular de cima. Como os pontos P, A e E estão na mesma reta, observará uma circunferência cuja linha é o corrimão. A alternativa c contém a figura que melhor representa a projeção ortogonal do caminho percorrido (A ao D).

4) (ENEM, 2012) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

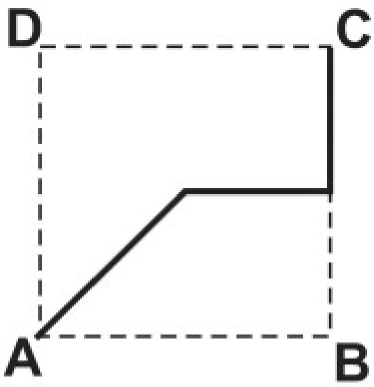


O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é



RESOLUÇÃO:

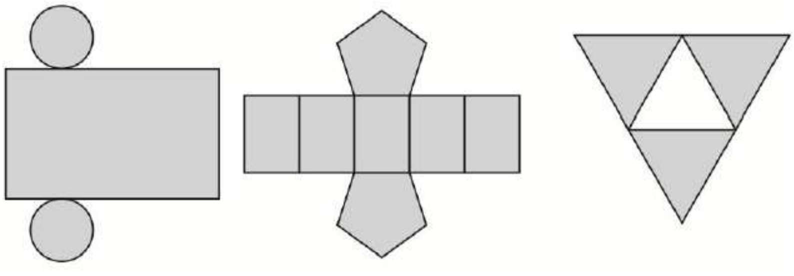
O único ponto mencionado que não pertence a base é o ponto E, logo deve ser projetado em relação à base. Sua projeção é feita a partir de uma reta perpendicular à base passando pelo ponto E, sendo o centro da base. A projeção do trajeto descrito por João vai do vértice A a projeção do ponto E, centro da figura, passando pelo ponto médio (M) do outro lado da base, seguindo até o vértice C, sempre em linha reta.



Resposta: Letra C

5) (**ENEM, 2012)** Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas

caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide

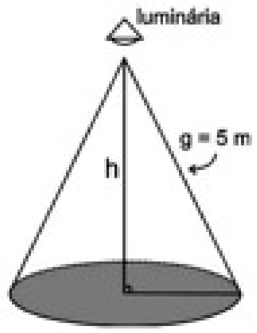
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide

c) Cone, tronco de pirâmide e prisma

d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma

e) Cilindro, prisma e tronco de cone

6) (**ENEM, 2010)** Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28{,}26\,m^2$, considerando $\pi = 3{,}14$, a altura h será igual a

a) 3 m.

Registre seu cálculo aqui

b) 4 m.

c) 5 m.

d) 9 m.

e) 16 m.

RESOLUÇÃO:

A área a ser iluminada é uma circunferência de área $28{,}26\,m^2$. Basta aplicar na fórmula da área da circunferência para descobrirmos o seu raio:

$$\pi \cdot r^2 = 28{,}26 \Rightarrow r \cong \sqrt{\frac{28{,}26}{3{,}14}} \Rightarrow r \cong 3\text{ m}.$$

Observe na figura que a altura do Cone forma um ângulo reto com o raio da circunferência da base e a geratriz g será a hipotenusa desse triângulo retângulo formado. Basta aplicar o teorema de Pitágoras:

$h^2 + r^2 = g^2$

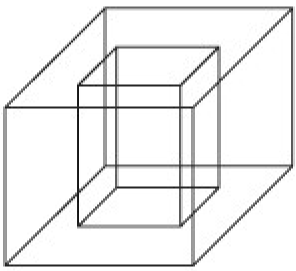
$h^2 + 3^2 = 5^2$

$h^2 = 25 - 9$

$h = 4$ m

Portanto, gabarito é letra B

7) (**ENEM, 2010)** Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de?

Registre seu cálculo aqui

A) 12 cm^3

B) 64 cm^3

C) 96 cm^3

D) 1 216 cm^3

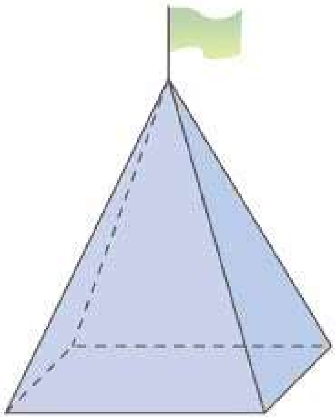
E) 1 728 cm^3

RESOLUÇÃO:

$\mathbf{V_{c1}-V_{c2}}$

$\mathbf{12^3-8^3=1728-512=1216cm^3}$

8) (VUNESP, 2002) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m. O volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será:

Registre seu cálculo aqui

a) 36
b) 27
c) 18
d) 12
e) 4

RESOLUÇÃO:

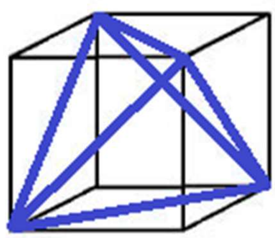
Nesse Caso, conhecemos o lado da base e da altura da pirâmide, podemos calcular seu volume:

$$V = \frac{A.b.h}{3}$$

$$V = \frac{l^2.h}{3} = \frac{3^2.4}{3} = 12m^3$$

Resposta: letra d

9) (**FUVEST – 2013**). Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é?



Registre seu cálculo aqui

a) 2√3

b) 4

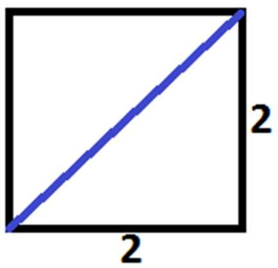
c) 3√2

d) 3√3

e) 6

RESOLUÇÃO:

Na figura é possível observar que as arestas do tetraedro regular são diagonais das faces quadradas do cubo.



Utilizando o Teorema de Pitágoras para descobrir a medida "a" da aresta do tetraedro:

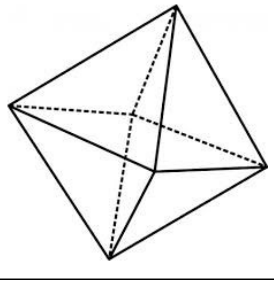
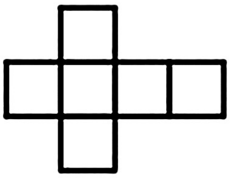
$$a^2 = 2^2 + 2^2$$
$$a^2 = 4 + 4$$
$$a^2 = 8$$
$$a = \sqrt{8}$$
$$a = 2\sqrt{2}$$

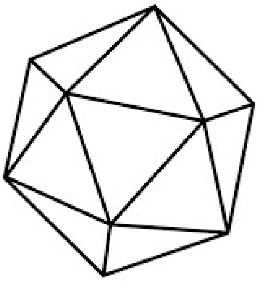
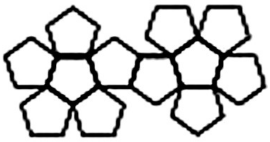
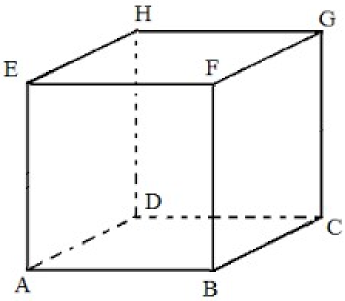
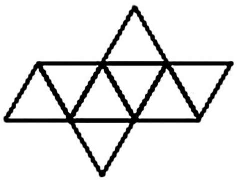
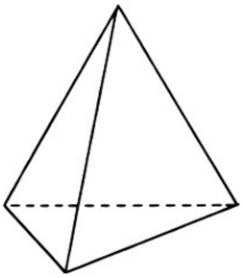
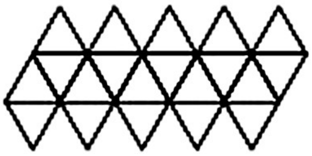
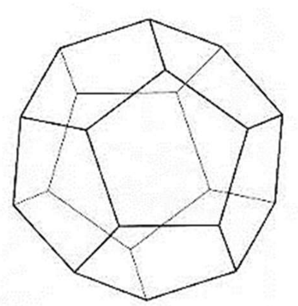
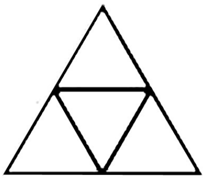
Agora que sabemos a medida das arestas, basta calcular a área de uma das faces do tetraedro, ou seja, a área do triângulo equilátero de lado $2\sqrt{2}$:

$$A_{te} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$
$$A_{te} = \frac{(2\sqrt{2})^2.\sqrt{3}}{4}$$
$$A_{te} = \frac{8.\sqrt{3}}{4}$$
$$A_{te} = 2.\sqrt{3}$$

RESPOSTA: A

10) (SCHNORNBERGER, 2014, ADAPTADA) Abaixo se encontram formas geométricas espaciais representadas com a ideia de profundidade. Na coluna do meio, encontram-se suas planificações e na terceira coluna seus nomes/classificação. Preencha cada coluna com a letra indicada pela sua forma geométrica correspondente.

(a) 	( ) 	( ) Tetraedro
(b)	( )	( ) Cubo

		
(c) 	( ) 	( ) Octaedro
(d) 	( ) 	( ) Dodecaedro
(e) 	( ) 	( ) Icosaedro

<u>ATIVIDADE 1:</u> Planificação e área de figuras planas e espaciais.

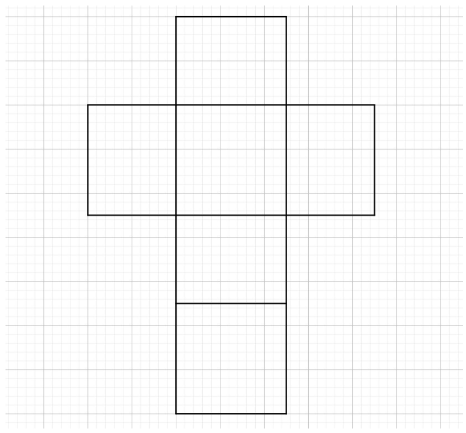
Será iniciada com uma conversa com os estudantes sobre geometria plana e espacial, solicitarei que eles contribuam oralmente com seu conhecimento sobre o assunto.

Os alunos serão distribuídos em grupos de quatro. Serão distribuídas embalagens variadas (caixinhas de creme dental, sabonete, remédios, etc.), tubete das toalhas de papel e do papel higiênico entre outros.

Os alunos terão que relacionar a forma das embalagens que receberão com as construções e objetos do dia a dia.

Cada integrante do grupo receberá uma folha quadriculada onde deverão planificar as figuras.

Após planificação serão questionados sobre a área das figuras planas que compõe a planificação, para encontrar a área dessas figuras relacionar a quantidade de quadradinhos da folha quadriculada com os dados da figura.



Exemplo: Se o lado da figura planificada medir 10 quadradinhos então o lado da figura terá medida 10.

Os alunos serão questionados sobre a quantidade de quadradinhos contidas na figura e se multiplicarem L x L eles obterão o mesmo resultado. Deduzido que a fórmula para calcular a área de uma figura plana é $A = l^2$ e para calcular a área da embalagem inteira basta somar a área de cada figura. E para calcular o perímetro basta somar todos os lados da figura planificada.

Para calcular área do rolo de papel higiênico os alunos também planificarão. Após planificar rolo eles observarão que será um retângulo e que se calcula área da mesma forma da planificação anterior.

Os alunos fecharam e colaram as embalagens, formando o sólido geométrico novamente. Classificarão os sólidos geométricos/embalagens em corpos redondos/rolam e poliedros/não rolam.

Com as embalagens fechadas, será mostrado aos alunos o que são arestas, vértices, faces, faces planas poligonais e circulares (como os tubetes, por exemplo).

POLIEDROS

Os poliedros são figuras que fazem parte da Geometria Espacial, ou seja, possuem três dimensões (comprimento, largura e altura), formados de vértices, arestas e faces.

As faces do poliedro são formadas por polígonos (figura plana composta de *n* lados), arestas e vértices.

Classificação dos Poliedros

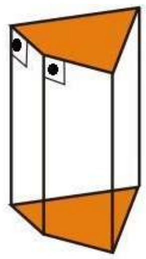
Os poliedros são classificados em regulares e não regulares.

Regulares: Os poliedros regulares são sólidos geométricos com faces que formam polígonos regulares e congruentes.

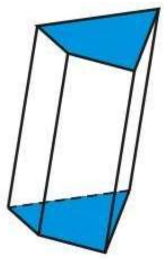
Não regulares: Os poliedros não regulares são sólidos geométricos com faces formadas por polígonos regulares e irregulares, os mais conhecidos são o prisma e a pirâmide.

Após explicar aos estudantes o que são poliedros regulares e não regulares utilizando sólidos de acrílico. Terão que classificar as embalagens (poliedros) em regulares e não regulares e justificar suas respostas.
Os poliedros podem ser retos ou oblíquos. Os retos são aqueles em que a aresta lateral forma com a base um ângulo de 90º, e os oblíquos são aqueles em que as arestas formam ângulos diferentes de 90º.

Prisma reto



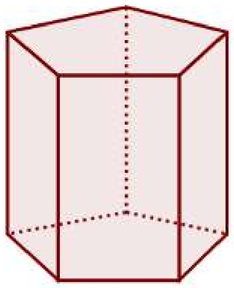
Prisma oblíquo

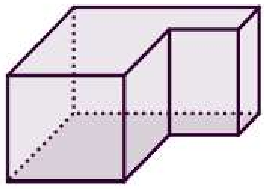


POLIEDROS CONVEXOS

Um poliedro é formado por faces, que, por sua vez, são polígonos, figuras geométricas planas. Essas figuras estão definidas dentro de um plano. Todo plano divide o espaço em duas partes, os semiespaços.

Um poliedro é dito **convexo** quando cumpre as três condições seguintes:
→ Todas as faces desse poliedro são polígonos convexos em planos distintos;
→ Todo o poliedro pertence a apenas um semiespaço, determinado por qualquer uma de suas faces;
→ Cada aresta pertence a apenas duas faces.





Polígono convexo à direita e polígono não convexo à esquerda

RELAÇÃO DE EULER

A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo e alguns não convexos. Essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de determinarmos o número de elementos de um poliedro.

A relação de Euler é uma fórmula matemática que relaciona os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. A fórmula criada por Euler é seguinte:

$$V - A + F = 2.$$

Onde,

V = número de vértices,

A = número de arestas

F = número de faces.

Será pedido aos alunos que escolham um poliedro (embalagem) e verifique a validade da relação de Euler.

ATIVIDADE 2: Construção dos Poliedros de Platão.

Os poliedros regulares convexos são formados pelos cinco “Sólidos Platônicos” ou “Poliedros de Platão”, a saber: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro, icosaedro.

SÓLIDOS DE PLATÃO

Os sólidos de Platão também são denominados de poliedros, pois são formados por faces, arestas e vértices. As faces são constituídas por seções de planos, considerando que entre duas faces temos as arestas, as quais possuem em suas extremidades os vértices.

Platão foi um filósofo grego, que viveu entre os séculos V e IV a.C., e estabeleceu importantes propriedades em alguns poliedros.

Os poliedros conhecidos como poliedros de Platão não são apenas os poliedros regulares, mas sim todos aqueles que:

• são convexos;
• têm o mesmo número de lados em todas as faces;
• em todos os vértices chega o mesmo número de arestas.

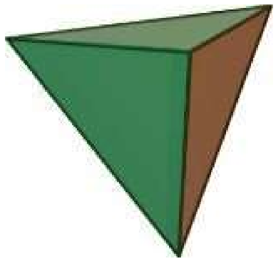
Curiosidade:

Platão, em seus estudos, relacionou cada poliedro a elementos da natureza.

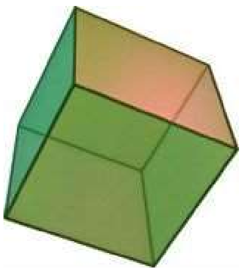
Tetraedro: fogo
Cubo (hexaedro): Terra
Octaedro: ar
Icosaedro: água
Dodecaedro: cosmos

Com auxílio dos sólidos de acrílico os poliedros de Platão serão apresentados soa estudantes.

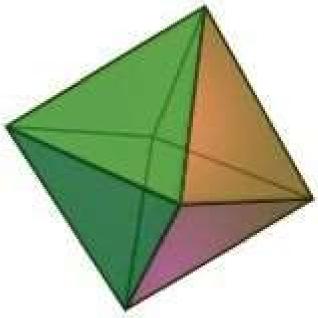
Tetraedro: sólido geométrico formado por 4 vértices, 4 faces triangulares e 6 arestas.



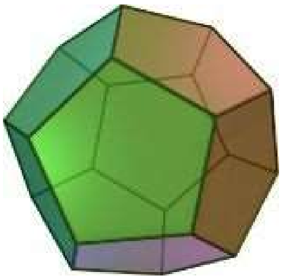
- Hexaedro: sólido geométrico formado por 8 vértices, 6 faces quadrangulares e 12 arestas.



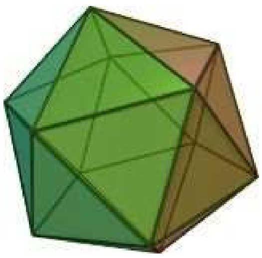
- Octaedro: sólido geométrico formado por 6 vértices, 8 faces triangulares e 12 arestas.



- Dodecaedro: sólido geométrico formado por 20 vértices, 12 faces pentagonais e 30 arestas.

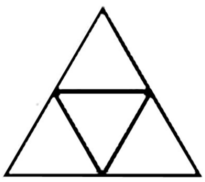


- Icosaedro: sólido geométrico formado por 12 vértices, 20 faces triangulares e 30 arestas.

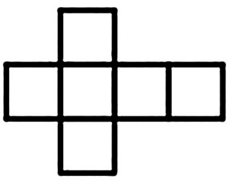


Para o estudo dos poliedros regulares será proposto aos estudantes a construção dos sólidos de Platão partir da sua panificação. Os mesmos estarão dispostos em grupos de no máximo 4 integrantes. Cada um poderá escolher qual sólido irá construir.

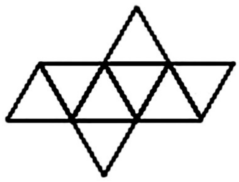
Planificação Tetraedro



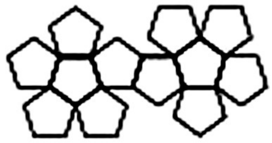
Planificação Cubo



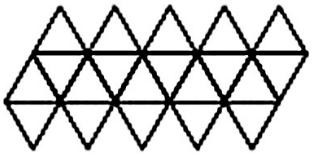
Planificação Octaedro



Planificação Dodecaedro



Planificação Icosaedro



Para confecção dos sólidos os estudantes poderão escolher o material (canudos, cartolina, palitos de churrasco, jujubas, etc.).

Após a construção dos sólidos os estudantes completarão a tabela representada no quadro abaixo.

Nome	**Tipo de Faces**	**Nº de Faces**	**Nº de Arestas**	**Nº de Vértices**	**Relação de Euler (*V – A + F = 2)***
Tetraedro	Triângulo	4	6	4	$4-6+4=2$
Hexaedro (cubo)	Quadrilátero	6	12	8	$8-12+6=2$
Octaedro	Triângulo	8	12	6	$6-12+8=2$
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20	$20-30+12=2$
Icosaedro	Triângulo	20	30	12	$12-30+20=2$

Na sequência os estudantes discutiram em grupo como calcular a área do cubo, tetraedro e octaedro. Também será estuda a diagonal do cubo e altura da pirâmide.

<u>**Cubo:**</u> A fórmula para calcular a área de uma das bases do cubo é a mesma usada para a área do quadrado:

$$A_b = a^2$$

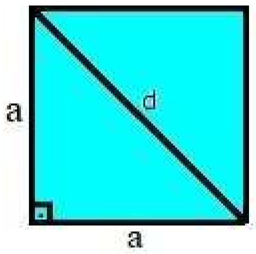
Para calcular a área lateral de um prisma é dada pela soma das áreas das faces laterais (face lateral é qualquer face que não é base). Dessa maneira, tendo em vista que as arestas desse poliedro medem a, a fórmula para calcular uma face lateral é a seguinte:

$$A_l = 4\, a^2$$

A área total de um prisma é dada pela soma das áreas laterais e das bases. Como o cubo possui duas bases, para calcula -se a área total, conforme a seguinte expressão:

$$A_T = A_l + 2 \cdot A_b \text{ ou } A_T = 6 \cdot a^2$$

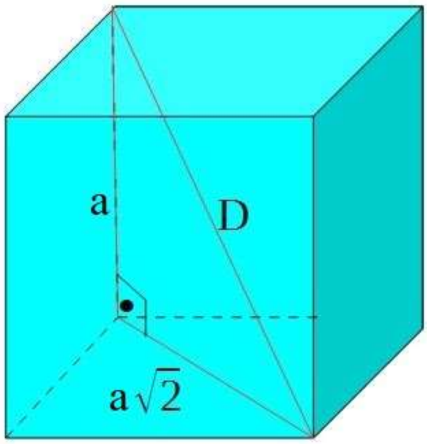
Para o estudo da diagonal os estudantes serão motivados a encontrar uma forma para calcular a diagonal utilizando o teorema de Pitágoras.
Inicialmente deve-se definir a diagonal do quadrado



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2\, a^2$$
$$d = \sqrt{2\, a^2}$$
$$d = a\sqrt{2}$$

A diagonal do cubo é, em consequência, obtida por:



Também pelo Teorema de Pitágoras:

$$D^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

$$D^2 = a^2 + 2a^2$$

$$D^2 = 3a^2$$

$$D = \sqrt{3a^2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

<u>Tetraedro:</u> Para calcular a área total do tetraedro, é necessário calcular a área de um triangulo equilátero.

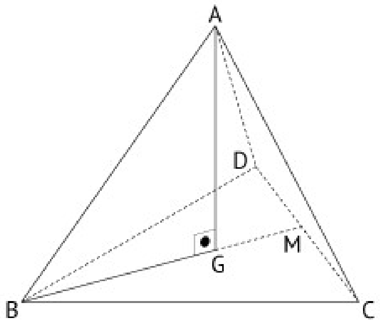
$$A_{triângulo} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

O tetraedro regular é composto por 4 faces triangulares e os triângulos das faces são equiláteros, a área total será dada por:

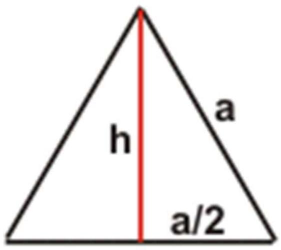
E para calcular a área total $A_T = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ou $A_T = a^2\sqrt{3}$)

Para calcular a altura do tetraedro os estudantes serão motivados novamente a utilizar o teorema de Pitágoras e conceito de baricentro.

Inicialmente para calcular a altura do teraedro temos que traçar um triangulo retangulo conformr figura :



Como não sabe-se a altura (apotema) temos que clacular, também será utilizado o teorema de Pitágoras.



$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$$

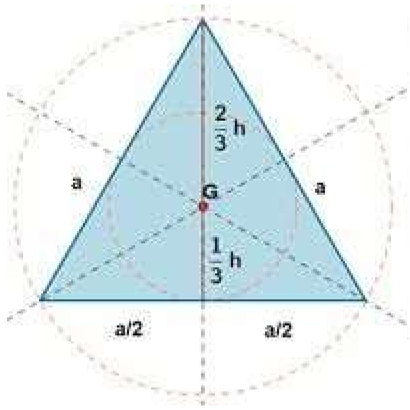
$$\frac{4a^2 - a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_p = h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Após descobrir a apótema do tetraedro teremos que utilizar o conceito de baricentro. Baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo e separa cada mediana na razão 1:2. Conforma figura



Então pela propriedade do baricentro, na figura tem-se:

$$BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dessa forma para calcular altura do tetraedro utilizaremos mais uma vez o teorema de Pitágoras.

$$a^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$a^2 = H^2 + \frac{3a^2}{9}$$

$$a^2 = H^2 + \frac{a^2}{3}\ (\times 3)$$

$$3a^2 = 3H^2 + a^2$$

$$3a^2 - a^2 = 3H^2$$

$$2a^2 = 3H^2$$

$$H^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$H = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Portanto para determinar à altura do tetraedro utiliza-se a seguinte formulação:

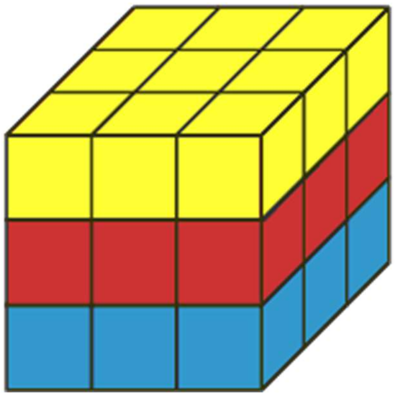
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Octaedro: Para calcular a área total do octaedro, basta multiplicar por 8 a área de suas faces.

$A_T = 8.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ATIVIDADE 3: Volume do Cubo, pirâmide e prisma

Volume do Cubo

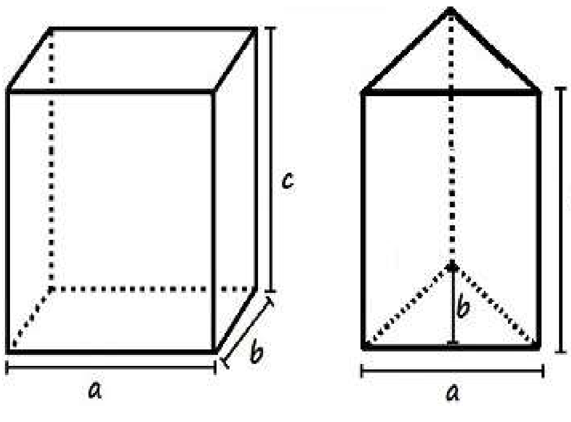


Será questionado se os alunos sabem como calcular o volume de um cubo. Após expressarem sua opinião cada grupo receberá um cubo como o da figura acima.
Serão questionados quantos cubinhos de um centímetro tem a base desse cubo e quantos cubinhos cabem no cubo maior. Então o volume será: quantos cubinhos cabem na base multiplicado por 3, que é altura desse cubo.

Concluído que o volume do cubo é $A_b \cdot h$.

$$V = 9 \cdot 3 = 27$$

O volume dos prismas se dá da mesma forma $A_b \cdot h$.



O volume de um prisma qualquer pode ser calculado multiplicando-se a área da base pela altura.

Um prisma é um poliedro que possui uma base inferior e uma base superior. Essas bases são paralelas e congruentes, isto é, possuem as mesmas formas e dimensões, e não se interceptam. Para determinarmos o volume de um prisma qualquer, nós calculamos a área de sua base para, em seguida, multiplicá-la pela sua altura. Sendo assim:

$$V = (\acute{a}rea\ da\ base)\ .\ altura$$

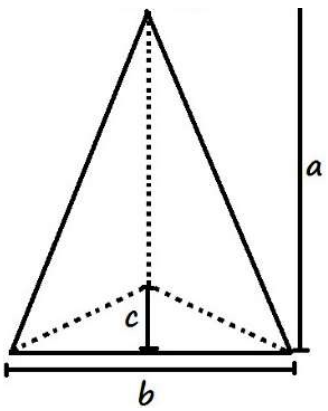
Na imagem acima, a área do prisma de base retangular pode ser calculada por:

$$V = a\ .\ b\ .\ c$$

Já a área do prisma de base triangular é dada por:

$$V = \frac{a\ .\ b}{2}\ .\ c$$

Volume de uma pirâmide



O volume de uma pirâmide é calculado através do produto da área da base por um terço da altura.

A pirâmide assemelha-se ao cone em relação ao cálculo do volume. Para calcular o volume da pirâmide, multiplicamos a área da base por um terço da sua altura. Definimos novamente:

$$V = (\acute{a}rea\ da\ base)\ .\frac{1}{3} altura$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Cada grupo receberá um cubo e uma pirâmide de mesma base e mesma altura e algumas gramas de arroz.

Será pedido que com o material recebido pensem em uma forma de demonstrar a fórmula do volume da pirâmide com base no que já sabem sobre a fórmula do volume do cubo.

Para descobrir o volume da pirâmide os estudantes deverão completar o cubo com arroz utilizando como medida a pirâmide. Eles precisaram de 3 pirâmides para encher o cubo por completo concluído assim que o volume da pirâmide é o volume do cubo divido por três.

Volume do Cubo:

$$V_c = A_b \cdot h$$

Volume da pirâmide:

$$V_p = \frac{V_c}{3}$$

$$V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

<u>EXERCÍCIOS:</u>

Os estudantes estarão dispostos em grupos para discussão e resolução dos exercícios.

1) (ENEM, 2017) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

a) 10

b) 12

c) 25

d) 42

e) 50

2) (ENEM, 2017) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

• Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm

• Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm

• Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm

• Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm

• Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

3) (ENEM, 2016) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

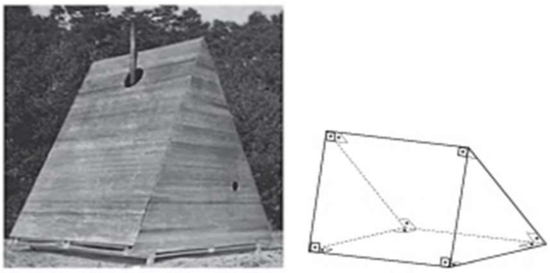


Figura 1 Figura 2

ROMERO, L. Tendências. **Superinteressante**, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

a) Tetraedro

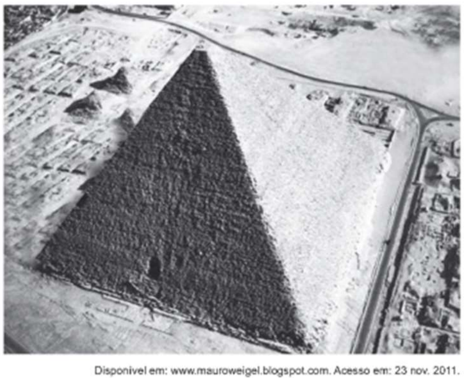
b) pirâmide retangular.

c) tronco de pirâmide retangular.

d) prisma quadrangular reto.

e) prisma triangular reto.

4) (ENEM, 2016) A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.



Disponível em: www.mauroweigel.blogspot.com. Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é

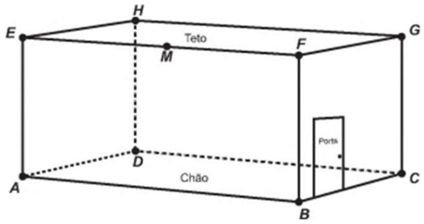
a) 97,0.

b) 136,8.

c) 173,7.

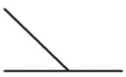
d) 189,3.
e) 240,0.

5) (ENEM, 2017) A lagartixa parte do ponto ***B*** e vai até o ponto ***A***. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto ***M***, que é o ponto médio do segmento ***EF***. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto ***M*** até o ponto ***H***. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

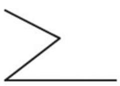


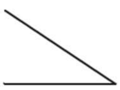
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a)

b) 

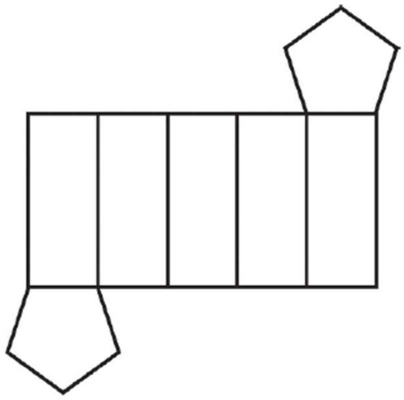
c) 

d) 

e) 

6) (ENEM, 2014) Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão

distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura.



Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

a) 10

b) 12

c) 14

d) 15

e) 16

7) (ENEM, 2016) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices *P, Q, R* e *S*, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

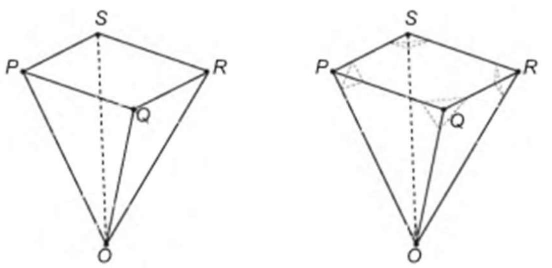


Figura 1 Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13

b) 9, 24 e 13

c) 7, 15 e 12

d) 10, 16 e 5

e) 11, 16 e 5

8) (ENEM, 2015) Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

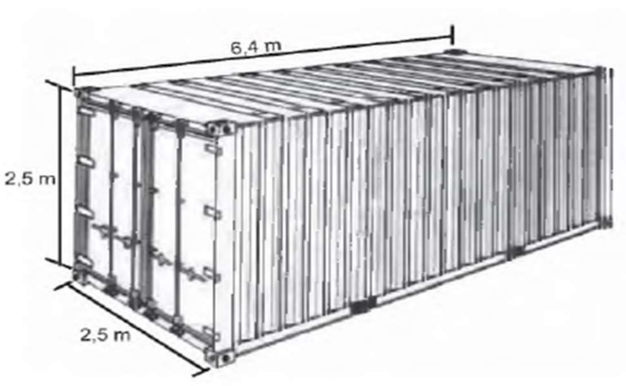


Figura 1

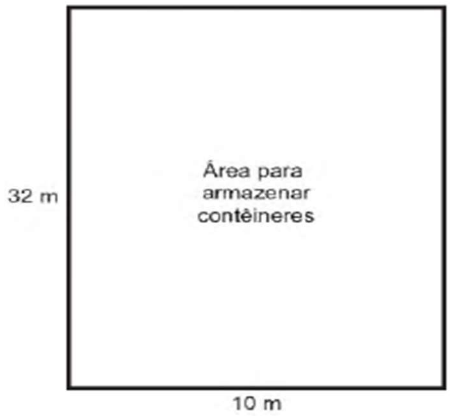


Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

a) 12,5 m.

b) 17,5 m.

c) 25,0 m.

d) 22,5 m.

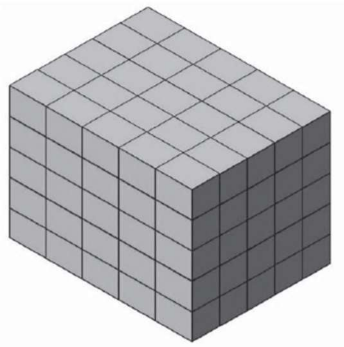
e) 32,5 m.

9) (ENEM, 2014) A caixa-d'água de uma casa tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e possui dimensões externas (comprimento, largura e altura) de, respectivamente, 4,0 m, 3,0 m e 2,5 m. É necessária a impermeabilização de todas as faces externas dessa caixa, incluindo a tampa. O fornecedor do impermeabilizante informou ao dono da casa que seu produto é fornecido em galões, de capacidade igual a 4,0 litros. Informou, ainda, que cada litro impermeabiliza uma área de 17 700 cm^2 e são necessárias 3 demãos de produto para garantir um bom resultado.

Com essas informações, para obter um bom resultado no trabalho de impermeabilização, o dono da casa precisará comprar um número mínimo de galões para a execução desse serviço igual a

a) 9
b) 13
c) 19
d) 25
e) 45

10) (ENEM, 2014) Uma fábrica de rapadura vende seus produtos empacotados em uma caixa com as seguintes dimensões: 25 cm de comprimento; 10 cm de altura e 15 cm de profundidade. O lote mínimo de rapaduras vendido pela fábrica é um agrupamento de 125 caixas dispostas conforme a figura.



Qual é o volume do lote mínimo comercializado pela fábrica de rapaduras?

a) 3 750 cm^3
b) 18 750 cm^3

c) 93 750 cm^3
d) 468 750 cm^3
e) 2 343 750 cm^3

11) (ENEM, 2014) Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm3 cada, que ficarão totalmente submersas no aquário.

Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm d o topo do aquário.

O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a

a) 48
b) 72
c) 84
d) 120
e) 168

12) (ENEM, 2017) Uma empresa espacializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é
a) 11,25.

b) 27,00.

c) 28,80.

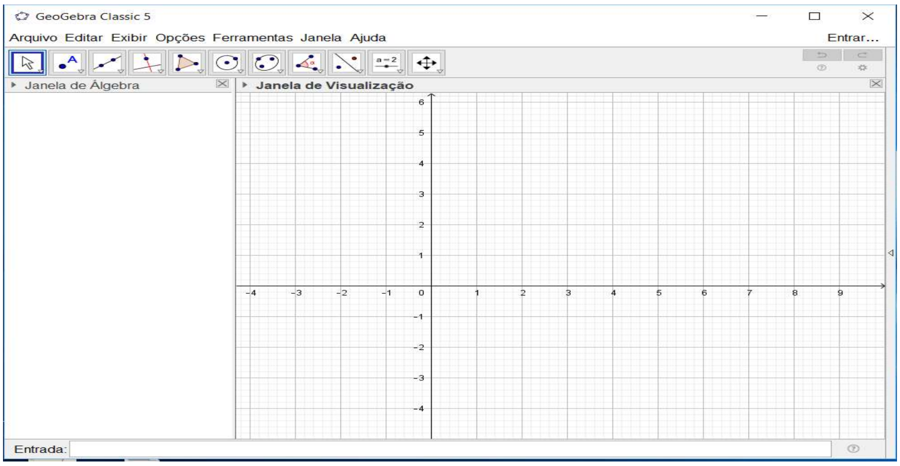
d) 32,25.

e) 49,50.

<u>ATIVIDADE 4:</u> Software Geogebra

CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS

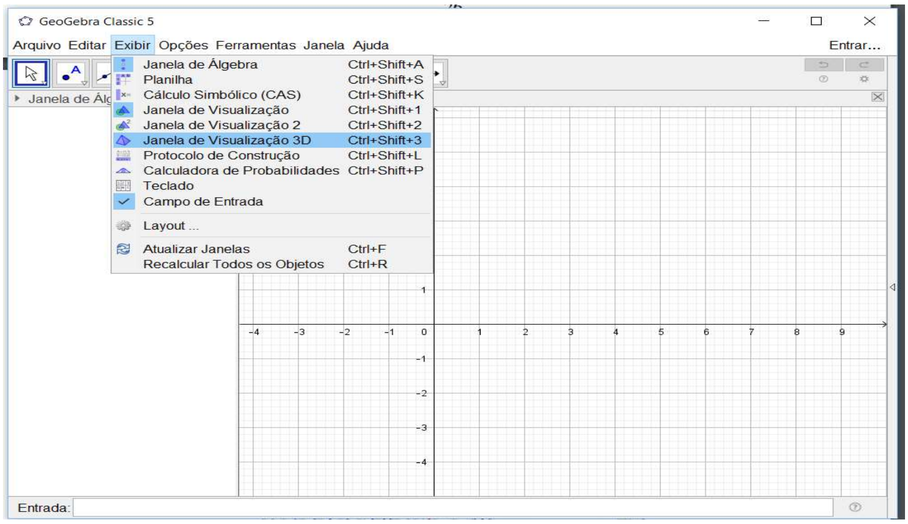
Na área de trabalho a duas janelas: a janela algébrica e a 2D (janela de visualização).



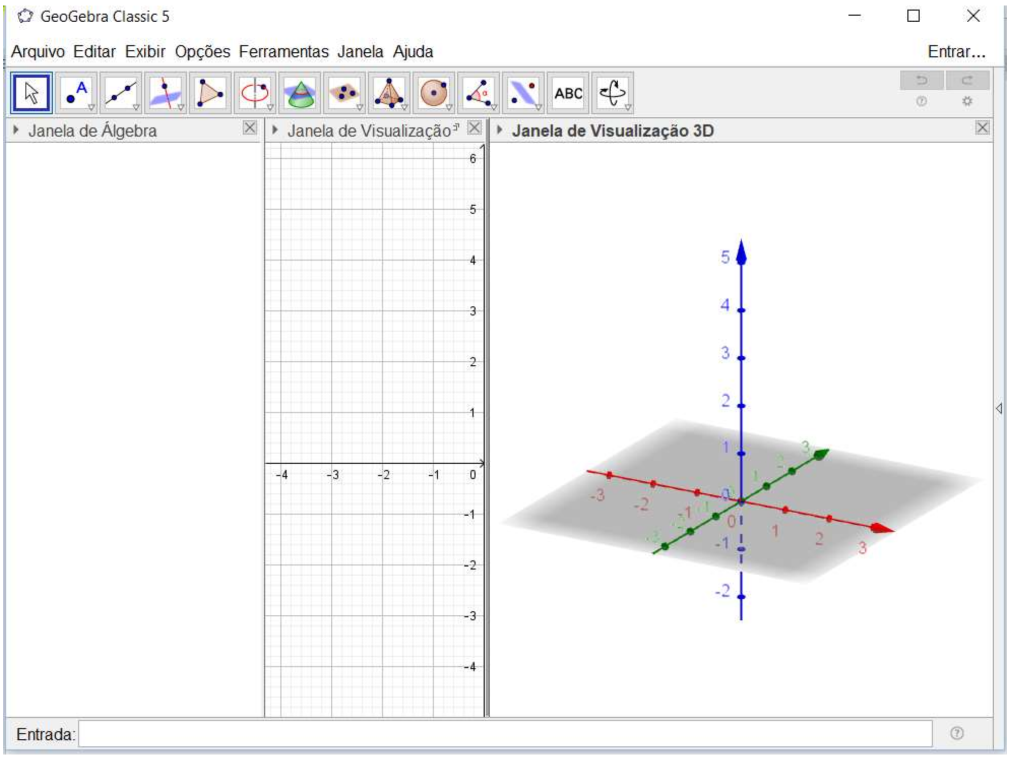
Na tela superior do software existe duas barras: BARRA DE MENU e suas principais funções e a BARRA DE FERRAMENTAS com seus diversos comandos.

Na parte inferior da tela existe uma barra, barra de comandos (entrada).

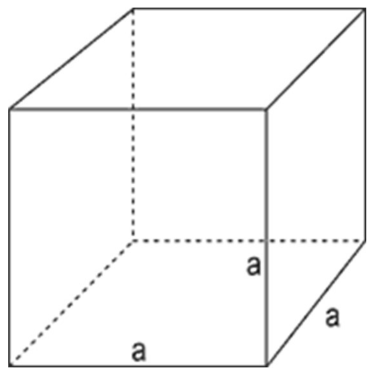
Clicando como o botão esquerdo do mouse sobre o ícone exibir aparecerá a opção janela de visualização 3D, que também pode ser obtida pressionando as teclas $Ctlr + Shift + 3$.



Clicando com o botão direito do mouse na opção janela de visualização 3D, tem-se a tela desejada.



CUBO



FÓRMULA DO VOLUME DO CUBO

A fórmula do volume do cubo é a área da base vezes a altura, mas como a área da base é um quadrado então a fórmula fica melhor representado como sendo o cubo da medida do lado.

$$V = l^3$$

FÓRMULA DA DIGONAL DO CUBO

$$d = a\sqrt{3}$$

ÁREA LATERAL DO CUBO

$$A_l = 4a^2$$

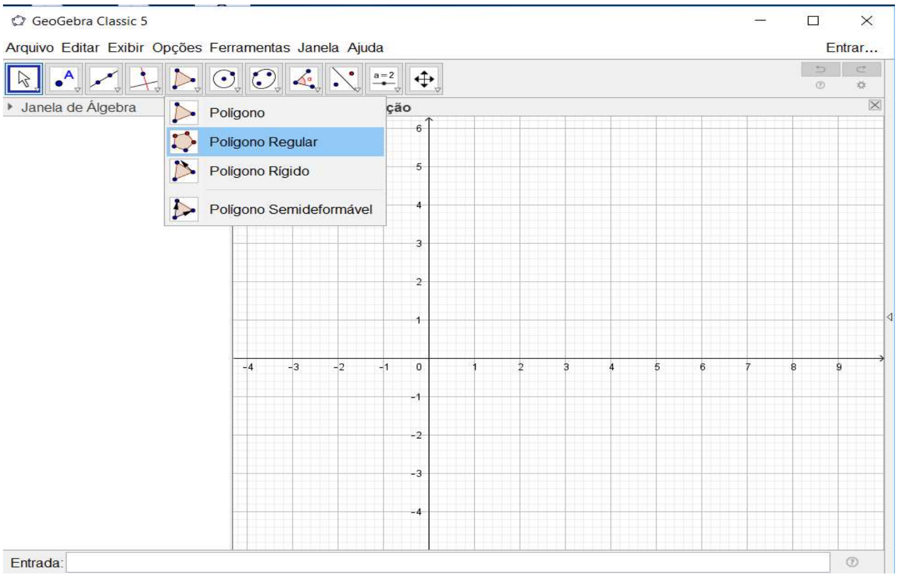
ÁREA TOTAL DO CUBO

$$A_t = 4a^2$$

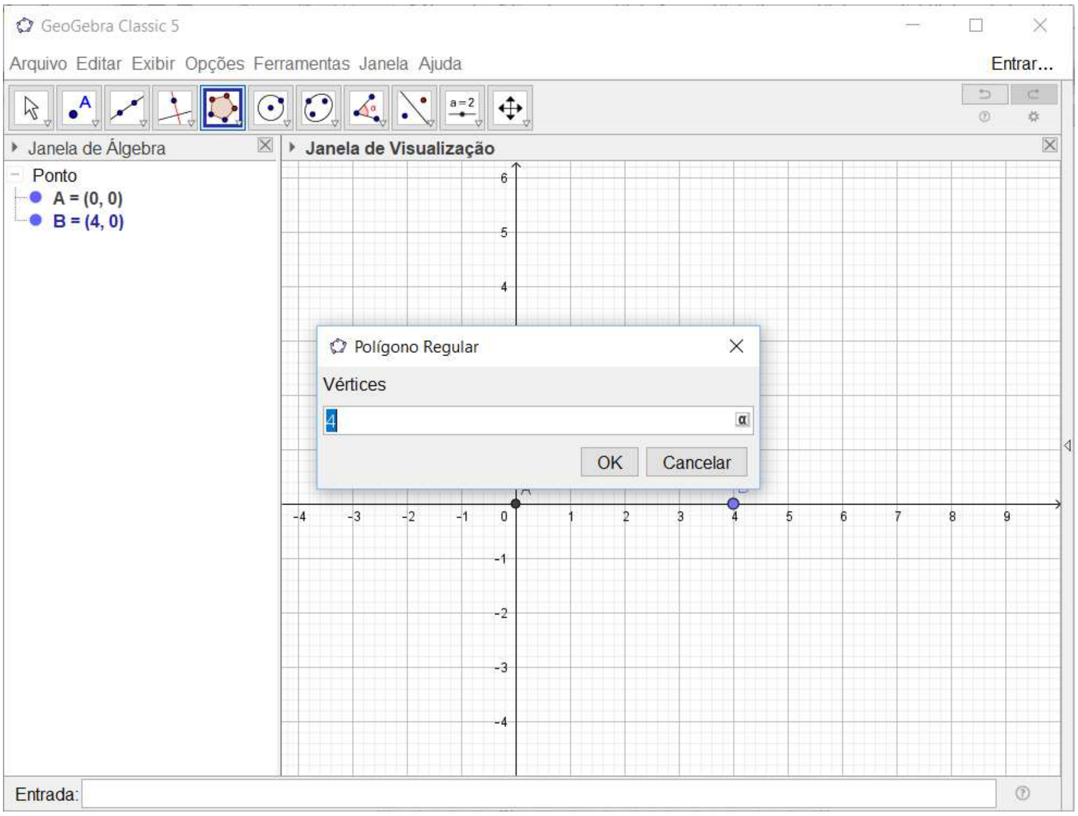
Para iniciar a construção dos sólidos em estudo deve-se seguir os seguintes passos:

Construção do Cubo no Geogebra

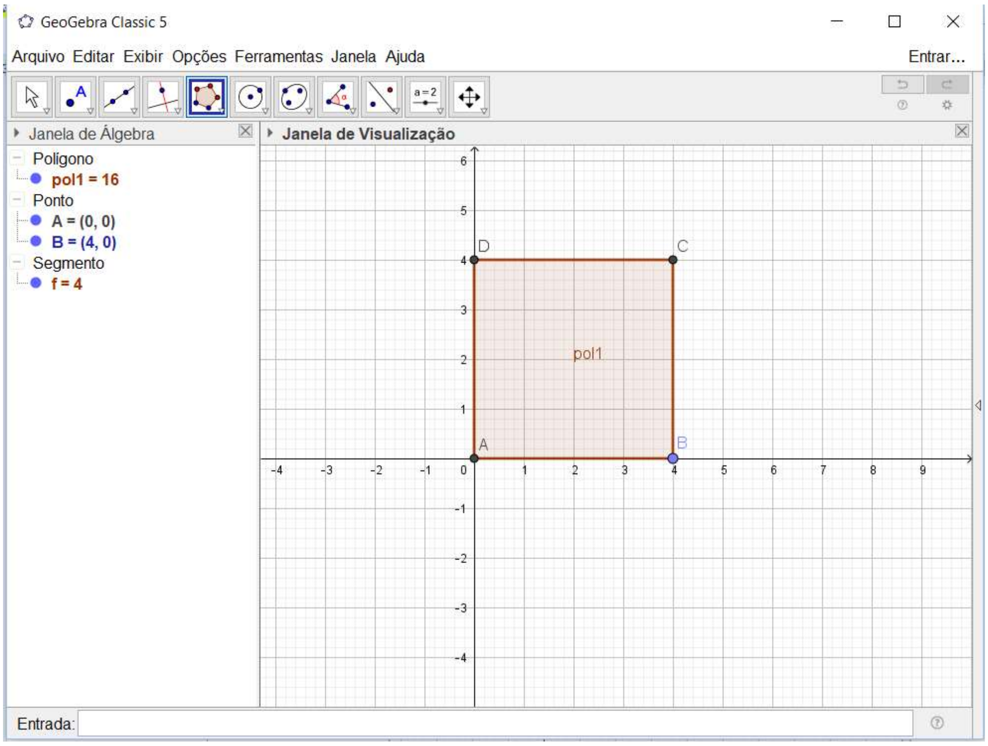
1. Iniciar o Geogebra.
2. Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.



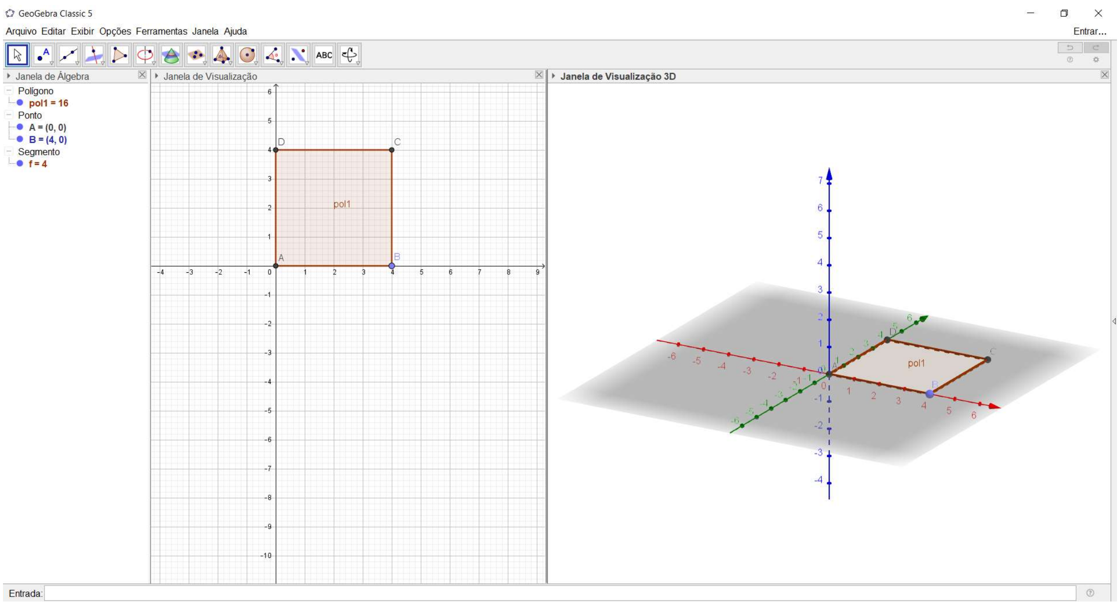
3. Clicar em dois pontos no eixo x, em seguida aparecerá uma janela vértice, insira o número de vértices 4 e clique em ok.



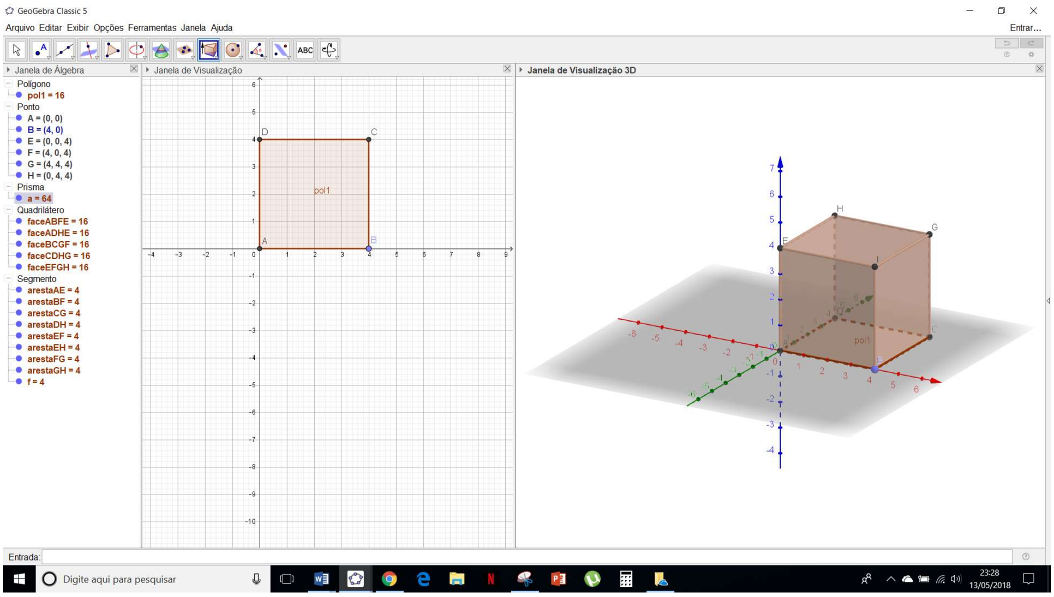
4. Aparecerá um polígono de lados iguais (quadrado).



5. Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.



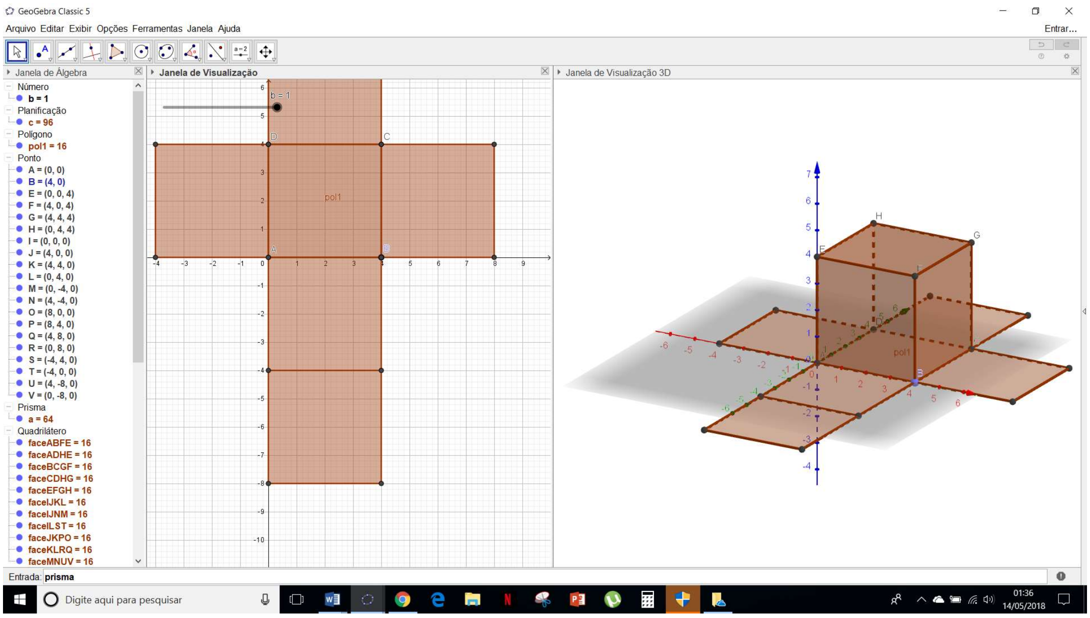
6. Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para prisma ou cilindro. Após clicar no polígono aparecerá a janela prisma e será solicitada a altura, como estamos construindo um cubo a altura deve ser 4, pois o polígono que construímos anteriormente tem lados com medida 4.



Na janela de Álgebra é possível obter o número de faces, vértices, área da face e volume.

7. Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone “ângulo” e na sequência a opção “volume” e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “volume”.
8. Para obter a diagonal do cubo basta ir no ícone “reta” e selecionar a opção “segmento”, após clicar nos vértices que formam a diagonal.
9. Para calcular a diagonal da base do cubo basta ir no ícone “reta” e selecionar a opção “segmento”, após clicar nos vértices que formam a diagonal.

10. Para planificação selecionar o ícone pirâmide e em seguida planificação. Após clicar na figura.



11. Também pode-se animar a planificação na "janela de álgebra", para isso basta clicar com o botão esquerdo do mouse na opção número e selecionar animar.

ATIVIDADES:

a) Utilizando o Geogebra calcule o volume e a diagonal de cubo, sabendo que a medida de seu lado é igual a 8 cm. Para $\sqrt{3}$ considere 1,73.

Resolução:

Foi dado que a medida do lado é igual a 8 cm. O que temos que fazer é utilizar a fórmula.

Volume:

$v = l^3$

$v = 8^3$

$v = 512\ cm^3$

Diagonal:

$d = 8\sqrt{3}$

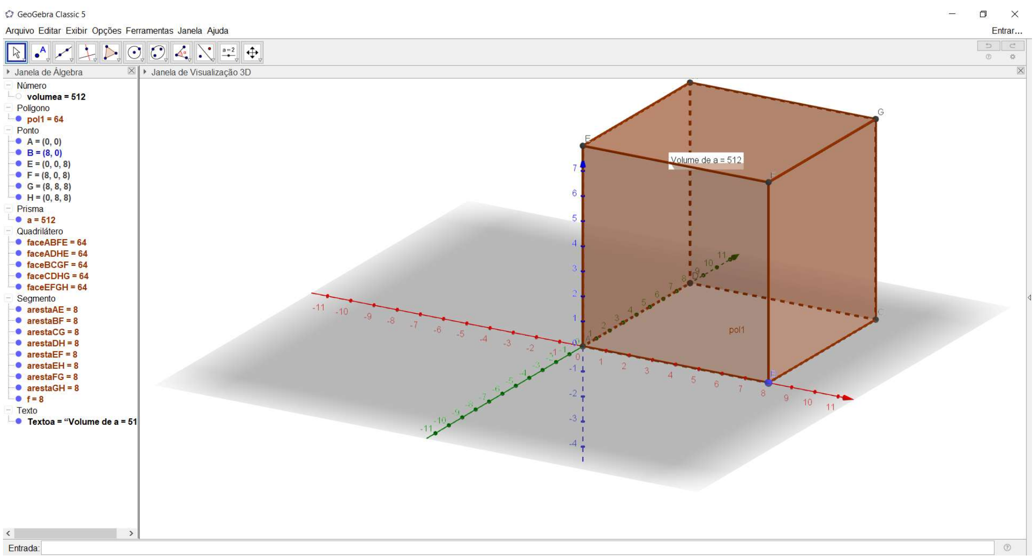
$d = 8 \cdot 1{,}73$

$d = 13{,}84$

Utilizando o Geogebra

1) Na janela de visualização selecione o icone poligono e em seguida a opção poligono regular.
2) Clicar em dois pontos no eixo x (0,8), em seguida aparecerá uma janela vértice, insira o número de vértices 4 e clique em ok.
3) Aparecerá um polígono de lados iguais medindo 8 cm.
4) Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.
5) Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para prisma ou cilindro. Após clicar no polígono aparecerá a janela prisma e será solicitada a altura, como você construindo um cubo a altura deve ser 8, pois o polígono que construindo anteriormente tem lados com medida 8.
6) Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone ângulo e na sequência a opção volume e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “volume”.

7) Para obter a diagonal do cubo basta ir no ícone “reta” e selecionar a opção “segmento”, após clicar nos vértices que formam a diagonal.



b) A área de um dos lados de um cubo mede 36cm². Com base nessa informação, calcule o volume e a diagonal desse cubo.

Resolução:

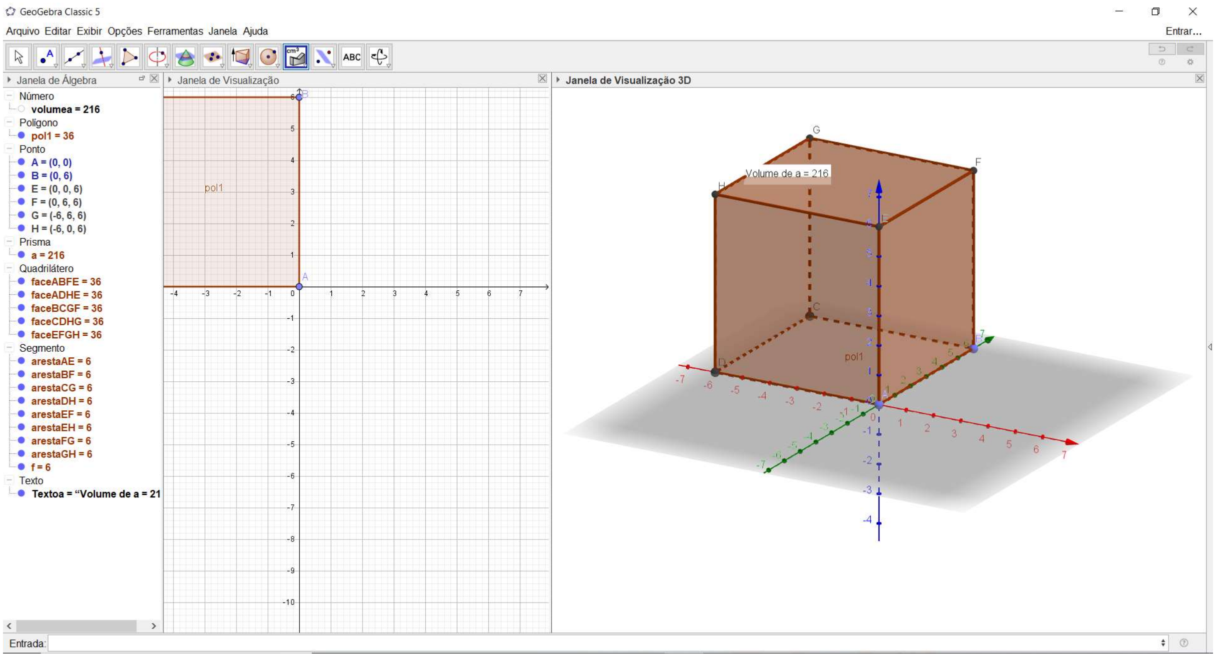
$A = \ l^2$

$36 = \ l^2$

$l = \ \sqrt{36}$

$l = 6\ cm$

Agora que temos o lado do quadrado que é o mesmo do cubo, utilizando o software Geogebra calcule o volume desse cubo seguindo os passos do exercício anterior.



Volume:

$v = \ l^3$

$v = \ 6$

$v = \ 216cm^3$

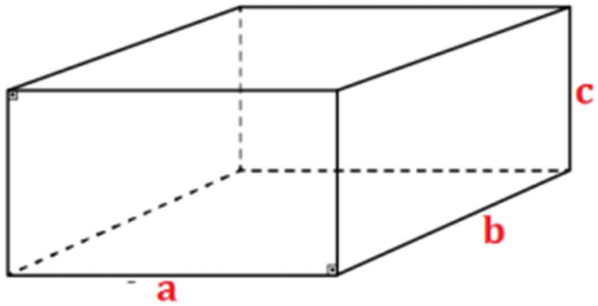
Diagonal:

$d = 6\sqrt{3}$

$d = 6 \cdot 1{,}73$

$d = 10{,}38$

PARALELEPIPEDO



Área da Base

$$Ab = a.b$$

Área Total

$$A_T = 2ab + 2bc + 2ac$$

Volume do paralelepípedo retângulo

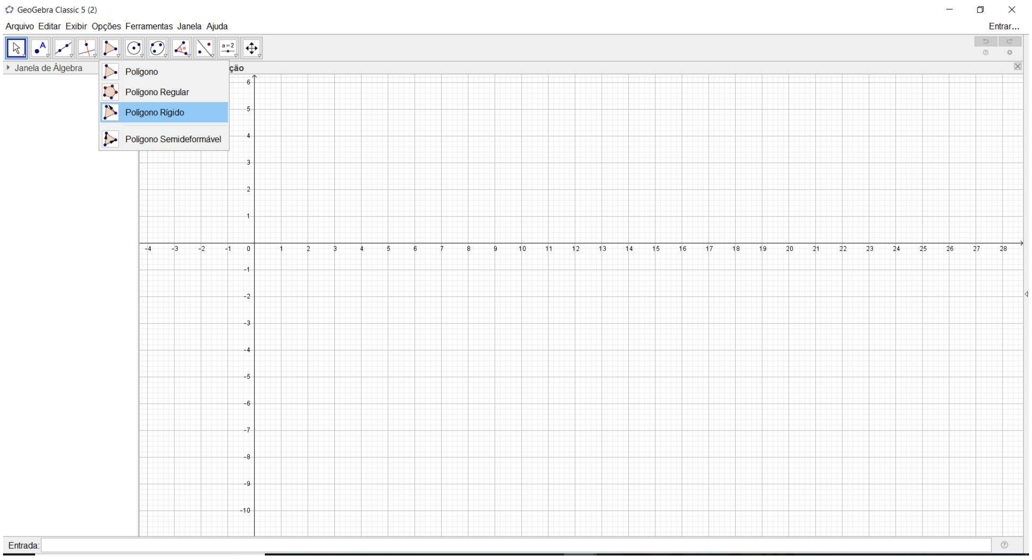
$$V = a.b.c$$

Diagonal do paralelepípedo retângulo

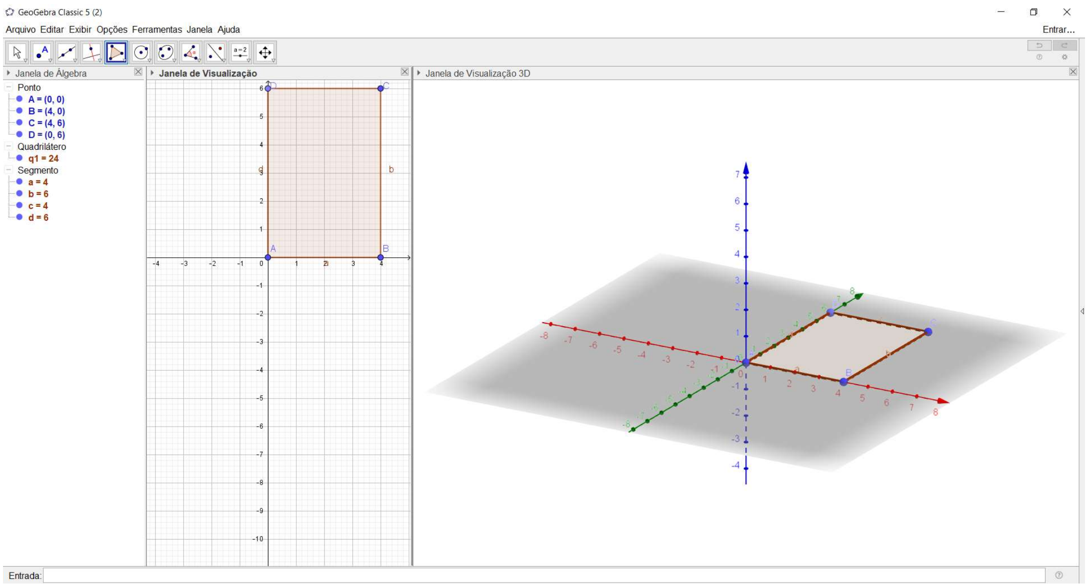
$$D = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Construção do Paralelepípedo no Geogebra

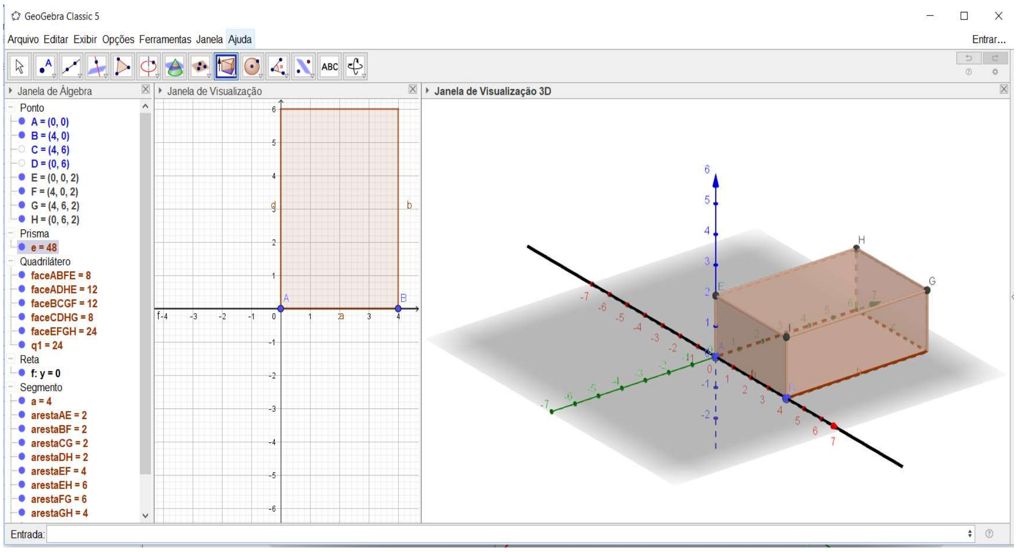
1. Iniciar o Geogebra
2. Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.



3. Clicar em dois pontos no eixo X em dois pontos do eixo Y formando um retângulo.
4. Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.

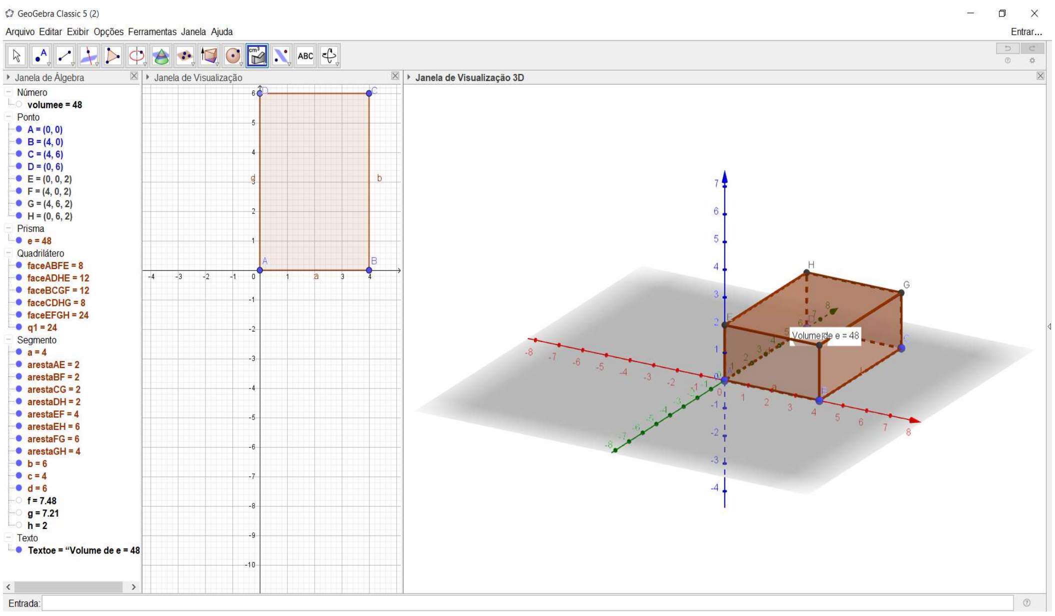


5. Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para prisma ou cilindro. Após clicar no polígono aparecerá a janela prisma e será solicitada a altura. Escolher a altura e clicar em ok.
6. Aparecerá um paralelepípedo com faces retangulares.

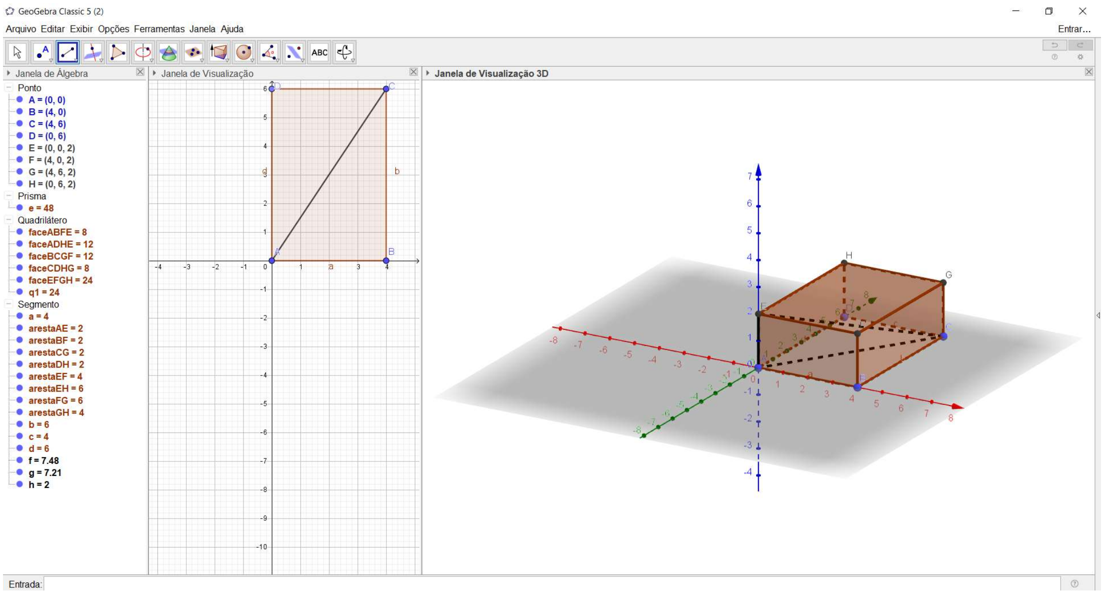


Na janela de Álgebra é possível obter o número de faces, vértices, área da face e volume.

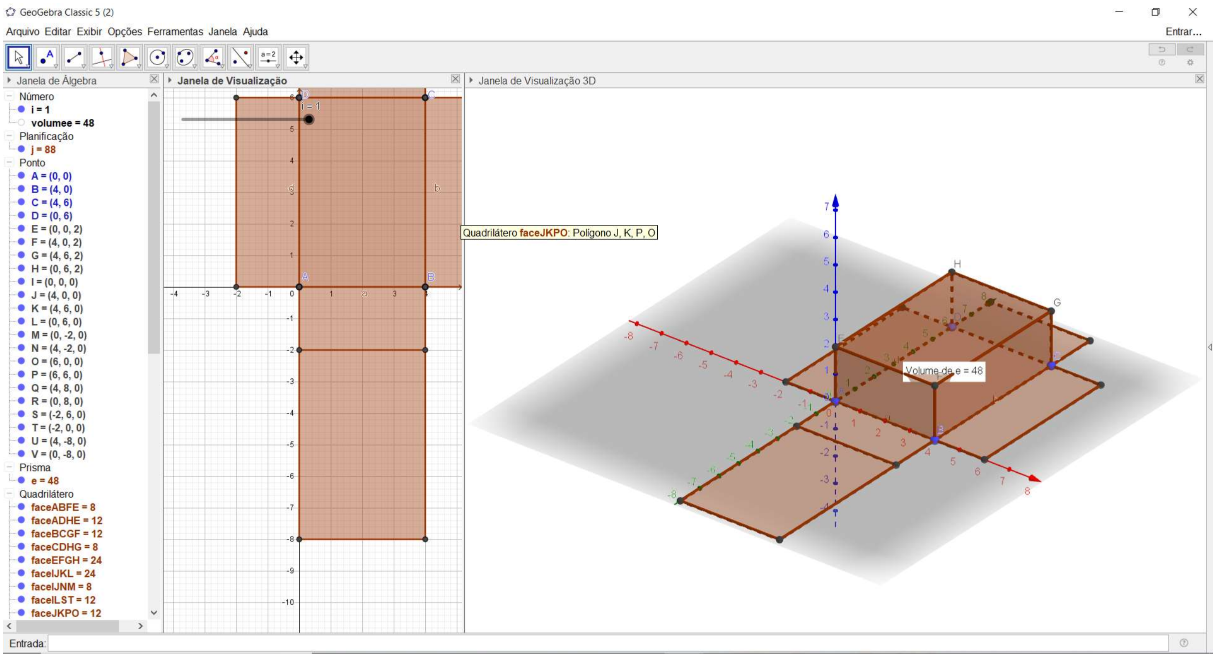
7. Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone "ângulo" e na sequência a opção "volume" e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra "volume".



8. Para obter a diagonal do paralelepípedo basta ir no ícone "reta" e selecionar a opção "segmento", após clicar nos vértices que formam a diagonal.
9. Para calcular a diagonal da base do paralelepípedo basta ir no ícone "reta" e selecionar a opção "segmento", após clicar nos vértices que formam a diagonal. Aparecerá o valor da diagonal na "janela de Álgebra".



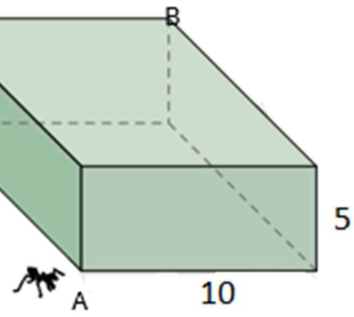
10. Para planificação selecionar o ícone pirâmide e em seguida planificação. Após clicar na figura.



11. Também pode-se animar a planificação na “janela de álgebra” para isso basta clicar com o botão esquerdo do mouse na opção número e selecionar animar.

ATIVIDADES:

1) **(UFPE, ADAPTADA)** Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice A do paralelepípedo reto ilustrado ao lado. Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice B (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)?



Resolução:

$$D = \sqrt{(10^2 + 10^2 + 5^2)}$$

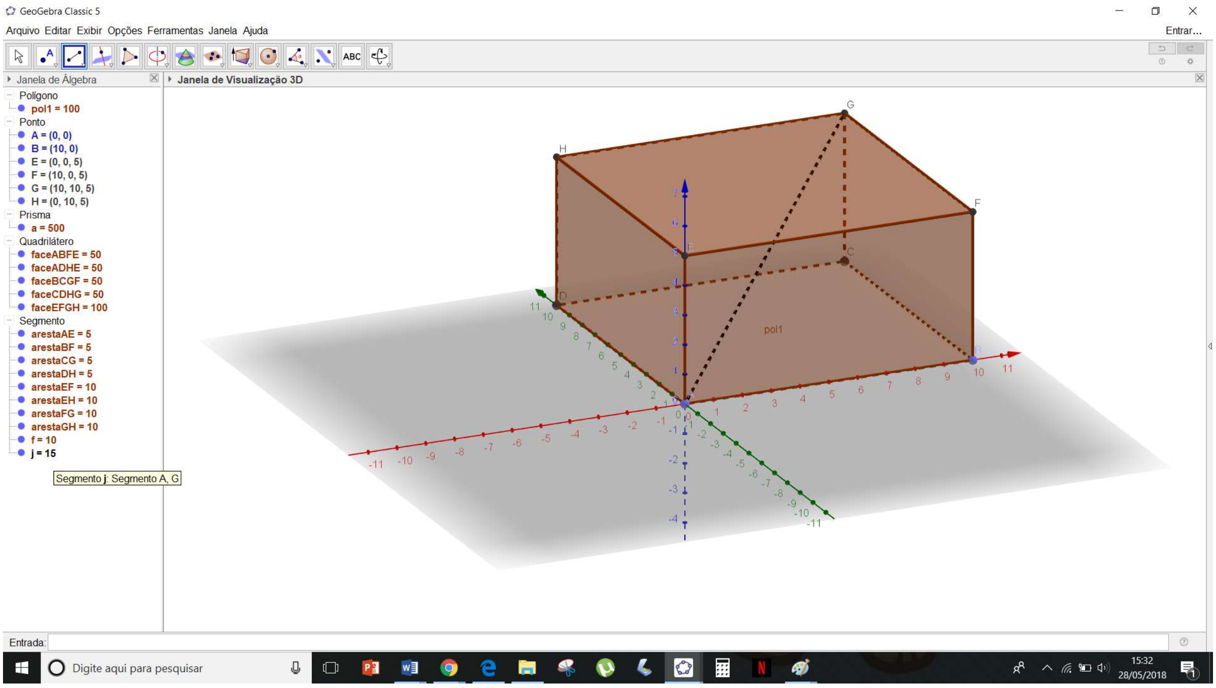
$$D = \sqrt{100 + 100 + 25}$$

$$D = \sqrt{225}$$

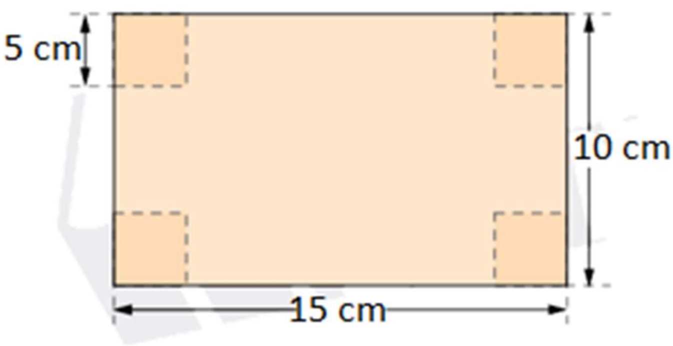
$$D = 15$$

Utilizando o Geogebra

1. Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.
2. Clicar em dois pontos (0,10) no eixo X, em seguida aparecerá uma janela vértice, insira o número de vértices 4 e clique em ok.
3. Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.
4. Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para prisma ou cilindro. Após clicar no polígono aparecerá a janela prisma e será solicitada a altura. Escolher a altura 5 e clicar em ok.
5. Aparecerá um paralelepípedo com faces retangulares.
6. Para obter a diagonal do paralelepípedo basta ir no ícone “reta” e selecionar a opção “segmento”, após clicar nos vértices que formam a diagonal.



2) (FCMSC-SP) Dispondo de uma folha medindo 15 cm de comprimento por 10 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta cortando-se um quadrado de 5 cm de lado em cada canto da folha (ver figura). Qual será o volume dessa caixa, em centímetros cúbicos? E a área total?



Resolução:

Se o lado do quadrado tem medida 4 e sabemos que o cubo tem todos os lados do mesmo tamanho, então chega-se que a altura da caixa será 5 cm.

Utilizando a fórmula do volume temos:

$$V = A_b \cdot h$$

$A_R = b.h$

$A_R = 15.10$

$A_R = 150$

$V = 150 \cdot 5$

$V = 750\ cm^3$

$$A_T = A_L + A_B$$

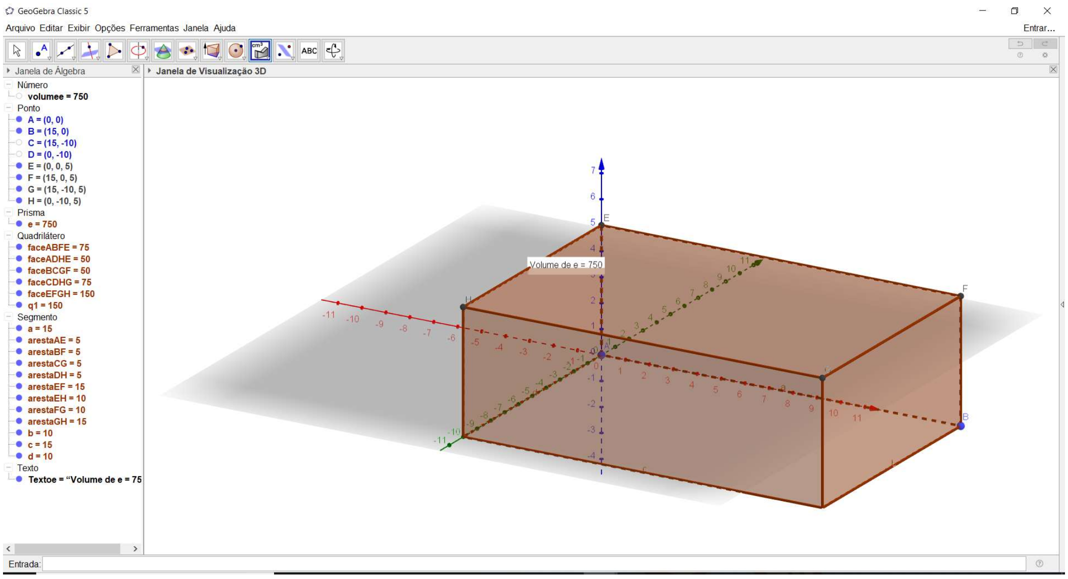
$A_T = (2 \cdot 75 + 2 \cdot 50) + 150$

$A_T = 250 + 150$

$A_T = 350\ cm^2$

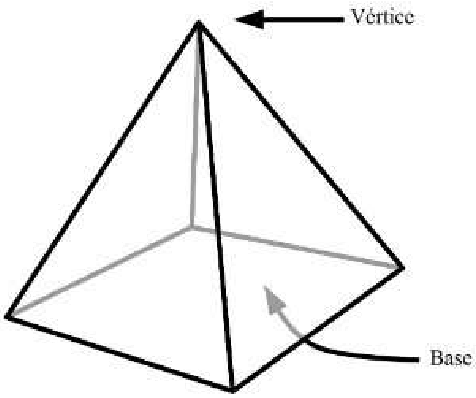
Utilizando do Geogebra.

1. Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.
2. Clicar em dois pontos (0,15) no eixo X e escolher a altura 10 no eixo Y formando um retângulo.
3. Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.
4. Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para prisma ou cilindro. Após clicar no polígono aparecerá a janela prisma e será solicitada a altura. Escolher a altura e clicar em ok.
5. Aparecerá um paralelepípedo com faces retangulares.
6. Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone “ângulo” e na sequência a opção “volume” e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “volume”.



7. Não é possível obter a aula total da figura, mas podemos obter a área de cada face selecione o ícone “ângulo” e na sequência a opção “área” e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “área”.

PIRÂMIDE



Para calcular o volume da pirâmide utiliza-se a seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

Onde:

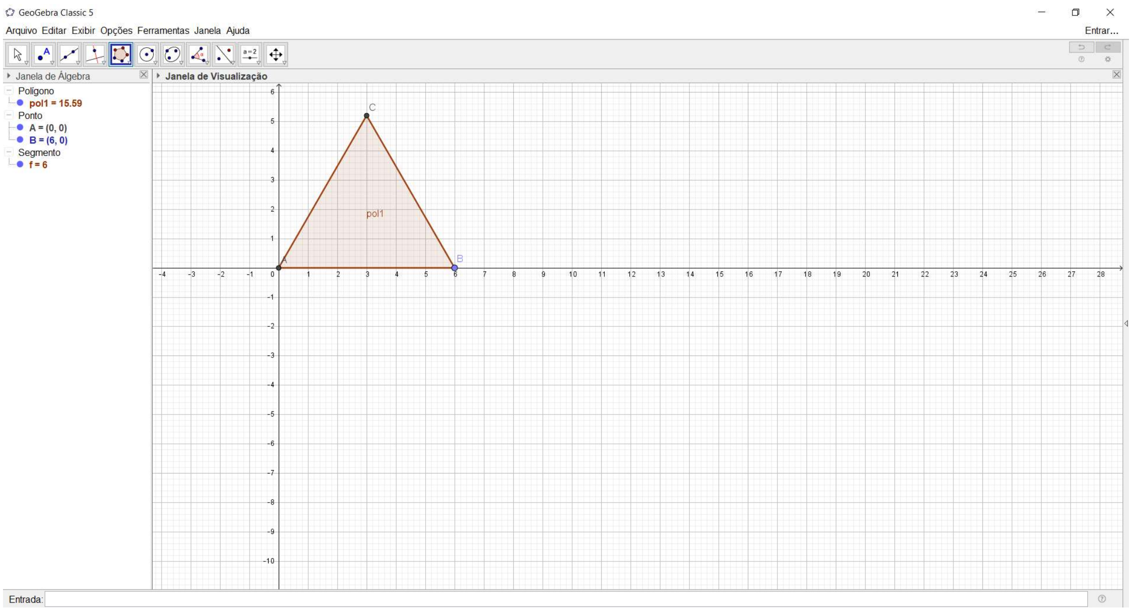
$\boldsymbol{V}$: volume da pirâmide

$\boldsymbol{A_b}$: Área da base

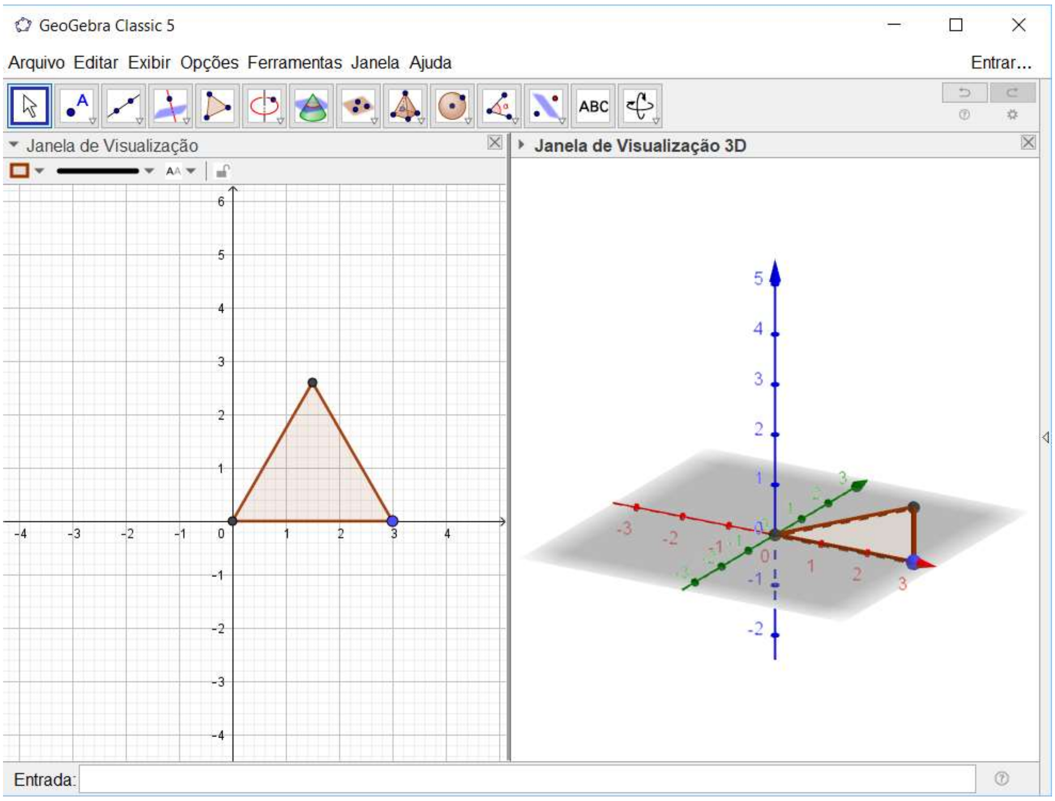
$\boldsymbol{h}$: altura

Construção da Pirâmide no Geogebra

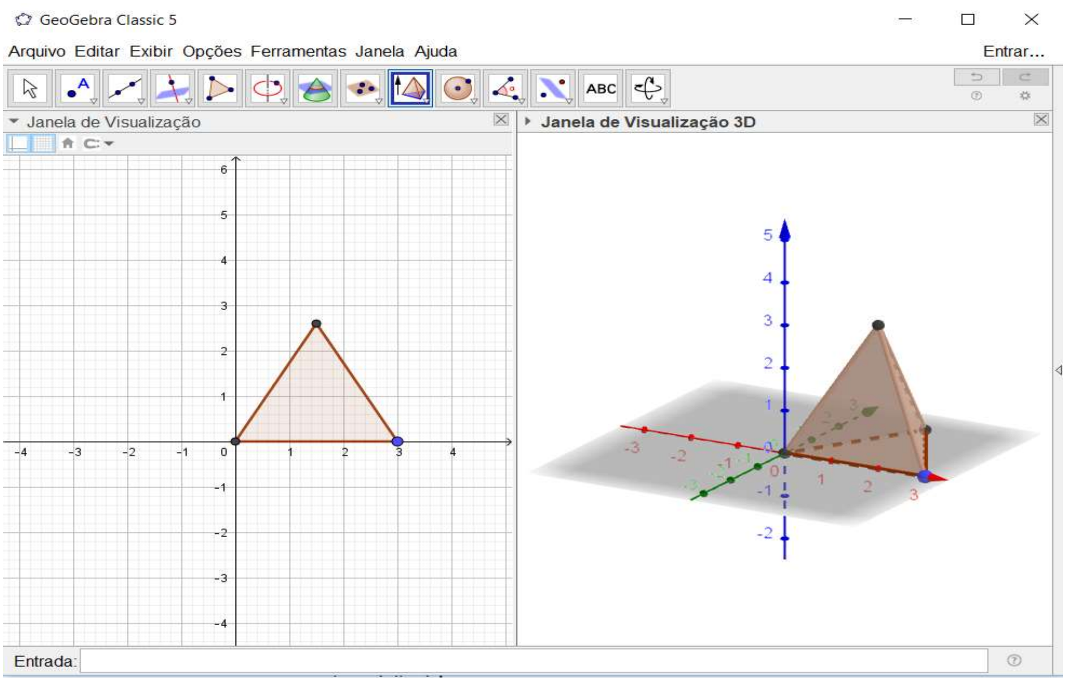
1. Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.
2. Clicar em dois pontos no eixo x, em seguida aparecerá uma janela vértice, insira o número de vértices 3 e clique em ok.



3. Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.



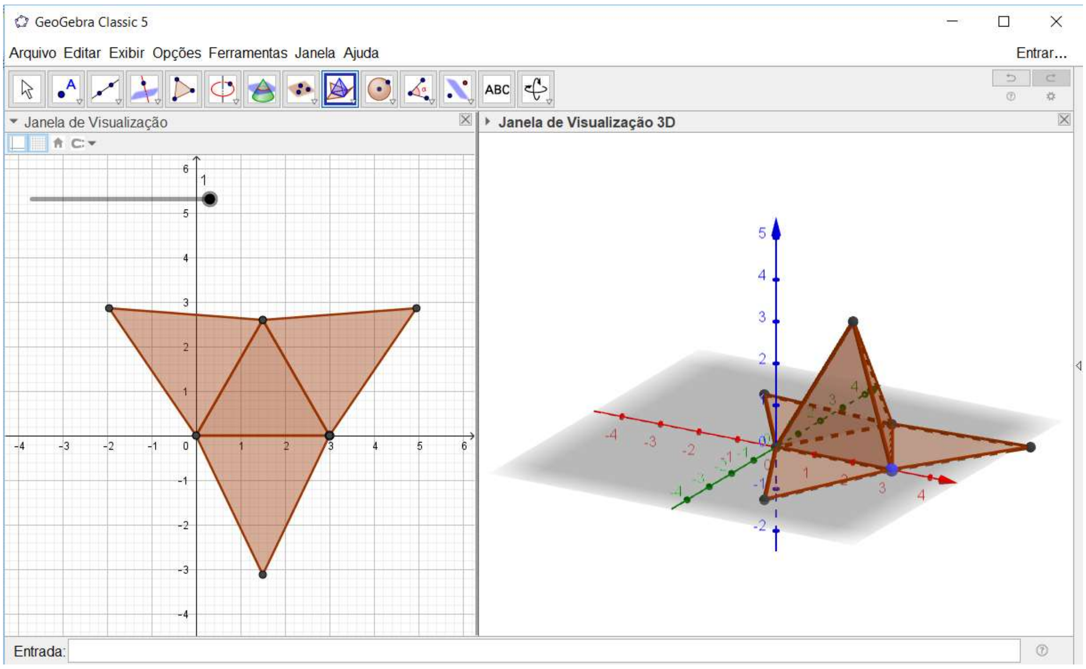
4. Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para pirâmide ou cone. Após clicar no polígono aparecerá a janela pirâmide e será solicitada a altura, adicionar a altura e clicar em ok e aparecerá a pirâmide.



Na janela de Álgebra é possível obter o número de faces, vértices área da face e volume.

5. Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone ângulo e na sequência a opção volume e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “volume”.

6. Para planificação selecionar o ícone pirâmide e em seguida planificação. Após clicar na figura.

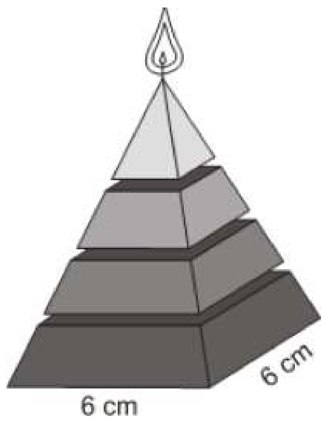


7. Para melhor visualização da planificação pode-se selecionar o ícone girar janela de visualização 3D.
8. Também pode-se animar a planificação na janela de álgebra clicar como botão esquerdo do mouse na opção número e selecionar animar.

Atividades:

Utilize o Geogebra para resolver as seguintes questões:

a) **Questão 173 (ENEM 2009) – Prova Azul.** Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 15 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 2 cm de aresta na base, mas mantendo o molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

Resolução:

O volume de parafina gasto na nova vela corresponde à subtração do volume da pirâmide maior, com aresta da base de 6 cm e altura de 15 menos volume da pirâmide menor, com 2 cm de aresta da base e 3 cm de altura.

Volume pirâmide maior.

Inicialmente temos que descontar os espaços entre os blocos 15 – 3 = 12 cm obtendo a altura da pirâmide.

$$V = \frac{1}{3}\, 36 \cdot 12$$

$$V = 12 \cdot 12 = 144$$

Volume da pirâmide menor:

$$V = \frac{1}{3}\, 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$V = 4$$

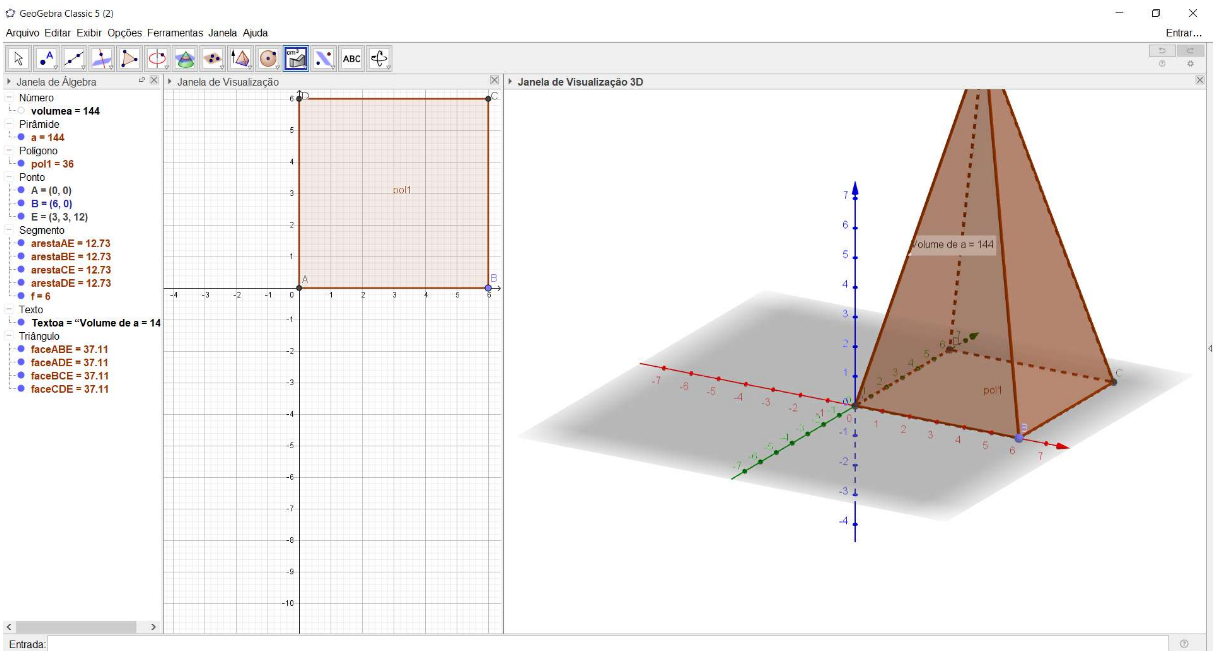
Volume da nova vela

$$144 - 4 = 140\ u.v$$

Agora utilizando o Geogebra.

Construção da pirâmide maior.

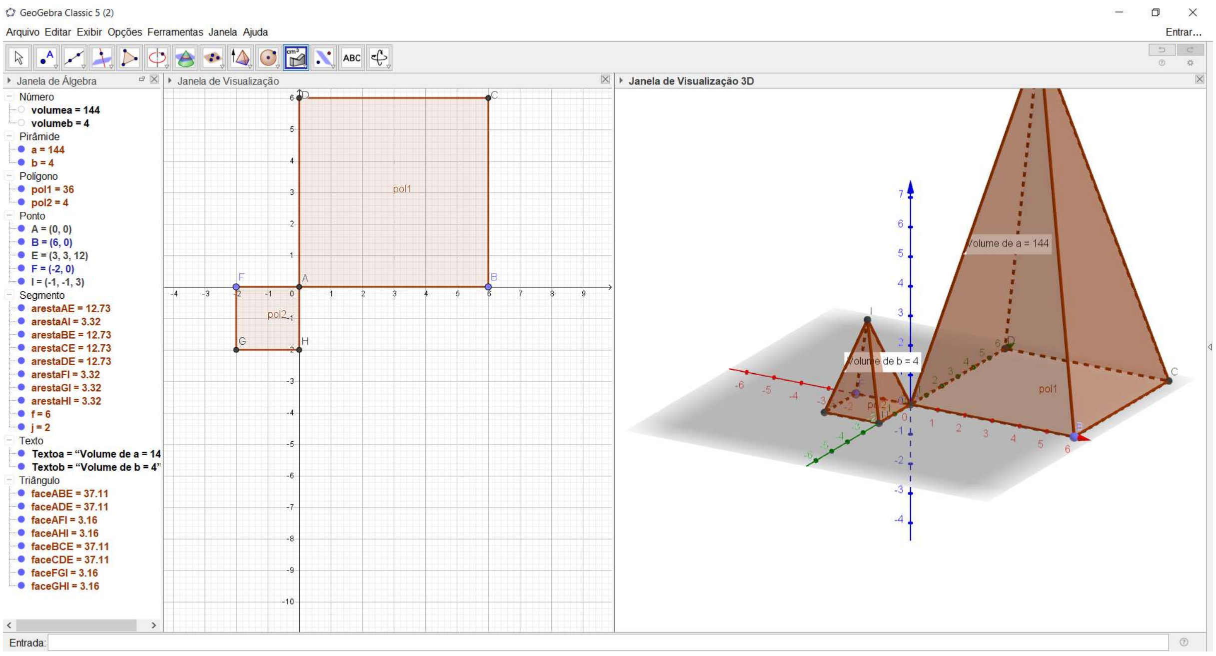
1) Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.
2) Clicar em dois pontos em um dos eixos, sugestão (0,6) em seguida aparecerá uma janela vértice, insira o número de vértices 4 e clique em ok.
3) Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.
4) Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para pirâmide ou cone.
5) Após clicar no polígono na janela de visualização 3D e aparecerá a janela pirâmide e será solicitada a altura, adicionar a altura 12 m e clicar em ok, então aparecerá a pirâmide.
6) Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone ângulo e na sequência a opção volume e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “volume”.



Construção da Pirâmide Menor

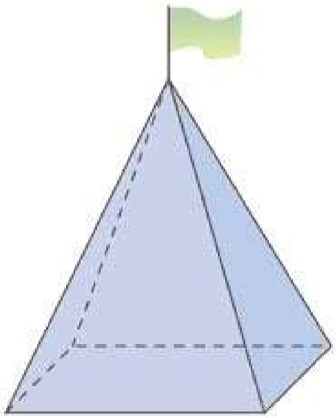
1) Clicar com o botão direito no ícone polígono e em seguida em polígono regular.
2) Clicar em dois pontos em um dos eixos, sugestão (0,2) em seguida aparecerá uma janela vértice, insira o número de vértices 4 e clique em ok.

3) Após clicar com o botão esquerdo do mouse no ícone exibir e em seguida na opção janela de visualização 3D.
4) Selecionar o ícone pirâmide e em seguida a opção extrusão para pirâmide ou cone.
5) Após clicar no polígono na janela de visualização 3D e aparecerá a janela pirâmide e será solicitada a altura, adicionar a altura 3cm e clicar em ok, então aparecerá a pirâmide.
6) Para obter o volume da figura em estudo selecione o ícone ângulo e na sequência a opção volume e clique na figura então aparecerá na janela de álgebra “volume”.



Então diminuído os dois volumes $144 - 4 = 140$. Portando o volume da nova vela será $140\ u.v.$

b) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m. Utilizando o Geogebra descubra o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será:

a) 36

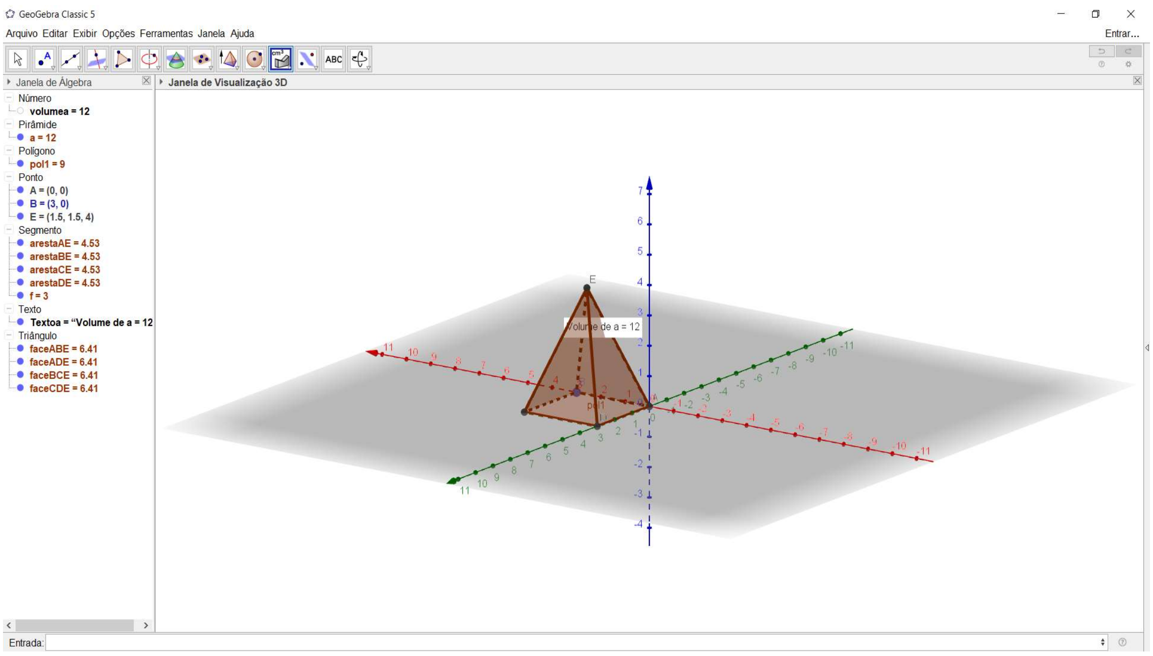
b) 27

c) 18

d) 12

e) 4

Resposta: 12



<u>ATIVIDADE 5:</u> Pós-teste

Recursos didáticos: Quadro branco, caneta para quadro branco, folha A4 impressa, embalagens variadas como caixinhas de creme dental, sabonete, remédios, etc, folha quadriculada, materiais para construção dos sólidos como canudos, cartolina, palitos de churrasco, jujubas, etc, computador e o software Geogebra.

Avaliação: A avaliação será feita através de análise quantitativa do pré e pós-testes.

Referências:

SCHNORNBERGER, T. **O Uso da Pletora de Poliedros no Ensino de Geometria Espacial**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Porto Alegre, 2014.

Sites:

http://educacao.globo.com/provas/enem-2010/questoes/146.html

http://soumaisenem.com.br/matematica/conhecimentos-geometricos/solidos-exercicios-parte-i

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10483/open/file/geo1202.htm

http://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2008/03/diagonal-quadrado.jpg