FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA

CAMPUS ALEGRETE

SUÉLEN ESCARAMUSA VAZ

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES USANDO O SOFTWARE MÁXIMA

ALEGRETE

2011

SUÉLEM ESCARAMUSA VAZ

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES USANDO O SOFTWARE MÁXIMA

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do Título de Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática.

Orientador (a): Fernando Colman Tura

Alegrete

2011

SUÉLEN ESCARAMUSA VAZ

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES USANDO O SOFTWARE MÁXIMA

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do Título de Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Monografia defendida e aprovada em: 17 de novembro de 2011

Banca examinadora:

Fernando Colman Tura

Prof. Me. Fernando Colman Tura
Orientador
UNIPAMPA

Prof.Dr. Jorge Pedraza Arpasi
UNIPAMPA

Fábio Ronei Rodrigues Padilha

Prof.Me.Fábio Ronei Rodrigues Padilha
UNIPAMPA

Dedico este trabalho a meu pai,
que sempre incentivou meus estudos.
E agora me cuida lá de cima, do lado de Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela vida e por todas as oportunidades que colocou no meu caminho.

À minha mãe Laura, que sempre esteve por perto me auxiliando. As irmãs Carla, Marilia e Camila, pois sempre compreenderam minha falta de atenção e ao meu namorado, Deivid pelo suporte nas horas difíceis.

Aos meus professores que tive pela minha jornada, pois transmitiram o conhecimento que possuo.

Aos professores do curso, em especial ao meu orientador Prof. Fernando pelo apoio, compreensão, dedicação e insistência.

Aos meus alunos que tiveram paciência e em especial ao Matheus que me ajudou nos detalhes técnicos.

E a todos que tornaram esta caminhada possível.

“Faça as coisas o mais simples que você
puder, porém não se restrinja às mais simples."

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho é uma pesquisa bibliográfica a qual apresenta inicialmente um estudo sobre Sistemas Lineares contendo sua definição, classificação, e métodos de resolução de Resolução de Sistemas Lineares, em duas e três variáveis. Em seguida faz uma revisão simplificada destes métodos de resolução, buscando um melhor entendimento com exemplos resolvidos. O objetivo dessa pesquisa é propor resolve-los com auxílio do Máxima, um software livre que dentre uma das funções é resolver sistemas lineares, alem de resolver equações, polinômios, derivadas e integrais, também pode gerar gráficos em 2d e 3d. Dentre os métodos na resolução de Sistemas Lineares utilizados apresentamos o Método da Adição, Método da Comparação, Método de Eliminação Gaussiana, o Método da Substituição e a Regra de Cramer.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Métodos de Resolução, Software Máxima.

ABSTRACT

The present paper is a literature investigation which initially presents a study about Linear Systems containing its definition, classification and methods of solving Solving Linear Systems, in two and three variables. Then, it comes a simplified review of these methods of resolution, seeking a better understanding with worked examples. The purpose of this study is to propose to solve them with the help of Máxima, a free software that among the functions is to solve linear systems, besides solving equations, polynomials, derivatives and integrals, and can also generate 2D and 3D charts. Among the methods in solving linear systems used are presented the Addition Method, the Comparison Method, Gaussian Elimination Method, the Substitution Method and the Cramer's Rule.

Key-words: Linear Systems, methods of solving, Maxima software

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

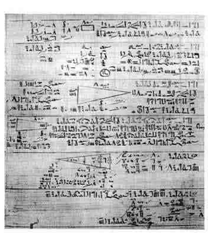
1 INTRODUÇÃO

Como identificar números desconhecidos em um problema matemático? A necessidade de indicar estes números levou os antigos, adotarem palavras para identificá-los, mas isso deixava os cálculos demorados e cansativos. Após vários anos começaram a usar as letras, surgindo assim à Álgebra, com Diofanto de Alexandria, verdadeiro precursor da moderna teoria dos números e para alguns, considerado o pai da Álgebra. Com o uso de notações, Diofanto inovou e foi o primeiro a usar símbolos na resolução dos problemas algébricos, que é uma representação com simbolos matemáticos de um problema dado, com o objetivo de melhor solucioná-lo. Costuma-se dizer que é uma alfabetização matemática com símbolos universais, pois sua interpretação pode ser dada por um matemático, independente do idioma falado.

Um problema clássico dessa alfabetização matemática é o problema dos sistemas de equações lineares virem da busca de soluções para problemas não resolvidos, tendo ele soluções ou não, e através destas, descobertas importantes aconteceram.

O início do uso das equações foi de aproximadamente em 1650 A.C.. Em um documento chamado Papiro de Rhind, adquirido por Alexander Henry Rhind, na cidade de Luxor - Egito, em 1858. O papiro de Rhind também recebeu o nome de Ahmes, um escriba que relata no papiro a solução de problemas relacionados à Matemática.

FIGURA1 - Papiro de Rhind



Fonte: Site papiro de Rhind.

FIGURA 2 - Papiro de Rhind

Fonte: Site papiro de Rhind.

Nas figuras 1 e 2 estão papiros, os quais são compostos por problemas triviais. Na verdade, o que distingue a matemática egípcia da matemática babilônica e, mais tarde, da grega é o fato de não existirem demonstrações nem serem conhecidas as origens das fórmulas utilizadas. O que se encontra são exemplos comprovados e não demonstrações.

O papiro de Rhind contém informações para conhecer todas as coisas secretas, é um dos documentos mais preciosos existentes relativos a matemáticos egípcios.

Os gregos deram grande importância no desenvolvimento da Geometria, realizando inúmeras descobertas importantes para a Matemática, mas na Álgebra foi Diofanto de Alexandria que contribuiu com conceitos para a solução de equações. Ele foi considerado o principal algebrista grego, nascido em Alexandria, no Egito. As equações eram resolvidas, nesta época com o auxílio de símbolos que expressavam o valor desconhecido, estes símbolos deram origem à Álgebra.

Álgebra, no dicionário, é a ciência do cálculo das grandezas abstratas representadas por letras, ou parte da matemática que generaliza questões aritméticas representando quantidades por símbolos. A origem da palavra não tem uma etimologia, ela é uma variante da palavra árabe *al-jabr* usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá em meados dos anos 825, pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm).

O nome deste livro em português quer dizer: "ciência da restauração e redução", mas seria melhor "ciência da transposição e cancelamento" ou, conforme Boher "a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação" e "o cancelamento de termos semelhantes em membros opostos da equação".

No século XVI, com Stifel, Cardano, Bombelli e François Viète que introduziu o uso sistemático das letras e dos sinais de operações, deixando de lado os símbolos, assim a Álgebra evoluiu. Robert Record, Thomas Harriot e René Descartes introduziram o sinal de igual, expoente e as letras finais do alfabeto como **X**, o **Y** e o **Z** representando elementos desconhecidos.

Álgebra além de ser uma ciência das equações, possui um significado muito mais amplo, pois seria melhor dividi-la em duas partes: uma delas a Álgebra antiga ou elementar que é o estudo das equações e métodos para resolvê-las e Álgebra moderna ou abstrata que é o estudo das estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos, entre outras.

A Álgebra Linear relativa aos estudos dos sistemas, equações algébricas ou diferenciais. Ela utiliza estruturas matemáticas como os vetores, as transformações lineares, sistemas de equações e matrizes. Por volta de 250 A.C. foram encontrados problemas, os quais levam aos sistemas de equações lineares, em um livro chinês chamado de Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática estes problemas estavam resolvidos através de matrizes.

A eliminação gaussiana, que é um dos métodos de resolução de sistemas lineares foi citada inicialmente por volta do século II D.C.
Os vetores datam de 1843, com Willian Rowan Hamilton, de uma relação da geometria analítica com a Álgebra Linear, iniciando assim o sistema cartesiano de coordenadas com duas e três dimensões, e hoje sabemos que o espaço é considerado com dimensões infinitas.

A Álgebra começou a ser vista do modo atual por volta do século XIX, com noções e métodos de séculos anteriores abstraídas e generalizadas como o início da Álgebra abstrata. Matrizes e tensores foram introduzidos como objetos matemáticos abstratos e estudados no século XX.

Hoje em dia a Álgebra possui um ramo enorme de aplicações dentro e fora da matemática como na programação linear, que possui uma discussão de maximização de lucros com restrições, as quais levam a um sistema de equações lineares. Na engenharia ela está no estudo das tensões em estruturas como nas vigas, pois para um sólido estar em equilíbrio as forças resultantes externas e internas devem se anular. Estas forças são colocadas na forma de vetores em um plano cartesiano.

Nos dias atuais com os avanços dos computadores, e as novas tecnologias facilitam a resolução dos sistemas lineares.

A Educação tem passado por um processo de evolução técnica, buscando novas maneiras de ensinar, e assim os professores têm utilizados os softwares em sala de aula, pois a utilização de um ou mais destes recursos representa uma maneira de facilitar a aprendizagem matemática promovendo a exploração e a investigação de propriedades de uma forma interativa e construtiva.

O objetivo básico desta monografia é realizar um estudo sobre os métodos de resolução de Sistemas Lineares, desde os mais simples aos mais complexos, e apresentar softwares que ajudam na resolução para uma melhor compreensão de tais métodos. A Regra de Cramer é um método um pouco mais complexo, pois não deve ser aplicado quando temos uma matriz que gera um determinante nulo, pois este vem a ser o divisor de um outro determinante. Temos ainda a Eliminação Gaussiana que utiliza o método do escalonamento, dentre outros.

O capítulo I apresenta algumas definições importantes deste trabalho, como Equações Lineares, pois um Sistema Linear trata exatamente de um conjunto de Equações Lineares. Estão também definidos Sistemas Lineares, Sistemas Lineares Homogêneos e Sistemas Lineares Equivalentes.

O capítulo II classifica os Sistemas Lineares quanto ao número de equações, variáveis e quanto às soluções de cada Sistema Linear.

O capítulo III descreve alguns métodos para resolução dos Sistemas Lineares, por exemplo, Substituição, Adição, Eliminação gaussiana, Regra de Cramer.

O capítulo IV apresenta alguns softwares para a resolução de Sistemas Lineares como o Máxima, que realiza todo tipo de operação numérica ou simbólica como: polinômios, álgebra matricial, cálculo diferencial. Além disso , o Máxima pode gerar gráficos 2D e 3D.

2 ALGUMAS DEFINIÇÕES

Neste capitulo apresentamos algumas definições necessárias para o entendimento do trabalho.

2.1 Equações lineares

Uma equação linear é composta exclusivamente de adições e subtrações de termos que são constantes ou o produto de uma constante pela primeira potência de uma variável.

Definição a - Uma equação linear em n variáveis sobre o conjunto dos Reais é uma equação que pode ser colocada na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ sendo que os escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ são denominados coeficientes, e b é chamado de termo independente, ou termo constante.

Definição b - Uma equação linear monovariável ou que contém uma variável é toda equação que possa ser representada na forma: **ax+b=0**, com **a** diferente de zero.

A solução desta equação pode ser interpretada como a abscissa do ponto em que a função **f(x)=ax+b** corta à origem, onde:

f(x): é a ordenada y

x: é a abscissa x

a: coeficiente angular y, não-nulo por hipótese.

b: coeficiente linear y

Equações lineares com duas variáveis

Exemplos

1º) x+y = 10

2º) x-y = 3

3º) x = 5y+5

4º) 3y = x+2

podem ser escritas na forma: ax + by = c, com a e b diferentes de zero, temos exemplo a seguir:

1º) $x + y = 10 \rightarrow a = 1$, $b = 1$ e $c = 10$

2º) $x - y = 3 \rightarrow a = 1$, $b = -1$ e $c = 3$

3º) $x = 5y + 5 \rightarrow x - 5y = 5 \rightarrow a = 1$, $b = -5$ e $c = 5$

4º) $3y = x + 2 \rightarrow -x + 3y = 2 \rightarrow a = -1$, $b = 3$ e $c = 2$

As soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas são pares ordenados. Por exemplo, a equação: $y = 3x - 1$.

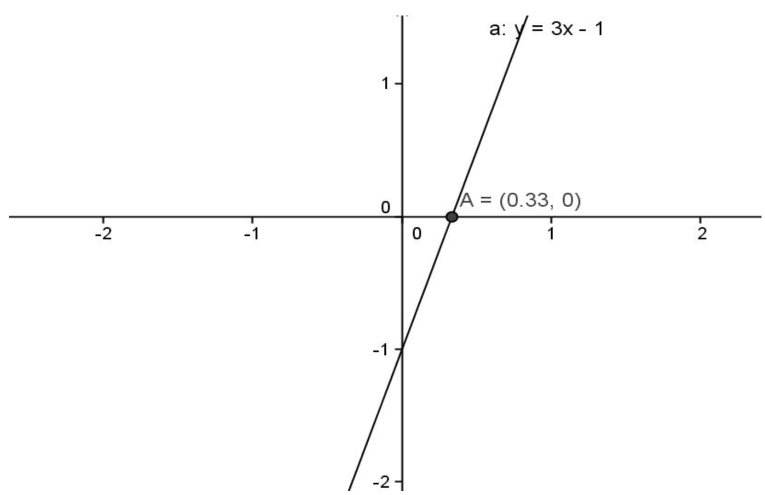
Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

a) Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é (0, -1).

b) Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = 1/3$ e outro ponto é $(1/3, 0)$.

Marcamos os pontos (0, -1) e $(1/3, 0)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

FIGURA 3 – Gráfico da equação y=3x-1



Fonte: Software Geogebra, Vaz, Suélen.

Como mostra a figura 3 o gráfico da equação $y = 3x - 1$ é uma reta. O coeficiente de x, 3, é chamado coeficiente angular da reta e nos dá inclinação dela em relação ao eixo Ox. O termo constante, -1, é chamado coeficiente linear da reta.

Para x = 0, temos: *y* = a · 0 + b = b. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo O*y*.

2.2 Sistemas Lineares

Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares.

A teoria de sistemas lineares é uma parte da Álgebra Linear fundamental para a matemática moderna. Algoritmos computacionais para achar soluções são uma parte importante da Álgebra Linear Numérica, e estes métodos têm uma grande importância na Engenharia, Física, Química, Ciência da Computação e Economia.

2.2.1 Equação geral

A equação geral de um Sistema de Equações Lineares possui o seguinte formato:

Definição a - O sistema linear é composto por duas ou mais equações, geralmente apresentadas no seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 + & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + a_{23}x_3 + & + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 & + a_{32}x_2 & + a_{33}x_3 + & + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + a_{m3}x_3 + & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O sistema mostrado anteriormente é um sistema de n equações e n incógnitas (ou variáveis).

Os termos a_{11}, a_{12}, ... , a_{1n}, ... , a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn} são denominados coeficientes e b_1, b_2, ... , b_n são os termos independentes.

Exemplo

O sistema abaixo, é um sistema linear com 3 equações e 3 variáveis.

$$\begin{cases} 2x & +4y & -z=4 \\ -2x & +3y & +4z=7 \\ x & +y & +5z=6 \end{cases}$$

2.3 Conjunto Solução de um sistema Linear

Uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ é uma n-upla (um vetor), $S = (S_1, S_2 ... S_n)$, que simultâneamente satisfazem *todas* as equações do sistema.

2.4 Sistemas homogêneos

Os sistemas homogêneos são sistemas que possuem seus termos independentes iguais à zero.

Definição a - Uma equação linear homogênea é uma equação que possui os termos independentes iguais à zero, por exemplo, 2x+5y-z = 0. Portanto, podemos concluir que um sistema linear será considerado homogêneo se todas as suas equações tiverem os seus termos independentes iguais à zero.

Em um sistema linear sempre terá uma solução, pois irá obter pelo menos um conjunto solução o (0, 0, 0,..., 0). E está solução é chamada de solução trivial, nula ou imprópria do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} x & +y & +2z=0 \\ x & -3y & +5z=0 \\ 5x & -2y & +z=0 \end{cases}$$

A classificação de um sistema linear homogêneo e suas características:

- Pode ser possível e determinado se:

Quando o número de equações é igual ao número de incógnitas, e o determinante da matriz formada pelos coeficientes do sistema é diferente de zero.

- Possível e indeterminado se:

Quando o número de equações é igual ao número de incógnitas, e o determinante da matriz formada pelos coeficientes sistema é igual de zero.

2.5 Sistemas equivalentes

São sistemas que possuem as mesmas soluções.

Definição a - Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando têm as mesmas soluções.

É conveniente destacar que dois sistemas de equações equivalentes não precisam ter o mesmo número de equações, mas é necessário que tenham o mesmo número de incógnitas.

Exemplos

a)

1º $\begin{cases} 6x & +2y = -2 \quad I \\ 8x & +y = -6 \quad II \end{cases}$

Multiplicando a II equação por (-2) temos:

2º $\begin{cases} 6x & +2y = -2 \\ -16x & -2y = 12 \end{cases}$

Somando as duas equações:

-10x = 10, de onde temos x = -1

Substituindo na II equação:

$6.(-1) + 2y = -2$

$2y = -2 + 6$

$2y = 4$

$y = 2$

A solução deste sistemas é S=(-1, 2).

b)

$\begin{cases} 2x & -y = -4 \quad I \\ 4x & +3y = 2 \quad II \end{cases}$

Multiplicando a I equação por (3) temos:

$$\begin{cases} 6x - 3y = -12 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

10x = -10, de onde temos x = -1

Substituindo na II equação:

$$4.(-1) + 3y = 2$$
$$3y = 2 + 4$$
$$3y = 6$$
$$y = 2$$

A solução deste sistemas é S= (-1, 2).

Como estes os sistemas possuem a mesma solução, são equivalentes.

3 CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

Os sistemas lineares podem ser classificados quanto a possibilidade de obtenção de soluções, dentro do conjunto numérico ao qual os sistemas devem ser resolvidos. Inicialmente, encontramos três tipos de sistemas: Impossíveis, possíveis e determinados e possíveis e indeterninados.

3.1 Sistemas impossíveis (ou inconsistentes)

São os sistemas que não têm solução, geralmente por terem equações lineares que se contradizem. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

As equações apresentam apresentam a mesma soma, mas com resultados diferentes, o que torna impossível de resolver o sistema. O sistema impossível (SI) sempre resulta numa contradição. Vale ressaltar que o conjunto numérico ao qual a solução pertence é fundamental na determinação da possibilidade do sistema; por exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

O sistema acima é considerado impossível dentro do conjunto dos números naturais, pois não há nenhum número natural que somado em dobro *2y* a outro número natural *x* resulte em um valor menor do que ele próprio *y* somado ao mesmo número *x*. A solução real, *(14,-2)*, é descartada se restringirmos a solução ao conjunto de números naturais (-2 não é natural). Ou também podem ser considerados sistemas que permitem infinitas soluções, porque apresentam os chamados *graus de liberdade*, ou seja, permitem soluções arbitrárias. Por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x - 2y = 16 \end{cases}$$

Permite uma infinidade de soluções como (10,2), (12,4), (19,11), etc. Em todas elas, basta que a relação entre o primeiro elemento e o segundo seja (α,α - 8). Também é indeterminado o sistema:

$$\begin{cases} x + y \quad + z = 10 \\ x + y \quad - 2z = 4 \end{cases}$$

pois apresenta mais incógnitas do que equações, sendo por isso impossível "trabalhar" as incógnitas de modo a obter valor preciso para cada uma. A solução é qualquer tripla do tipo (α, 8 - α, -2). Podemos observar que o terceiro elemento pode ser definido, mas não os dois outros, de modo que essa é a mesma situação do sistema indeterminado do exemplo anterior.

3.2 Sistemas possíveis

Os sistemas são considerados possíveis quando tem uma ou várias soluções.

São todos os sistemas que não levam a uma contradição e, portanto, admitem soluções dentro do conjunto numérico ao qual estão designados. Os sistemas possíveis, por sua vez, se subdividem em dois tipos:

3.2.1 Sistemas Possivéis e determinados (SPD)

São os sistemas que possuem apenas uma solução; é possível identificar uma única n-upla capaz de resolver todas as equações. Como exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 3x \quad + 2y = -2 \\ x \quad + 2y = 10 \end{cases}$$

permite como solução real a dupla (-6, 8).

3.2.2 Sistemas possíveis e indeterminados (SPI)

São os sistemas que permitem infinitas soluções, porque apresentam os chamados *graus de liberdade*, ou seja, permitem soluções arbitrárias. Por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x - 2y = 16 \end{cases}$$

permite uma infinidade de soluções como (10,2), (12,4), (19,11), etc. Em todas elas, basta que a relação entre o primeiro elemento e o segundo seja (α,α - 8). Também é indeterminado o sistema:

$$\begin{cases} x + y \quad + z = 10 \\ x + y \quad - 2z = 4 \end{cases}$$

pois apresenta mais incógnitas do que equações, sendo por isso impossível "trabalhar" as incógnitas de modo a obter valor preciso para cada uma. A solução é qualquer tripla do tipo (α, 8 - α, -2). Podemos observar que o terceiro elemento pode ser definido, mas não os dois outros, de modo que essa é a mesma situação do sistema indeterminado do exemplo anterior.

Conforme as soluções, os sistemas lineares podem ser definidos como:

- Uma única solução**:** Pode ser chamado de Sistema Linear Possível e Determinado, onde a solução encontrada é a única que serve para todas as equações do sistema. O conjunto S é formado pelos termos que resolvem o sistema, tem um único elemento. Geometricamente, isto implica que os *n*-planos determinados pelas equações do sistema se intersectam todos em um mesmo ponto do espaço, que é especificado pelas coordenadas da solução (as "entradas" da *n*-upla). O sistema é dito *possível* (*existe* alguma solução) e determinado (existe uma *única* solução);

- Várias soluções: Pode ser chamado de Sistema Linear Possível e Indeterminado.

Se ao buscar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo: 3 = 3 ou 0 = 0, ou qualquer outra expressão que tenha uma sentença que seja sempre verdadeira, o sistema terá infinitas soluções e poderemos chamá-lo de possível e indeterminado. As equações especificam *n*-planos cuja intersecção é um *m*-plano onde $m \leq n$. Sendo este o caso, é possível explicitar um conjunto *S* com infinitas soluções. O sistema é dito possível (*existe* alguma solução) e indeterminado (sua quantidade é *infinita*)

- Não tem solução: Pode ser chamado de Sistema Linear Impossível

Se ao buscar o valor de uma das variáveis, chegarmos a uma expressão do tipo: 0 = 3 ou 2 = 5, ou qualquer outra expressão que tenha uma sentença que seja sempre falsa, o sistema não terá qualquer solução e poderemos chamá-lo de impossível.

Nesta situação, não existe qualquer *n-upla* de valores que verifiquem simultaneamente *todas* as equações do sistema. O conjunto *S* é vazio. Geometricamente, os *n*-planos correspondentes as equações não se intersectam (são paralelos). O sistema é dito impossível (*não existe* solução).

4 MÉTODOS DE RESOLUÇÕES DOS SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo vamos apresentar alguns tipos de resoluções de Sistemas Lineares.

4.1 Método da substituição

O método da substituição consiste em isolar uma incógnita em qualquer uma das equações, obtendo igualdade com um polinômio. Então deve-se substituir essa mesma incógnita em outra das equações pelo polinômio ao qual ela foi igualada.

Exemplos

a)

$$\begin{cases} 2x + \quad y = 6 \quad I \\ 2x + \ 3y = 2 \quad II \end{cases}$$

1º passo: vamos isolar o y na equação I para podermos substituir na II equação:

$$2x + y = 6$$
$$y = 6 - 2x$$

2º passo: Substituir $y = 6 - 2x$, na equação II para encontrar o valor de x.

$$2x + 3y = 2$$
$$2x + 3(6 - 2x) = 2$$
$$2x + 18 - 6x = 2$$
$$-4x = 2 - 18$$
$$-4x = -16$$
$$x = 4$$

3º passo: Substituir x = 4 em $y = 6 - 2x$, para encontrar o valor de y.

$$y = 6 - 2x$$
$$y = 6 - 2.4$$
$$y = 6 - 8$$
$$y = -2$$

4º passo: dar a solução do sistema: S = (4; -2)

b)

$$\begin{cases} x \quad + y = 12 \;\; I \\ x \quad - y = 4 \;\; II \end{cases}$$

1º passo: vamos isolar o x na equação I para podermos substituir na equação II:

$$x + y = 12$$
$$x = 12 - y$$

2º passo: Substituir $x = 12 - y$, na equação II para encontrar o valor de y.

$$x - y = 4$$
$$(12 - y) - y = 4$$
$$12 - 2y = 4$$
$$-2y = 4 - 12$$
$$-2y = -8$$
$$y = 4$$

3º passo: Substituir y = 4 em $x = 12 - y$, para encontrar o valor de x.

$$x = 12 - y$$
$$x = 12 - 4$$
$$x = 8$$

Logo a solução do sistema é S = (8; 4).

c)

$$\begin{cases} 3x \quad + 4y = 46 \quad I \\ 2x \quad - y = 16 \quad II \end{cases}$$

Escolhemos a variável y da equação II:

$$y = -16 + 2x$$

Substituindo na equação I:

$$3x + 4(-16 + 2x) = 46$$
$$3x - 64 + 8x = 46$$
$$11x = 46 + 64$$
$$11x = 110$$
$$x = 10$$

Substituindo o valor de x encontrado na equação II:

$$y = -16 + 2x$$
$$y = -16 + 2.10$$
$$y = -16 + 20$$
$$y = 4$$

Logo a solução do sistema é S = (10; 4).

4.2 Método da adição

Este método consiste em deixar os coeficientes de uma incógnita opostos. Desta forma, somando-se membro a membro as duas equações recai-se em uma equação com uma única incógnita.

Exemplos

a)

$$\begin{cases} 2x + y = 6 & I \\ 2x + 3y = 2 & II \end{cases}$$

1º passo: vamos multiplicar a linha I por -1 para podermos com a soma das duas equações simplificar –2x com 2x

$$\begin{cases} -2x - y = -6 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$2y = -4$$
$$y = -2$$

2º passo: Substituir y = - 2, em qualquer um das equações acima e encontrar o valor de x.

$$2x + y = 6$$
$$2x - 2 = 6$$
$$2x = 6 + 2$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

3º passo: dar a solução do sistema: S = (4; -2)

b)

$$\begin{cases} x + y = 12 & I \\ x - y = 4 & II \end{cases}$$

Notamos que as duas equações possuem termos opostos (y e -y).

Com isso, basta somar as duas equações termo a termo:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$2x = 16$$
$$x = 8$$

A seguir, basta substituir o valor encontrado para x em uma das equações.

$$8 + y = 12$$
$$y = 12 - 8$$
$$y = 4$$

ou

$$8 - y = 4$$
$$-y = 4 - 8$$
$$-y = -4$$
$$y = 4$$

S=(8;4).

c)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 & I \\ 4x + 6y = 12 & II \end{cases}$$

Note que as equações não possuem coeficientes opostos, logo se somarmos membro a membro, não eliminaremos nenhuma variável.

Para a resolução deste sistema, devemos escolher uma variável para ser eliminada.

Para isso, multiplicamos a equação I por -2 e somamos com a II:

$$\begin{cases} -4x & -6y = -6 \\ 4x & +6y = 12 \end{cases}$$

de onde temos: 0x + 0y = 6

Observe que a equação resultante da soma não possui solução, logo a solução do sistema é vazia, ou seja, S= Ø.

4.3 Método da comparação

Consiste em compararmos as duas equações do sistema, após termos isolado a mesma variável (x ou y) nas duas equações:

Exemplos

a)

$$\begin{cases} x & +2y = 3 \quad I \\ x & +y = 3 \quad II \end{cases}$$

Isolamos o x na equação I e obtemos $x = 3 - 2y$ e isolado na equação II obtemos $x = 3 - y$ Comparando as duas equações:

$$3 - 2y = 3 - y$$
$$-2y + y = 3 - 3$$
$$-y = 0$$
$$y = 0$$

Substituindo na equação II, o valor de y encontrado:

$$x = 3 - 2.(0)$$
$$x = 3 + 0$$
$$x = 3$$

Portando S= (3;0).

b)

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & I \\ x + y = 3 & II \end{cases}$$

Isolamos o x na equação I e obtemos $x = 2 - 2y$ e na equação II obtemos $x = 3 - y$

Comparando as duas equações:

$$\begin{aligned} 2 - 2y &= 3 - y \\ -2y + y &= 3 - 2 \\ -y &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y encontrado:

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2(-1) \\ x &= 2 + 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Portando S= (4; -1).

4.4 Método da Regra de Cramer

A regra de Cramer diz que:

Os valores das incógnitas de um sistema linear de n equações e n incógnitas são dados por frações cujo denominador é o determinante Δ dos coeficientes das incógnitas e o numerador é o determinante Δx_i, ou seja: $x_i = \Delta x_i / \Delta$

Seja Δ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Seja Δxi o determinante da matriz que se obtém do sistema dado, substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita xi (i = 1, 2, 3, ... , n), pelos termos independentes b1, b2, ... , bn.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta x_i$$

Exemplos

a) Resolva o seguinte sistema usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24 \qquad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96 \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:

$x_1 = \Delta x_1 / \Delta = 120 / 24 = 5$

$x_2 = \Delta x_2 / \Delta = 48 / 24 = 2$

$x_3 = \Delta x_3 / \Delta = 96 / 24 = 4$

Logo, o conjunto solução do sistema dado é S = (5; 2; 4).

4.5 Método do escalonamento ou eliminação gaussiana

O método do escalonamento permite resolver sistemas lineares de *n* equações a *n* incógnitas. Caso existam mais incógnitas do que equações, o método não funcionará, ou seja, ele não permitirá resolver sistemas com grau de liberdade maior ou igual a 1. Já os sistemas com mais equações do que incógnitas podem ser resolvidos, desde que não hajam contradições que o tornem SI.

O método de eliminação de Gauss para solução de sistemas de equações lineares, baseia-se em três transformações elementares, a saber:

T1 - um sistema de equações não se altera, quando permutamos as posições de duas equações quaisquer do sistema.

Exemplo: os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 & I \\ 5x - 2y = 6 & II \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 6 & I \\ 2x + 3y = 10 & II \end{cases}$$

São obviamente equivalentes, observe que apenas mudamos a ordem de apresentação das equações.

T2 - um sistema de equações não se altera quando multiplicamos ambos os membros de qualquer uma das equações do sistema por um número real não nulo.

Exemplos Os sistemas de equações lineares

a)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 & I \\ 2x + y + z = 7 & II \\ x - y + 3z = 1 & III \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 & I \\ 2x + y + z = 7 & II \\ 3x - 6y + 9z = 3 & III \end{cases}$$

São obviamente equivalentes, pois a terceira equação foi multiplicada membro a membro por 3.

T3 - um sistema de equações lineares não se altera, quando substituímos uma equação qualquer por outra obtida a partir da adição membro a membro desta equação, com outra na qual foi aplicada a transformação T2.

b)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & I \\ 2x + y - z = 3 & II \\ 3x - y - 2z = -4 & III \end{cases}$$

Substituímos a equação II pela soma da mesma com a I multiplicada por (-2) e obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Agora substituímos III equação pela soma da mesma com a I multiplicada por (-3) e obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Multiplicamos a II equação por $-1/3$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$$

Substituímos a III equação pela soma da mesma com a II multiplicada por 7:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele tem o número de equações igual ao número de incógnitas segue-se que é possível e determinado.

Logo temos que:

2z=4, assim z=2

Substituindo na equação II:

y+z=5

y+2=5, assim y=3

Substituindo y e z na equação I temos:

x+2y+=9

x+2.3+2=9

x=1

Assim a solução do sistema é S=(1,3,2).

c)

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 & I \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 & II \\ 2x + y + z - 2t = 4 & III \end{cases}$$

Substituímos a equação II pela soma da mesma multiplicada por (-3):

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ +10z - t = -3 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

Substituímos a equação III pela soma da mesma multiplicada por (-2):

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ +10z - t = -3 \\ -y + 7z - 4t = 2 \end{cases}$$

Permutamos a equação II com a equação III, e temos:

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ -y + 7z - 4t = 2 \\ 10z - t = -3 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele tem o número de equações menor que o número de incógnitas ele é classificado como possível e indeterminado.

d)

$$\begin{cases} x + 4y = -8 & I \\ 3x - y = 15 & II \\ 10x - 12y = 7 & III \end{cases}$$

Substituímos a equação II pela soma da mesma com a equação I multiplicada por (-3)

$$\begin{cases} x \quad +4y = -8 \\ \quad -13y = 39 \\ 10x \quad -12y = 7 \end{cases}$$

Substituímos a equação III pela soma da mesma com a equação I multiplicada por (-10):

$$\begin{cases} x \quad +4y = -8 \\ \quad -13y = 39 \\ \quad -52y = 87 \end{cases}$$

Substituímos a equação III pela soma da mesma com a equação II multiplicada por (-4):

$$\begin{cases} x \quad +4y = -8 \\ \quad -13y = 39 \\ \quad 0y = -69 \end{cases}$$

Notemos que a equação III não é satisfeita por nenhum x e y, logo o sistema é impossível.

4.6 Exercícios de aplicação de sistemas lineares

Nesta parte temos exercícios com aplicações de Sistemas Lineares encontrados no livro MATEMÁTICA VOLUME ÚNICO, elaborado por Bongiovanni e Vissoto Laureano.

Exemplos

a)

As moedas de um determinado país são de três tipos: de 3g, que valem R$ 10; de 5g, que valem R$ 20; e de 9g, que valem R$ 50. Uma pessoa tem 100 moedas, num total de 600g. Somando R$ 2800,00. Quantas moedas ele tem de cada tipo?

Solução: Para resolver o problema acima, chamamos de **x** o número de moedas de R$ 10,00; de **y** o número de moedas de R$ 20,00; e de **z** número de R$ 50,00. Assim, temos x+y+z=100, 3x+5y+9z=600 e 10x+20y+50z=2 800.

Os valores de **x, y,** e **z** que tornam as três igualdades verdadeiras compõem a solução do sistema de equações dado.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \quad I \\ 3x + 5y + 5z = 600 \quad II \\ 10x + 20y + 50z = 2800 \quad III \end{cases}$$

Substituímos a equação II pela soma da mesma com a equação I multiplicada por (-3):

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ +2y + 6z = 300 \\ 10x + 20y + 50z = 2800 \end{cases}$$

Substituímos a equação III pela soma da mesma com a equação I multiplicada por (-10):

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ +2y + 6z = 300 \\ +10y + 40z = 1800 \end{cases}$$

Substituímos a equação II pela mesma multiplicação da mesma por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ +y + 3z = 150 \\ +10y + 40z = 1800 \end{cases}$$

Substituímos a equação III pela soma da mesma com a equação II multiplicada por (-10):

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \quad + y + 3z = 150 \\ \quad\quad + 10z = 300 \end{cases}$$

Sem do assim temos que:

10z=300 y+3z=150 x+y+z=100

z=30 y=150-3.30=60 x=100-30-60=10

S= (10; 60; 30)

Logo está pessoa tem 10 moedas de R$ 10,00; 60 moedas de R$ 20,00 e 30 moedas de R$ 50,00.

b)

Um revendedor tem em sua loja cem automóveis de três tipo: simples, de luxo e executivo. A soma do número de carros de luxo com o dobro de carros executivo é 40; o triplo de carros executivos dá 30. Quantos carros há e cada tipo nesta revenda?

Solução: A questão pode ser representada num sistema linear, onde x é o número de carros simples, y o número de carros de luxo e z o número de carros executivos:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \quad I \\ \quad y + 2z = 40 \quad II \\ \quad\quad 3z = 30 \quad III \end{cases}$$

Observando o sistema podemos concluir que a resolução se torna simples, pois na III equação encontramos o valor de z:

$$3z = 30$$
$$z = 10$$

Substituímos o valor de z na equação II e encontramos o valor de y:

$$y + 2z = 40$$
$$y + 2.10 = 40$$
$$y = 40 - 20$$
$$y = 20$$

Substituímos agora o valor de y e de z na equação I e encontramos o valor de x:

$$x + y + z = 10$$
$$x + 20 + 10 = 100$$
$$x = 100 - 30$$
$$x = 70$$

Logo na revenda existem 70 carros simples, 20 de luxo e 10 executivos.

5 SOFTWARES USADOS NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Atualmente existem vários softwares utilizados na resolução de cálculos matemáticos. Alguns bem simples que realizam apenas uma operação, como o Equação do 2º grau, um software que encontra as raízes de uma equação do 2º grau. Porém, tem outros bem complexos, que realizam várias operações matemáticas como a derivada, integral, resolução de equações diferenciais, além de esboçar gráficos em 2 e 3 dimensões.

Dentre estes estão o Maple que constitui um programa computacional de expressões algébricas, simbólicas, permitindo a plotagem de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidadede Waterloo no Canadá, província de Ontário.

Temos ainda o Matlab que é um softwares interativo. O Matlab integra análise numérica, cálculo com matrizes , procedimentos de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar onde os problemas e soluções são expressos como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

Mathematica é uma linguagem de programação que suporta criação de novas funções e procedimentos para que ele seja modificado de modo a suprir as necessidades do usuário. Neste software, a linguagem é interpretada por uma kernel (núcleo) que realiza todos os cálculos numéricos, simbólicos e gráficos, tornando o sistema independente da plataforma que se deseja operar.

Um outro software que se destaca é o Máxima, este foi escolhido para ser utilizado neste trabalho em função de ser um software livre.

5.1 Maxima

O Maxima é um programa baseado em uma versão de 1982 do Macsyma, que foi desenvolvida no MIT(Instituto de Tecnologia de Massachusetts). Uma versão do Macsyma foi mantida por Bill Schelter de 1982 até o seu falecimento em 2001. Em 1998 Schelter obteve permissão do Departamento de Energia para liberar sua versão sob a GPL (é uma licença para softwares livres). O Maxima atualmente é mantido por um grupo independente de usuários e desenvolvedores. Ele não inclui nenhuma das muitas modificações e aprimoramentos feitos à versão comercial do Macsyma durante 1982–1999. Embora as funcionalidades centrais permaneçam semelhantes, um código que dependa destas melhorias pode não funcionar no Maxima, e bugs que já foram corrigidos no Macsyma ainda podem estar presentes no Maxima, e vice-versa.

O Maxima permite programação por meio de uma linguagem de programação completa com sintaxe parecida com ALGOL (linguagem de programação voltada para aplicações científicas) e semântica parecida com Lisp (linguagem com estruturas de dados elementares exclusivamente com funções matemáticas). Baseado em um núcleo que utiliza a linguagem Common Lisp, ele pode ser acessado por outros programas e ser estendido, da mesma forma que o Lisp subjacente pode ser chamado a partir do Maxima. Ele usa o Gnuplot (programa que pode plotar gráficos) para realizar as plotagens. Estas características aumentam as possibilidades de resolução de problemas com o programa.

O Maxima é semelhante ao Matlab e ao Mathematica, pois possui um sistema de álgebra computacional completo especializado em operações tais como integral, diferencial, sistemas de equações lineares, vetores, podendo gerar gráficos 2D e 3D de alta qualidade, matrizes e aritmética de precisão arbitrária, ou seja, números inteiros e racionais que podem crescer até tamanhos limitados apenas pela memória disponível na máquina. Para cálculos que usem ponto flutuante e matrizes em grande quantidade, o Maxima oferece a possibilidade de gerar código em outras linguagens de programação que podem ser executados de modo mais eficiente. O Maxima produz resultados precisos usando seu sistema especial de *floating* e pode trabalhar com funções e dados em duas ou três dimensões.

O Maxima é um sistema com propósito de cálculos especiais tais como a fatoração de números grandes, a manipulação de polinômios com grau muito elevado, *etc*. Algumas vezes são melhor desempenhados com sistemas especializados.

5.2 Sistemas lineares resolvidos no Máxima

Neste subcapítulo estamos descrevendo o passo a passo para resolvermos um sistema com duas e três variáveis no Maxima, estes modelos podem servir para sistemas lineares com mais variáveis.

5.2.1 Resolvendo um sistema linear com 2 incógnitas

Vamos resolver os exemplos:

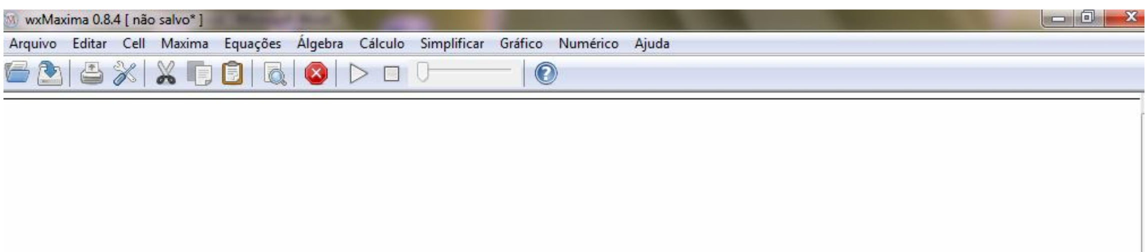
Exemplos

a)

$$\begin{cases} 2x & +y=7 \\ 2x & -3y=3 \end{cases}$$

Ao clicarmos no ícone do Máxima abre-se o menu abaixo:

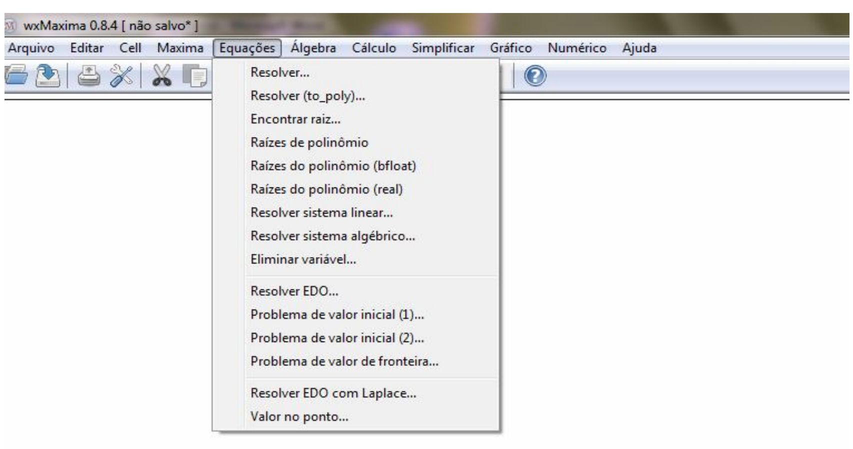
Figura 4: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clica-se na opção Equações e abre-se a janela:

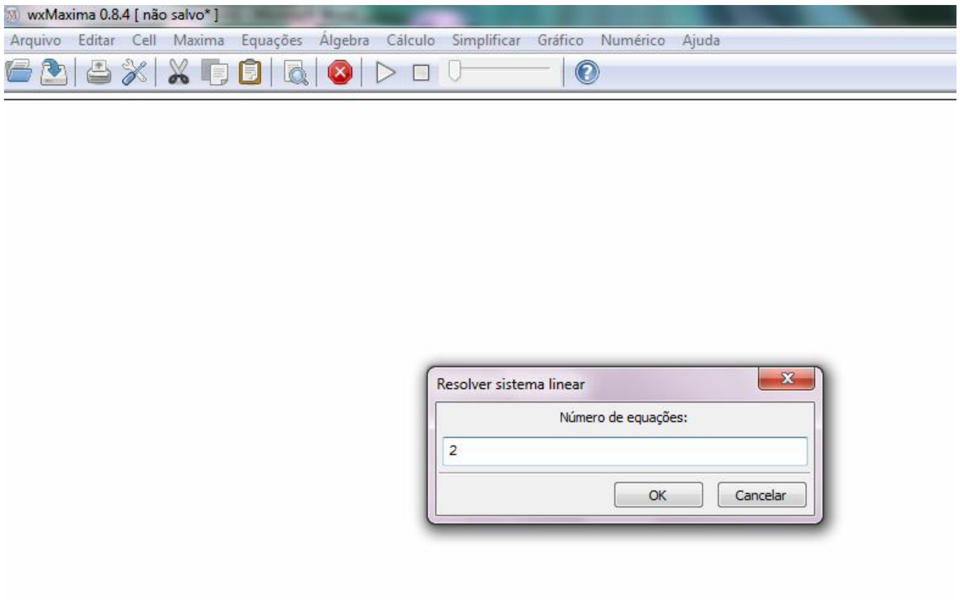
Figura 5: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clica-se em Resolver sistemas lineares e abre-se a janela perguntando o número de equações, que neste caso é 2, logo clica-se em ok:

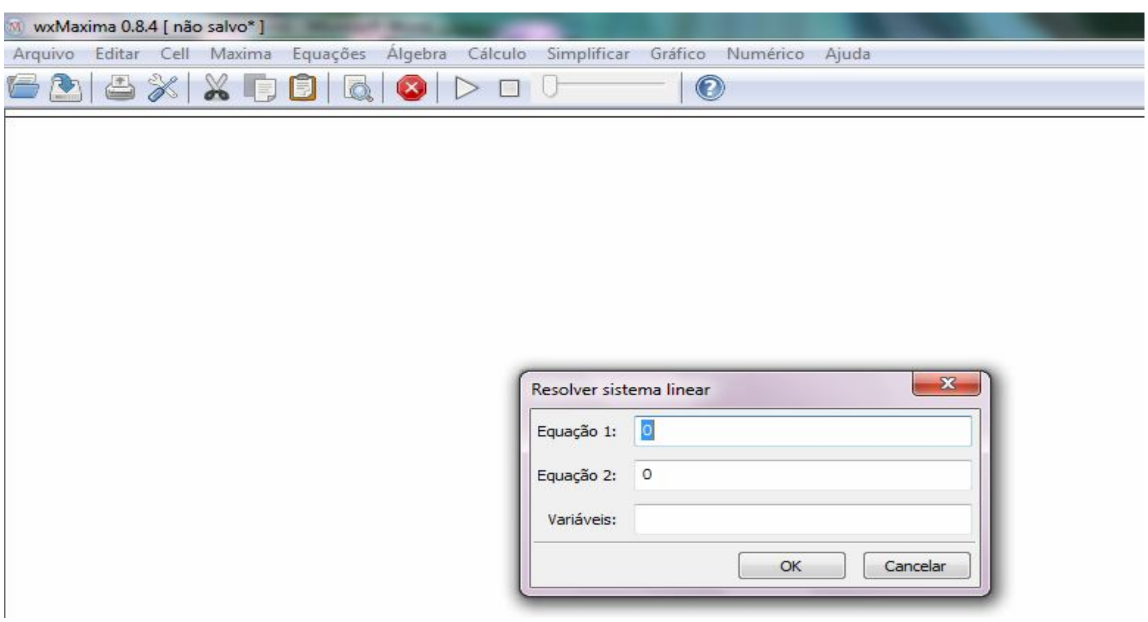
Figura 6: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clicando em ok abre-se a janela para digitarmos as equações:

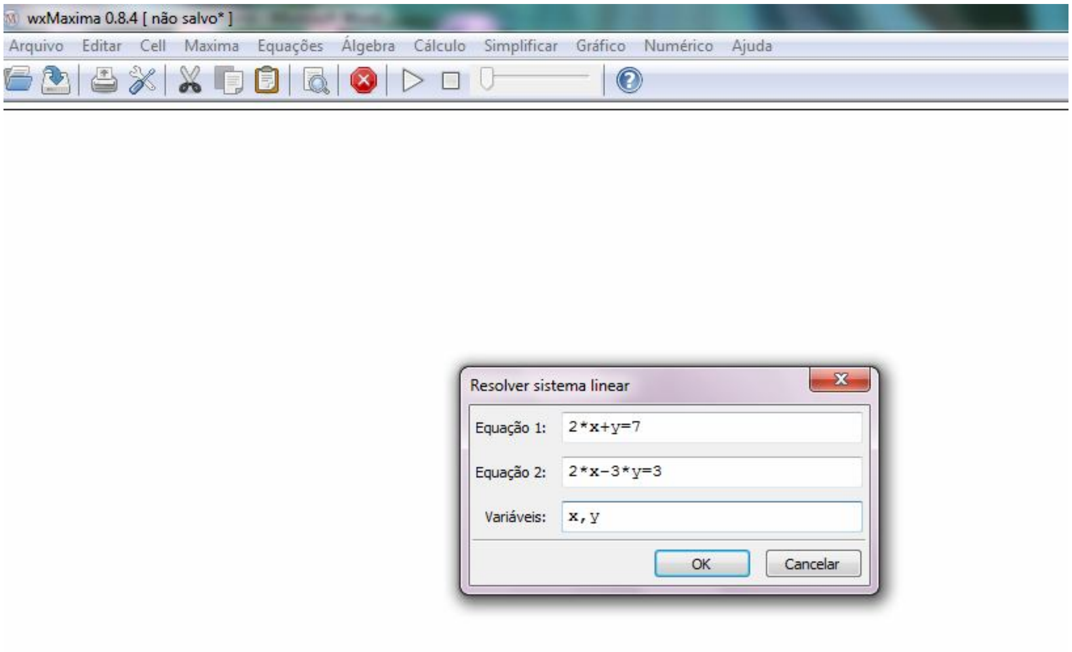
Figura 7: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Então digita-se as equações como na figura 7, sendo importante colocar as variáveis:

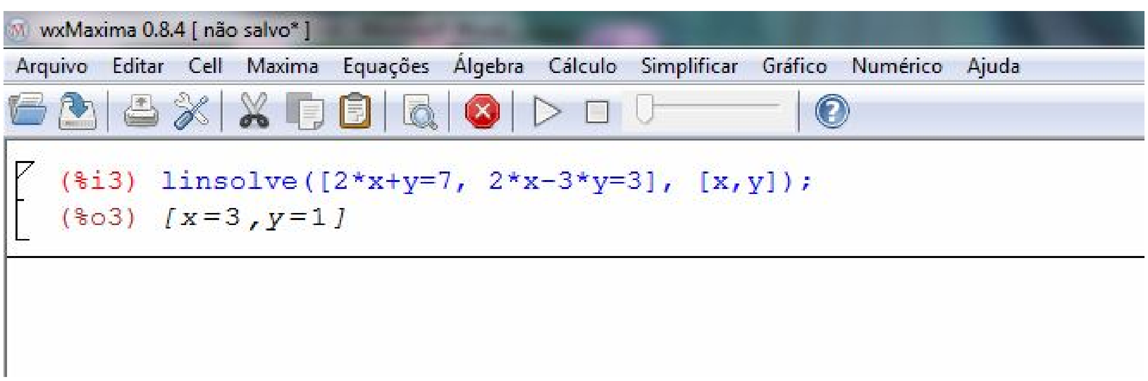
Figura 8: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clicando-se em ok temos a solução do sistema.

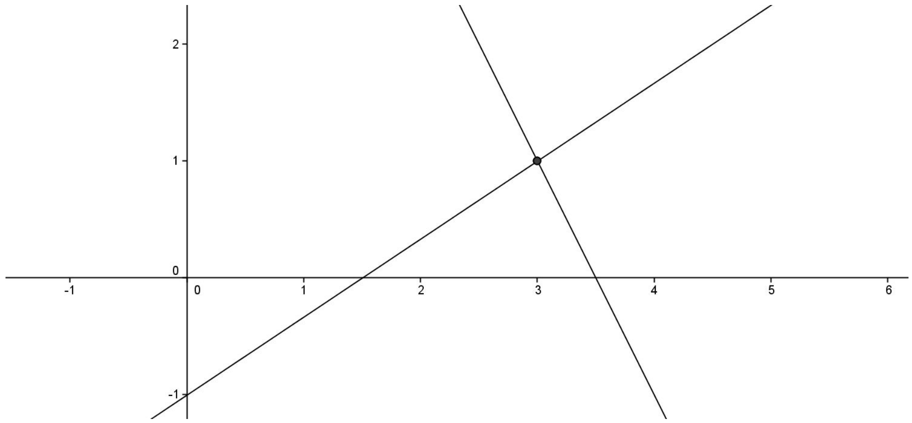
Figura 9: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Como as equações do sistema são equações de uma reta, o ponto formado pela resolução do sistema é o ponto de intersecção das duas retas, como mostra a figura 10.

Figura 10: Gráfico do exemplo a



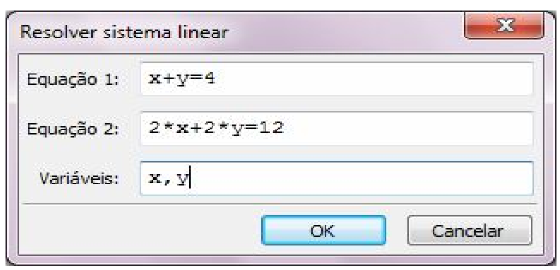
Fonte: Software geogebra, Vaz, Suélen.

b)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$

Após os mesmo procedimentos citados no exemplo a, digitamos as equações como na figura 11, sendo importante colocar as variáveis:

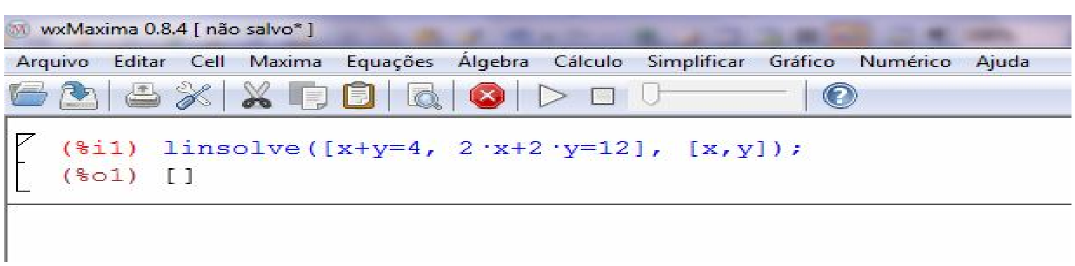
Figura 11: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clicando-se em ok temos as respostas do sistema.

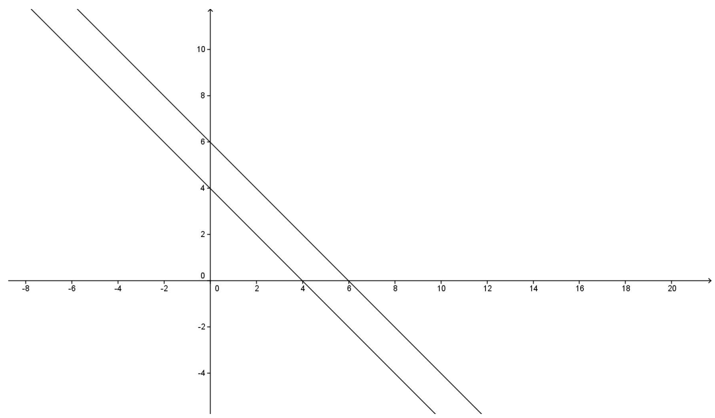
Figura 12: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Como as equações do sistema são as equações de uma reta e pelo gráfico percebemos que cada uma delas forma uma reta diferente e que elas são paralelas, não tem ponto em comum, logo o sistema fica sem solução.

Figura 13: Gráfico do exemplo b



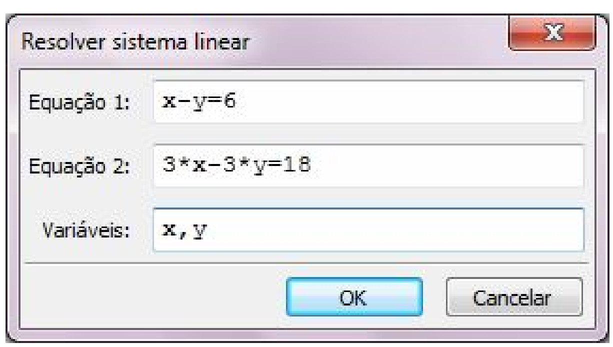
Fonte: Software geogebra, Vaz, Suélen.

c)

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$$

Após os mesmo procedimentos citados no exemplo a, digitamos as equações como a figura 14 sendo importante colocar as variáveis:

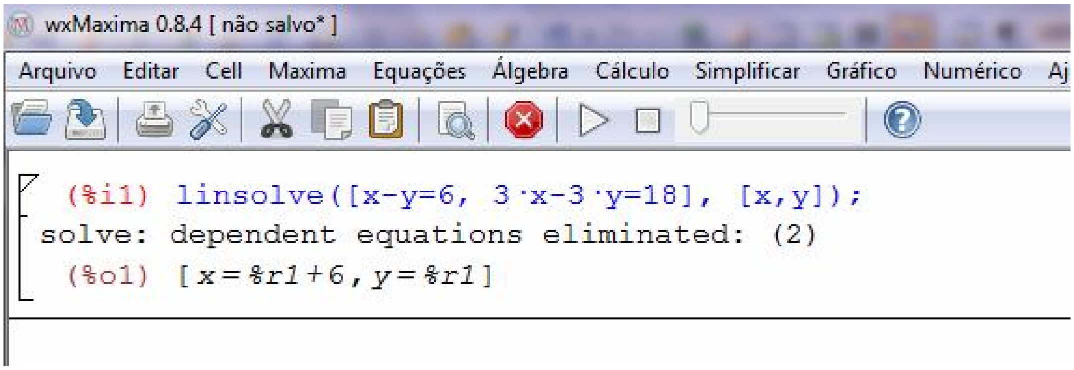
Figura 14: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clicando-se em ok temos as respostas do sistema:

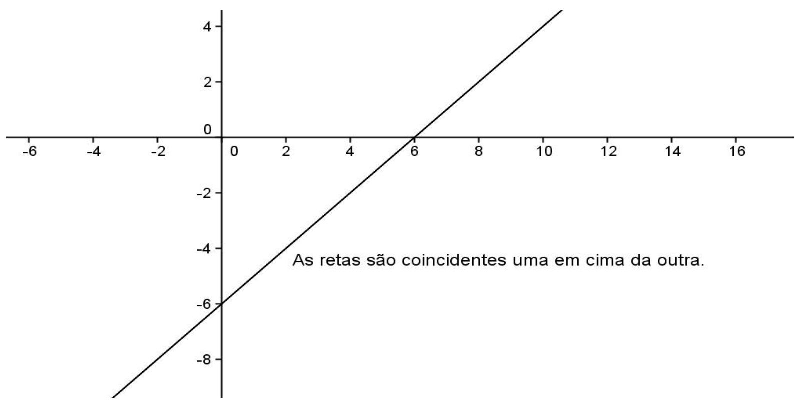
Figura 15: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Como as equações do sistema são as equações de uma reta, neste caso como as equações são múltiplas as retas são coincidentes, as retas ficam sobrepostas, e a solução do sistema pode ser qualquer ponto pertencente a esta reta, por isso, possui várias soluções.

Figura 16: Imagem do Maxima



Fonte: Software geogebra, Vaz, Suélen.

5.2.2 Resolvendo sistemas lineares com 3 incógnitas

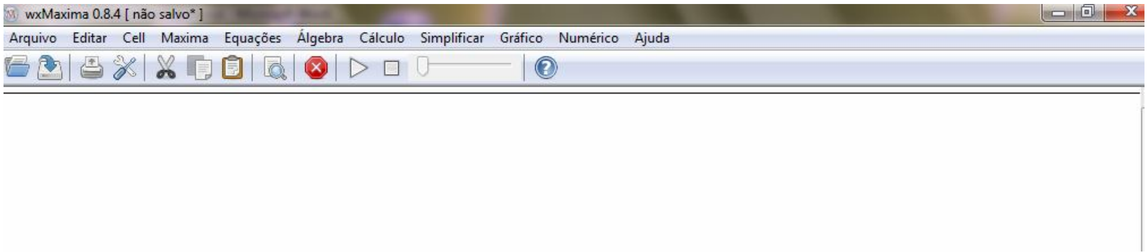
Vamos resolver os exemplos:

a)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = -4 \end{cases}$$

Ao clicarmos no ícone do Máxima abre-se a janela abaixo:

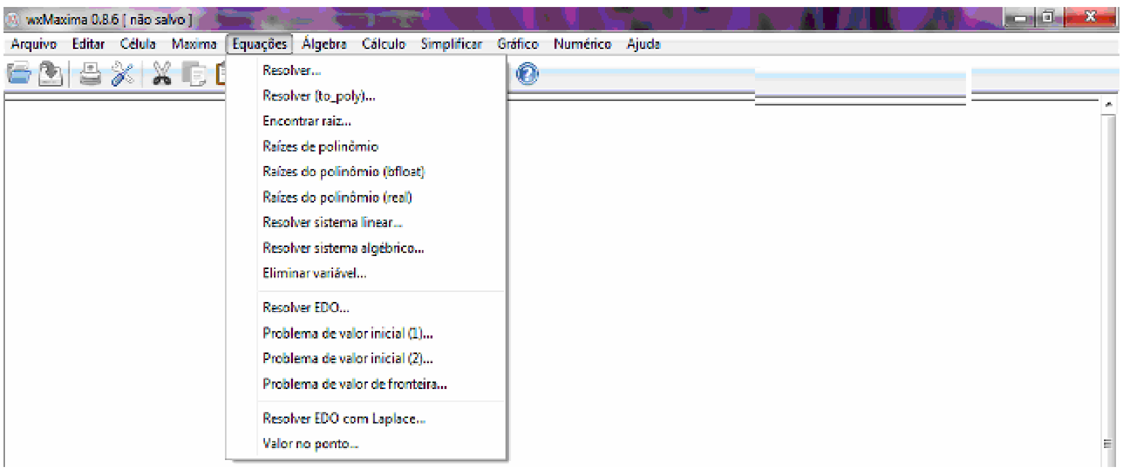
Figura 17: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clica-se na opção Equações e abre-se o menu:

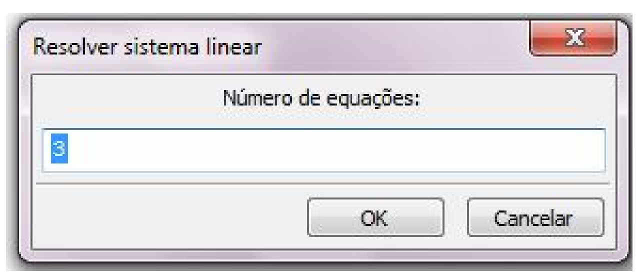
Figura 18: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clica-se em Resolver sistemas lineares e abre-se a janela perguntando o número de equações que neste caso é 3, logo clica-se em ok:

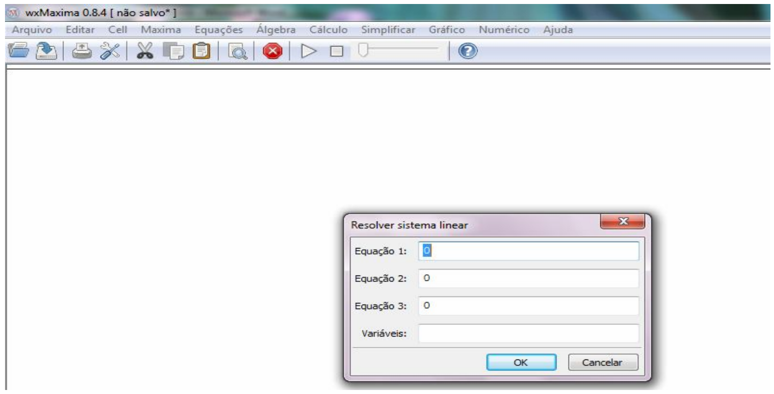
Figura 19: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clicando em ok abre-se a janela para digitarmos as equações:

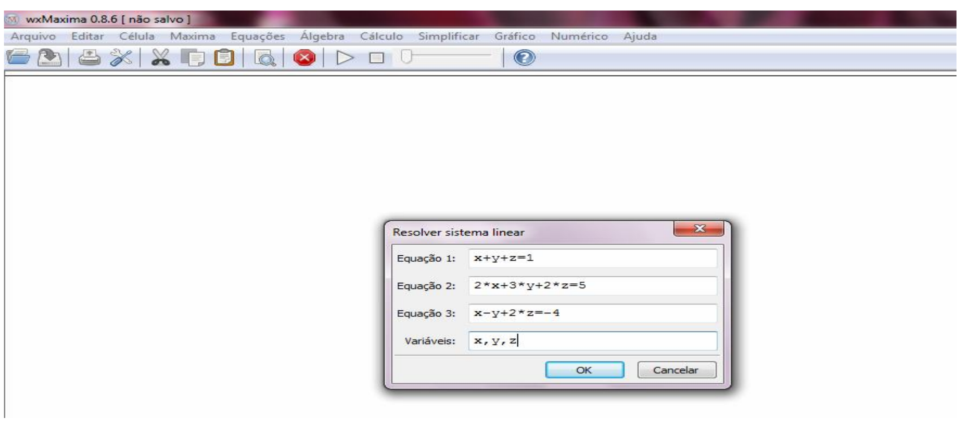
Figura 20: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Então digita-se as equações como na imagem abaixo, sendo importante colocar as variáveis:

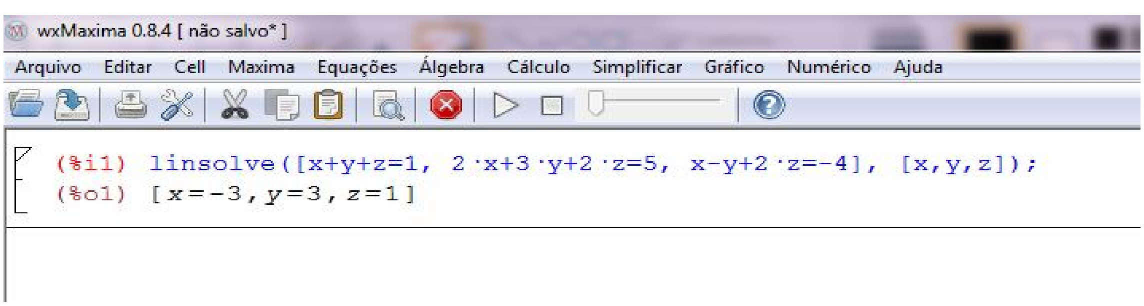
Figura 21: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Clicando-se em ok temos as respostas do sistema:

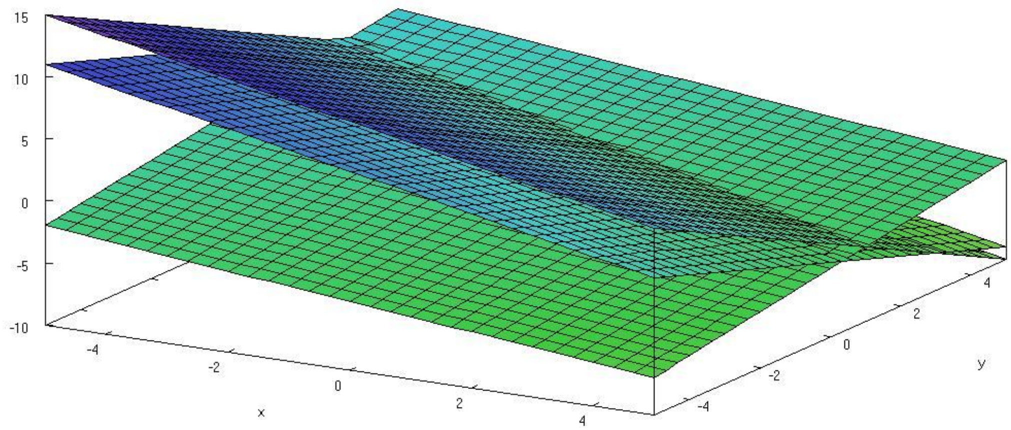
Figura 22: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Pelo gráfico, figura 23 vemos que os planos têm um ponto em comum, logo este é a solução do sistema.

Figura 23: Gráfico do exemplo a



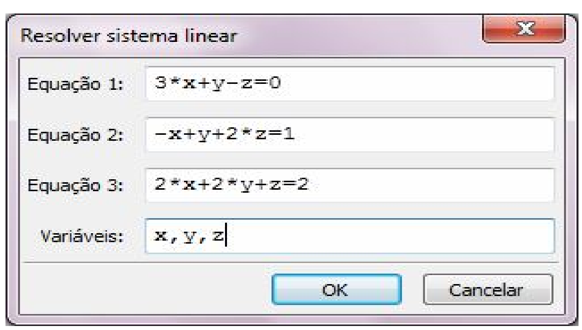
Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

b)

$$\begin{cases} 3x & +y & -z=0 \\ -x & +y & +2z=1 \\ 2x & +2y & +z=2 \end{cases}$$

Após os mesmo procedimentos citados no exemplo a, digitamos as equações como a figura 24 sendo importante colocar as variáveis:

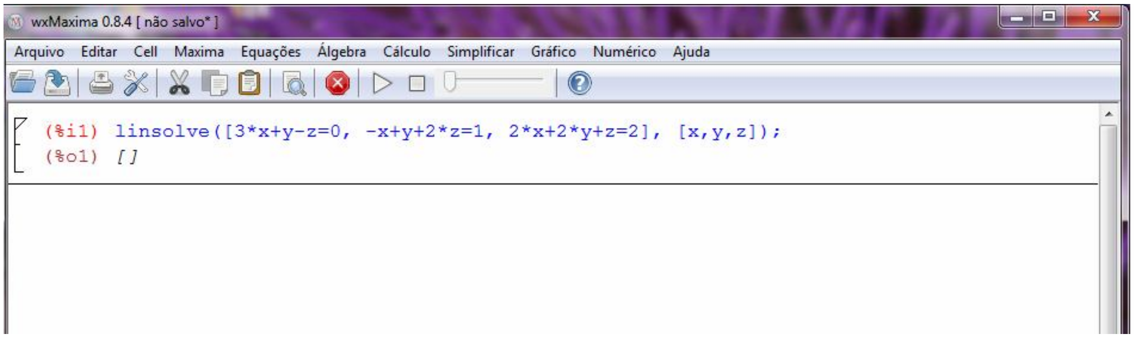
Figura 24: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

E o programa nos dá a seguinte resposta:

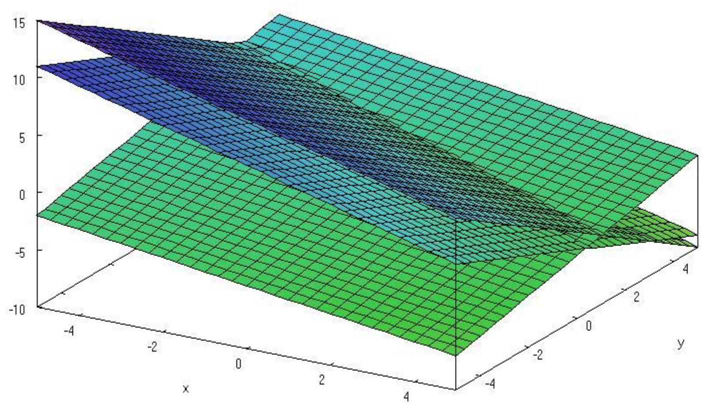
Figura 25: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

O vazio, mostrando que o sistema impossível, não tem resposta.

Figura 26: Gráfico do exemplo b



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

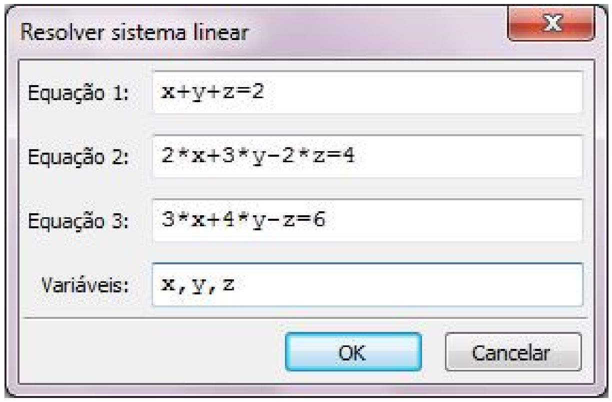
Pelo gráfico, figura 26 vemos que, os planos não têm um ponto em comum, logo a sistema fica impossível.

c)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases}$$

Após os mesmo procedimentos citados no exemplo a, digitamos as equações como a figura 27 sendo importante colocar as variáveis:

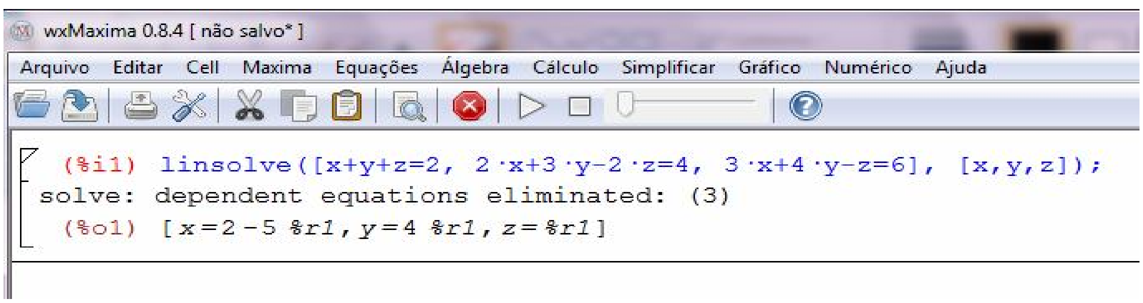
Figura 27: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

E o programa nos dá a seguinte resposta:

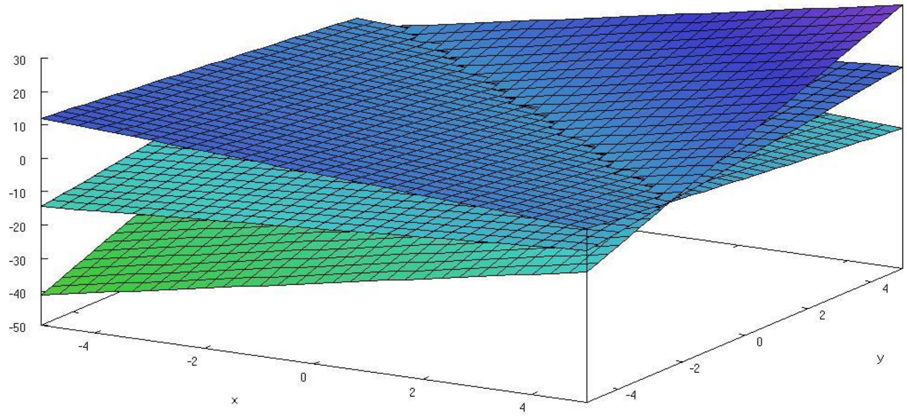
Figura 28: Imagem do Maxima



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Neste caso o sistema tem infinitas soluções, as variaveis ficam dependentes da variável z.

Figura 29: Gráfico do exemplo c



Fonte: Software Maxima, Vaz, Suélen.

Pelo gráfico, figura 29 podemos perceber que os planos se interceptam em uma reta, sendo assim o sistema possui infinitas soluções, pois se tem como solução todos os pontos pertencentes à reta.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma revisão simplificada de métodos de Resolução de Sistemas Lineares, buscando resolve-los com o software Maxima. Fizemos um apanhado histórico da origem da teoria desenvolvida pelos babilônicos e egípcios, onde se destacaram grandes matemáticos como Diofanto de Alexandria, Cardano, René Descartes, entre outros.

Para desenvolvermos essa pesquisa, a motivação original foi usar uma ferramenta tecnológica como, por exemplo, um software que auxiliasse na compreensão da teoria apresentada. Neste caso foi utilizado o Máxima, dentre vários conhecidos, como: Maple, Mathematica, Matlab, etc. Este se destaca por ser um software livre e de fácil manipulação.

Considerando a velocidade com que a tecnologia se desenvolve, e a necessidade com que os professores devem buscar novas metodologias para o ensino aprendizagem, é de grande utilidade apresentar métodos computacionais juntamente com a teoria proposta em sala de aula. O software é de simples de ser manuseado o que facilita a aprendizagem do aluno e outros cálculos que precisamos em outras áreas além da sala de aula como: na Engenharia, Física, Astronomia, entre outras.

REFERÊNCIAS

BENIGNO, Barreto Filho. **Matemática aula por aula**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003. 2v.

BEZERRA, Manuel Jairo. **Bezerra Matemática:** VOLUME ÚNICO. São Paulo: Scipione, 1994.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 1996. 2v.

BONGIOVANNI, Vicenzo. **Matemática:** VOLUME ÚNICO. 1. ed. São Paulo: Ática, 1994.

IEZZI, Gelsom; HAZZAM, Samuel. **Fundamentos da matemática elementar**. 5. ed. São Paulo: Atual, 1985. 4v.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática 2º Grau:** VOLUME ÚNICO. São Paulo: FTD, 1988.

PAIVA, Manuel. **Matemática:** VOLUME ÚNICO. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2005.

Wikipedia. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/MATLAB> . Acesso em: 10 set. 2011.

Wikipedia. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Maple> . Acesso em: 10 set. 2011.

Genio da lampada. Disponível em: <http://www.geniodalampada.com/index.php?option=com_content&view=article&id=57:a-contextualizacao-do-ensino-da-algebra-e-formacao-de professores&catid=50:pedagogia&Itemid=70>. Acesso em: 12 fev. 2011.

Algo sobre. Disponível em: <http://www.algosobre.com.br/matematica/sistemas-lineares-metodo-de-eliminacao-de-gauss.html>. Acesso em: 12 fev. 2011.

Macoratti. Disponível em: <http://www.macoratti.net/vb_eq2i.htm> . Acesso em: 12 fev. 2011.

Só matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/algebra.php>. Acesso em: 12 fev. 2011.

Julio Battisti. Disponível em: <http://www.juliobattisti.com.br/tutoriais/jorgeasantos/matematicaconcursos017.asp>. Acesso em: 15 fev. 2011.

Wikibooks. Disponível em: <http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Sistemas_lineares> . Acesso em: 20 fev. 2011.

Algo sobre. Disponível em: <http://www.algosobre.com.br/matematica/sistemas-lineares-metodo-de-eliminacao-de-gauss.html>. Acesso em: 20 fev. 2011.

Youtube. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=-26M_PgjD_A&feature=related> . Acesso em: 02 out. 2011.

Youtube. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=o6bZe30KWus&feature=related&noredirect=1>. Acesso em: 02 out. 2011.

Youtube. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=v9_SzlNys28> . Acesso em: 02 out. 2011.