FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA
CAMPUS ALEGRETE

BRUNA DE BASTOS PAZINI DORNELES

APLICAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

ALEGRETE
2011

BRUNA DE BASTOS PAZINI DORNELES

APLICAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do Título de Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática.

Orientadora: Divane Marcon

Alegrete
2011

BRUNA DE BASTOS PAZINI DORNELES

APLICAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do Título de Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Monografia defendida e aprovada em: 03 de novembro de 2011.

Banca examinadora:

Divane Marcon

Profª Ma Divane Marcon
Orientadora - Unipampa

Anderson Luiz Maciel

Prof. Dr. Anderson Luiz Maciel
Universidade Federal de Santa Maria

Fernando Colman Tura

Prof. Me. Fernando Colman Tura
Unipampa

Dedico a meu esposo, por me incentivar, por me apoiar em todas minhas decisões e pela compreensão nos momentos de ausência, a minha mãe, meu pai e o meu irmão Dudu, pelo carinho.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela vida, capacidade e oportunidades.

À professora Divane Marcon, pela contribuição e confiança depositadas em mim na elaboração deste trabalho e por aceitar ser minha orientadora.

Aos Professores do Curso de Especialização em Tecnologia no Ensino de Matemática, pelas discussões e orientações apresentadas para a contribuição para o desenvolvimento do trabalho.

Ao meu esposo, Diego, que esteve a todo o momento do meu lado me presenteando com palavras de incentivo e pela sua compreensão pelos momentos que estive ausente me dedicando a este projeto.

Aos meus pais e irmãos pelo apoio e pela presença nos momentos mais difíceis da minha vida.

A minha amiga e colega de curso, Cássia, pela presença constante em todos os momentos de curso, obrigado pela amizade que depositou em mim.

Aos meus colegas, José Pedro, João Batista, Ademir e Margarete, cada um ao seu modo, auxiliaram-me neste trabalho.

À minha colega de trabalho, Amanda, pelo incentivo e apoio.

“Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

Lobachevsky.

RESUMO

O trabalho aborda primeiramente um apanhado histórico da geometria e um estudo sobre as propriedades, os elementos e as definições dos quadriláteros notáveis e apresenta o software livre Geogebra. O enfoque desta pesquisa está no estudo realizado sobre os quadriláteros notáveis utilizando o Geogebra. Para isso, foi apresentada uma proposta de resolução de exercícios sobre quadriláteros notáveis usando o software, através de um roteiro de resolução. As atividades propostas foram retiradas de livros didáticos de 6° a 9° ano do Ensino Fundamental onde foram realizadas diversas construções geométricas envolvendo elementos e propriedades dos quadriláteros notáveis. Este estudo tem como objetivo interagir a Informática com a Matemática como uma forma de incentivar professores a utilizar de diferentes metodologias nas aulas de matemática, pois o Geogebra é um software que oferece recursos bem acessíveis, o que possibilita o aluno fazer suas próprias construções contribuindo no processo ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria, Quadriláteros Notáveis, Informática, Geogebra.

ABSTRACT

The present work focuses firstly at a historical overview of geometry and a study of properties, elements, and definitions of notable quadrilaterals and presents the free software Geogebra. The focus of this research is in the study of notable quadrilaterals using Geogebra. In order to do that, it has been presented a proposal for solving notable quadrilaterals exercises using the software through a guide of resolution. The proposed activities were taken from textbooks of sixth to ninth years of elementary school where were performed several geometric constructions involving elements and properties of notable quadrilaterals. This study aims to integrate Information Technology with Mathematics as a way to encourage teachers to use different methodologies in mathematics classes, because GeoGebra is a software that provides accessible resources, which enables the student to contribute to his or her own construction in the teaching-learning process.

Keywords: Geometry, remarkable quadrilaterals, Information technology, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\hat{}$ Ângulo

≡ Congruência

° Grau

= Igual

→ Implica

LLL Caso de Congruência de triângulos: Lado, lado, lado.

LAL Caso de Congruência de triângulos: Lado, ângulo, lado.

ALA Caso de Congruência de triângulos: Ângulo, lado, ângulo.

LAA_o Caso de Congruência de triângulos: Lado, ângulo e ângulo oposto.

LL Caso Especial de Congruência de Triângulo Retângulo: se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e uma hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

≥ Maior ou igual

≤ Menor ou igual

// Paralela

$\overline{}$ Segmento

$S_{(M,N)}$ Semirreta que passa pelos pontos M e N.

\+ Soma

Δ Triângulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A preocupação e a necessidade que o Homem tem de entender e representar o seu meio ambiente foram aos poucos definidas até adquirirem um significado matemático, associando-se conceitos, propriedades, definições e relações geométricas.

Ao longo da história do homem, a Geometria passou por estudos, onde estabeleceram uma relação entre equações algébricas e figuras geométricas. Toda a evolução nos estudos da Geometria foi muito importante para a Matemática e para aplicação no nosso dia a dia, pois esta é usada, como exemplos, para determinar o tamanho, a forma, o volume, ou a posição de um corpo.

As áreas da engenharia e da arquitetura usam do desenho geométrico nas plantas de construções de edifícios e no projeto de viadutos, pontes e túneis. E ainda, temos a Geometria presente no trabalho dos projetistas de automóveis que para fazer os pistões se encaixarem corretamente num determinado cilindro do motor e para que o motor se adapte perfeitamente na carroceria.

Andando pelas ruas de qualquer cidade podemos ver uma grande quantidade de formas, que nos lembram os quadriláteros; uma placa de trânsito, um semáforo ou uma faixa de pedestres. Também em casa vemos numerosas formas poligonais nos objetos que nos cercam: nos móveis, nos utensílios de cozinha, nos pisos, nos formatos dos azulejos. E ainda na natureza, como num favo de mel e na vitória-régia. Hoje em dia os materiais usados na construção adotam formas geométricas, que dão segurança e modernidade às suas estruturas.

Com o desenvolvimento da tecnologia, e a criação de novos softwares educacionais espera-se que a interação professor-aluno-software contribua com o ensino e o processo de aprendizagem do aluno. Então aplicar exercícios sobre quadriláteros no Geogebra pode ser uma saída para o grande desinteresse dos alunos pela matemática favorecendo a interatividade do aluno com o conhecimento matemático. Também, os alunos poderão ter a oportunidade de formular novas informações e serem estimulados para a construção do conhecimento.

Particularmente, o conteúdo de quadriláteros é muito rico para ser explorado em um software de construção geométrica. Por isso, escolhemos o software Geogebra, que é um software educativo livre, Geometria Dinâmica que associa geometria, álgebra e cálculo e está disponível em várias plataformas. Este, principalmente, possibilita várias construções geométricas como, por exemplo: pontos, retas, segmento de reta, semirreta, ângulos, polígonos, secções cônicas e outras. Desta forma, aplicamos exercícios retirados de livros didáticos de 6° a 9° ano do Ensino Fundamental para explorar o assunto sobre quadriláteros no Geogebra.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos, distribuídos da seguinte forma:

No capítulo 2, abordamos um apanhado histórico da geometria, como e quando iniciou os primeiros passos e o seu processo de evolução na Matemática. E ainda, a importância dos quadriláteros dentro da mesma.

No capítulo 3, realizamos um levantamento bibliográfico sobre os quadriláteros: definição, elementos e demonstração de algumas propriedades.

No capítulo 4, apresentamos um estudo a respeito do software Geogebra: sua origem e seu criador. Além disso, mostramos algumas janelas do software.

No capítulo 5, desenvolvemos exercícios de livros didáticos do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental no Geogebra que envolvam os quadriláteros e seus elementos.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Na verdade não se sabe exatamente em que época a Geometria surgiu, pois alguns pesquisadores descobriram que já utilizava-se a geometria na Pré-história, embasados em escavações realizadas em cidades antigas e descobertas de desenhos e figuras. Além disso, objetos encontrados por estudiosos mostram exemplos de congruência e simetria. O que existe é a certeza de que o começo da matemática é muito mais antigo do que muitas civilizações.

Segundo as ideias dos pensadores Heródoto e Aristóteles, a Geometria possui duas teorias quanto ao seu surgimento, pois para Heródoto a geometria originou-se no Egito, com a necessidade de medir terras e para Aristóteles existia no Egito uma classe sacerdotal que conduziu o estudo da geometria.

A palavra geometria vem do grego “geometrien”, onde “geo” significa terra e “metrien” medida.

> Devemos ter em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não esta de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. (BOYER, 1996, p.5)

A Geometria no Egito surgiu com a necessidade de melhorar a arrecadação de impostos de áreas rurais e fazer novas medidas de terras, pois todos os anos águas do rio Nilo inundavam as terras, com estas cheias depositavam-se lamas ricas em nutrientes tornando a terra muito fértil. Com isso, haviam vários conflitos entre indivíduos e comunidades sobre o uso da terra delimitada. Então, com a falta de ter alguém para delimitar as terras tanto para o cultivo quanto para a arrecadação dos impostos os antigos faraós nomearam os funcionários, os agrimensores (esticadores de cordas), que tinham o trabalho de avaliar os prejuízos das inundações e restabelecer as fronteiras entre as terras.

As primeiras unidades de medidas foram: o palmo, o pé, o passo, a braça e o cúbito. Desta forma, adotando a longitude das partes de um corpo de um único homem, geralmente do rei. A partir disso, foram construídas réguas de madeira ou metal e as cordas com nós. E assim surgiram as primeiras medidas oficiais de comprimento.

A partir do século VII a.C. os gregos já tinham começado a desenvolver o raciocínio e a lógica para demonstrar que algumas proposições matemáticas estavam corretas. Tales de Mileto (cerca de 640-546 a.C) iniciou o estudo das retas e triângulos. Pitágoras (cerca de 580-500 a.C) deduziu o importante teorema que leva o seu nome. Já Platão (427-347 a.C) desenvolveu o método de demonstração. Aristóteles (384-322 a.C) observou a diferença entre postulados e axiomas.

A Geometria Plana foi organizada num sistema de conceitos e propriedades na Escola Pitagórica por volta de 400 a.C, chamado “Elementos”, escrito por Hipócrates de Chios. Um século depois, Euclides de Alexandria publicou seus “Elementos”, onde reuniu tudo o que se conhecia sobre a matemática até então.

Euclides de Alexandria (360-295 a.C) foi um professor, matemático platônico e escritor, possivelmente grego, conhecido hoje como “Pai da Geometria”. Sua obra “Os Elementos” é uma das mais influentes na história da matemática, e ainda se tornou ao longo do tempo, a obra mais publicada e lida.

A obra “Os Elementos” é composta de trezes volumes, sendo cinco sobre Geometria Plana, três sobre Teoria dos Números, um sobre Incomensuráveis e os três últimos sobre Geometria no Espaço.

Os princípios do que hoje é chamada de Geometria Euclidiana foram deduzidas a partir de um conjunto de axiomas (princípios reconhecidos não demonstrados e tomados como verdadeiros, também chamados de postulados.). Esta é considerada uma geometria sobre planos ou objetos em três dimensões baseados nos postulados de Euclides de Alexandria. Desta forma, Euclides assumiu um pequeno conjunto de axiomas intuitivos e a partir destes axiomas passou a provar várias outras proposições.

Nesta obra, Euclides definiu os seguintes postulados:

- Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.
- Pode-se prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
- Pode-se constuir um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Todos os ângulos retos são iguais.
- Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas

encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Além de Euclides tivemos outros pensadores que contribuíram muito para a evolução dos estudos sobre a Geometria, como Arquimedes (287-212 a.C) que calculou áreas e volumes usando métodos semelhantes aos utilizados hoje em cálculo integral. Os matemáticos gregos solucionaram problemas muito importantes para a Matemática, que atualmente compõem a Álgebra. Dentre os muitos problemas que os gregos tentaram solucionar temos os três problemas clássicos, usando apenas régua e compasso:

1) Dado um cubo construir outro com o dobro do volume. Este é conhecido como a duplicação do cubo.

2) Dado um ângulo, construir outro ângulo com um terço da sua medida. Problema conhecido como a trissecção do ângulo.

3) A quadratura do círculo: dado um círculo, construir um quadrado de mesma área.

Já no século XVII, em 1637 o francês René Descartes publicou o primeiro livro sobre Geometria Analítica, onde estabeleceu uma relação entre equações algébricas e figuras geométricas. Por volta de 1800, Karl Gauss e Georg Riemann, da Alemanha, János Bolyai, da Hungria, e Nikolai Lobatchewsky, da Rússia, investigaram o que aconteceria se o postulado das paralelas de Euclides fosse modificado. Assim surgiram novas geometrias, chamadas de geometrias não-euclidianas.

Particularmente, falando da história dos quadriláteros, Euclides no Livro I, define uma figura quadrilátera como sendo aquela contida por quatro linhas retas e também definiu alguns quadriláteros notáveis como:

- **Quadrado:** É uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos;
- **Oblongo:** É uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas não tem quatro lados iguais;
- **Rombo:** É uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas que não tem ângulos retos;
- **Rombóide:** É uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem lados iguais nem ângulos retos.

Adrien-Marie Legendre, em 1793, deu uma nova definição para os quadriláteros notáveis:

- **Quadrado:** Tem seus lados iguais e seu ângulos retos;
- **Retângulo:** Tem seus ângulos retos, sem ter os lados iguais;
- **Losango:** Tem os lados iguais sem que os ângulos sejam retos;
- **Paralelogramo:** Tem os lados opostos paralelos.

E finalmente, em 1898, Hadamard definiu os quadriláteros notáveis como:

- **Quadrado:** É um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos retos;
- **Retângulo:** É um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, conseqüentemente, retos;
- **Losango:** É um quadrilátero que tem todos os lados iguais;
- **Paralelogramo:** É um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois.

A Geometria espacial (euclidiana) pode ser dita como uma continuação da Geometria plana (euclidiana), mas que trata do estudo de objetos espaciais assim como a ligação entre esses elementos. Assim, os objetos espaciais são: pontos, retas, segmentos de retas, planos, curvas e superfícies. Desta forma podemos realizar cálculos na geometria espacial como, comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de regiões sólidas.

A origem da geometria espacial é aproximadamente 2000 a.C nas antigas civilizações egípcias, os estudos sucederam nos povos da mesopotâmia (região situada no Oriente Médio, no vale dos rios Tigre e Eufrates) e todo o conhecimento que temos hoje baseiam-se em papiros. Podemos citar o “papiro de Rhind” e o “papiro de Moscou”. No papiro de Rhind foram achados vinte e cinco problemas, mas não foi possível interpretá-los devido ao estado em que se encontrava o manuscrito. Porém, foi encontrada uma forma de calcular o tronco de uma pirâmide com base quadrada. Já no papiro de Moscou encontraram-se conhecimentos de trigonometria, aritmética, equações algébricas, progressões e cálculo de área e volume.

Alguns filósofos gregos, em particular Pitágoras e Platão, contribuíram no desenvolvimento do estudo da geometria espacial. Pitágoras estudou o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e a esfera. E associava todo este estudo com os números, a metafísica, a religião e a música. Nas pesquisas de Platão havia uma associação entre os sólidos e tudo que existia na natureza, como exemplos: o tetraedro era associado ao fogo; o octaedro ao ar; o icosaedro à água; o dodecaedro ao universo.

No “Renascimento” surgiram muitos pensadores que contribuíram para novo conhecimento sobre a geometria espacial. Leonardo Fibonacci (1170-1240) em 1220 escreve a “Practica Geometriae”, uma coleção sobre Trigonometria e Geometria, onde trata de alguns princípios de Euclides e apresenta uma semelhança em três dimensões do teorema de Pitágoras.

Em 1615 Joannes Kepler qualifica o “Steometria” (stereo-volume/metria-medida), ou seja, o cálculo de volume. Ainda temos em 1669, Newton e Leibniz descobriram quase ao mesmo tempo, o Cálculo Infinitesimal (Diferencial e Integral), que pois possibilitou calcular qualquer área e volume independentemente da forma que a figura apresenta.

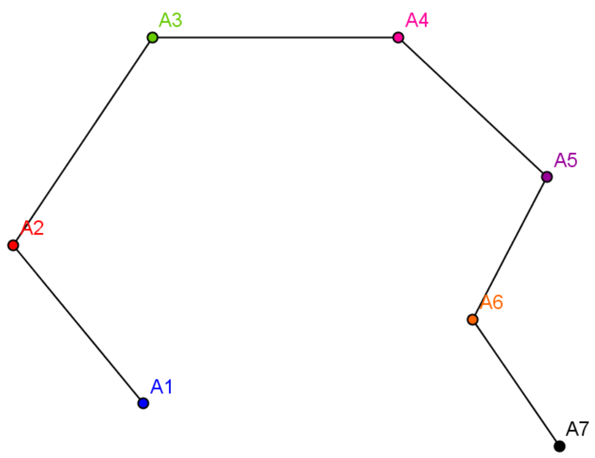
A Geometria Espacial é composta por diversas figuras, como os poliedros regulares. Algumas faces destes poliedros são quadriláteros notáveis como, por exemplo, o quadrado é uma face de um cubo. Ainda podemos considerar nas figuras espaciais o prisma, o paralelepípedo reto-retângulo, a pirâmide, nos quais encontramos os quadriláteros como faces e bases.

3 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

O enfoque deste capítulo está no estudo dos quadriláteros notáveis, definição, elementos, propriedades e como estes estão classificados. Veremos demonstrações de algumas propriedades e teoremas importantes envolvendo os quadriláteros notáveis.

Definição: Uma linha poligonal ou simplesmente uma poligonal é uma figura geométrica formada por uma sequência de n ($n \geq 3$) pontos, A_1, A_2, A_3,..., A_{n-1}, A_n e pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Os pontos são os vértices e os segmentos são os lados da poligonal. Ângulo de uma poligonal com vértice A_j é o ângulo definido pelos lados que tem A_j como ponto comum, ou seja, o ângulo entre os segmentos A_{j-1} A_j e A_j A_{j+1}.

A Figura 1- Exemplo de uma linha poligonal.



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

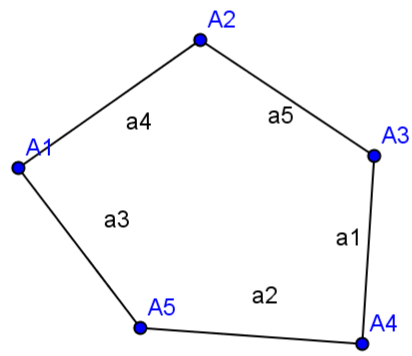
Definição: Polígono é uma poligonal que satisfaz as seguintes condições:

i) $A_n = A_1$, ou seja , é dito uma poligonal fechada;

ii) os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades;

iii) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

A figura 2- Exemplo de polígono.

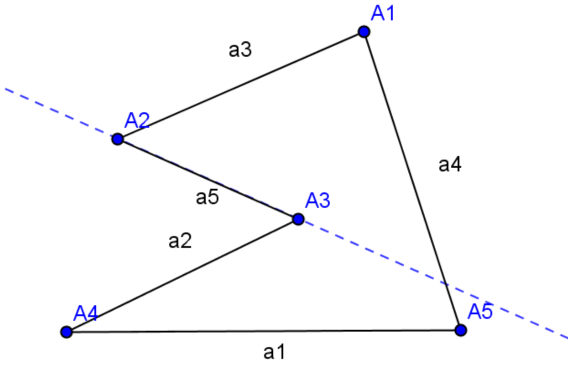


Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

Onde a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são os lados do polígono e A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são os vértices do polígono.

Definição: Um polígono é dito não convexo ou côncavo se a reta determinada por um dos lados do polígono dividir o polígono nos dois semiplanos determinados pela reta.

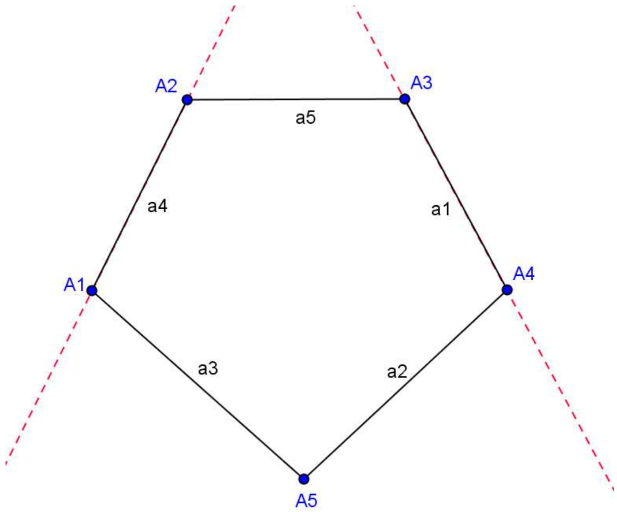
Figura 3- Exemplo Polígono Côncavo



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Definição: Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n-2) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

Figura 4- Exemplo Polígono Convexo



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

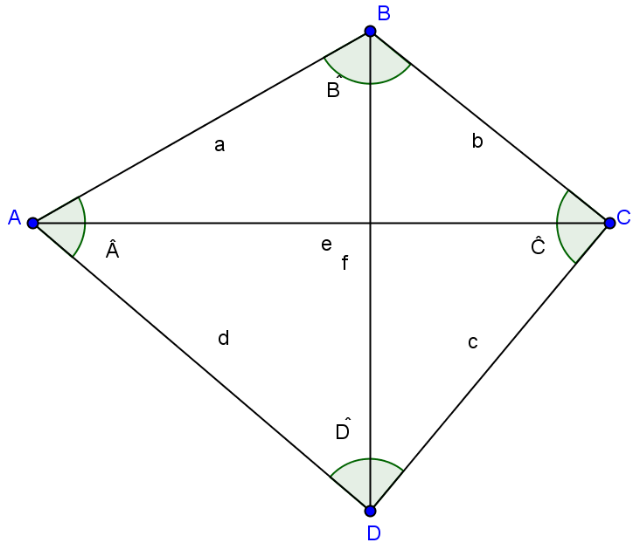
Definição: Um quadrilátero é um polígono que possuem quatro lados.

Os quadriláteros notáveis são: o retângulo, o quadrado, o paralelogramo, o losango e o trapézio.

Os quadriláteros apresentam os seguintes elementos: os vértices, os lados, as diagonais e os ângulos internos. Em um quadrilátero, dois lados ou dois ângulos não consecutivos são chamados opostos.

Considere o quadrilátero da figura abaixo:

Figura 5- Exemplo de um Quadrilátero



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Os principais elementos dos quadriláteros são:

1) Os **vértices** são os pontos A, B, C e D;

2) Os **lados** são os segmentos a= $\overline{AB}$, b=$\overline{BC}$, c=$\overline{CD}$, d=$\overline{DA}$;

3) As **diagonais** são segmentos de retas que unem dois vértices não consecutivos. No caso, são os segmentos e=$\overline{AC}$, f=$\overline{BD}$;

4) Os **ângulos internos** são os ângulos formados por dois lados adjacentes. Na figura acima os ângulos Â e Ĉ, B̂ e D̂.

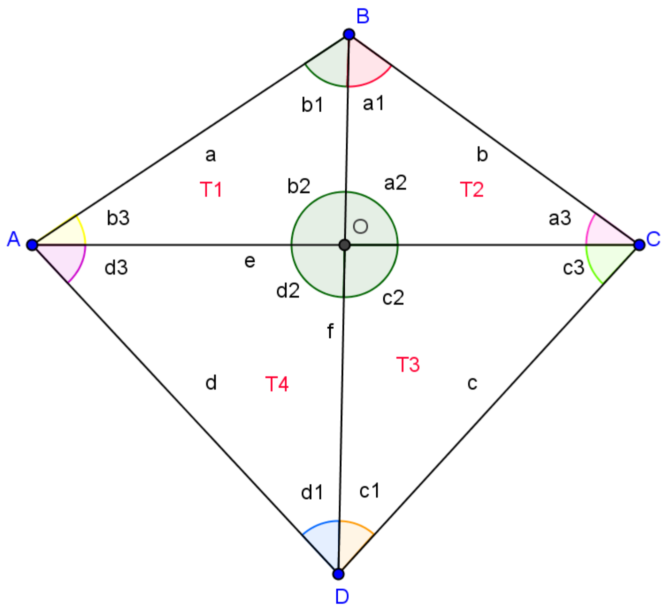
Definição: O perímetro de um quadrilátero é a soma das medidas de seus lados.

Propriedade dos ângulos internos: A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro vezes a medida de um ângulo reto, ou seja, 360º graus.

Demonstração:

Seja um quadrilátero ABCD.

Figura 6- Propriedade dos ângulos internos



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Traçando as diagonais do quadrilátero ABCD temos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ que se encontram-se em um ponto O no interior do quadrilátero, formando assim, conforme figura acima, quatro triângulos, a saber, ABO, ADO, DOC e BCO. Os ângulos internos de cada triângulo estão representados na figura acima.

Sendo que a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, temos: b1+b2+b3=180°, a1+a2+a3=180°, c1+c2+c3=180° e d1+d2 +d3=180°. Além disso, a2+b2+c2+d2= 360°.

A soma dos ângulos internos do quadrilátero é dada por a1+a3+b1+b3+c1+c3+d1+d3.

Considere a soma de todos os ângulos internos de todos os triângulos, ou seja, b1+b2+b3+ a1+a2+a3+ c1+c2+c3+ d1+d2+d3= 720°.

Assim,

a1+a3+b1+b3+c1+c3+d1+d3=b1+b2+b3+a1+a2+a3+c1+c2+c3+d1+d2+d3-(b2+a2+c2+d2)=720°-360° = 360°.

Logo, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. ■

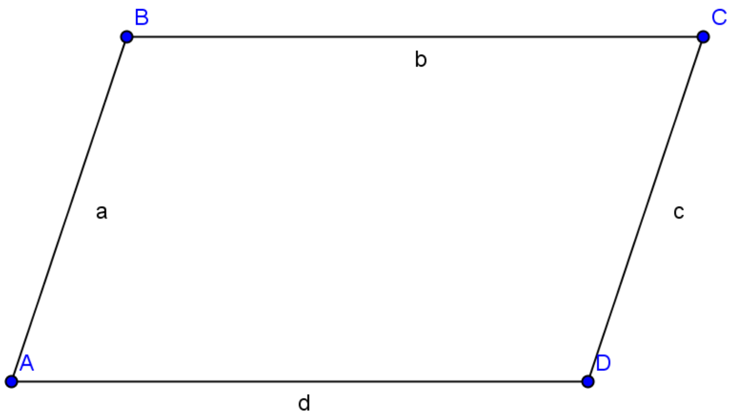
3.1 Os Quadriláteros Notáveis

I) Paralelogramo

Definição: é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Exemplo: O quadrilátero ABCD abaixo é um paralelogramo, pois o segmento $\overline{AB}$ é oposto e paralelo ao segmento $\overline{CD}$ e o segmento $\overline{BC}$ é oposto e paralelo ao segmento $\overline{AD}$.

Figura 7- Exemplo Paralelogramo



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

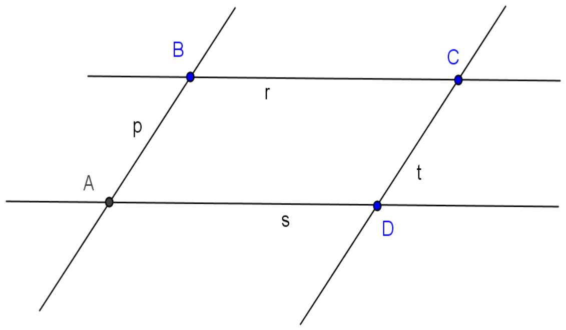
Propriedades do paralelogramo:

Pi) Os lados opostos são congruentes.

Demonstração:

Seja o paralelogramo ABCD.

Figura 8- Propriedade Pi



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

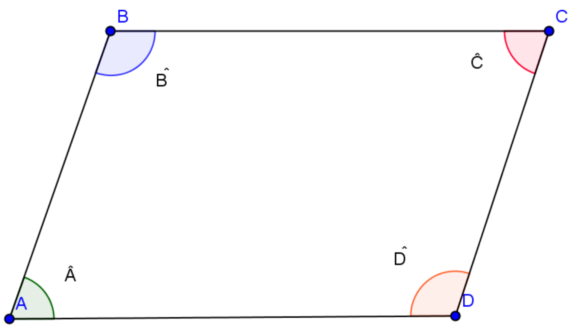
Pela definição de paralelogramo, $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$. Considerando as retas r que passa por B e C e s que passa por A e D, temos que r//s pois $\overline{AD}//\overline{BC}$. Aplicando o Teorema 2 (disponível nos Resultados Auxiliares na página 45) temos que $\overline{AB}\equiv\overline{CD}$. Agora, considere a reta p que passa pelos pontos A e B e a reta t que passa por C e D. Temos que p//t pois $\overline{AB}//\overline{CD}$. Aplicando novamente o Teorema 2 concluímos que $\overline{AD}\equiv\overline{BC}$. ■

Pii) Ângulos adjacentes a um lado são suplementares.

Demonstração:

Seja o paralelogramo ABCD.

Figura 9- Propriedade Pii



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

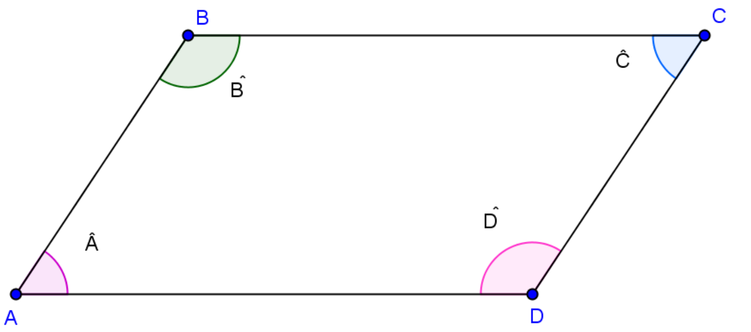
A reta AD é paralela à reta BC. A reta AB é transversal as retas AD e BC. Com isso, $\hat{A}+\hat{B} = 180°$, pois os ângulos $\hat{A}$ e são colaterais internos. Com um raciocínio análogo temos que $\hat{C}+\hat{B} = 180°$. Da mesma forma $\hat{C}+\hat{D} = 180°$ e $\hat{A}+\hat{D} = 180°$. Portanto, ângulos adjacentes a um lado são suplementares.

Piii) Os ângulos internos opostos são congruentes.

Demonstração:

Seja o paralelogramo ABCD.

Figura 10- Propriedade Piii



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

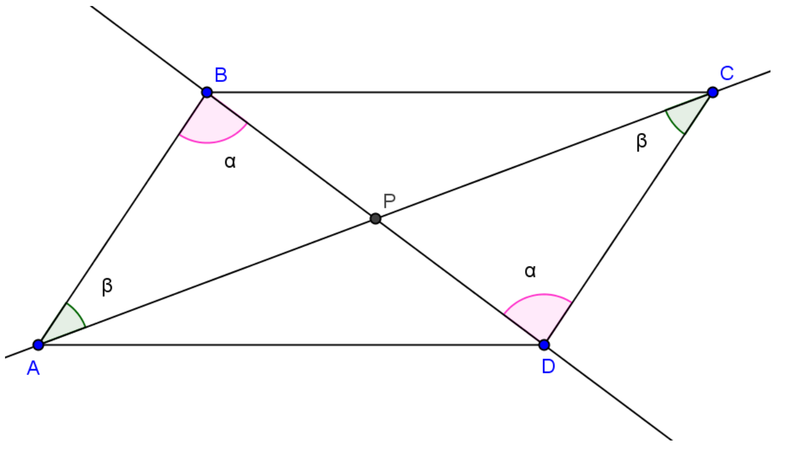
Pelo resultado anterior temos que Â+B̂ = 180° e Ĉ+B̂ = 180°. Isso implica que Â+B̂=Ĉ+B̂. Logo, Â=Ĉ. Da mesma forma, pela propriedade anterior temos que Â+B̂ =180° e Â+D̂ = 180°. Isso implica que B̂ = D̂. Portanto, ângulos internos opostos são congruentes. ■

Piv) Em todo paralelogramo as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Demonstração:

Seja o paralelogramo ABCD.

Figura 11- Propriedade Piv



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto P. Considere os segmentos paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cortados por uma transversal s determinada por $\overline{BD}$ então $A\hat{B}P \equiv C\hat{D}P$.

Agora, considere os mesmos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cortados por uma transversal r determinada por $\overline{AC}$ então temos $B\hat{A}P \equiv D\hat{C}P$.

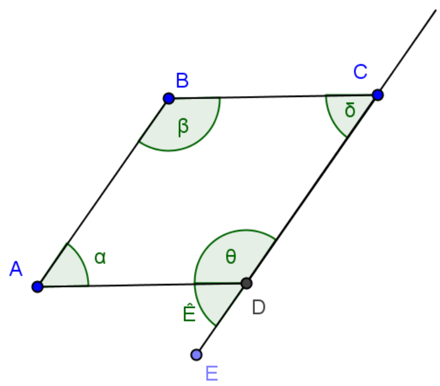
Com isso temos os triângulos APB e CPD, com $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e assim $\Delta APB \equiv \Delta CPD$ pelo caso de congruência de triângulos ALA (ângulo, lado,ângulo). Então $\overline{PB} \equiv \overline{PD}$ e $\overline{AP} \equiv \overline{PC}$.

Logo, P é o ponto médio das diagonais. ■

Pv) Todo quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes é um paralelogramo.

Demonstração

Figura 12- Propriedade Pv



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Seja ABCD um quadrilátero convexo. Por hipótese, $\alpha=\delta$ e $\beta=\theta$, e com isso $\alpha+\beta=\delta+\theta$ e $\beta=\theta$. Como ABCD é um quadrilátero temos que: $\alpha+\beta+\delta+\theta=360°$.

Isso implica que $\alpha+\beta=\alpha+\theta=180°$. Além disso, θ e Ê são suplementares. Logo, $\alpha=\hat{E}$ e pelo Teorema 5 (disponível nos Resultados Auxiliares na página 45) temos que $\overline{AB} // \overline{CD}$. Com um raciocínio análogo, temos que $\overline{BC} // \overline{AD}$, o que prova a tese. Portanto ABCD é um paralelogramo.■

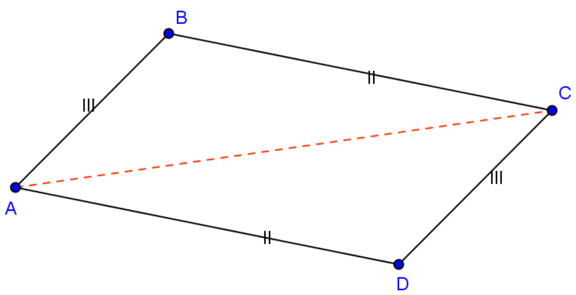
Pvi) Todo quadrilátero convexo que possui lados opostos congruentes é um paralelogramo.

Demonstração:

Seja ABCD um quadrilátero convexo.

Por hipótese, $\overline{AD}\equiv\overline{BC}$ e $\overline{AB}\equiv\overline{CD}$. Ao traçarmos uma diagonal passando pelos pontos A e C temos os triângulos ADC e ABC.

Figura 13- Propriedade Pvi



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

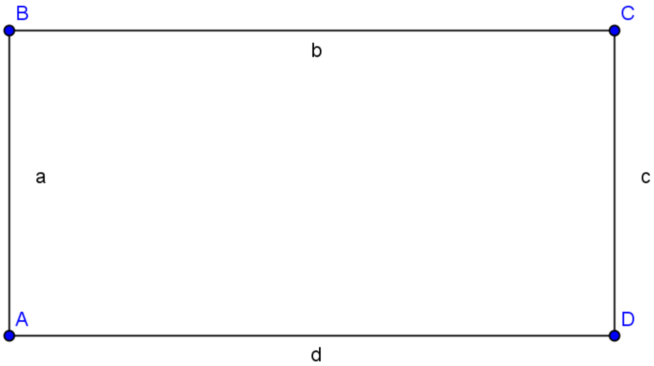
Como $\overline{AD}\equiv\overline{BC}$, $\overline{AB}\equiv\overline{CD}$ e $\overline{AC}$ é lado comum, temos, pelo caso de congruência de triângulos LLL (lado,lado,lado), $\Delta ADC\equiv\Delta ABC$. Então, $D\hat{A}C\equiv B\hat{C}A$ e $D\hat{C}A\equiv B\hat{A}C$ e isso implica, pelo Teorema 5, que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$.

Logo, o quadrilátero ABCD é um paralelogramo. ■

II) RETÂNGULO

Definição: Um retângulo é um quadrilátero que possui todos os seus ângulos congruentes.

Figura 14- Exemplo de um Retângulo



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Como todos os ângulos são congruentes e a soma deles é 360º, temos que cada ângulo mede 90º, ou seja, todos os ângulos são retos.

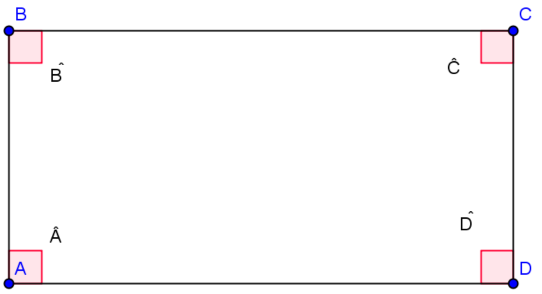
Propriedades do Retângulo:

Ri) Todo retângulo é um paralelogramo.

Demonstração:

Seja o retângulo ABCD.

Figura 15- Propriedade Ri



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

Por definição, todos os ângulos são retos, então $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90°$. Desta forma, os ângulos opostos são congruentes e pela propriedade Pv) temos que todo retângulo é um paralelogramo, ou seja, tem os lados opostos paralelos. ■

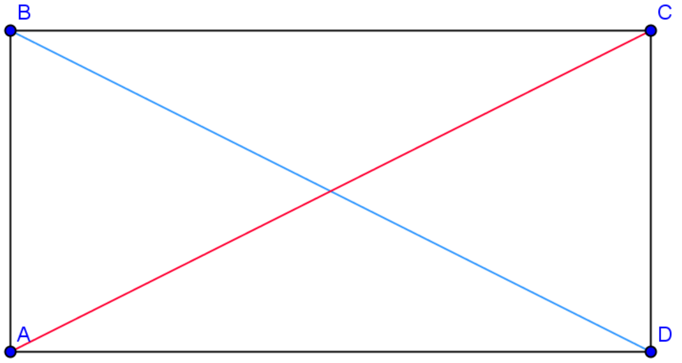
Observação: Como um retângulo é um paralelogramo, todas as propriedades dos paralelogramos são válidas para o retângulo.

Rii) As diagonais de um retângulo são congruentes.

Demonstração:

Seja o retângulo ABCD.

Figura 16- Propriedade Rii



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Por definição $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}$. Sejam as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Como todo retângulo é um paralelogramo e pela propriedade Pi) temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

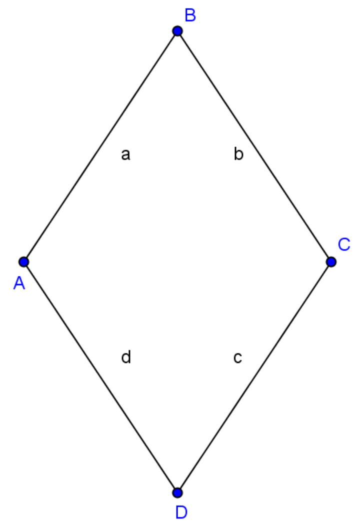
A diagonal $\overline{AC}$ define o triângulo ACD e a diagonal $\overline{BD}$ define o triângulo BCD, sendo $\overline{CD}$ lado comum aos dois triângulos.

Então, pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado,ângulo,lado), $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Portanto, as diagonais são congruentes. ■

III) LOSANGO

Definição: Um losango é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes.

Figura 17- Exemplo de um Losango



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

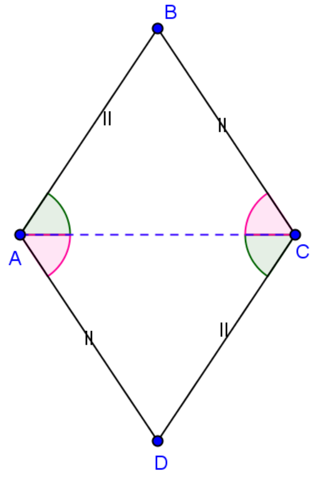
Propriedades dos Losangos:

Li) Todo losango é um paralelogramo.

Demonstração:

Seja ABCD um losango.

Figura 18- Propriedade Li



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

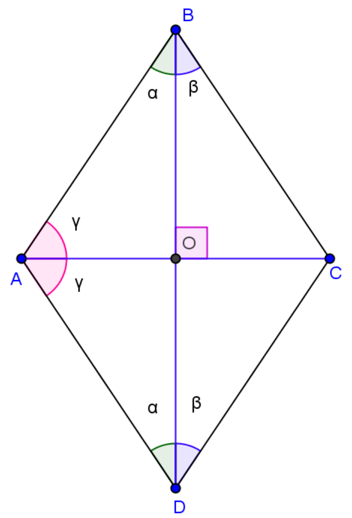
Pela própria definição, o losango possui lados opostos congruentes. Pela propriedade Pvi) temos que ABCD é um paralelogramo. ■

Lii) Num losango as diagonais são perpendiculares entre si e cada uma é bissetriz do ângulo correspondente.

Demonstração:

Seja o losango ABCD.

Figura 19- Propriedade Lii



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

Por definição, $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{AD}$. Sejam as diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$.

Vamos mostrar que a diagonal $\overline{BD}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$. A diagonal $\overline{BD}$ determina dois triângulos ABD e BDC. Esses triângulos são isósceles pois $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{AD}$. Assim, $A\hat{B}D \equiv A\hat{D}B$ e $C\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$. Como $\overline{BD}$ é lado comum temos que, pelo caso de congruência de triângulos LLL (lado, lado, lado), $\Delta ABD \equiv \Delta BDC$. Portanto, $A\hat{B}D \equiv D\hat{B}C$ e $A\hat{D}B \equiv B\hat{D}C$ e assim, a diagonal é bissetriz dos seus ângulos correspondentes. Com um raciocínio análogo mostra-se que a diagonal $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

Vamos provar agora que as diagonais são perpendiculares entre si.

Considere o ponto O onde as diagonais se cruzam formando os triângulos ABO e AOD. Como $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$, $B\hat{A}O \equiv D\hat{A}O$ (pela propriedade anterior) e $\overline{AO}$ é o lado comum, temos que, pelo caso de congruência de triângulos LAL(lado,ângulo,lado), $\Delta ABO \equiv \Delta AOD$ e assim $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}D$. Além disso, $A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180°$, pois são ângulos suplementares. Assim, temos que

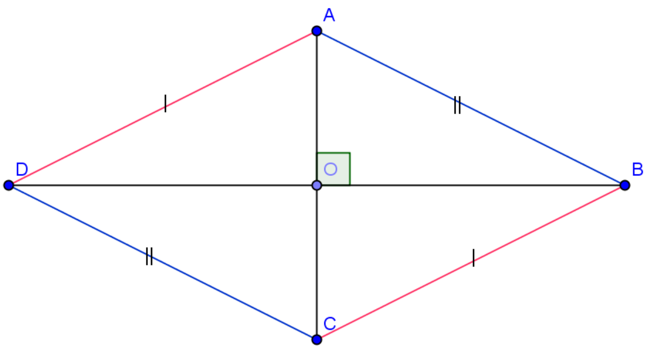
$A\hat{O}B + A\hat{O}B = 180° \rightarrow 2\,A\hat{O}B = 180° \rightarrow A\hat{O}B = 90°$.

Portanto, as diagonais são perpendiculares entre si. ■

Liii) Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Demonstração:

Figura 20- Propriedade Liii



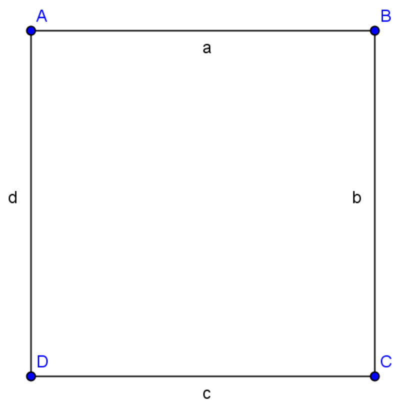
Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Sejam o paralelogramo ABCD, as diagonais determinadas por $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ perpendiculares entre si e o ponto O onde as diagonais se interceptam. Como ABCD é um paralelogramo temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Além disso, também temos que $\overline{DO} \equiv \overline{OB}$, pela propriedade Piv). Basta provar que $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$. Os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BD}$ definem os triângulos AOB e AOD, sendo $\overline{AO}$ o lado comum aos dois triângulos. Como as diagonais são perpendiculares temos que $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}D$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, $\Delta AOB \equiv \Delta AOD$ e consequentemente $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$. Portanto, $\overline{CD} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e o paralelogramo é um losango. ■

IV) QUADRADO

Definição: Um quadrado é um quadrilátero convexo que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Figura 21- Exemplo de um Quadrado



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

$a=b=c=d$ e $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}$.

Propriedades dos quadrados:

Qi) Todo quadrado é um paralelogramo.

Demonstração:

Como o quadrado possui todos os lados congruentes, seus lados opostos são congruentes e pela propriedade Pvi) temos que o quadrado é um paralelogramo. ■

Qii) Todo quadrado é retângulo.

Demonstração:

Como o quadrado possui todos os ângulos congruentes, satisfaz a definição de retângulo. Portanto, todo quadrado é retângulo. ■

Qiii) Todo quadrado é losango.

Demonstração:

Como o quadrado possui todos os lados congruentes, pela definição de losango temos que o quadrado é losango. ■

Qiv) As diagonais de um quadrado são congruentes e perpendiculares entre si.

Demonstração:

Isso decorre do fato de que o quadrado é um retângulo e um losango. Portanto, pelas propriedades Lii e Rii temos que as diagonais de um quadrado são congruentes e perpendiculares entre si. ■

Qv) Cada diagonal de um quadrado é bissetriz dos seus ângulos;

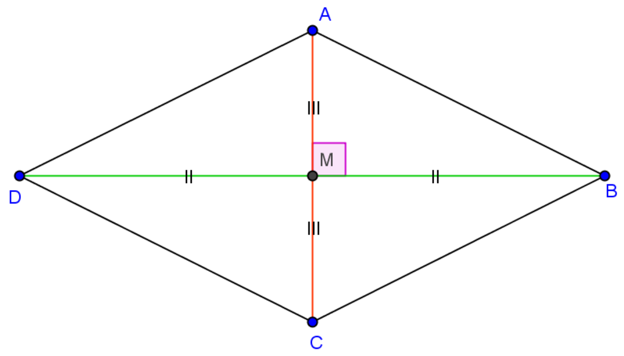
Demonstração:

Isso decorre do fato que o quadrado é um losango e pela propriedade Lii. ■

TEOREMA 1: Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares entre si, e se interceptam no seu ponto médio, então o quadrilátero é um losango.

Demonstração:

Figura 22- Teorema 1



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

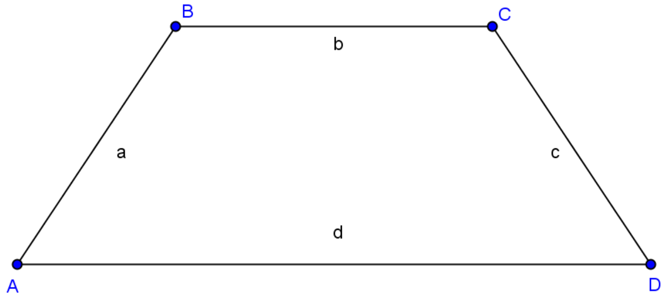
Sejam o quadrilátero ABCD e M o ponto onde as diagonais se interceptam, que também é o ponto médio das diagonais (por hipótese). Assim, temos $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{DM} \equiv \overline{BM}$. Ainda, por hipótese, temos que $A\hat{M}B \equiv B\hat{M}C \equiv D\hat{M}C \equiv D\hat{M}A = 90°$. Considere os triângulos AMD, DMC, CMB e BMA. Pelo caso de congruência de triângulos LAL, temos que $\Delta AMB \equiv \Delta BMC \equiv \Delta CMD \equiv \Delta AMD$. Consequentemente, $AD \equiv DC \equiv BC \equiv AB$. Portanto, ABCD é um losango. ■

Uma consequência imediata do teorema anterior é que mantendo as hipóteses e acrescentando o fato das diagonais serem congruentes temos que o quadrilátero é um quadrado.

V) TRAPÉZIO

***Definição**:* um trapézio é um quadrilátero onde apenas dois dos seus lados opostos são paralelos.

Figura 23- Exemplo de um Trápezio



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

Os lados paralelos de um trapézio são chamados de base e os outros dois são as laterais.

Um trapézio é dito isósceles se seus lados não paralelos são congruentes e é chamado de escaleno se suas laterais não são congruentes.

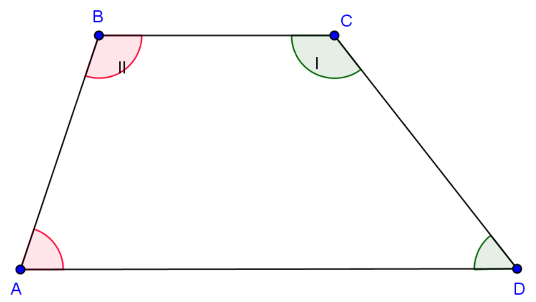
Propriedades dos trapézios:

Ti) Em qualquer trapézio ABCD, com bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ temos $\hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D}=180°$.

Demonstração:

Seja ABCD um trapézio com bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Figura 24- Propriedade Ti



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Considere a semirreta $S_{(AC)}$ que passa por B e C, a semirreta $S_{(AD)}$ que passa por A e D, e $S_{(CD)}$, a semirreta que contém $\overline{CD}$. Como $\overline{AD}//\overline{BC}$, $S_{(AD)}$,// $S_{(B,C)}$ e $S_{(CD)}$ é uma transversal que corta as outras duas semirretas, assim temos que $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são ângulos colaterais internos e isso implica que $\hat{C}+\hat{D}=180°$.

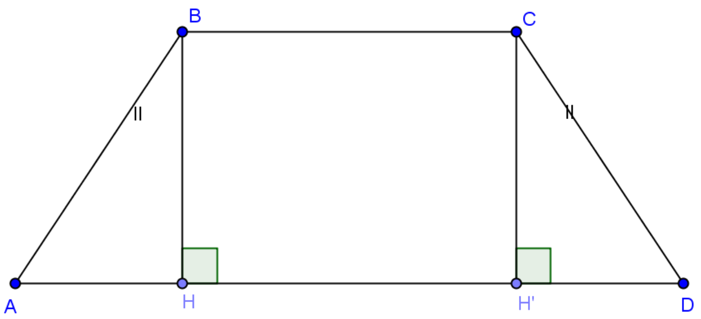
Analogamente, considere a semirreta $S_{(AC)}$ que passa por B e C, a semirreta $S_{(AD)}$ que passa por A e D, e $S_{(AB)}$, a semirreta que contém $\overline{AB}$. Como $\overline{AD}//\overline{BC}$, $S_{(AD)}$,// $S_{(B,C)}$ e $S_{(AB)}$ é uma transversal que corta as outras duas semirretas, assim temos que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais internos e isso implica que

$\hat{A}+\hat{B}=180°$. $\blacksquare$

Tii) Se ABCD é um trapézio isósceles com bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ então $\hat{A}\equiv\hat{D}$ e $\hat{B}\equiv\hat{C}$. Reciprocamente, se $\hat{A}\equiv\hat{D}$ e $\hat{B}\equiv\hat{C}$ então o trapézio é isósceles.

Demonstração (ida):

Figura 25- Propriedade Tii



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Seja o trapézio ABCD isósceles. Então, por hipótese, $\overline{AB}\equiv\overline{CD}$. Considere as alturas $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$', $\overline{BH}\equiv\overline{CH}$' pois as bases são paralelas. Por definição de altura temos $C\hat{H}'D=90°$ e $B\hat{H}A=90°$. Considere também os triângulos BHA e CH'D. Pelo caso particular de congruência de triângulos retângulos, temos que $\Delta BHA \equiv \Delta CH'D$ e consequentemente $\hat{A}\equiv\hat{D}$. Pela propriedade Ti, $\hat{A}+\hat{B}=180°$ e $\hat{C}+\hat{D}=180°$. Isso implica que $\hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D}$, logo, $\hat{B}\equiv\hat{C}$.

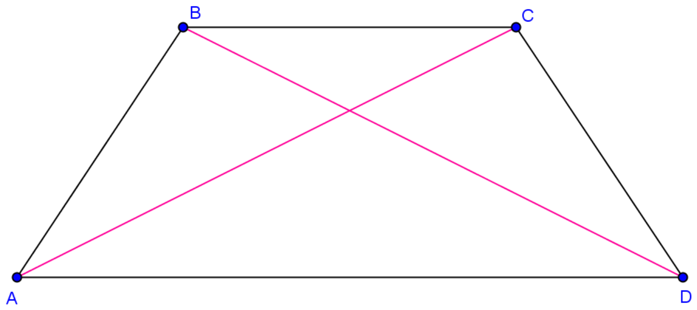
Demonstração (volta):

Seja o trapézio ABCD, com $\hat{A}\equiv\hat{D}$ e $\hat{B}\equiv\hat{C}$ (por hipótese). Vamos mostrar que $\overline{BA}\equiv\overline{CD}$. Considere as alturas $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$', por definição de altura, temos que $C\hat{H}'D=90°$ e $B\hat{H}A=90°$. Como $\overline{BC}$ é paralela a $\overline{AD}$ então $\overline{BC}$ é ortogonal $\overline{BH}$ e $\overline{BH}$ é paralelo a $\overline{CH}$'. Segmentos paralelos entre retas paralelas são congruentes assim, $\overline{BH}\equiv\overline{CH}$'. Com isso, $H\hat{B}C\equiv H'\hat{C}B=90°$ e como $\hat{B}\equiv\hat{C}$ temos $A\hat{B}H\equiv H'\hat{C}D$. Assim, pelo caso de congruência de triângulos LAA_o, temos que os triângulos ΔBHA e $\Delta CH'D$ são congruentes e portanto $\overline{BA}\equiv\overline{CD}$ e o trapézio é isósceles. $\blacksquare$

Tiii) Em um trapézio isósceles as diagonais são congruentes. Reciprocamente, se as diagonais de um trapézio são congruentes então ele é isósceles.

Demonstração (ida):

Figura 26- Propriedade Tiii (ida)

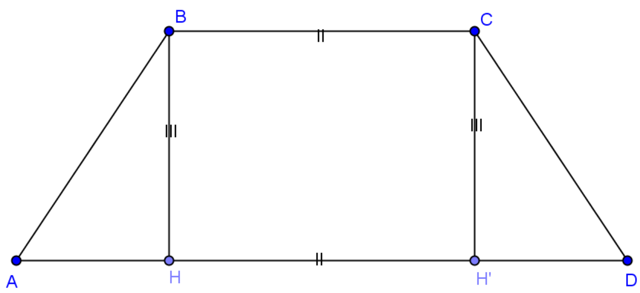


Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Seja o trapézio ABCD isósceles. Considere as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e os triângulos DBC e ABC. Como $\overline{BC}$ é o lado comum, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\hat{B} \equiv \hat{C}$, pois o trapézio é isósceles, pelo caso LAL (lado,ângulo,lado) de congruência de triângulos temos que $\Delta BCD \equiv \Delta ABC$ e consequentemente $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

Demonstração (volta):

Figura 27- Propriedade Tiii (volta)



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

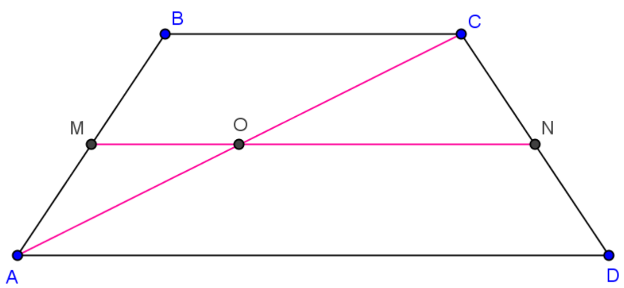
Sejam o trapézio ABCD e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ tais que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Vamos mostrar que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Considere as alturas $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$' e com isso $C\hat{H}'D=90°$ e $B\hat{H}A=90°$.

Como $\overline{BC}$ é paralela à $\overline{HH}$' e $\overline{BH}$ é paralela à $\overline{CH}$' então, pelo Teorema 2, $\overline{BC} \equiv \overline{HH}$' e $\overline{BH} \equiv \overline{CH}$'. Assim, pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos temos que os triângulos retângulos ΔCH'A e ΔBHD são congruentes. Logo $\overline{AH}' \equiv \overline{HD}$. Aplicando novamente o caso particular de congruência de triângulos retângulos nos triângulos ABH' e DCH temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Portanto, o trapézio ABCD é isósceles. ■

Tiv) O segmento que liga os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e o seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

Demonstração:

Figura 28- Propriedade Tiv



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

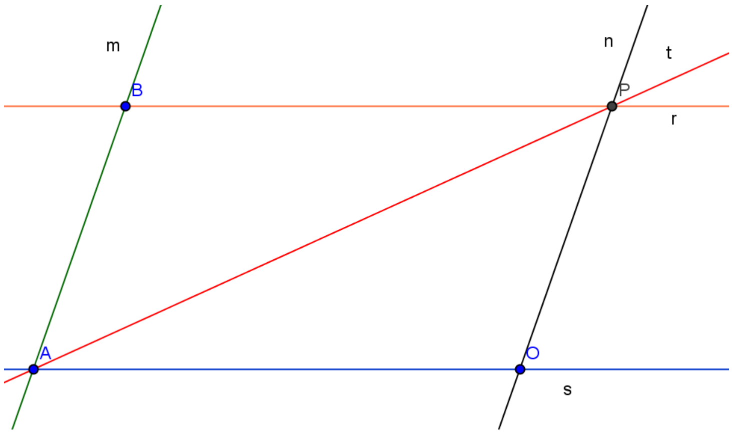
Seja o trapézio ABCD com bases $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ e laterais $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Ao traçarmos uma reta que passa pelos pontos A e C, obtemos o segmento $\overline{AC}$, definindo os triângulos ABC e ACD. Sejam M, O e N os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ respectivamente. Considerando o triângulo ABC, o segmento $\overline{MO}$, pelo Teorema 3 (disponível nos Resultados Auxiliares página 43), é paralelo ao segmento $\overline{BC}$ e $\overline{MO}=½\,\overline{BC}$. Da mesma forma, considerando o triângulo ACD, o segmento $\overline{ON}$, pelo Teorema 3, é paralelo ao segmento $\overline{AD}$ e $\overline{NO}=½\,\overline{AD}$. Assim temos $\overline{BC}//\overline{MO}//\overline{NO}//\overline{AD}$ e $\overline{MN}=\overline{MO}+\overline{ON}=½\,\overline{BC}+½\,\overline{AD} = (\overline{BC} + \overline{AD})/2$. ■

3.2 Resultados Auxiliares

Teorema 2- Os segmentos paralelos compreendidos entre paralelas são congruentes.

Demonstração:

Figura 29- Teorema 2



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Sejam r e s retas paralelas e m e n retas paralelas entre si, mas transversais a r e a s. Sejam A e B os pontos onde m intercepta s e r respectivamente. Sejam P e O os pontos onde n intercepta r e s respectivamente.

Queremos mostrar que $\overline{AO} \equiv \overline{BP}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{OP}$.

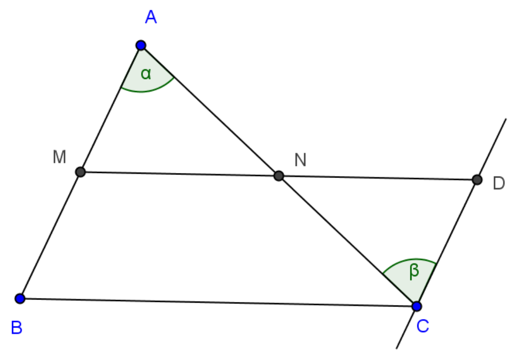
Considere uma reta t que passa pelos pontos A e P. Como r é paralela a s cortadas por t, então $B\hat{P}A \equiv P\hat{A}O$ (ângulos alternos internos). E m paralela a n cortadas por t, então $O\hat{P}A \equiv P\hat{A}B$ (ângulos alternos internos).

Como $\overline{AP}$ define os ΔBPA e ΔPAO, sendo $\overline{AP}$ o lado comum. Pelo caso ALA (ângulo,lado,ângulo) de congruência de triângulos, temos $\Delta BPA \equiv \Delta OAP$ e consequentemente $\overline{AO} \equiv \overline{BP}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{OP}$. ■

Teorema 3- Dado um triângulo ABC, com base BC. Sejam M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Então o segmento de reta $\overline{MN}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ e mede a metade do comprimento do segmento $\overline{BC}$.

Demonstração:

Figura 30- Teorema 3



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Sejam o triângulo ABC, de base $\overline{BC}$, e M e N os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente, assim $\overline{AM}\equiv\overline{MB}$ e $\overline{AN}\equiv\overline{NC}$.

Pelo ponto C, traça-se uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ e seja D a intersecção entre essa reta e a reta que passa por M e N, conforme a figura acima. Como $\overline{CD}//\overline{AB}$, $M\hat{A}N\equiv A\hat{C}D$. Além disso, $\overline{AN}\equiv\overline{NC}$, $A\hat{N}M\equiv C\hat{N}D$ (ângulos opostos pelo vértice). Logo, pelo caso de congruência de triângulos ALA temos que os triângulos NAM e NCD são congruentes. Consequentemente, $\overline{CD}\equiv\overline{AM}$, o que implica que .$\overline{CD}\equiv\overline{BM}$. Disto e do fato que $\overline{CD}$ e $\overline{BM}$ são paralelos, temos que $\overline{MD}\equiv\overline{BC}$ e MDCB é um paralelogramo, o que implica que $\overline{MD}//\overline{BC}$ e $\overline{MN}//\overline{BC}$. Até aqui provamos o paralelismo, vamos mostrar a medida de $\overline{MN}$ é a metade da medida de $\overline{BC}$.

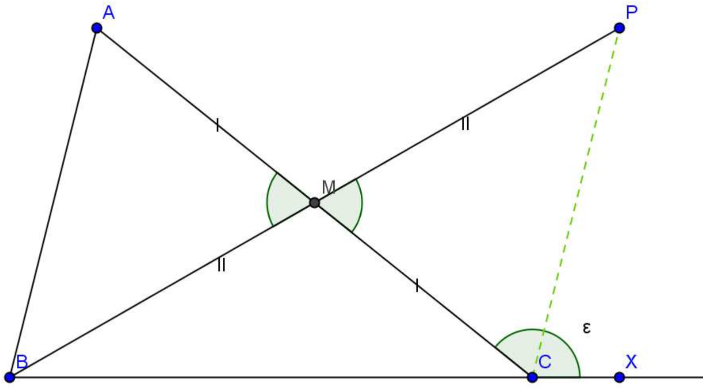
$\Delta NAM\equiv\Delta NCD$ implica que $\overline{MN}\equiv\overline{ND}$ e como $\overline{MD}\equiv\overline{BC}$ concluímos que

2. $\overline{MN}=\overline{BC}$, o que implica que $\overline{MN}=(1/2)\overline{BC}$.■

Teorema 4: (Teorema do ângulo externo): um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração:

Figura 31- Teorema 4



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente à semirreta que contém B e M tal que $\overline{BM} \equiv \overline{MP}$.

Pelo caso LAL, ΔBAM ≡ ΔPMC , assim temos BÂM≡ PĈM.

Como P é interno ao ângulo ε = AĈX, vem; ε > PĈM.

Assim temos, que ε > Â.

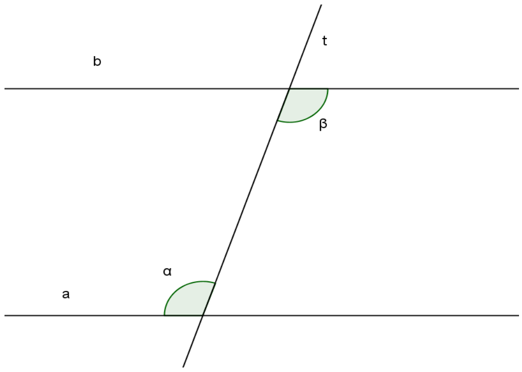
Analogamente, tomando o ponto médio de BC e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

ε > B̂.

Teorema 5: Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos congruentes então essas duas retas são palalelas.

Demonstração:

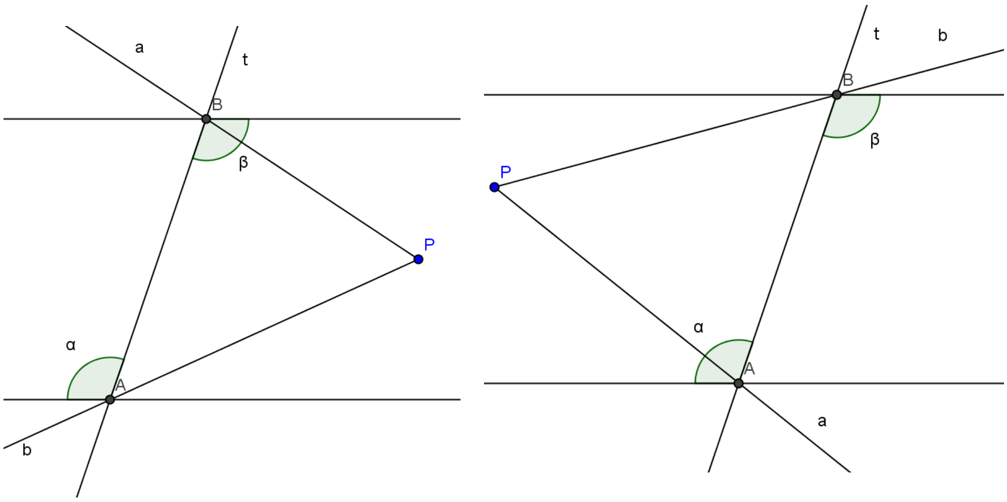
Figura 32- Teorema 5



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Se a e b não fossem paralelas, teriam um ponto P em comum e a ∩ b ≡ {P}, sendo a ∩ t ≡ {A} e b ∩ t ≡ {B}, assim teríamos o triângulo ABP.

Figura 33- Exemplo Teorema 5 construção do triângulo ABP



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ΔABP, teríamos:

α>β ou β>α, o que é um absurdo, de acordo com a hipótese.

Logo, as retas a e b são paralelas, isto é, a é paralela a b.

4 O SOFTWARE GEOGEBRA

> As construções em softwares geométricos são muito exatas e permitem que os alunos as reconstruam a todo momento, gerando uma maior compreensão dos elementos envolvidos em uma construção geométrica.(RODRIGUES et al, 2005, p.3).

O Geogebra é um software de ensino livre de Geometria que foi criado por Markus Hohenwater em 2001, e encontra-se disponível em várias plataformas. O sofware Geogebra pode ser obtido no site http://www.geogebra.org/cms/pt_BR. Este software possui diversas ferramentas e opções de como trabalhar e associar a geometria, álgebra e cálculo, e pode ser utilizado em diferentes níveis de ensino. Tem como objetivo diferenciar o ensino da matemática nas salas de aula facilitando o entendimento de alguns conceitos que podem ser explorados através deste software, pois permite que o aluno ponha em prática seus conhecimentos ao realizar construções no software e faça novas descobertas explorando as potencialidades do software.

O Software Geogebra, segundo Araújo E Nóbriga (2008, p.2) "é um programa que vai além da geometria dinâmica e é classificado como software de Matemática dinâmica" porque o Geogebra apresenta, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

O GeoGebra possibilita que realize-se algumas construções utilizando pontos, segmentos, retas e círculos, explorando o paralelismo, o perpendicularismo, a determinação de entes geométricos utilizando régua e compasso, como bissetrizes, tangentes e outras. O GeoGebra disponibiliza também comandos para inserir coordenadas e equações, bem como derivar e integrar funções e ainda para encontrar raízes e pontos extremos de uma função.

Neste software, cada desenho que aparece na barra de ferramenta possui várias opções para construção, que podem ser utilizadas clicando na seta que está localizada no canto inferior e cada opção, ao ser selecionada, apresenta o seu nome e os passos de como pode ser usada e está ao lado direito no canto superior da tela.

. O Geogebra oferece uma barra de menu que apresenta várias opções que podem ser usadas neste software, além das opções de colar, gravar e desfazer temos a opção de, excluir os eixos, inserir o plano cartesiano e a malha quadriculada na área de trabalho, e a planilha que pode interagir com as contruções a serem realizadas. A janela de álgebra que pode ser visualizada ou não na área de trabalho do software, a qual contem os objetos livres, dependentes e auxiliares da figura. Ainda, temos o campo de entrada que está localizado na parte inferior do software o qual possui uma lista de comandos que podem ser usados conforme a necessidade e executá-lo com um toque na tecla do teclado “enter”.

O software Geogebra, portanto, disponibiliza muitas ferramentas que podem ser exploradas pelos professores e aplicadas em sala de aula como uma forma de diversificar as aulas e interagir a matemática com a informática, aproveitando- se do grande avanço tecnológico e a curiosidade dos alunos pela informática e pode ser um facilitador no processo ensino aprendizagem.

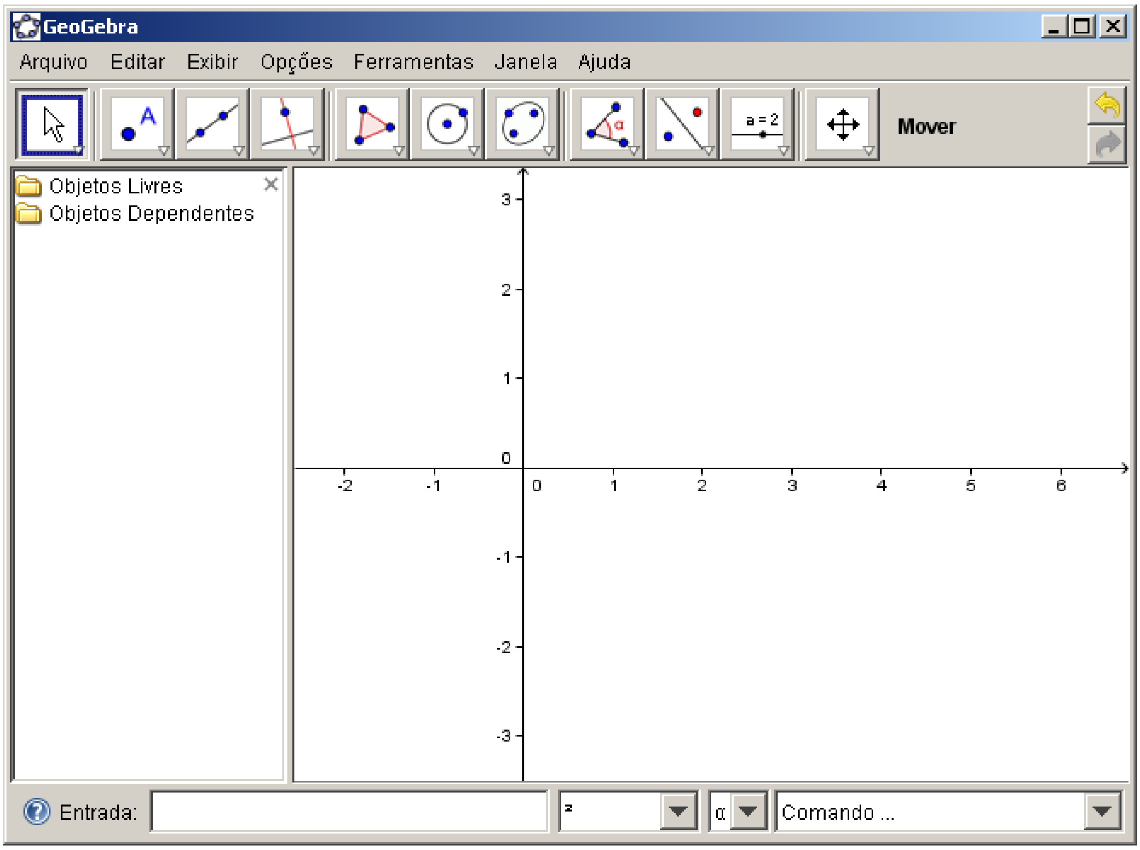
> Utilizar-se da tecnologia disponível, aliada ao conhecimento matemático previamente sistematizado, passa-se então a ter o computador como facilitador no processo educacional, a possibilidade de construir, deformar, reconstruir e modificar as construções feitas na tela do computador permitem testar propriedades, resultados e suposições. Essa interação gera a discussão e por consequência o aprofundamento do conteúdo. A dinâmica do movimento, oportunizada pelo software, permite uma vasta possibilidade de testes e análises, que no processo de construção via instrumentos de desenho, fica seriamente prejudicada, devido a morosidade e as dificuldades da construção, que passam a ser o fator desmotivador da aprendizagem ou da investigação.(PETLA, Revelino José; ROLKOUSKI,Emerson)

As vastas possibilidades de construções que possui o Geogebra proporcionam ao aluno um controle sobre as atividades tornando a tarefa mais prazerosa e motivadora, fazendo com que o aluno construa conhecimentos através de suas próprias ações no software e desperte o espírito investigador de cada aluno.

As próximas figuras ilustram algumas janelas de comandos do Geogebra.

TELA INICIAL DO GEOGEBRA

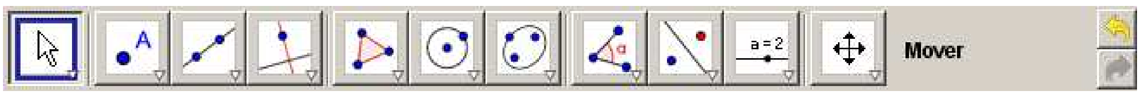
Figura 34- Tela Inicial do Geogebra



Fonte: Wikipédia

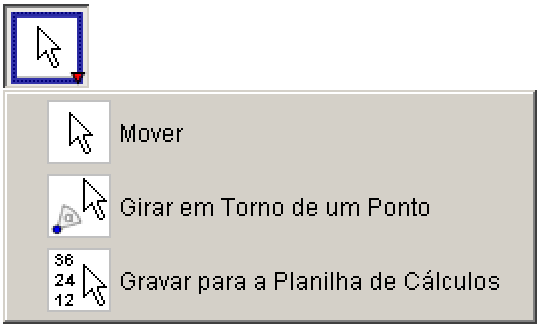
BARRA DE FERRAMENTAS

Figura 35- Barra de Ferramentas do Geogebra



Fonte: Wikipédia

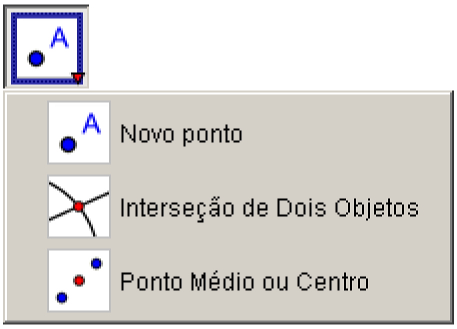
Figura 36- Janela de comando do Geogebra



JANELA 1

Fonte: Wikipédia

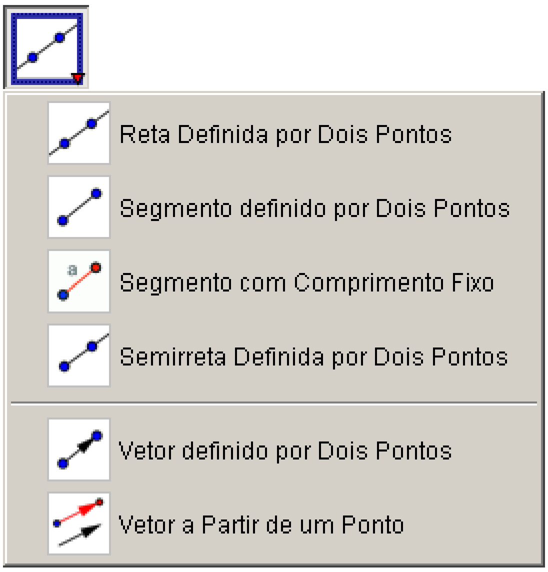
Figura 37- Janela de comando do Geogebra



JANELA 2

Fonte: Wikipédia

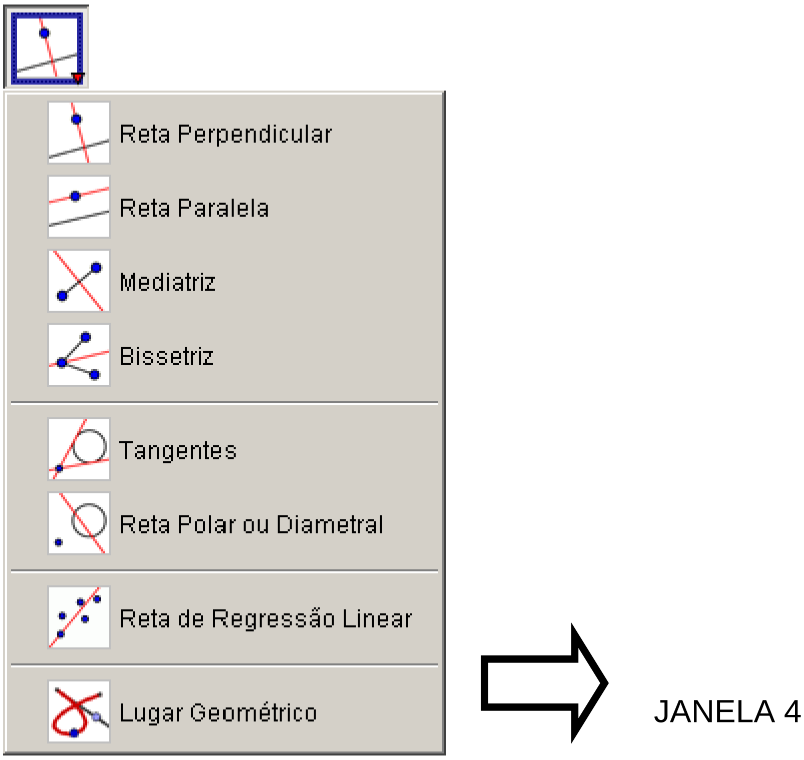
Figura 38- Janela de comando do Geogebra



JANELA 3

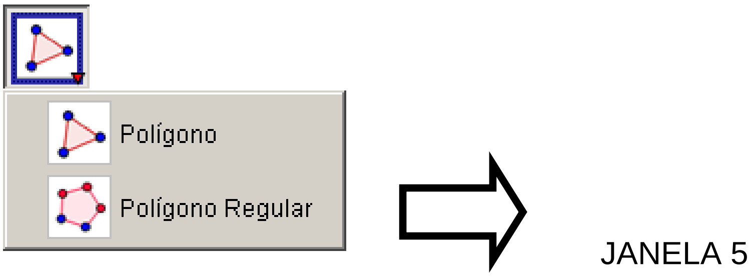
Fonte: Wikipédia

Figura 39- Janela de comando do Geogebra



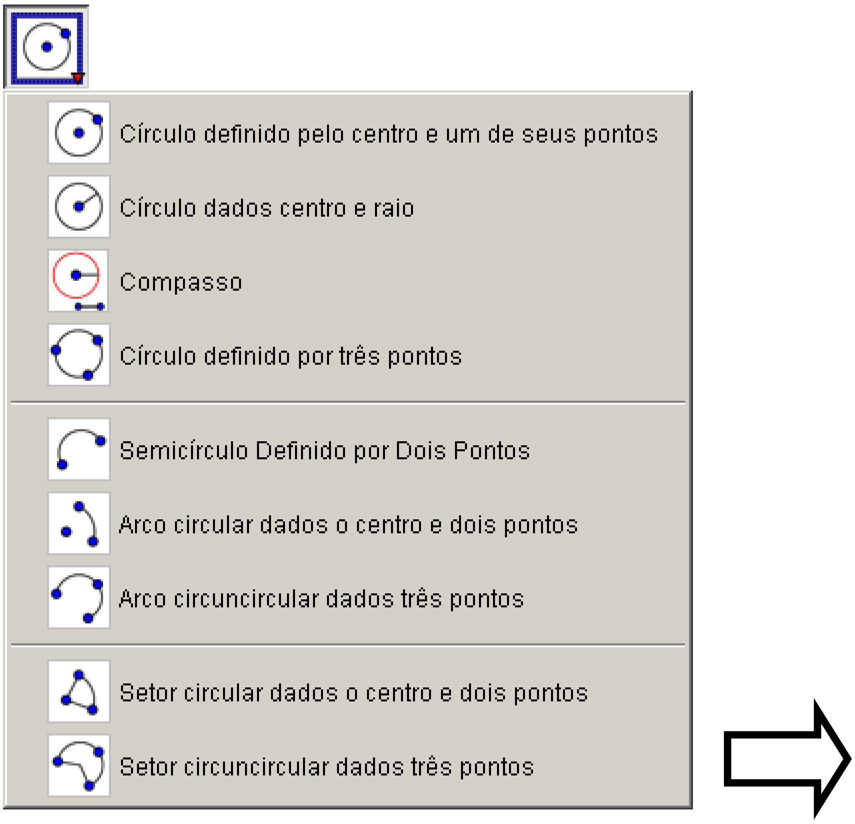
Fonte: Wikipédia

Figura 40- Janela de comando do Geogebra



Fonte: Wikipédia

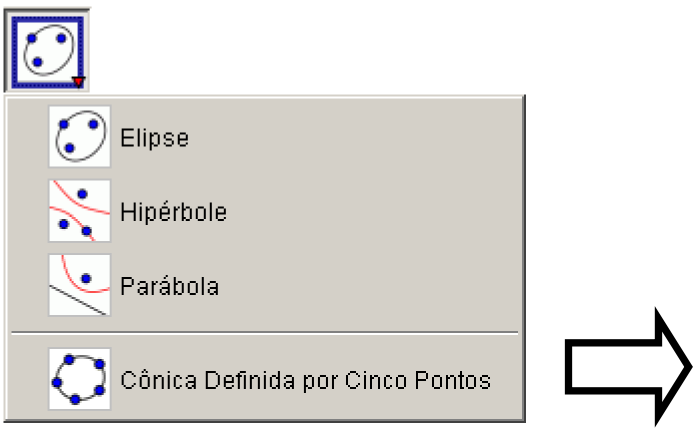
Figura 41- Janela de comando do Geogebra



JANELA 6

Fonte: Wikipédia

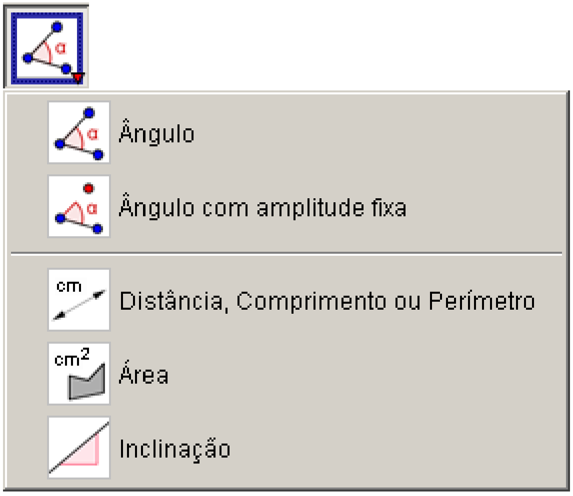
Figura 42- Janela de comando do Geogebra



JANELA 7

Fonte: Wikipédia

Figura 43- Janela de comando do Geogebra

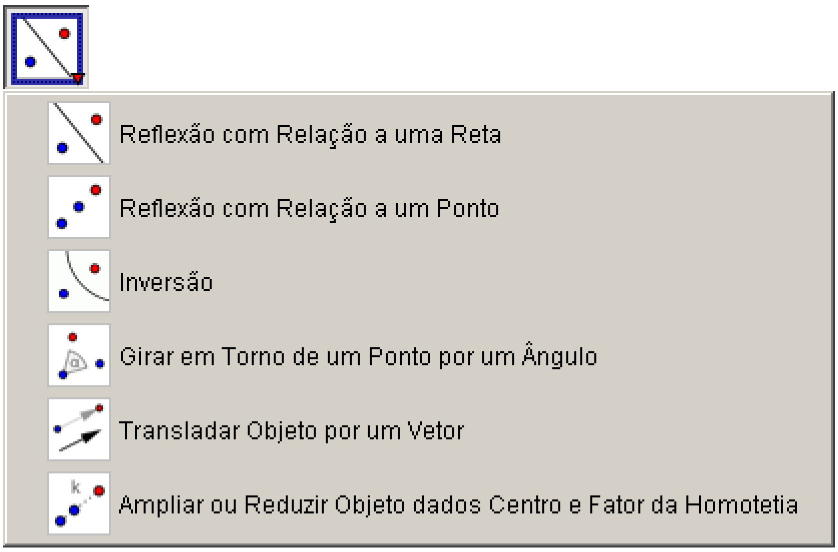


JANELA 8

Fonte: Wikipédia

JANELA 9

Figura 44- Janela de comando do Geogebra



Fonte: Wikipédia

Figura 45- Janela de comando do Geogebra

JANELA 10

Fonte: Wikipédia

Figura 46- Janela de comando do Geogebra

JANELA 11

Fonte: Wikipédia

5 SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ENVOLVENDO QUADRILÁTEROS USANDO O GEOGEBRA

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de resolução de exercícios sobre quadriláteros notáveis usando o software Geogebra. Nos exercícios vamos explorar as ferramentas do software, como seu campo de entrada geométrica e seu campo de entrada algébrica. O objetivo com essa proposta é interagir a Informática com a Matemática.

Os exercícios foram retirados de livros didáticos de 6º a 9º ano do Ensino Fundamental e selecionados de várias coleções, como por exemplo, Matemática na Medida Certa de Jakubo e Lellis; Matemática Scipione de Scipione Di Pierro Netto; Matemática Vida de Bongiovanni, Vissoto e Laureano; Praticando Matemática de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos; Matemática Fazendo a Diferença de Bonjorno e Ayrton; Matemática Pensar e Descobrir de Giovanni e Giovanni Jr, Projeto Araribá Matemática; Matemática de Imenes e Lellis; A conquista da Matemática de José Ruy Giovanni Jr e Benedicto Castrucci; Matemática Realidade de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, Muitos destes livros são utilizados por escolas estaduais da cidade de Alegrete, como a Escola Estadual de Ensino Fundamental Eduardo Vargas e também pelo Colégio Emilio Zuñeda.

A ideia de usar exercícios de livros didáticos é para incentivar professores a usar o software como uma ferramenta auxiliar para suas aulas, não sendo preciso criar novas atividades, mas utilizar os exercícios já existentes e/ou adaptá-los e com isso motivar o professor a explorar sua própria criatividade.

Nos restringimos ao quadriláteros pois os assuntos de geometria são vastos e não conseguiríamos abordar nesse trabalho.

Para contextualizar, expomos o assunto de geometria estudado em cada ano do ensino fundamental e dentro disto propomos roteiros de como resolver o exercício no Geogebra. O assunto sobre quadriláteros é mais explorado nos sexto e sétimo anos do ensino fundamental.

5.1 Sexto ano

O estudo da Geometria Plana inicia no 6º ano do Ensino Fundamental com noções fundamentais. Os livros didáticos apresentam, em geral, uma pequena introdução histórica. Os alunos reconhecem figuras geométricas através de alguns objetos concretos já conhecidos, a fim de se chegar aos conceitos de ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta, ângulo e polígonos. E os quadriláteros notáveis, suas definições, cálculo da área e perímetro.

Também se associa a noção de volume introduzindo como pode-se calcular o volume do bloco retangular (paralelepípedo reto-retângulo) e do cubo.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:

Projeto Araribá Matemática 5ª série. Obra Coletiva. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2006. página 255

Exercícios no Geogebra:

1) Desenhe vários quadriláteros. Desenhe quadriláteros quaisquer, paralelogramos, losangos, retângulos e trapézios. Responda:

a) Quantas diagonais têm os quadriláteros?

Resposta: duas.

b) Em que quadriláteros as diagonais se cortam ao meio?

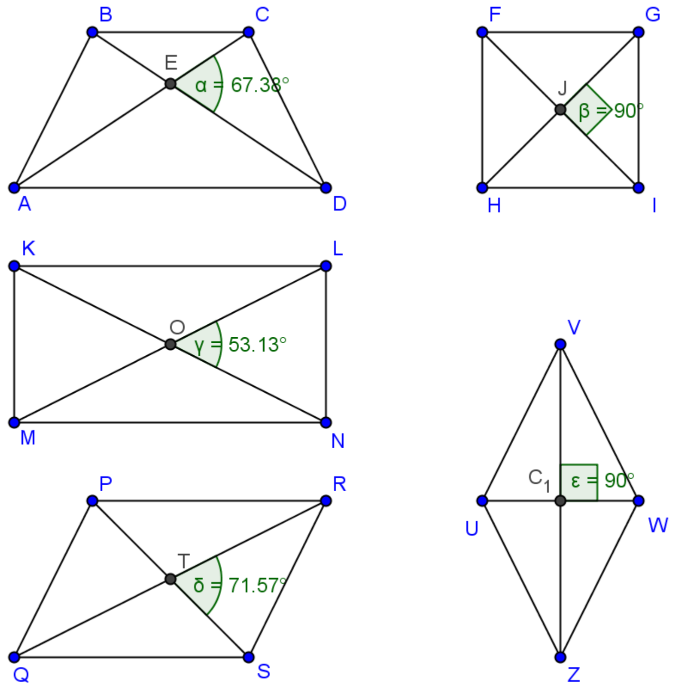
Resposta: paralelogramos, losangos, quadrados e retângulos.

c) Em que paralelogramos os ângulos entre as diagonais são retos?

Resposta: quadrados e losango

***Resolução no Geogebra**:*

Figura 47- Exercício 1 6º ano item a, b e c



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Item a)

Passo 1- Coloque primeiro a malha, na barra de menu exibir “malha”. Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, e comece o quadrado, e faça todos os lados utilizando da mesma opção. Para desenhar as diagonais utilize também opção “Segmento definido por dois pontos”.

Passo 2- Para o paralelogramo, retângulo, trapézio e losango utilize da mesma ferramenta janela 3 e a opção “Segmento definido por dois pontos”, faça todos os lados com a mesma opção. E para desenhar as diagonais de todas as figuras utilize da mesma ferramenta.

Item b)

Passo 1- Para identificar quais são os quadriláteros cujas diagonais se cortam ao meio, utiliza-se a barra de ferramenta janela 2 e selecione a opção “Ponto Médio ou Centro”, e selecione cada diagonal de cada figura e de um clique, e faça para todas as figuras. Dessa forma, veremos em quais quadriláteros em que os pontos médios coincidiram.

Item c)

Passo 1- Clique na barra de ferramentas janela 8 e selecione a opção "ângulo". Clique nos pontos correspondentes para obter os ângulos entre as diagonais.

2) Desenhe:

a) Um quadrilátero com quatro ângulos retos.

Resposta: O desenho pode ser um retângulo ou um quadrado.

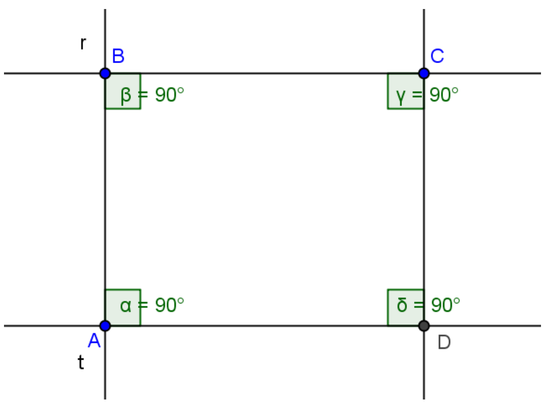
b) Um paralelogramo com dois ângulos obtusos e dois ângulos agudos.

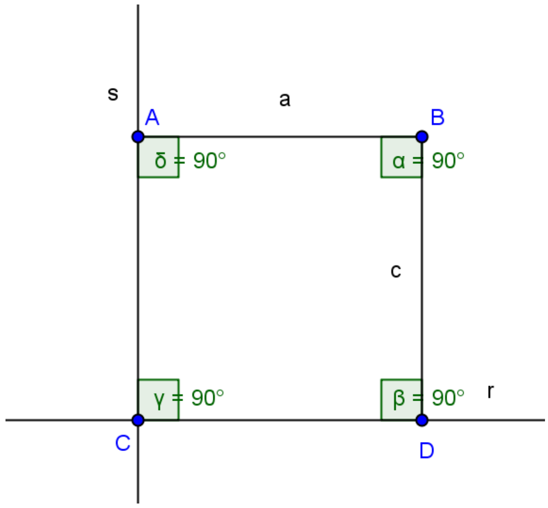
Resposta: O desenho pode ser um losango ou um paralelogramo.

Resolução no Geogebra:

Item a)

Figura 48- Exercício 6º ano item a





Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Vamos fazer o retângulo:

Passo 1- Clique na barra de ferramentas na janela 2 e crie três pontos distintos não colineares. Na janela 3 e selecione a opção "Reta definida por dois pontos", e defina a reta r passando por B e C e depois selecione a opção "Reta Perpendicular" na janela 4 e selecione o ponto A e a reta r para obtermos a perpendicular. Pelo ponto A crie uma reta perpendicular à r, chamada de t.

Passo 2- Para finalizarmos o quadrilátero clique novamente na barra de ferramentas janela 4 a opção "Reta Paralela" assim selecione o ponto C e a reta r, dessa forma obtemos a reta s paralela a r, construindo o quadrilátero. O ponto de intersecção entre as retas t e s é o ponto D e assim obtemos o retângulo ABCD.

Passo 3- Para obtermos os ângulos internos deste quadrilátero ABCD, clique na barra de ferramentas janela 8, selecione a opção "Ângulo", assim selecione três pontos, no sentido horário, para obter o ângulo. Com isso, repita para todos os pontos até obter todos os ângulos internos do quadrilátero ABCD.

Vamos fazer o quadrado:

Passo 1- Clique na barra de ferramenta janela 3 e selecione a opção "Segmento com Comprimento Fixo", e determine uma medida qualquer, assim obtemos o lado $\overline{AB}$.

Passo 2- Depois selecione a opção "Reta perpendicular" na janela 4 e construa a reta perpendicular ao segmento AB passando por A, reta r. Da mesma forma crie a reta perpendicular ao segmento AB passando por B, reta s.

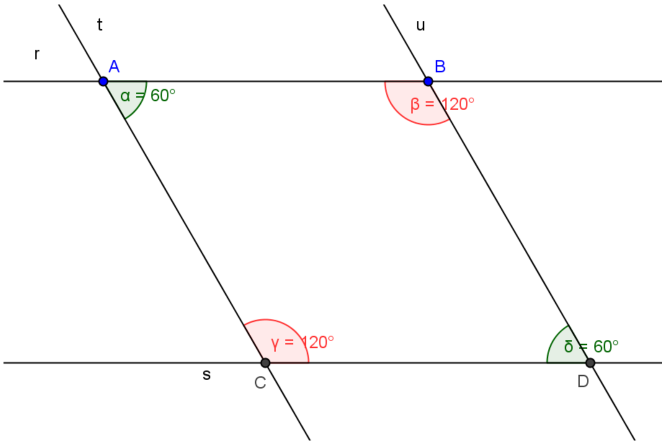
Passo 3- Na janela 8 selecione "círculo definido pelo centro e um de seus pontos" e crie um círculo de centro A e raio AB. Onde o círculo intercepta a reta r temos o ponto C. Trace uma reta paralela ao segmento AB, reta t, passando por C, e assim obteremos o ponto D que é a intersecção das retas s e t. Uma os pontos e teremos o quadrado.

Passo 4- Para obtermos os ângulos internos deste quadrilátero ABCD, clique na barra de ferramentas janela 8, selecione a opção "Ângulo", assim selecione três pontos para obter o ângulo. Com isso, repita para todos os pontos até obter todos os ângulos internos do quadrilátero ABCD.

Item b)

Vamos fazer um paralelogramo:

Figura 49- Exercício 2 do 6º ano item b



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1- Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção "Reta definida por dois pontos", obtemos a reta r em seguida clique na janela 8 e selecione a opção "Ângulo com Amplitude Fixa", selecione os pontos A e B nesta ordem, a fim de obtermos o ângulo obtuso, neste caso 120°, e seleci one no sentido anti-horário. Com isso, clique novamente na janela 8 e selecione a opção "Ângulo com Amplitude Fixa", e selecione os pontos B e A, determine o ângulo agudo, neste caso 60°, e selecione no sentido horário formando a reta t.

Passo 2: Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção "Reta definida por dois pontos", obtemos a reta s que passa pelos pontos C e D.

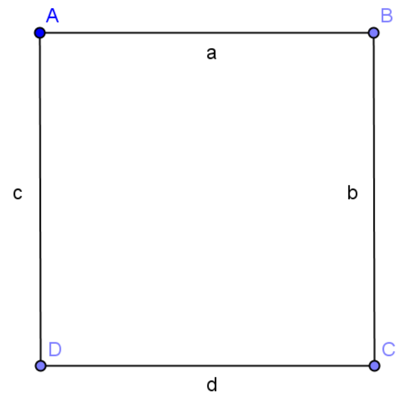
Passo 3: Repita o passo 2, a fim de obtermos a reta t que passa pelos pontos A e C.

Passo 4: Para concluirmos o paralelogramo, clique na janela 4 e selecione a opção "Reta Paralela" e selecione o ponto B e a reta t, assim obtemos a reta u. E assim obtemos o paralelogramo ABCD.

3) Desenhe um retângulo com quatro lados de mesma medida.

Resolução no Geogebra:

Figura 50- Exercício 3 do 6º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

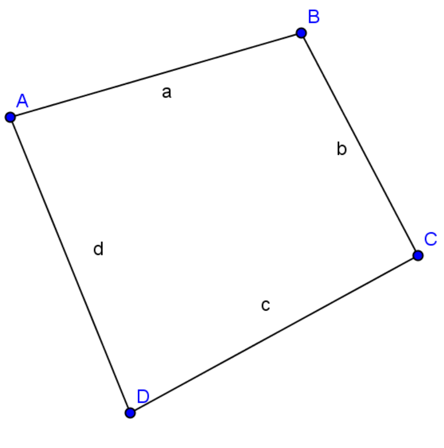
Passo 1- Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção "Segmento com Comprimento Fixo" e clique no campo de entrada geométrica, assim defina o comprimento do segmento com medida 4cm, por exemplo e construa 4 lados com a mesma ferramenta e mesma medida. Utilize o mouse para mover os lados construídos.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:
PIERRO NETTO, Scipione Di. **Matemática Conceitos e Histórias-Matemática Scipione 5ª série.** São Paulo: Scipione, 1991.

4) Desenhe os polígonos convexos pedidos abaixo:
a) um quadrilátero
b) um paralelogramo
c) um trapézio

Resolução no Geogebra:
Item a)

Figura 51- Exercício 4 do 6º ano item a



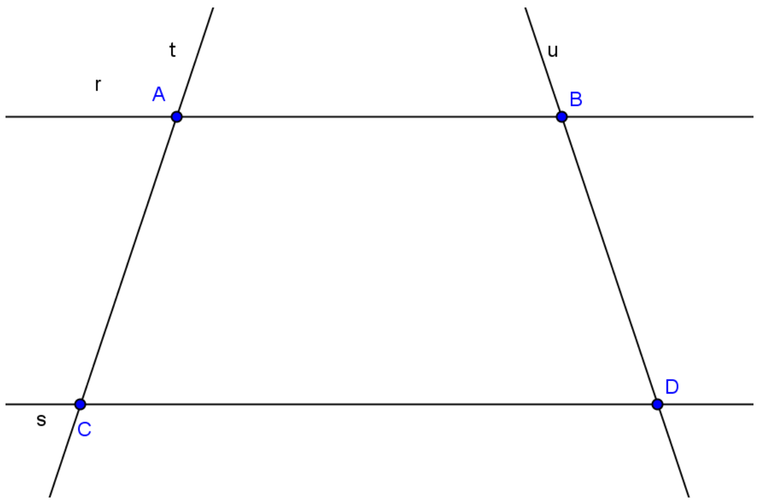
Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Crie 4 pontos quaisquer não colineares e clique na barra de ferramentas e selecione a janela 3 e selecione a opção "Segmento Definido por Dois Pontos" para desenhar os quatros lados do quadrilátero.

Item b) Vimos no item b do exercício 2 como fazemos um paralelogramo.

Item c)

Figura 52- Exercício 4 do 6º ano item c



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Crie dois pontos A e B usando a janela 2. Clique na barra de ferramentas na janela 3 e selecione a opção “Reta Definida por Dois Pontos” construindo a reta r e depois clique na janela 4 e selecione a opção “Reta Paralela”, selecione o ponto C e a reta r, obtendo a reta s.

Passo 2: Em seguida clique na janela 3 e selecione a opção “Reta Definida por Dois Pontos” selecione o ponto A e C obtendo a reta t.

Passo 3: Repita o passo 2 para definir a reta u selecionando os pontos B e D.

5.2 Sétimo ano

No 7º ano explora-se um pouco mais o assunto sobre os quadriláteros, seus elementos, suas classificações e a soma das medidas dos ângulos internos desta figura.

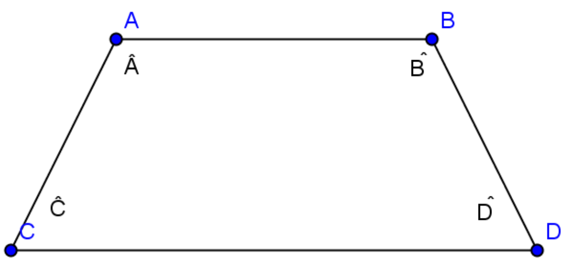
Neste ano é retomado o cálculo de área das figuras planas. O estudo das áreas das figuras inicia-se com a área do retângulo e do quadrado. São também apresentadas as áreas dos paralelogramos, dos losangos e dos trapézios.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:

GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática 7° ano.** 1ª edição. São Paulo: FTD, 2009.

1) No trapézio a seguir use um transferidor para determinar as medidas Ĉ e D̂ dos ângulos internos. Em seguida calcule Â + B̂ + Ĉ + D̂.

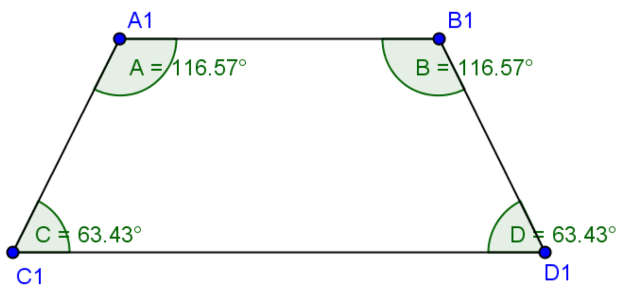
Figura 53- Exercício 1 do 7º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

***Resolução no Geogebra**:*

Figura 54- Exercício 1 do 7º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Soma: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 116.57° + 116.57° + 63.43° + 63.43° = 360°$

Passo 1: Coloque primeiro a malha, na barra de menus exibir “malha”. Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “ Segmento definido por dois pontos, e comece a desenhar o trapézio, faça todos os lados utilizando a mesma opção.

Passo 2: Clique na janela 8 e selecione a opção “ângulo”, depois selecione dois lados do trapézio para determinar o ângulo interno correspondente a esses lados, repita o procedimento até obter os quatro ângulos internos deste trapézio.

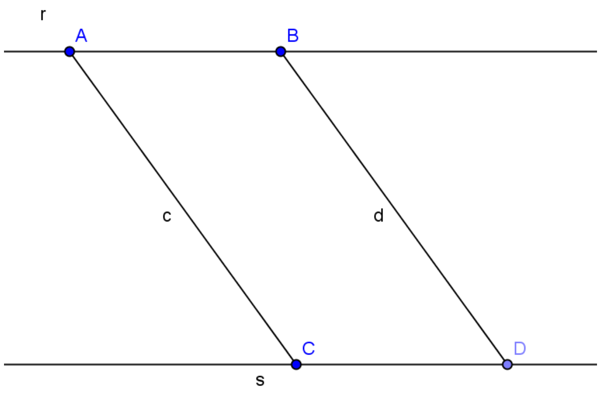
Passo 3: Para calcular a soma dos quatro ângulos, escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “ângulo” que esta localizado na parte inferior a direita , e digite os ângulos correspondentes somando cada um deles e pressione “enter” , assim obtemos a soma dos ângulos na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da tela do programa.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:
Projeto Araribá Matemática 6ª série. Obra Coletiva. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2006.

2) Siga as instruções.
Desenhe em seu caderno duas retas paralelas com aproximadamente 4cm de distância.
Em seguida, tomando adequadamente dois pontos em cada reta, desenhe:
a) um paralelogramo (que não seja um retângulo nem um losango);
b) um retângulo.

Resolução no Geogebra:
Item a)

Figura 55- Exercício 2 do 7º ano item a



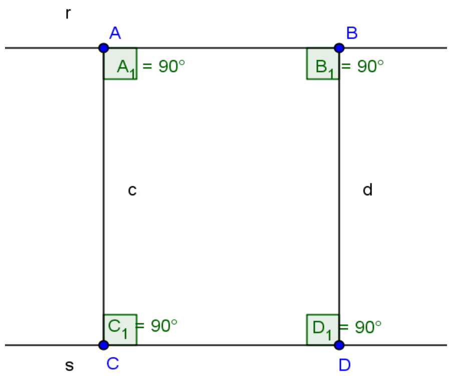
Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Para determinar as duas retas paralelas, clique na barra de ferramentas na janela 3, e selecione a opção "Reta definida por dois pontos", depois clique na janela 4, e selecione a opção "Reta paralela" selecione um ponto e a reta r.

Passo 2: Para construir o outros lados do paralelogramo, clique na janela 3 e selecione a opção "Segmento definido por dois pontos", selecione os pontos que pertencem as retas r e s.

Item c)

Figura 56- Exercício 2 do 7º ano item c



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Para determinar as duas retas paralelas, clique na barra de ferramentas na janela 3, e selecione a opção “Reta definida por dois pontos”, depois clique na janela 4, e selecione a opção “Reta paralela” selecione um ponto e a reta r.

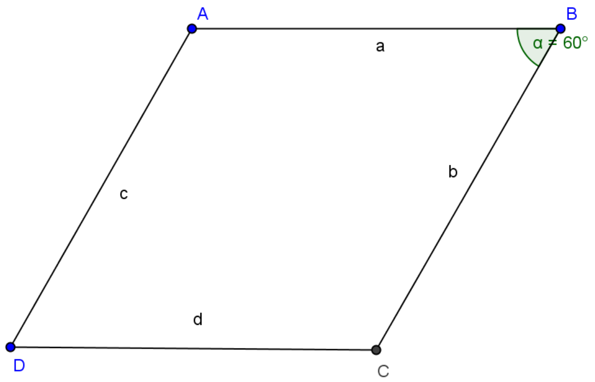
Passo 2: Para construir o outros lados do retângulo, clique na janela 3 e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, selecione os pontos que pertencem as retas r e s.

3) Construa com régua, transferidor e compasso.

Item a) Um paralelogramo com lados de 7cm e 3cm e um dos ângulos internos medindo 60°.

Resolução no Geogebra:

Figura 57- Exercício 3 do 7º ano item a



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Coloque primeiro a malha, na barra de menus exibir “malha”. Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento com comprimento fixo”, e desenhe um segmento com 6 cm e depois clique na janela 8, “ângulo com amplitude fixa” defina o ângulo como 60°, selecionando o ponto A e vértice B. Assim definimos o ângulo do paralelogramo a ser construído.

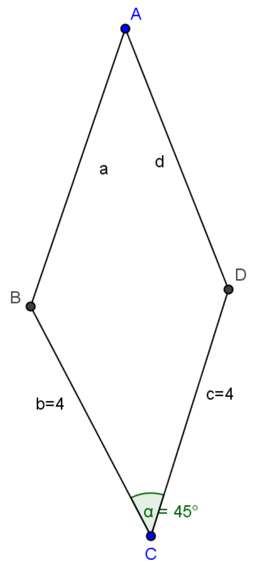
Passo 2: Para continuar desenhando o paralelogramo basta utilizamos a barra de ferramenta e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, desta forma terminamos os lados da figura. Para deixarmos as medidas dadas no exercício basta utilizarmos a janela 1 "mover”.

Passo 3: Completamos o paralelogramo traçando retas paralelas e encontrando o último vértice. Usamos a opção “segmento definido por dois pontos” e construímos os lados do paralelogramo.

b) Um losango com lado medindo 4 cm e um ângulo interno medindo 45°.

Resolução no Geogebra:

Figura 58- Exercício 3 do 7º ano item b



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

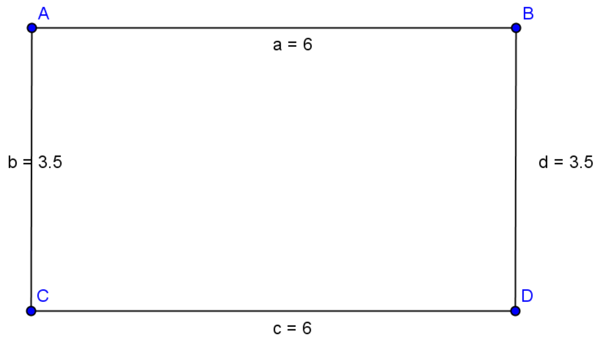
Passo 1: Coloque primeiro a malha, na barra de menus exibir “malha”. Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento com comprimento fixo”, e desenhe um segmento com 4cm e depois clique na janela 8, “ângulo com amplitude fixa” defina o ângulo como 45°, selecione o ponto D e vértice C. Assim definimos o ângulo do losango a ser construído.

Passo 2: Para continuar desenhando o losango basta utilizamos a barra de ferramenta e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, desta forma terminamos os lados da figura. Para deixarmos as medidas dadas no exercício basta utilizarmos a janela 1 "mover”.

c) Um retângulo com base de 6 cm e altura 3,5 cm.

Resolução no Geogebra:

Figura 59- Exercício 3 do 7º ano item c



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Coloque primeiro a malha, na barra de menus exibir “malha”. Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento com comprimento fixo”, e desenhe a base do retângulo com 6 cm e sua altura com 3,5cm. Mova os segmentos para montar a base e uma lateral do retângulo. Trace retas paralelas e obtenha o último vértice. Use a opção “ segmento definido por 2 pontos” e termine de construir o retângulo ABCD.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:

IMENES, Luiz Márcio & LELLIS, Marcelo, **Matemática 6**. 1ª edição. São Paulo: Scipione, 1998.

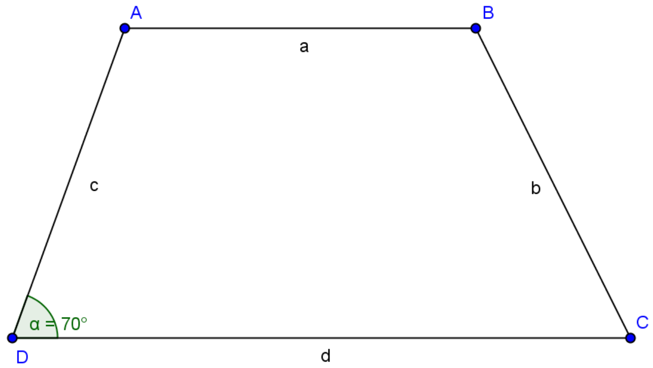
4) Desenhe um trapézio ABCD parecido com este:

As medidas devem ser estas:

AB= 5cm; AD= 6,5cm; CD= 8cm e D̂= 70°.

Resolução no Geogebra

Figura 60- Exercício 4 do 7º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Primeiro realizaremos o lado CD, clique na barra de ferramentas janela 3 “segmento com comprimento fixo” determine o valor de 8cm dado no exercício.

Passo 2: Clique na janela 8, “ângulo com amplitude fixa” e determine o ângulo de 70° como pede no exercício, selecione o ponto C e D para determinar o ângulo.

Passo 3: Para construir o lado AD, clique na janela 3, “segmento com comprimento fixo” determine o valor 6,5cm dado no exercício, em seguida clique na janela 1 “mover”, e mova o lado AD formando assim o lado proposto.

Passo 4: Para construir o lado AB, clique na janela 3, “segmento com comprimento fixo” determine o valor 5cm dado no exercício.

Passo 5: Para terminar o trapézio basta construir o lado BC, clique na janela 3, “Segmento definido por dois pontos”, selecione o ponto B e C.

5) Construa:

a) Um paralelogramo com lados medindo 8 cm e 6 cm e um dos ângulos igual a 115°;

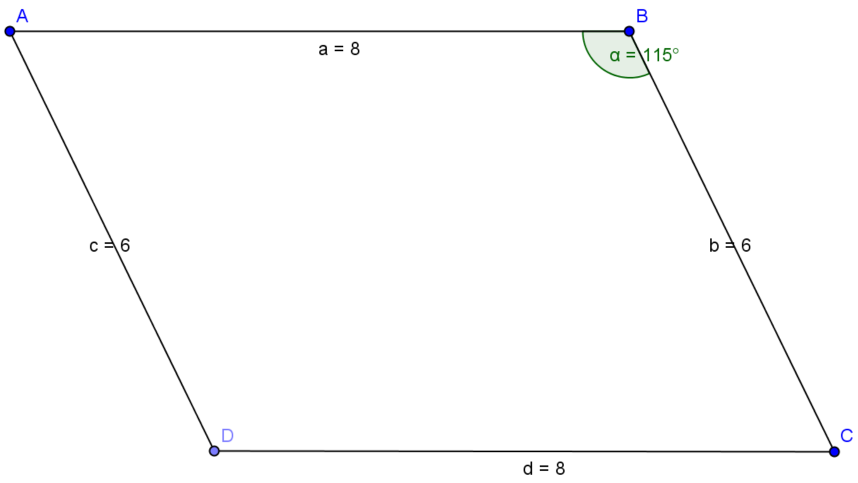
b) Um losango de lados iguais a 6,4 cm e um dos ângulos igual a 50°;

c) Um quadrado de lados iguais a 2,7 cm.

***Resolução no Geogebra**:*

Item a)

Figura 61- Exercício 5 do 7º ano item a



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis,2011.

Passo 1: Coloque primeiro a malha, na barra de menus exibir "malha". Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção " Segmento definido por dois pontos", e desenhe o lado AB do paralelogramo com 8cm.

Passo 2: Para determinar o ângulo proposto pelo exercício, basta clicar na barra de ferramentas janela 8 e selecione a opção "Ângulo com amplitude fixa", selecione o ponto A e B e determine o ângulo de 115° e clique " enter".

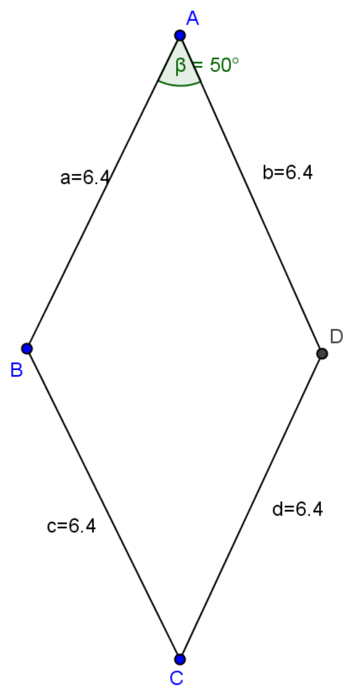
Passo 3: Para determinar os lados AD e BC basta clicar na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção "Segmento com Comprimento Fixo", clique no ponto A e determine o valor de 6cm, para mover o segmento formado clique na janela 1 e selecione a opção "mover", para definir os lados do paralelogramo.

Passo 4: Repita o passo anterior para construir o lado BC.

Passo 5: Para determinar o lado CD, clique na janela 3 e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, selecione o ponto D e C.

Item b)

Figura 62- Exercício 5 do 7º ano item b



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, clique no campo de entrada geométrica e determine a medida do lado proposto pelo exercício, 6,4cm. Para mover o segmento AB, clique na janela 1 na opção “mover”.

Passo 2: Para determinar o ângulo proposto pelo exercício, basta clicar na barra de ferramentas janela 8 e selecione a opção “Ângulo com amplitude fixa”, selecione o ponto B e A e determine o ângulo de 50° e clique “e nter”.

Passo 3: Para determinar os lados AD e BC basta clicar na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, e clique no ponto

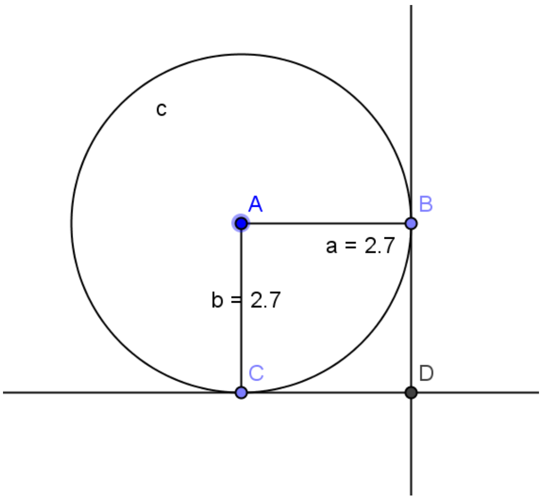
A e determine o valor de 6,4cm, para mover o segmento formado clique na janela 1 e selecione a opção “mover”, para definir os lados do paralelogramo.

Passo 4: Repita o passo anterior para construir o lado BC.

Passo 5: Para determinar o lado CD, clique na janela 3 e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, selecione o ponto D e C. Use na janela 8 “Distância, comprimento ou perímetro”. Caso ocorra alguma diferença nas medidas ao construir a figura basta utilizar a janela 1 da barra de ferramenta ”mover” até obter a medida dada no exercício.

Item c)

Figura 63- Exercício 5 do 7 º ano item c



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Clique na barra de ferramentas janela 6 e selecione a opção “Círculo dados centro e raio”, selecione um ponto qualquer no campo de entrada geométrica e determine a medida de 2,7cm de raio.

Passo 2: Para começar a determinar os lados do quadrado, clique na janela 3 e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, clique no centro da circunferência e em qualquer ponto pertencente a essa circunferência, assim obtemos o lado AB. Para determinar o lado AC, repita esse passo.

Passo 3: Para determinar o lado AC, repita passo 2.

Passo 4: Para determinar os outros lados do quadrado, clique na janela 4 e selecione a opção “Tangentes”, selecione o ponto B e depois selecione a circunferência, assim temos a tangentes à circunferência dada que passa por B. O mesmo repita para determinar a tangente que passa por C. Clique na janela 2 e selecione a opção “Novo Ponto” e clique no encontro das retas tangentes, determinando o ponto D.

5.3 Oitavo ano

No 8º ano aprofunda o estudo iniciado nos anos anteriores sobre triângulos, quadriláteros e círculos determinando características e elementos destas figuras. E estudam-se algumas propriedades geométricas dos quadriláteros, envolvendo ângulos, diagonais.

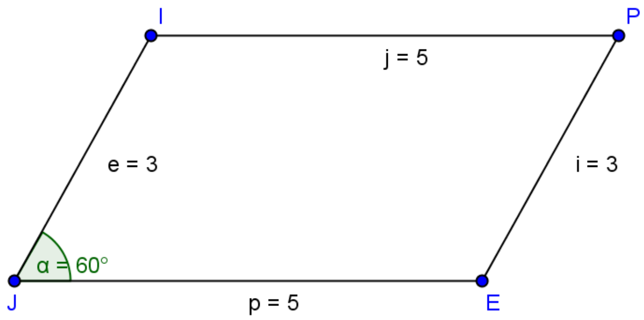
A respeito dos quadriláteros temos como identificar os diferentes tipos de quadriláteros no nosso dia a dia, os seus conceitos, suas propriedades, a soma de seus ângulos internos, e os seus elementos. Ainda no 8° ano é retomado cálculo do perímetro e a área de um quadrilátero.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:
IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática Realidade 8º ano.** 6ª edição. São Paulo: Atual, 2009.

1) Construa um paralelogramo JIPE, sabendo que JI= 3cm, JE= 5cm e $\hat{J}$=60°.

***Resolução no Geogebra**:*

Figura 64- Exercício 1 do 8º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

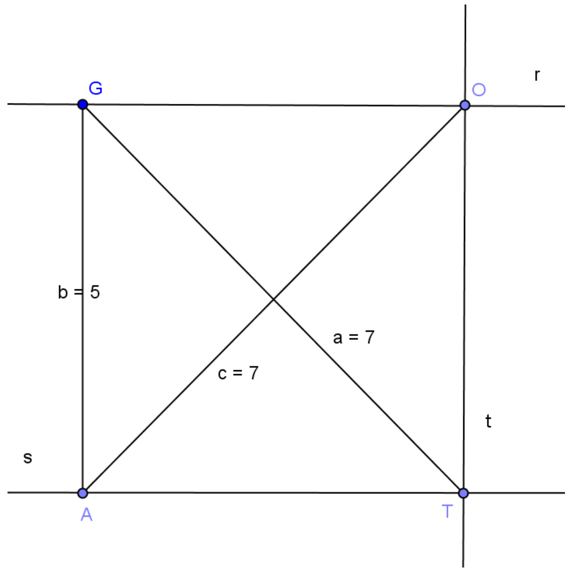
Passo 1: Coloque primeiro a malha, na barra de menus exibir “malha”. Clique na barra de ferramentas janela 4 e selecione a opção “ Segmento definido por dois pontos”, e desenhe um segmento com 5 cm e depois clique na janela 8, “ângulo com amplitude fixa” defina o ângulo como 60°, selecione o ponto I e vértice J, no sentido horário. Assim definimos o ângulo do paralelogramo a ser construído.

Passo 2: Para continuar desenhando o paralelogramo basta utilizarmos a barra de ferramenta e selecionar a opção “Segmento definido por dois pontos”, desta forma terminamos os lados da figura. Usando a janela 8, a opção “distância, comprimento ou perímetro meça as medidas dos segmentos. Para deixarmos as medidas dadas no exercício basta utilizarmos a janela 1 "mover”.

2) Construa um retângulo GATO, sabendo que um lado mede 5cm e as diagonais medem 7cm.

***Resolução no Geogebra**:*

Figura 65- Exercício 2 do 8º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Clique na barra de ferramentas janela 3 e selecione a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, e determine a medida do lado GA, 5cm, dado no exercício, depois as diagonais AO e GT , 7cm.

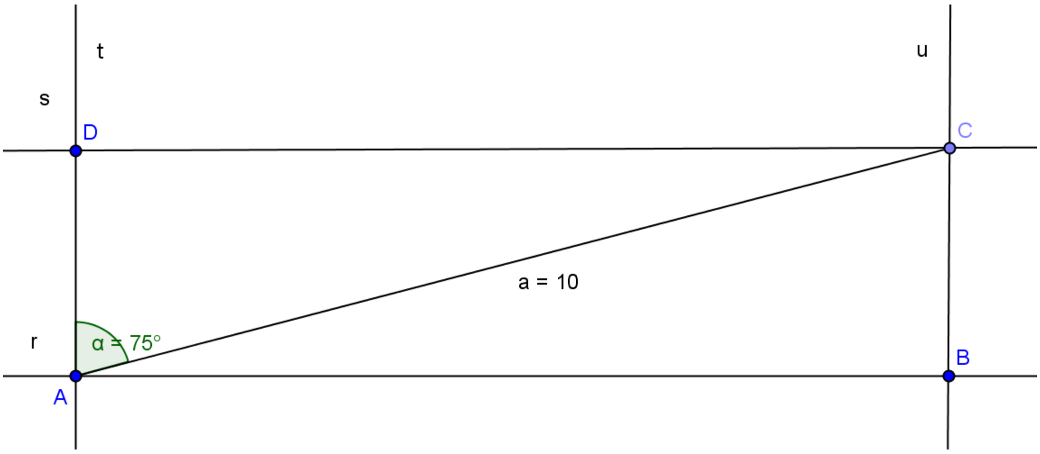
Passo 2: Para determinar os outros lados, clique na janela 4 e selecione a opção “Reta Paralela”, selecione o ponto T e o lado GA, gerando a reta t e o lado TO. Em seguida, na mesma janela selecione a opção “Reta Perpendicular”, selecione o ponto T e o lado GA, gerando a reta s e o lado AT. Na mesma janela, selecione a mesma opção, e selecione o ponto O e o lado GA, gerando a reta r e o lado GO.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:
Matemática Scipione Conceitos e Histórias 7ª série. Nova edição atualizada. São Paulo: Scipione, 1995.

3) Construa um retângulo sabendo que uma das diagonais mede 10 cm e que um dos ângulos formado por essas diagonais mede 75°.

Resolução no Geogebra:

Figura 66- Exercício 3 do 8º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Clique na barra de ferramentas na janela 3 e selecione a opção “Segmento com comprimento fixo”, e determine o comprimento de 10 cm. Use a janela 1 e selecione a opção “mover” para movimentar o segmento construído.

Passo 2: Para determinar o ângulo de 75°, clique na janela 8 e selecione a opção “ângulo com amplitude fixa”, clique no ponto C e depois no ponto A determine o ângulo proposto e clique “enter”. Caso necessite movimentar o ângulo utilize na janela 1, a opção “mover” e clique em um dos pontos.

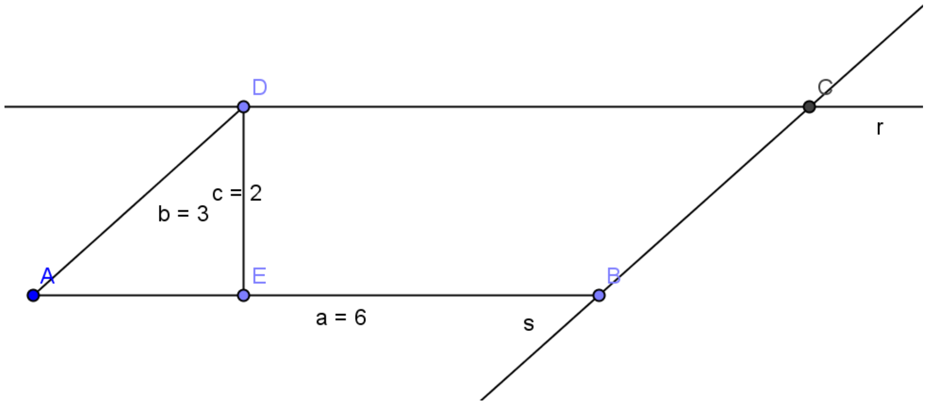
Passo 3: Para construir dois lados do retângulos, clique na janela 3 e selecione a opção “Reta definida por dois pontos”, clique no ponto A e defina o ponto B, construindo a reta r e o lado AB. Depois clique na janela 4 e selecione a opção “Reta paralela” assim selecione o ponto C e reta r , dessa forma definimos a reta s paralela a r e o lado CD.

Passo 4: Para construirmos os lados correspondentes as alturas do retângulo, clique na janela 4 e selecione a opção “Reta perpendicular”, primeiro selecione o ponto A e a reta s construindo a reta t e o lado AD. Faça o mesmo para construir a reta u e o lado BC.

4) Um paralelogramo tem 18cm de perímetro, 2cm de altura, e um dos lados mede o triplo da altura. Desenhe esse paralelogramo em seu caderno.

Resolução no Geogebra:

Figura 67- Exercício 4 do 8º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Clique na barra de ferramentas na janela 3 e selecione a opção “Segmento com comprimento fixo”, e determine o lado AD com 3cm, a base do paralelogramo AB com 6cm e a altura DE com 2cm. Use a janela 1 e selecione a opção “mover” para movimentar o segmento construído.

Passo 2: Para construir os outros dois lados do paralelogramo, clique na janela 4 e selecione a opção “Reta Paralela” e clique no ponto B e selecione o lado AD gerando a reta s e o lado BC. Depois repita a mesma janela e a opção “Reta Paralela” e selecione o ponto D e o lado AB, gerando a reta r e o lado CD.

5) Desenhe quadriláteros que tenham:

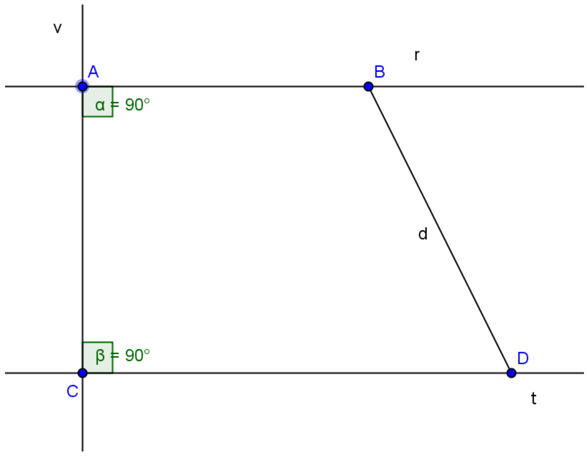
a) apenas dois ângulos retos.
Resposta: trapézio retângulo.

b) apenas um par de lados com medidas iguais.
Resposta: trapézio isósceles.

Resolução no Geogebra:

Item a)

Figura 68- Exercício 5 do 8º ano item a



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

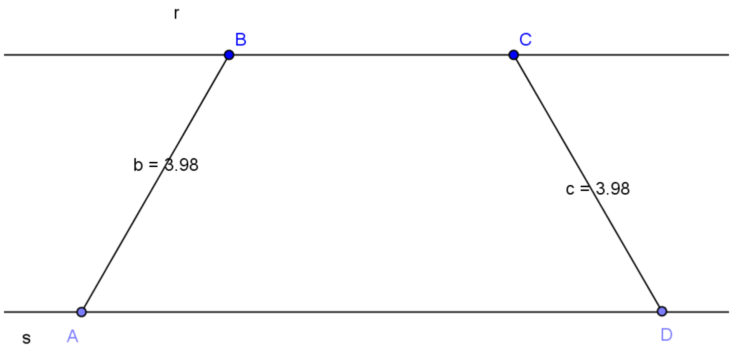
Passo 1: Para definir o trapézio retângulo, clique na janela 3 e selecione a opção “Reta definida por Dois Pontos”, definindo a reta r e o lado AB.

Passo 2: Para determinar os outros dois lados do trapézio, clique na janela 4 e selecione a opção “Reta Perpendicular”, selecione o ponto C e a reta r gerando a reta v e o lado AC. Use a mesma janela e a opção “Reta Paralela”, selecione o ponto C e a reta r, gerando a reta t e o lado BD.

Passo 3: Para obter o último lado, clique na janela 3 e selecione a opção “Segmento definido por dois pontos”, selecione o ponto B e D, definindo o lado BD do trapézio retângulo.

Item b)

Figura 69- Exercício 5 do 8º ano item b



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Para determinar o trapézio, clique na janela 3 e selecione a opção “Reta Definida por Dois Pontos” e selecione os pontos A e B, definindo a reta r, o lado AB e depois utilize a janela 4 e selecione a opção “Reta Paralela” e selecione o ponto C e a reta r definindo a reta s e o lado CD.

Passo 2: Para definir os outros dois lados do trapézio, selecione a janela 3 e selecione a opção “Segmentos Definido por Dois Pontos”, primeiro selecione os pontos A e C, depois os pontos B e D. Caso necessite utilize a janela 1, e selecione a opção “Mover”.

Passo 3: Para determinar as medidas dos dois pares de lados iguais , utilize a janela 8 e selecione a opção “Distância, Comprimento ou Perímetro”.

5.4 Nono ano

A abordagem sobre os quadriláteros neste ano é retomada com a noção de área, o conceitos de figuras planas equivalentes, e aplicação das fórmulas do cálculo da área dos quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, paralelogramos, trapézio e losango) e do triângulo, e os alunos resolvem problemas que envolvam a área destas figuras.

Ao estudar as relações métricas no triângulo retângulo temos a aplicação do Teorema de Pitágoras em algumas construções geométricas. E ainda faz um estudo mais geral sobre polígonos culminando com os polígonos regulares. O estudo das áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos à mesma circunferência.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:

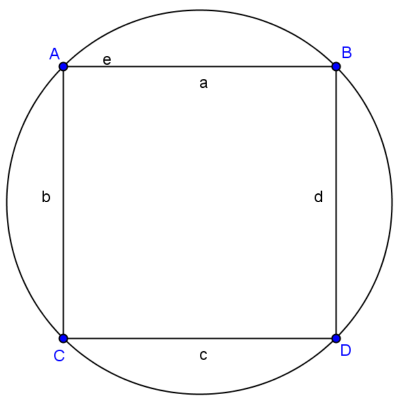
Projeto Araribá Matemática 6ª série. Obra Coletiva. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2006.

1) Usando régua e compasso, desenhe:

a) Um quadrado circunscrito a uma circunferência. O quadrado tem lado com medida igual a 4cm.

Resolução no Geogebra ;

Figura 70- Exercício 1 do 9º ano item a



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Para fazer o quadrado, clique na barra de ferramenta e selecione a janela 3 e selecione a opção "Segmento de Comprimento Fixo" e determine a medida do lado para 4cm, assim faça os três lados do quadrado, para fazer o quarto lado selecione na mesma janela a opção "Segmento Definido por Dois Pontos".

Passo 2: Para fazer a circunferência, clique na janela 6 e selecione a opção "Círculo Definido por Três Pontos", assim selecione três pontos do quadrado ABCD.

2) Leia e resolva o seguinte problema.

Um terreno tem a forma de um trapézio de bases medindo 36m e 24m, com altura 20m. Foi construído no local um galpão retangular de 10,6m por 5,5m.

No restante do terreno foi plantada grama. Qual é a área da parte que foi gramada?

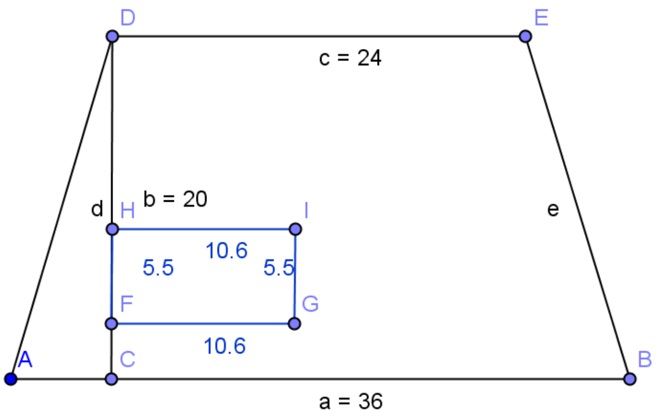
Resolução no Geogebra:

$A_{terreno}$: h.(b_1+b_2)/2 = 20.(24+36)/2 = 20.60/2= 1200/2= 600m^2

$A_{galpão}$: b x h= 10,6 x 5,5= 58,3m^2

$A_{grama:}$ $A_{terreno}$ - $A_{galpão}$= 600 – 58,3 = 541,7m^2

Figura 71- Exercício 2 do 9º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Passo 1: Para desenhar o terreno em forma de trapézio, clique na barra de ferramentas e selecione na janela 3, a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, desenhe os lados e a altura do trapézio com medida determinada no exercício. Os outros lados clique na mesma janela e selecione a opção “Segmento Definido por Dois Pontos”.

Passo 2: Para desenhar o galpão em forma retangular, clique na janela 3 da barra de ferramentas e selecione a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, desenhe os lados dado no exercício.

Passo 3: Para determinar a área do terreno (trapézio), escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “soma” que esta localizado na parte inferior a direita , e digite as bases do trapézio somando cada um deles e pressione “enter” , assim obtemos a soma das bases na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da janela do programa. Para multiplicar o resultado da soma das bases com a altura escolha o comando “produto”,e pressione “enter” obtendo o resultado na janela de álgebra. Para concluir o cálculo da área do trapézio escolha o comando “quociente” e determine o resultado do produto dividido por 2, e pressione “enter”.

Passo 4: Para determinar a área do galpão (retângulo), escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “produto” que está localizado na parte inferior a direita , e digite a base e a altura do retângulo correspondentes e pressione “enter” , assim obtemos a área do galpão obtendo o resultado na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da tela do programa.

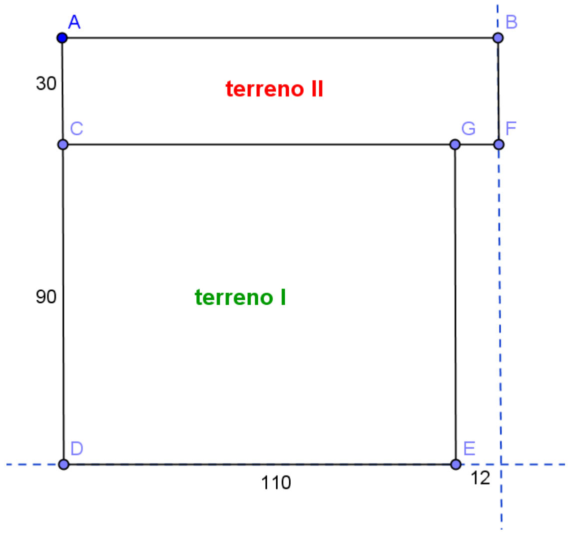
Passo 5: Para determinar a área que foi plantada grama, basta fazer a diferença dos resultados obtidos das áreas do terreno e do galpão, escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “soma” que esta localizado na parte inferior a direita, e coloque a área do terreno e a área do galpão negativa, e pressione “enter’.

Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:
GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática 9° ano.** 1ª edição. São Paulo: FTD, 2009.

3) Um terreno foi dividido em dois lotes (I e II), como nos mostra a figura, sendo as medidas indicadas em metros.
a) Qual é a área de cada lote?
b) Qual é a área total do terreno?

Resolução no Geogebra:
$A_{terreno\ I} = b \times h = 30 \times 122 = 3660m^2$
$A_{terreno\ II} = b \times h = 90 \times 110 = 9900m^2$
$A_{total} = A_{terreno\ I} + A_{terreno\ II} = 3660 + 9900 = 13560m^2$

Figura 72- Exercício 3 do 9º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

Item a)

Passo 1: Para desenhar o terreno, clique na barra de ferramentas e selecione a janela 3 a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, desenhe os lados e a altura do terreno com medida determinada no exercício. Os outros lados clique na mesma janela e selecione a opção “Segmento Definido por Dois Pontos”.

Passo 2: Para determinar a área do terreno (I), escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “produto” que esta localizado na parte inferior a direita , e digite os lados do terreno I correspondentes e pressione “enter” , assim obtemos a área do terreno na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da tela do programa.

Passo 3: Para determinar a área do terreno (II), escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “produto” que esta localizado na parte inferior à direita , e digite os lados do terreno II correspondentes e pressione “enter” , assim obtemos a área do terreno na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da tela do programa.

Item b)

Passo 1: Para determinar a área total do terreno, basta fazer a soma dos resultados obtidos das áreas do terreno I e II, escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “soma” que esta localizado na parte inferior a direita, e coloque a área do terreno I e a área do terreno II, e pressione “enter”.

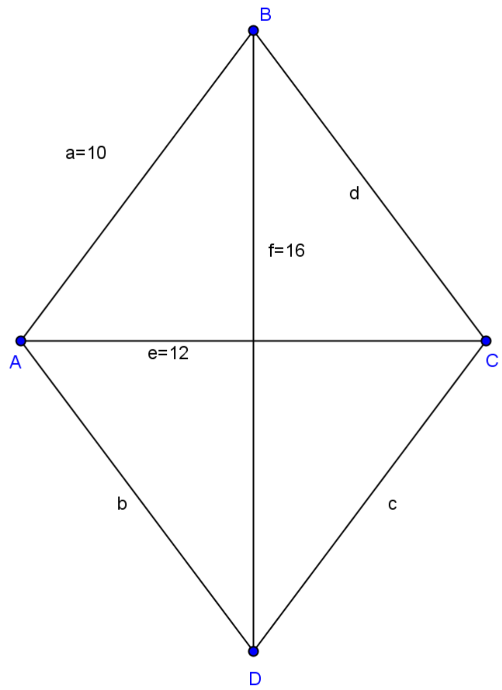
Veremos abaixo enunciados de exercícios retirados do livro:

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática Realidade 8º ano.** 6ª edição. São Paulo: Atual, 2009.

4) Qual é a área de um losango no qual o lado mede 10cm, a diagonal maior mede 16cm e a diagonal menor mede 12cm?

Resolução no Geogebra:

Figura 73- Exercício 4 do 9º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

$A_{losango}$: D x d/2 = 16 x 12/2 = 192/2 = 96cm^2

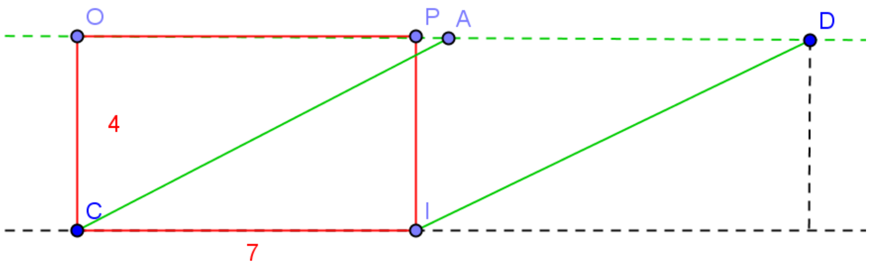
Passo 1: Para desenhar o losango, clique na barra de ferramentas e selecione a janela 3, a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, desenhe o lados e as diagonais do losango com medida determinada no exercício. Os outros lados clique na mesma janela e selecione a opção “Segmento Definido por Dois Pontos”.

Passo 2: Para determinar a área do losango, escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “produto” que está localizado na parte inferior a direita , e digite as diagonais correspondentes e pressione “enter” , e depois escolha o comando “quociente”, informe o resultado obtido no produto e o número 2, e pressione “enter” assim obtemos a área do losango na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da telão do programa.

5) Calcule as áreas e verifique que o paralelogramo CIDA e o retângulo CIPO são equivalentes.

Resolução no Geogebra:

Figura 74- Exercício 5 do 9º ano



Fonte: Bruna Dorneles. Aplicação do Software Geogebra no Ensino dos Quadriláteros Notáveis, 2011.

A_{CIPO}: b x h= 4 x 7= 28cm^2

A_{CIDA}: b x h = 4 x 7= 28cm^2

Passo 1: Para desenhar a figura dada no exercício , clique na barra de ferramentas e selecione a janela 3 a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, desenhe o lados da figura com medida determinada no exercício. Os outros lados clique na mesma janela e selecione a opção “Segmento Definido por Dois Pontos”.

Passo 2: Para determinar a área do retângulo, escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “produto” que está localizado na parte inferior a direita , e digite os lados correspondentes e pressione “enter” assim obtemos a área do retângulo na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da telão do programa.

Passo 3: Para determinar a área do paralelogramo, escolha na parte inferior do programa o campo “entrada”, escolha o comando “produto” que está localizado na parte inferior a direita , e digite os lados correspondentes e pressione “enter” assim obtemos a área do paralelogramo na janela de álgebra localizada no lado esquerdo da telão do programa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo realizado sobre os quadriláteros utilizando o Geogebra possibilitou constatar que o uso de softwares educativos pode servir como uma ferramenta para diferenciar as aulas de matemática. Uma forma simples de fazer isso é utilizar e/ou adaptar exercícios de livros didáticos já utilizados em sala de aula no software. Já que este possui ferramentas e comandos que auxiliam a aplicação de conceitos geométricos.

Esperamos que as sugestões de exercícios aqui apresentadas motivem os professores de matemática e seus alunos à utilizarem softwares, em particular, o Geogebra, possibilitando uma melhora no ensino aprendizagem. Os usuários podem investigar, explorar, visualizar e interpretar conceitos geométricos favorecendo a construção do conhecimento matemático.

O uso de uma tecnologia como metodologia, para as aulas de matemática, serve para mostrar as diversas possibilidades metodológicas que o professor possui com a interação da informática com a matemática a fim de tornar mais dinâmico o ensino da Geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Novo praticando matemática 7ª série.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Novo praticando matemática 8ª série.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Explorando tópicos de matemática do ensino fundamental e médio através do geogebra, 2011**. Disponível em: <http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/60.pdf>. Acesso em 14 abr. 2011, 21:42:13.

<http://apoiomate.blogspot.com/2007/11/quadrilteros.html> Acesso 5/11/2010.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim 7ª série.** São Paulo: FTD, 2000.

<http://www.brasilescola.com/matematica/geometria-plana.htm> Acesso 16/10/2010.

BONGIOVANNI, Vincenzo; VISSOTO, Olímpio Rudinin; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática vida 5ª série.** 7. ed. São Paulo: Ática, 1995.

BONGIOVANNI, Vincenzo; VISSOTO, Olímpio Rudinin; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática vida 6ª série.** 7. ed. São Paulo: Ática, 1995.

BONGIOVANNI, Vincenzo; VISSOTO, Olímpio Rudinin; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática vida 7ª série.** 7. ed. São Paulo: Ática, 1995.

BONGIOVANNI, Vincenzo; VISSOTO, Olímpio Rudinin; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática vida 8ª série.** 7. ed. São Paulo: Ática, 1995.

BONJORNO, José Roberto; AZENHA Regina ; AYRTON, Olivares. **Matemática fazendo a diferença 8ª série.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2006.

BOYER, Carl.B, **História da Matemática**. São Paulo, Edgar Blucher, 1996.

CONCEITOS e Histórias Matemática Scipione 5ª série. São Paulo: Scipione, 1995.

CONCEITOS e Histórias Matemática Scipione 7ª série. São Paulo: Scipione, 1995.

CONCEITOS e Histórias Matemática Scipione 8ª série. São Paulo: Scipione, 1995.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática 9,** Elementar Geometria Plana**.** 7. ed. São Paulo: Atual, 1997.

<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/elementoseuclides.htm Acesso 20/09/10.

<http://educacaomatematica.vilabol.uol.com.br/histmat/introducao.htm acessado 15/02/11.

GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da matemática: 6° ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da matemática: 7° ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da matemática: 8° ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI JR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da matemática: 9° ano.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI, José Ruy ; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática,** Pensar e Descobrir 6ª série. São Paulo: FTD, 1996.

GIOVANNI, José Ruy ; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática,** Pensar e Descobrir 7ª série. São Paulo: FTD, 1996.

GIOVANNI, José Ruy ; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. **Matemática,** Pensar e Descobrir 8ª série. São Paulo: FTD, 1996.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática,** Realidade 6º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática,** Realidade 7º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática,** Realidade 8º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática,** Realidade 9º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática,** 5ª série. 1.ed. São Paulo: Scipione, 1998.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática,** 6ª série. 1. ed. São Paulo: Scipione, 1998.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática,** 7ª série. 1. ed. São Paulo: Scipione, 1998.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática,** 8ª série. 1. ed. São Paulo: Scipione, 1998.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na medida certa: 5ª série.** 7. ed. São Paulo: Scipione, 1998.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na medida certa: 6ª série.** 7. ed. São Paulo: Scipione, 1998.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na medida certa: 7ª série.** 7. ed. São Paulo: Scipione, 1998.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na medida certa 8ª série.** 7. ed São Paulo: Scipione, 1998.

NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática conceitos e histórias: 5ª série.** São Paulo: Scipione, 1991.

NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática conceitos e histórias: 6ª série.** São Paulo: Scipione, 1991.

NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática conceitos e histórias: 7ª série.** São Paulo: Scipione, 1991.

NETTO, Scipione Di Pierro. **Matemática conceitos e histórias: 8ª série.** São Paulo: Scipione, 1991.

<http://obaricentrodamente.blogspot.com/2010/01/quadrilateros-notaveis.html.

PAIVA, Manoel. **Matemática,** volume único. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PENEIREIRO, João Batista; SILVA, Maurício Fronza da. **Introdução da geometria euclidiana no plano**, Santa Maria: Gráfica UFSM, 2000.

<http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/arti2.htm acessado em 05/03/11.

PETLA, Revelino José; ROLKOUSKI Emerson. **Artigo Geogebra- Possibilidades para o ensino de matematica.** Disponibilizada em: <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/arti2.htm> Acesso em 28 maio. 2011, 22:32:02

Projeto Araribá matemática: 5ª série. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2006.

Projeto Araribá matemática: 6ª série. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2006.

Projeto Araribá matemática: 7ª série. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2006.

Projeto Araribá matemática: 8ª série. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2006.

RODRIGUES, MAJORY SAPATA, ET AL. Geometria Dinâmica para promover o aprendizado de conceitos geométricos na Educação básica e superior. In: XVI CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, SBIE 2005. Disponível em <http://www.doc.ufjf.br/sbie2005/work_>. Acesso em 16/06/11.

<http://www.somatematica.com.br/fundam/quadrilatero/quadrilatero2.php acessado 10/03/11.

<http://www.vestibular1.com.br/revisao/geometria_plana.doc Acesso 05/04/11.

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Geogebra> Acesso 16/10/2010.

ANEXO A

Definições Auxiliares

Segmento de reta:

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos colineares que estão entre eles é um segmento de reta.

Semirreta:

Dados dois pontos distintos A e B a semirreta AB é, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto de pontos X colineares a A e B tais que B está entre A e X.

Ângulo:

É a reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

Suplemento de um Ângulo:

É o ângulo adjacente ao ângulo dado, obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

Ângulos Consecutivos:

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro (um lado de um deles coincide com um lado do outro).

Ângulos Suplementares:

Dados dois ângulos a soma de suas medidas é 180°.

Ângulos Adjacentes:

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não tem pontos internos em comum.

Ângulo Oposto pelo Vértice:

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

Ângulos Alternos Internos:

Dizemos que dois ângulos são alternos internos, quando, tendo-se duas retas paralelas e uma outra reta que corta essas retas, os ângulos internos as essas retas paralelas estão em lados opostos em relação à transversal. Esses ângulos são congruentes.

Ângulos Colaterais internos:

Dizemos que dois ângulos são colaterais internos, quando, tendo-se duas retas paralelas e uma outra reta que corta essas retas, os ângulos internos a essas retas paralelas estão do mesmo lado da transversal. A soma desse ângulos é 180°.

Ângulos Correspondentes:

São aqueles associados a vértices correspondentes pela aplicação de congruência.

Ponto Médio:

Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Bissetriz:

Uma semirreta Oc interna a um ângulo $a\hat{O}b$ é bissetriz do ângulo $a\hat{O}b$ se, e somente se, $a\hat{O}c \equiv b\hat{O}c$.

Retas Paralelas:

Duas retas são paralelas (símbolo; //) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não tem nenhum ponto em comum.

Retas Perpendiculares:

Duas retas concorrentes são perpendiculares se os quatro ângulos que elas definem são ângulos retos.

Transitividade:

Na congruência de triângulos se $\Delta ABC \equiv \Delta\ A_1B_1C_1$ e $\Delta\ A_1B_1C_1 \equiv \Delta\ A_2B_2C_2$, então $\Delta ABC \equiv \Delta\ A_2B_2C_2$.