

Jefferson Oliveira dos Santos

**Otimização por Enxame  
de Partículas em Problemas de Despacho  
Econômico de Carga**

Alegrete, RS

Junho de 2016



Jefferson Oliveira dos Santos

**Otimização por Enxame  
de Partículas em Problemas de Despacho  
Econômico de Carga**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Otimização de Sistemas, da Universidade Federal do Pampa (Unipampa, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Elétrica**.

Universidade Federal do Pampa – Unipampa

Curso de Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto

Alegrete, RS

Junho de 2016

---

S237o Santos, Jefferson Oliveira dos  
Otimização por Enxame de Partículas em Problemas de Despacho Econômico  
de Carga / Jefferson Oliveira dos Santos.  
98 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa,  
ENGENHARIA ELÉTRICA, 2016.  
"Orientação: João Plínio Juchem Neto".

1. Sistemas Elétricos de Potência. 2. Despacho Econômico de Carga. 3. Otimização  
por Enxame de Partículas. 4. Multiplicadores de Lagrange. 5. Critério de Parada. I. Título.

---

JEFFERSON OLIVEIRA DOS SANTOS

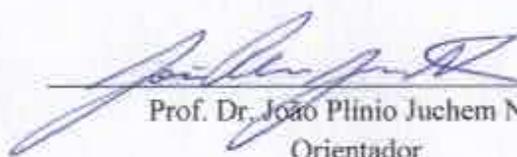
OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS EM PROBLEMAS DE DESPACHO  
ECONÓMICO DE CARGA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Engenharia Elétrica da Universidade  
Federal do Pampa, como requisito parcial para  
obtenção do título de Bacharel em Engenharia  
Elétrica.

Área de Concentração: Modelagem e  
Otimização de Sistemas

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 21 de junho de 2016.

Banca examinadora:

  
Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto  
Orientador

  
Prof. Ma. Ana Paula Carboni de Mello  
UNIPAMPA

  
Prof. Dr. Eduardo Machado dos Santos  
UNIPAMPA

*Dedico este trabalho ao meu pai Enock por ter me inspirado  
dedicação e perseverança e em memória, a minha mãe Luiza.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido fé e coragem que me permitiram romper as inúmeras barreiras de dificuldades e seguir em frente até alcançar o sonho que colocou em meu coração. Agradeço aos meus irmãos Thaís e João Pedro, especialmente Aline, por todo apoio e incentivo incondicional desde o início. Meus agradecimentos aos muitos amigos que fiz em Alegrete-RS, em especial os amigos da IASD de Alegrete-RS, pelo carinho e preocupação conosco, todos vocês foram importantíssimos! Agradeço aos amigos do Rio de Janeiro, que mesmo de longe, estavam torcendo pelo meu sucesso. Agradeço aos meus colegas de curso pelo companheirismo. Minha gratidão à universidade, direção acadêmica e administrativa e corpo docente pelo empenho por tornar o campus Alegrete uma janela a que se propunha desenvolver conhecimento, especialmente o prof. Plínio, pela dedicada orientação na conclusão deste trabalho. A minha excelentíssima esposa, minha gratidão, carinho e respeito pelo desprendimento e companhia paciente ao longo de cada semestre. A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado!



*“A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta”. (Isaac Newton)*



# Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar a aplicação do algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (PSO), utilizando critério de parada, na solução do problema de Despacho Econômico de Carga (DE) considerando algumas das suas principais restrições em um modelo de DE real. São realizados estudos de caso constituídos por sistemas termoeletrônicos com três e quinze unidades geradoras, considerando as perdas nas linhas de transmissão, limites de capacidade de geração e zonas proibidas de operação. O algoritmo proposto é testado em estudos de casos, com variados graus de dificuldade propostos na literatura. A solução obtida desta forma é então comparada com resultados presentes na literatura, que utilizam o PSO sem critério de parada, e com a solução exata do problema obtida via Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML). Os resultados obtidos através de simulações computacionais demonstraram que o PSO com critério de parada encontra a solução ótima do problema, igual ao resultado exato ou, em problemas mais complexos, se aproxima substancialmente dessa solução que se obtém via MML. Além disso, quando comparado ao PSO sem critério de parada, o método proposto converge obtendo um menor custo total de geração e menores perdas nas linhas de transmissão, apresentando convergência mais rápida que a apresentada na literatura para o caso com três unidades geradoras.

**Palavras-chave:** Sistemas Elétricos de Potência, Despacho Econômico de Carga, Otimização por Enxame de Partículas, Multiplicadores de Lagrange, Critério de Parada.



# Abstract

This work aims to present the application of the Particle Swarm Optimization algorithm (PSO), using a stopping criterion, in the solution of the Economic Load Dispatch (ED) problem, considering some of the main constraints presented on a real ED model. It considers case studies consisting of thermoelectric systems with three and fifteen generating units, taking into account losses in the transmission lines, power capacity limits and prohibited zones of operation. The proposed algorithm is tested on case studies proposed in the literature, with varying degrees of difficulty. The solution obtained in this way is then compared with results in the literature, which uses PSO without stopping criterion, and with the exact solution of the problem obtained via the Lagrange Multipliers Method (LMM). The results obtained through computer simulations showed that the PSO with stopping criterion finds the exact optimal solution of the problem, or, in more complex problems, approaches substantially the solution given by LMM. In addition, when compared to PSO without stopping criteria, the proposed method converges giving a lower total generation cost, and lower losses in the transmission lines, converging faster than the method used in the literature for the case with three generation units.

**Key-words:** Electric Power Systems, Load Economic Dispatch, Optimization Particle Swarm, Lagrange Multipliers, Stopping Criteria.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Função custo com pontos de válvula. Fonte: Fernandes (2009). . . . .	24
Figura 2 – Função custo com zonas proibidas. Fonte: Fernandes (2009). . . . .	25
Figura 3 – Estados de operação: (a) constante, (b) crescente e (c) decrescente. Fonte: Fernandes (2009). . . . .	26
Figura 4 – Mínimo e Máximo global de uma função quadrática de uma variável. . .	31
Figura 5 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$ . Intervalo Côncavo e Convexo de $f(x)$ . . . . .	31
Figura 6 – Função quadrática de duas variáveis, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . . . . .	38
Figura 7 – Nova posição da partícula $i$ associada aos parâmetros cognitivo e social. .	42
Figura 8 – Função F6 Schaffer. . . . .	45
Figura 9 – Posição inicial das partículas. . . . .	46
Figura 10 – Posição das partículas durante o processo de otimização. . . . .	46
Figura 11 – Posição das partículas ao término do processo de otimização. . . . .	47
Figura 12 – Solução Ótima Aplicando o Critério $C_1$ . . . . .	48
Figura 13 – Solução Ótima Aplicando o Critério $C_2$ . . . . .	48
Figura 14 – Parque de geração termoeétrica. Fonte: Saadat (1999) . . . . .	52
Figura 15 – Erro percentual do Custo médio <i>versus</i> as $g$ gerações - 3 uni. . . . .	58
Figura 16 – Menor Custo alcançado pelo PSO. . . . .	59
Figura 17 – Nível de potência ao longo do processo de otimização. . . . .	59
Figura 18 – Erro percentual do Custo médio <i>versus</i> as $g$ gerações - 15 uni. . . . .	69
Figura 19 – Menor Custo alcançado pelo PSO. . . . .	70
Figura 20 – Nível de potência das unidades 1-5 ao longo do processo de otimização. .	71
Figura 21 – Nível de potência das unidades 6-10 ao longo do processo de otimização. .	71
Figura 22 – Nível de potência das unidades 11-15 ao longo do processo de otimização. .	71
Figura 23 – Erro percentual do Custo médio <i>versus</i> as $g$ gerações com zonas proibidas. .	75
Figura 24 – Menor Custo alcançado pelo PSO com zonas proibidas. . . . .	75
Figura 25 – Potência das unidades 1-5 ao longo da otimização com zonas proibidas. .	76
Figura 26 – Potência das unidades 6-10 ao longo da otimização com zonas proibidas. .	76
Figura 27 – Potência das unidades 11-15 ao longo da otimização com zonas proibidas. .	77



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na otimização funcional. . . . .	45
Tabela 2 – Soluções do PSO com critérios de parada. . . . .	47
Tabela 3 – Soluções ótimas do PSO com critério e sem critério de parada. . . . .	49
Tabela 4 – Dados das linhas de transmissão. . . . .	53
Tabela 5 – Coeficientes de custos e Limites da geração. . . . .	53
Tabela 6 – Minimização via MML para 3 unidades de geração . . . . .	55
Tabela 7 – Parâmetros do PSO 1 - 3 unidades de geração. . . . .	56
Tabela 8 – Custos para as g gerações. . . . .	57
Tabela 9 – Custo médio, erro percentual e média de iterações - 3 unidades. . . . .	57
Tabela 10 – Melhor solução do PSO considerando G500. . . . .	58
Tabela 11 – Solução do DE com PSO. . . . .	58
Tabela 12 – Métodos e Resultados. . . . .	60
Tabela 13 – Dados das unidades de geração. . . . .	65
Tabela 14 – Minimização via MML para 15 unidades de geração. . . . .	67
Tabela 15 – Custo mínimo do MML em comparação com a literatura. . . . .	67
Tabela 16 – Parâmetros do PSO 1 - 15 unidades de geração. . . . .	68
Tabela 17 – Custos para as g gerações - Caso teste 1. . . . .	68
Tabela 18 – Custo médio, erro percentual e média de iterações para as g gerações. . . . .	69
Tabela 19 – Solução do DE de 15 unidades termais com limites de geração. . . . .	70
Tabela 20 – Métodos e Resultados para as 15 unidades. . . . .	72
Tabela 21 – Parâmetros do PSO 1 - zonas proibidas. . . . .	74
Tabela 22 – Custos para as g gerações - Caso teste 2. . . . .	74
Tabela 23 – Custo médio, erro percentual e média de iterações com zonas proibidas. . . . .	74
Tabela 24 – Solução do DE de 15 unidades termais com zonas proibidas. . . . .	74
Tabela 25 – Erro percentual entre pBest e gBest para a melhor simulação. . . . .	77
Tabela 26 – Métodos e Resultados considerando zonas proibidas. . . . .	78
Tabela 27 – Minimização da função F6 de SCHAFER - G Gerações. . . . .	87
Tabela 28 – Minimização da função F6 de SCHAFER - Distâncias Euclidianas. . . . .	88
Tabela 29 – DE de 3 Unidades - parte 1. . . . .	89
Tabela 30 – DE de 3 Unidades - parte 2. . . . .	90
Tabela 31 – DE de 3 Unidades - parte 3. . . . .	91
Tabela 32 – Resumo do DE com 3 Unidades. . . . .	92
Tabela 33 – Melhor Solução do DE com 3 Unidades - parte 1. . . . .	92
Tabela 34 – Melhor Solução do DE com 3 Unidades - parte 2. . . . .	92
Tabela 35 – DE de 15 unidades com Limite de Capacidade - parte 1. . . . .	93
Tabela 36 – DE de 15 unidades com Limite de Capacidade - parte 2. . . . .	94

Tabela 37 – Resumo do DE com 15 Unidades - Limite de Capacidade. . . . .	95
Tabela 38 – Melhor solução do DE com 15 Unidades - Limite de Capacidade. . . .	95
Tabela 39 – DE de 15 Unidades com Zonas Proibidas - parte 1. . . . .	96
Tabela 40 – DE de 15 Unidades com Zonas Proibidas - parte 2. . . . .	97
Tabela 41 – Resumo do DE de 15 Unidades com Zonas Proibidas. . . . .	98
Tabela 42 – Melhor solução do DE com 15 Unidades - Zonas Proibidas. . . . .	98

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Despacho Econômico</b>	<b>21</b>
2.1	Despacho Econômico Básico	21
2.2	Despacho Econômico Clássico	22
2.3	Restrições de Geração	23
2.3.1	Limites de Geração	23
2.3.2	Pontos de Válvula	24
2.3.3	Zonas Proibidas	25
2.3.4	Limites de Rampa	26
2.4	Considerações Finais	27
<b>3</b>	<b>Método dos Multiplicadores de Lagrange</b>	<b>29</b>
3.1	Formas Quadráticas	29
3.2	Função Côncava e Convexa	31
3.3	Condições de Primeira Ordem (CPO)	33
3.3.1	Restrições de Igualdade	34
3.3.2	Restrições de Desigualdade	37
3.4	Considerações Finais	39
<b>4</b>	<b>Otimização por Enxame de Partículas</b>	<b>41</b>
4.1	O Algoritmo PSO	41
4.2	Critério de Parada	44
4.2.1	Otimização Funcional	44
4.2.2	Resultados	46
4.3	Considerações Finais	49
<b>5</b>	<b>Comparação entre o PSO e o MML: Sistema com 3 Unidades Geradoras</b>	<b>51</b>
5.1	Solução via MML	54
5.2	Solução via PSO	56
5.3	Comparação dos Resultados	60
5.4	Considerações Finais	61
<b>6</b>	<b>Aplicações e Resultados Numéricos: Sistema com 15 Unidades Geradoras</b>	<b>63</b>
6.1	Caso teste 1: limites de geração	66
6.1.1	Solução via MML	66
6.1.2	Solução via PSO	68
6.1.3	Comparação dos Resultados - Caso teste 1	72
6.2	Caso teste 2: limites de geração com zonas proibidas	73
6.2.1	Solução via PSO	73
6.2.2	Comparação dos Resultados - Caso teste 2	77

6.3	Considerações Finais	79
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>81</b>
	<b>Referências</b>	<b>83</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>85</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>Resultados da Otimização Funcional</b>	<b>87</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>Resultados do DE com 3 Unidades</b>	<b>89</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>Resultados do DE com 15 Unidades</b>	<b>93</b>
C.1	Limites de Capacidade	93
C.2	Zonas Proibidas	96

# 1 Introdução

A matriz elétrica brasileira é predominantemente de origem renovável, com a geração hidráulica em sua maioria, correspondendo a 65,2% da oferta interna, mesmo apresentando uma redução de 4,5% em relação ao ano anterior conforme apresentado no Balanço Energético Nacional (BEN, 2015). As centrais térmicas foram expandidas em 18,1% e as principais contribuintes são as centrais elétricas de serviço público. A geração térmica, especialmente a gás natural, apresentou um crescimento vertiginoso: houve um acréscimo de 17,5%, uma produção de 81,1 TWh.

Sujeito às intempéries do tempo que influenciam na capacidade dos reservatórios, a geração hidráulica é amparada pela térmica cujos recursos energéticos não estão sujeitos a imprevisibilidade. Diante desse cenário de crescimento da energia térmica e o importante papel que esse sistema desempenha no atendimento a demanda de um sistema com perfil hidráulico, surge a necessidade de se adotar estratégias econômicas para realizar o Despacho Econômico de Carga (DE) de geração termoeletrica.

Muitos problemas de otimização na engenharia, como exemplo o DE, devido a sua falta de linearidade e complexo tratamento matemático, têm levado à busca de outras alternativas que possibilitem determinar sua solução. O problema de DE se resume em atender a demanda de carga consumidora ao menor custo de geração possível. A solução para este problema é de grande interesse do setor energético e apesar de diversos métodos terem sido utilizados para resolvê-lo, as abordagens convencionais podem não ser o melhor caminho para a solução, principalmente nos casos onde a função objetivo apresenta descontinuidades, não-diferenciabilidade ou a ocorrência de muitos mínimos locais. Para contornar este problema, variadas técnicas heurísticas de otimização têm sido propostas, especialmente otimização por enxame de partículas (PSO), método este que vem sendo reconhecido como um algoritmo eficiente para solucionar tal tipo de problema (MAHOR; PRASAD; RANGNEKAR, 2009).

O objetivo deste trabalho é utilizar o PSO para resolver problemas de DE constituído por algumas das principais restrições de um modelo real de despacho. São consideradas as perdas nas linhas de transmissão, os limites de capacidade e as zonas proibidas de operação, que originalmente foram apresentados por Saadat (1999), Serapião (2009) e Gaing (2003). Outro objetivo, é comparar os resultados utilizando o PSO com o tradicional Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML) e comparar ambos os resultados com a literatura. Um diferencial apresentado na implementação do PSO realizada neste trabalho é a utilização de um critério de parada, que consiste em verificar se o erro relativo estimado nas últimas  $g$  iterações é menor que certo erro percentual mínimo definido a priori (ZIELINSKI;

PETERS; LAUR, 2005), aspecto que no geral não é considerado na literatura que aplica o PSO na resolução de problemas de DE.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentado o problema de despacho econômico em sua forma geral e algumas das principais restrições consideradas em um modelo real de DE; no capítulo 3 é discutido o Método dos Multiplicadores de Lagrange; no capítulo 4 é apresentado o método de Otimização por Enxame de Partículas; no capítulo 5 é apresentada a solução de um sistema com três geradores utilizando o PSO com critério de parada e o MML, onde são comparados e discutidos os resultados; no capítulo 6 é apresentada a solução de um sistema com quinze geradores considerando perdas e limites de capacidade utilizando o PSO com critério de parada e o MML, e o mesmo sistema também é solucionado considerando além das restrições citadas, a inclusão das zonas proibidas de operação utilizando o PSO, onde os resultados são discutidos e comparados com a literatura; por fim, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões e futuras perspectivas.

## 2 Despacho Econômico

O crescente consumo de energia elétrica está formando um mercado consumidor altamente competitivo e vibrante, alterando muitos aspectos no que tange à geração, transmissão e distribuição da energia elétrica. Nesse contexto, a busca por recursos energéticos suficientes para atender a demanda de carga, o alto custo da geração de energia elétrica e a crescente preocupação em mitigar os impactos ambientais, influenciam diretamente no despacho econômico de carga (DE) e é indispensável para que as unidades geradoras de energia elétrica atinjam o custo mínimo ideal de operação.

O problema de DE, primeiramente, consiste em minimizar o custo de geração de energia elétrica e operação das unidades geradoras, atendendo a demanda total da carga e as restrições inerentes ao sistema. Cada unidade geradora possui custo de produção próprio dependente do recurso energético empregado na geração (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011). As fontes de energia usadas para produzir potência elétrica, por exemplo o carvão, gás natural, óleo diesel, urânio, água de reservatórios, implicarão em diferentes custos de acordo com o cenário econômico.

O presente trabalho apresenta o estudo do problema de DE de usinas termelétricas, sendo assim o despacho característico das usinas hidrelétricas ou outras não é abordado.

### 2.1 Despacho Econômico Básico

O custo total de geração é a soma dos custos de cada unidade geradora e é dada pela equação (2.1). A carga demandada é distribuída calculando a potência gerada em cada uma das unidades geradoras, formando um conjunto de variáveis contínuas (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011).

$$C(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \quad (2.1)$$

A potência  $P_i$ , em MW, é fornecida pela unidade geradora  $i$  e o seu custo de geração  $C_i$ , em \$/h, é função da potência gerada.

O custo da geração em cada unidade é aproximada por uma função quadrática convexa (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011), expressa em termos da própria potência de saída. A equação (2.2) expressa o custo individual em cada unidade

geradora, onde os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  representam as características do gerador  $i$ :

$$C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (2.2)$$

No modelo de DE básico, todas unidades geradoras devem contribuir para atender a demanda total do sistema, dada por  $P_D$ . As perdas de transmissão é uma constante qualquer, estimada sem modelagem própria, que já está considerada na carga total a ser suprida. O balanço de potência deve ser satisfeito como mostra a equação (2.3):

$$\sum_{i=1}^n P_i - P_D = 0 \quad (2.3)$$

Portanto, o DE básico consiste meramente em minimizar o custo total de geração (2.1) sujeito ao balanço de potência (2.3), que é a restrição de igualdade para esse modelo de DE.

## 2.2 Despacho Econômico Clássico

As perdas nas linhas de transmissão e distribuição são um fator protuberante ao se considerar a minimização dos custos de geração. A potência perdida nas linhas de transmissão para atender a carga solicitada também é fornecida pelos geradores ativos. Desta forma, as perdas devem ser consideradas como uma demanda do sistema, mesmo porque este é um fator relevante em estudos de DE reais.

Uma maneira de incluir as perdas ao considerar o DE de um sistema elétrico de potência é utilizando a Fórmula de Perdas de Kron (SAADAT, 1999), como mostra a equação (2.4):

$$P_L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i P_j + \sum_{i=1}^n B_{0i} P_i + B_{00} \quad (2.4)$$

onde  $P_i$  e  $P_j$  são respectivamente, o  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo elemento do vetor de potência gerada  $P$ ,  $B_{ij}$  é o  $ij$ -ésimo elemento da matriz de coeficientes de perda,  $B_{0i}$  é o  $i$ -ésimo elemento do vetor de coeficiente de perdas e  $B_{00}$  é a constante do coeficiente de perda.

As perdas nas linhas de transmissão são calculadas em função da potência gerada utilizando a matriz de coeficientes de perdas  $B$ . Essa matriz é obtida realizando um estudo do fluxo de potência do sistema, onde são obtidos os dados de potência gerada e as respectivas perdas. Aplicando métodos de regressão não linear é possível obter as matrizes

de perdas da rede. Para maiores detalhes e uma dedução completa sobre a obtenção da matriz  $B$  de perdas, consultar (SAADAT, 1999) a partir da página 289.

O modelo de DE básico, com as perdas inseridas em sua modelagem, assume uma forma mais adequada quanto às condições reais do sistema, e o problema de minimizar o custo total (2.1) sujeito ao balanço de potência (2.5) considerando as perdas nas linhas de transmissão, é denominado DE clássico.

$$\sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L = 0 \quad (2.5)$$

Nesse momento, o problema de DE assume maior complexidade a medida que as perdas são determinadas a partir da potência gerada que não é conhecida. A dificuldade de solucionar o DE clássico se encontra em relacionar o vetor de potência gerada e as perdas devidas a esse vetor, o que torna este problema de caráter não linear.

## 2.3 Restrições de Geração

A oferta de energia fornecida pela unidade geradora  $i$  estará sujeita aos limites operacionais da mesma. Ao ser considerado um modelo de DE real, algumas restrições operacionais que podem impactar de forma relevante na função custo, devem ser consideradas. Algumas dessas restrições podem ser limites de geração, influência dos pontos de válvula, zonas de operação proibidas e limites de rampa.

### 2.3.1 Limites de Geração

Uma restrição bem comum em problemas de DE, os limites de capacidade de geração, implicam na saída mínima e máxima de potência de cada unidade geradora. Na saída mínima, porque a usina para começar a produzir energia precisa estar aquecida e consumindo uma determinada quantidade de combustível para estar apta a despachar a potência mínima de operação. A saída máxima refere-se ao limite do modo de operação estável, evitando aquecimento excessivo, trepidação e funcionamento forçado das partes mecânicas da máquina.

As respectivas capacidades mínima e máxima são conforme a inequação (2.6), que mostra as saídas de potência mínima e máxima da unidade  $i$  comissionada:

$$P_i^{mín} \leq P_i \leq P_i^{máx} \quad (2.6)$$

onde  $P_i^{mín}$  e  $P_i^{máx}$  são os respectivos limites mínimo e máximo da  $i$ -ésima unidade apta para despachar a energia gerada.

Para função de custo convexa, a solução do DE com limites de capacidade, é única e determinada numericamente. No entanto, sua resolução analítica não é fácil de ser obtida, por se tratar de combinar as unidades em seus limites operacionais (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011).

### 2.3.2 Pontos de Válvula

Para se despachar maior quantidade de potência de uma termoeétrica em plena operação, é necessário injetar uma maior quantidade de vapor nas turbinas. Ao se abrir as válvulas para admissão de vapor nas turbinas, são produzidas ondulações na função de custo da unidade em questão. Uma certa quantidade de combustível é utilizado para atender o aumento de carga solicitada ou até mesmo ocorre uma mudança de combustível para atender o nível de potência solicitado. Os pontos onde ocorre essa abertura das válvulas, são conhecidos como pontos de válvula (WALTERS; SHEBLE, 1993).

As saídas dos geradores possuem como características principais, descontinuidades e alto índices de não linearidades, devido ao efeito dos pontos de válvula (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008). A figura 1 mostra o gráfico de uma função custo sobre efeito dos pontos de válvula. A curva de custo é alterada em cada ponto de válvula.

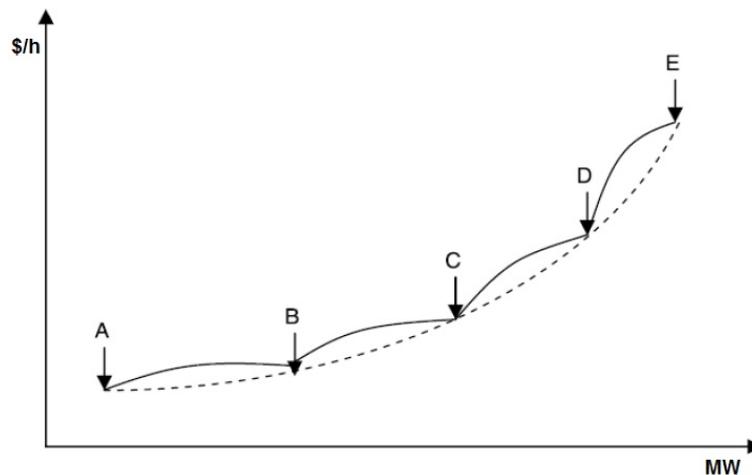


Figura 1 – Função custo com pontos de válvula.

Fonte: Fernandes (2009).

A função custo sobre efeito dos variados pontos de válvulas, pode ser modelada adicionando um termo não linear senoidal na função custo da unidade em questão. A função custo modelada para o gerador com influência dos pontos de válvula, será dada por:

$$C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + \alpha_i \left| e_i \sin(f_i(P_i^{min} - P_i)) \right| \quad (2.7)$$

onde  $\alpha_i$  é igual à 1 para pontos de válvula existentes e 0 caso contrário. Os coeficientes  $e_i$  e  $f_i$  caracterizam os pontos de válvula em sua forma, mudando a amplitude e o período (WALTERS; SHEBLE, 1993).

### 2.3.3 Zonas Proibidas

As zonas proibidas, são subintervalos dentro dos limites mínimo e máximo da capacidade de geração da unidade termal. Devido as faltas nas máquinas, oscilações das válvulas a vapor ou mesmo características operativas dos equipamentos auxiliares e pontos de válvula não modeláveis, as zonas proibidas se tornam inoperante, do ponto de vista de geração (YALCINOZ; SHORT, 1997).

Nessas zonas onde o sistema pode se tornar instável, os testes que determinam a função custo, seja pelo desempenho das máquinas ou arquivos de dados registrados, são de difícil realização. Por isso, evitar essas zonas de operação, foi a melhor medida para tratar esse problema (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008).

A restrição de zonas proibidas, divide os limites de capacidade operacional em variadas regiões de possível geração ou não. Esse arranjo torna o espaço de busca das soluções não convexo, transformando o DE em um problema de difícil solução, por conta da falta de linearidade e não convexidade. A figura 2 mostra o gráfico de uma função custo com restrições de zonas proibidas.

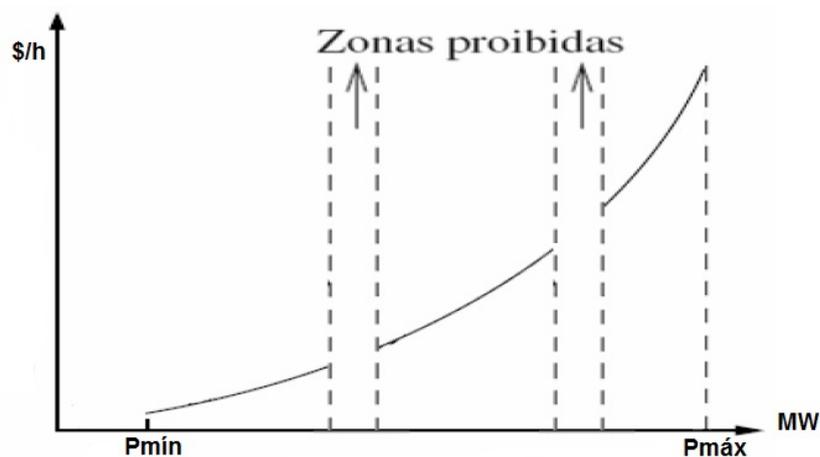


Figura 2 – Função custo com zonas proibidas.

Fonte: Fernandes (2009).

Matematicamente, as restrições de zonas proibidas correspondem à adição de novas restrições dentro do limite operacional da unidade geradora. As desigualdades são adicionadas conforme a quantidade de zonas proibidas. A equação (2.8) mostra as restrições

de desigualdades para zonas proibidas:

$$\begin{aligned} P_i^{mín} &\leq P_i \leq P_{i,1}^l \\ P_{i,k-1}^u &\leq P_i \leq P_{i,k}^l \quad k = 2, 3, 4, \dots, z_i \\ P_{i,z_i}^u &\leq P_i \leq P_i^{máx} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $P_i^{mín}$  e  $P_i^{máx}$  são os limites mínimo e máximo de operação da unidade  $i$ ,  $z_i$  o número de zonas proibidas para a unidade  $i$ ,  $k$  o índice da zona proibida da unidade  $i$ ,  $l$  o limite inferior e  $u$  o limite superior da  $k$ -ésima zona proibida da unidade  $i$ .

Os espaço de busca está subdividido em diversos intervalos onde a unidade  $i$  pode estar operando ou não, adicionando ao DE uma complexidade considerável.

### 2.3.4 Limites de Rampa

As unidades geradoras em plena operação, nem sempre despacham o mesmo nível de potência. Em um sistema real, onde a demanda horária pode sofrer bruscas mudanças para mais ou para menos, alterações no nível da geração de um estado para outro não ocorre de forma instantânea. Sob essas circunstâncias, o problema consiste em aumentar ou diminuir o nível da potência gerada a partir de uma condição operacional inicial e atingir o nível ideal de despacho em um dado período de tempo, como mostra a figura 3.

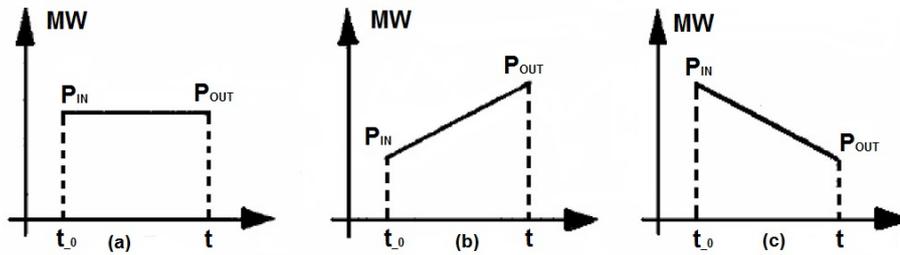


Figura 3 – Estados de operação: (a) constante, (b) crescente e (c) decrescente.

Fonte: [Fernandes \(2009\)](#).

As variações de potência despachada possui seus limites mínimos e máximos em cada unidade de geração, que são denominados limites de rampa. Os limites de rampa resultam em restrições de desigualdades com espaço de busca das soluções não convexo, o que aumenta a complexidade do DE ([OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008](#)).

A unidade  $i$  em operação, que sai de um estado atual de geração no instante  $t_0$  para um estado final no instante  $t$ , pode ter suas restrições de desigualdades para os limites de rampa dadas por:

$$\max(P_i^{mín}, P_i^{t_0} - DR_i) \leq P_i \leq \min(P_i^{máx}, P_i^{t_0} + UR_i) \quad (2.9)$$

onde  $P_i^{t_0}$  é a potência da unidade  $i$  gerada no instante  $t_0$  atual;  $P_i$  a potência de saída da unidade  $i$  no instante  $t$ ;  $UR_i$  e  $DR_i$  são respectivamente, os limites de rampa crescente e decrescente da unidade  $i$ .

## 2.4 Considerações Finais

O presente capítulo apresentou o problema de DE como objeto de estudo e investigação, para aplicação do método de otimização proposto por esse trabalho como um possível caminho para sua solução. Com a inclusão das perdas e algumas das principais restrições, ficou evidente a complexidade que o DE pode alcançar à medida que situações realísticas operacionais das unidades de geração são modeladas e incorporados nesse problema.

Dentre as restrições revisadas, os limites de geração, zonas proibidas e balanço de potência considerando as perdas nas linhas de transmissão, terão especial atenção ao longo deste trabalho, pois as mesmas serão consideradas no DE a ser solucionado por meio de simulações computacionais com o intuito de demonstrar a aplicação do método de otimização por enxame de partículas.



## 3 Método dos Multiplicadores de Lagrange

As técnicas para solucionar problemas de otimização representam um papel especial nas aplicações das áreas de engenharia, economia, matemática, ciência da computação, sendo comum sua aplicação em diversos campos de pesquisa.

A operação de um sistema elétrico de potência está atrelado a ações que implicam planejamento e controle que, em muitas situações, estão diretamente ligadas a processos de otimização. O problema de DE ocupa uma posição importante na operação dos sistemas elétricos de potência e essencialmente consiste em um problema de otimização, cujo objetivo é minimizar o custo total das unidades geradoras, satisfazendo a demanda por energia do sistema.

Muitas técnicas são utilizadas para solução de problemas de otimização. Entre elas podemos citar o método de iteração lambda, o método de busca por gradiente, o método de Newton Raphson, o método da secante e programação linear (DJUROVIC; MILANCIC; KRSULJA, 2012), que têm sido desenvolvidas para solucionar problemas onde se deseja determinar uma solução ótima. No entanto, estas técnicas possuem certas limitações na resolução de otimizações com restrições e com funções objetivo descontínuas.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML) é uma técnica clássica de solução dos problemas de otimização e fornece uma excelente gama de recursos para determinar máximos ou mínimos de uma função diferenciável com uma ou  $n$  variáveis (SIMON; BLUME, 2004), sujeita a uma ou  $m$  restrições.

Esse método é vastamente utilizado na literatura e para a maioria das soluções de DE com restrições de igualdade e/ou desigualdade, os algoritmos de resolução utilizaram o MML (DJUROVIC; MILANCIC; KRSULJA, 2012). As próximas seções deste capítulo apresentarão o MML como técnica de otimização e mostrarão sua eficiência em determinar máximos ou mínimos das funções, justificando sua utilização para resolução do DE.

### 3.1 Formas Quadráticas

As funções de forma quadrática são as funções não lineares mais simples (SIMON; BLUME, 2004). O problema de DE, objeto de estudo deste trabalho, é descrito por uma função de forma quadrática e convexa (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011). Essas definições serão elucidadas ao longo desse capítulo.

A definição para uma forma quadrática em  $\mathbb{R}^n$ , é o somatório de monômios, cuja soma dos expoentes de cada termo é igual a 2. A função real descrita pela equação (3.1) a

seguir define a forma quadrática:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (3.1)$$

que pode ser escrita como:

$$Q(\vec{x}) = (\vec{x})^T \cdot A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $A$  é uma matriz simétrica única que identifica a forma quadrática.

A forma quadrática  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ , é classificada segundo sua matriz  $A$ . Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  simétrica, então:

- Se  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0 \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ , então  $A$  é matriz **Positiva Definida**;
- Se  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} < 0 \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ , então  $A$  é matriz **Negativa Definida**;
- Se  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \geq 0 \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ , então  $A$  é matriz **Positiva Semidefinida**;
- Se  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \leq 0 \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ , então  $A$  é matriz **Negativa Semidefinida**;
- Se  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0$  para alguns vetores e  $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} < 0$  para outros vetores, então  $A$  é dita **Indefinida**.

Essas definições são especialmente importantes para a classificação do ponto crítico da função. Em funções de várias variáveis, mostrar que um ponto crítico de  $f$  é um ponto de mínimo, máximo ou nenhum dos dois, implica verificar se a matriz hessiana de  $f$  no ponto crítico é positiva definida, negativa definida ou indefinida. Analogamente esse resultado pode ser generalizado para determinar se a função é côncava ou convexa em uma região específica, analisando a matriz de sua derivada segunda quanto a sua terminologia de formas quadráticas (SIMON; BLUME, 2004). A classificação da matriz hessiana segundo a sua forma quadrática, no ponto crítico  $\vec{x}^*$ , fornece uma condição para determinar se o ponto crítico  $\vec{x}^*$ , é um ponto de máximo, mínimo ou nenhum dos dois. A noção de ponto mínimo e máximo de uma função quadrática é fundamental para a compreensão da solução ótima que o MML deve retornar.

A figura 4 mostra um exemplo de duas funções quadráticas com uma variável cada, e seus respectivos pontos de mínimo e máximo global. As funções  $y_1(x) = x^2$  e  $y_2(x) = -x^2$  atingem o mínimo e máximo global, respectivamente, em  $x=0$ .

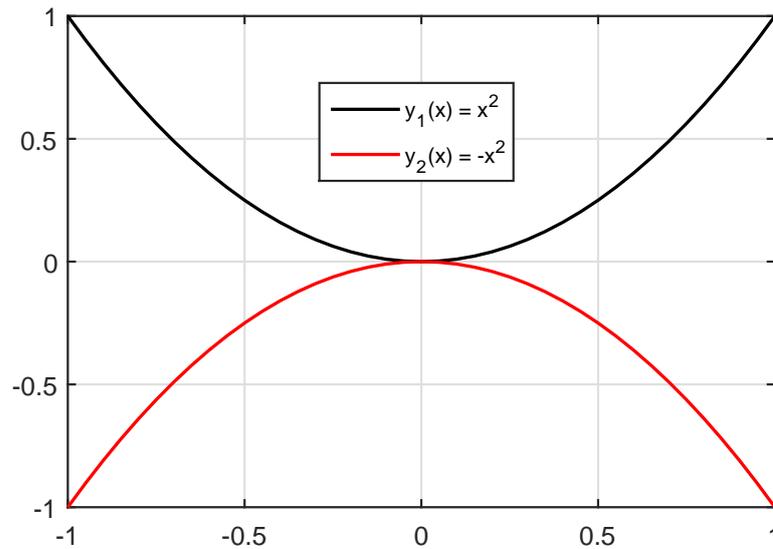


Figura 4 – Mínimo e Máximo global de uma função quadrática de uma variável.

## 3.2 Função Côncava e Convexa

Em muitas ocasiões em que é necessário conhecer a forma do gráfico de uma função, alguns aspectos são analisados, por exemplo, os pontos em que esta cresce e decresce e a sua curvatura.

Uma forma bastante comum de caracterizar uma função côncava ou convexa, é através da reta secante. Ligando quaisquer dois pontos do gráfico, a reta secante ficará acima ou abaixo deste. Portanto, em uma função convexa, a reta secante sempre ficará acima de seu gráfico; e em uma função côncava, a reta secante sempre estará abaixo de seu gráfico (SIMON; BLUME, 2004). Isto pode ser verificado observando a figura 5.

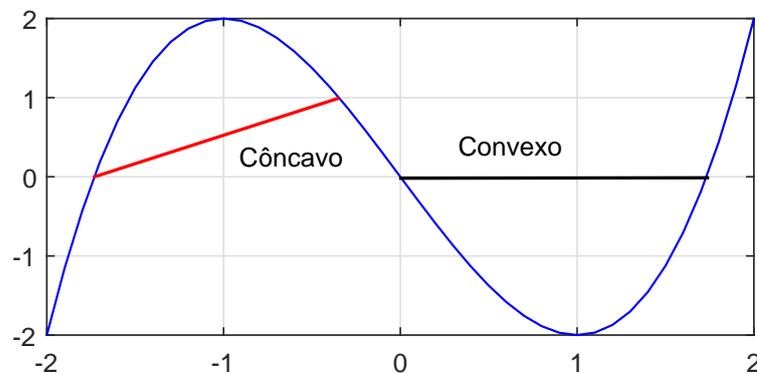


Figura 5 – Gráfico de  $f(x) = x^3 - 3x$ . Intervalo Côncavo e Convexo de  $f(x)$ .

Para uma definição mais formal, uma função real  $f$  definida em um subconjunto convexo  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  é convexa se, para quaisquer  $\vec{x}, \vec{y}$  em  $U$  e para todo  $t$  no intervalo entre

0 e 1,

$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y}) \quad (3.3)$$

ou seja, o plano secante fica acima da superfície da  $f$ . Uma função real  $g$  definida em um subconjunto convexo  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  é côncava se, para quaisquer  $\vec{x}, \vec{y}$  em  $U$  e para todo  $t$  no intervalo entre 0 e 1,

$$g(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \geq tg(\vec{x}) + (1-t)g(\vec{y}) \quad (3.4)$$

ou seja, o plano secante fica abaixo da superfície de  $g$ .

É natural encontrar na literatura os termos côncavo para cima e côncavo para baixo, no entanto, para as funções com mais de uma variável que satisfazem as equações (3.3) e (3.4), a terminologia clássica é denominada **convexa**, para uma função côncava para cima, e **côncava**, para uma função com concavidade para baixo.

Fica evidente que, para determinar se o ponto crítico de uma função é ponto de mínimo ou máximo, é importante saber se ela é convexa ou côncava. A derivada segunda de  $f$  fornece esta informação para funções de uma variável, basta conhecermos onde  $f'' > 0$  e onde  $f'' < 0$ .

Uma função de  $n$  variáveis, em um conjunto convexo  $U$ , é côncava ou convexa se, somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta em  $U$  é uma função côncava ou convexa de uma variável (SIMON; BLUME, 2004).

O teste para ver onde uma função é convexa ou côncava, inicia-se resolvendo a equação em  $x$  e determinando os pontos nos quais a  $f''(x) = 0$ . Os pontos **críticos de segunda ordem**, como são denominados, ou **ponto de inflexão**, quando a derivada segunda troca de sinal no ponto, dividem o domínio de  $f$  em intervalos, onde a derivada segunda é sempre positiva ou sempre negativa. Para cada intervalo de  $f$ , calculando a derivada segunda em um único ponto do mesmo intervalo, é possível determinar o sinal em todo intervalo.

Calculando a  $f''(x)$  da função esboçada na figura 5,  $f''(x) = 6x$ , é possível determinar as regiões de convexidade e concavidade. A derivada segunda é zero somente quando  $x = 0$ , negativa somente onde  $x$  é negativo e positiva somente onde  $x$  é positivo. Por isso, na figura 5,  $f$  é crescente de  $-\infty$  a  $x = -1$ , decrescente de  $x = -1$  a  $x = 1$  e côncava para  $x$  negativo, e novamente crescente de  $x = 1$  a  $+\infty$  e convexo para  $x$  positivo.

### 3.3 Condições de Primeira Ordem (CPO)

As definições de ponto de mínimo ou de máximo de uma função com uma variável são válidas para funções de múltiplas variáveis. Um ponto  $x^*$  é um mínimo local se não possuir pontos próximos que façam  $f$  atingir valores menores que  $f(x^*)$ . Quando  $x^*$  for um mínimo global,  $x^*$  será um ponto de mínimo de  $f$  em todo seu domínio.

Seja  $f$  uma função real de  $n$  variáveis em  $U$  e com domínio um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ :

1.  $\vec{x}^* \in U$  é um ponto de mínimo global de  $f$  em  $U$  se  $f(\vec{x}^*) < f(\vec{x})$ , para cada  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$  em  $U$ ;
2.  $\vec{x}^* \in U$  é um ponto de mínimo local de  $f$  em  $U$  se existe um subconjunto  $B$  em  $U$  em torno de  $\vec{x}^*$  de forma que  $f(\vec{x}^*) < f(\vec{x})$ , para cada  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$  em  $B \cap U$ .

As mesmas definições podem ser obtidas para o ponto máximo global e local tomando as definições 1 e 2 com as desigualdades invertidas.

Considerando essas definições, uma condição necessária para que  $\vec{x}^*$  seja um ponto de mínimo ou de máximo no interior da  $f$  é que a  $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$ , ou seja, que  $\vec{x}^*$  seja um ponto crítico da  $f$ . É necessário que  $\vec{x}^*$  esteja no interior do intervalo e não nos extremos do domínio da  $f$ .

A CPO, funciona para funções de  $n$  variáveis, porém a mesma deve possuir  $n$  derivadas parciais,  $\partial f / \partial x_i = 0$ , em  $\vec{x}^*$ . Em resumo, para que um ponto seja considerado mínimo ou máximo de uma função, é necessário que sua derivada primeira em  $\vec{x}^*$  seja igual a zero como mostra a equação (3.5):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = 0 \quad (3.5)$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Como exemplo, temos a função  $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2 - x_1^4 - x_2^4$ . Calculando as derivadas parciais de primeira ordem temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_2 - 4x_1^3 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1 - 4x_2^3 \quad (3.7)$$

Aplicando a CPO,  $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$ , obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x_2 - 4x_1^3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Resolvendo o sistema (3.8), pode-se concluir que as soluções são os pontos críticos da  $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2 - x_1^4 - x_2^4$  com ponto de sela em  $(0, 0)$ , máximo local em  $(1, 1)$  e mínimo local em  $(-1, -1)$ . Esse processo é suficiente para solucionar os problemas de otimização sem restrições cujas funções objetivo são diferenciáveis.

### 3.3.1 Restrições de Igualdade

O problema de otimização do qual trata este trabalho, DE, é um problema que se destaca por sua importância na operação, controle e planejamento dos grandes sistemas elétricos de potência e como em grande parte dos problemas de otimização, esse se resume em minimizar uma função de várias variáveis vinculada a equações de restrições. Nesta subseção será tratado problemas de otimização com restrições de igualdade utilizando a CPO e introduzindo o MML considerando os conceitos e definições até aqui apresentados.

O problema de minimizar ou maximizar uma função com  $n$  variáveis sujeita a (s.a) equações de igualdade pode ser generalizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \vee \max \quad & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, \dots, x_n) = h_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = h_m \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde a  $f$  é chamada de função objetivo e está restringida por  $h_1, \dots, h_m$  que são as equações das restrições de igualdade.

Para otimizar uma função sujeita a restrição de igualdade, utilizaremos o MML e para isso vamos tomar como exemplo um problema de minimização condicionada com apenas duas variáveis:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) \\ \text{s.a} \quad & g(x_1, x_2) = h \end{aligned} \tag{3.10}$$

A solução consiste em determinar o ponto crítico  $(x_1^*, x_2^*)$ , de  $f(x_1, x_2)$  sujeitos à restrição  $g(x_1, x_2) = h$ , o que significa encontrar o menor valor para  $k$  de forma que a curva de nível  $f(x_1, x_2) = k$  intercepte o conjunto restrição  $g(x_1, x_2) = h$ . Do ponto de vista geométrico, esta interceptação ocorre exatamente quando essas curvas possuírem uma reta tangente em comum, ou seja, os vetores gradientes  $(\nabla f(x_1^*, x_2^*) = -\lambda \nabla g(x_1^*, x_2^*))$ , são paralelos para alguma constante  $\lambda$  (STEWART, 2006).

O mínimo condicionado ocorre no ponto  $(x_1^*, x_2^*)$ , onde a curva de nível  $f(x_1, x_2) = k$  de menor valor toca a curva de nível  $g(x_1, x_2) = h$  e é tangente ao conjunto restrição  $g(x_1, x_2) = h$  no ponto crítico (SIMON; BLUME, 2004). Para que isso seja verdade, em  $(x_1^*, x_2^*)$  a inclinação da curva de nível  $f(x_1, x_2) = k$  é igual à inclinação da curva de nível

da restrição  $g(x_1, x_2) = h$ . Ou seja, o Teorema da Função Implícita (SIMON; BLUME, 2004) mostra que se  $\nabla g(x_1^*, x_2^*) \neq 0$  existe uma reta tangente à curva comum a  $f$  e  $g$  no mínimo condicionado, com os vetores  $\nabla f(x_1^*, x_2^*)$  e  $\nabla g(x_1^*, x_2^*)$  paralelos e a inclinação de  $f$  igual a inclinação de  $g$  como a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) &= -\lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) &= -\lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{aligned} \quad (3.11)$$

que podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Nesse momento temos duas equações e três variáveis:  $x_1$ ,  $x_2$  e  $\lambda$ . Portanto, é necessário uma terceira equação para completar o sistema. A condição de igualdade vem a suprir essa falta e assim obtemos um sistema com três variáveis e três equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ g(x_1^*, x_2^*) - h = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

O sistema (3.13) pode ser adequadamente reescrito de maneira simplificada considerando a função lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(g(x_1, x_2) - h) \quad (3.14)$$

Calculando as derivadas parciais do lagrangiano (3.14) e igualando cada um a zero resulta exatamente no sistema (3.13). A derivada parcial  $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = 0$  corresponde exatamente a equação de restrição no sistema (3.13) que na função lagrangiana é multiplicada por  $\lambda$ , chamado Multiplicador de Lagrange. Para minimizar ou maximizar uma função condicionada a uma equação de igualdade, basta determinar seus pontos críticos aplicando a CPO à função lagrangiana. Esse mecanismo aumenta a dimensão do problema de duas para três variáveis com a inclusão de  $\lambda$ , no entanto seria como solucionar um problema sem restrições de três variáveis.

Em resumo, se  $f$  e  $g$  são funções de duas variáveis e o ponto  $(x_1^*, x_2^*)$  é uma solução do problema (3.10) e não é um ponto crítico de  $g$ , então existe um número real  $\lambda^*$  tal que  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  é um ponto crítico do lagrangiano (3.14), ou seja, no ponto  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  teremos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.15)$$

Foi mostrado como exemplo um caso geral para minimizar uma função de duas variáveis e uma restrição. Agora, vamos tomar como exemplo um caso particular, onde se deseja maximizar a função objetivo como a seguir:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definindo a função lagrangiana e aplicando a CPO a ela, teremos:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Solucionando o sistema (3.18), obtemos o ponto crítico do lagrangiano  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = (x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  que satisfaz a equação (3.15) onde  $x_1^*$  e  $x_2^*$  maximizam a função objetivo.

Estendendo a aplicação do MML para uma função de  $n$  variáveis sujeita a um conjunto de restrições com  $m$  condições, existe um ponto crítico tal que  $(x_1^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$  satisfaz a função lagrangiana

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda_1[g_1(\vec{x}) - h_1] + \lambda_2[g_2(\vec{x}) - h_2] + \dots + \lambda_m[g_m(\vec{x}) - h_m] \quad (3.19)$$

Ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Desta maneira os problemas de otimização de funções diferenciáveis com  $n$  variáveis e  $m$  restrições de igualdade podem ser solucionados aplicando a CPO utilizando os Multiplicadores de Lagrange.

### 3.3.2 Restrições de Desigualdade

Conforme Rao (2009), os problemas de otimização que envolvem condições de desigualdades, por exemplo o de determinar o mínimo da  $f$ , podem ser descritos como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\vec{x}) \\ \text{s.a} \quad & t_i(\vec{x}) \leq u_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, m$ .

A condição de desigualdade descrita em (3.21) pode ser transformada em uma condição de igualdade adicionando uma nova variável de folga, "Slack variable",  $y_i^2$  (RAO, 2009). Djurovic, Milancic e Krsulja (2012) também utilizaram a variável slack para solucionar o problema de otimização com restrições de desigualdades. Dessa forma, a condição de desigualdade em (3.21) se torna uma igualdade:

$$T_i(\vec{x}, \vec{y}) = t_i(\vec{x}) + y_i^2 = u_i \quad (3.22)$$

com  $y_i^2$  a ser determinado e  $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$  o vetor de variáveis slack. O problema em (3.21) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\vec{x}) \\ \text{s.a} \quad & t_i(\vec{x}) + y_i^2 = u_i \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como para as restrições de igualdade, o conjunto das curvas de nível de  $f$  e  $t$  são tangentes entre si, ou seja,  $\nabla f(\vec{x}^*)$  e  $\nabla t(\vec{x}^*)$  estão alinhados, o que significa dizer que são múltiplos e novamente o multiplicador de Lagrange ( $\lambda$ ), reaparece como a variável que representa este múltiplo (SIMON; BLUME, 2004), conforme:

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x}^*) &= \sum_{i=1}^m -\lambda_i \nabla t_i(\vec{x}^*) \\ \nabla f(\vec{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla t_i(\vec{x}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Podemos escrever a função lagrangiana para esta nova situação como

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [t_i(\vec{x}) + y_i^2 - u_i] \quad (3.25)$$

Aplicando as condições de primeira ordem, teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Como exemplo, considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} \quad & t(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{aligned} \quad (3.27)$$

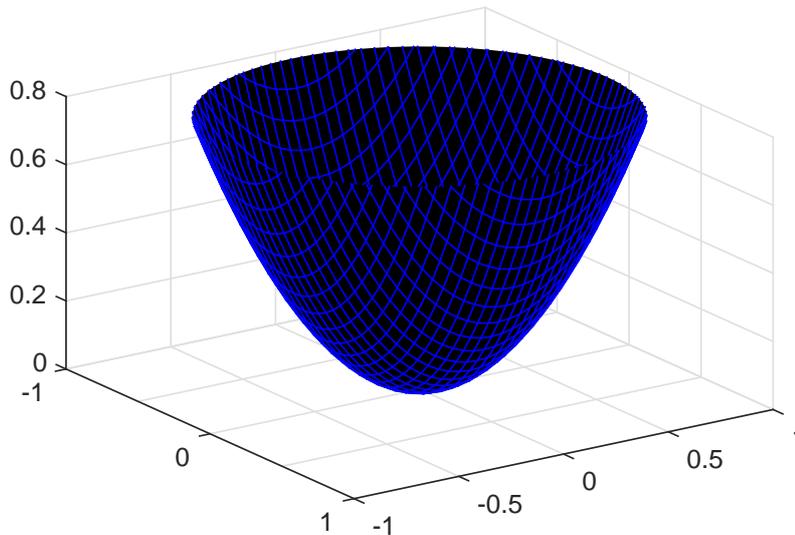


Figura 6 – Função quadrática de duas variáveis,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

Adicionando a variável de folga à restrição de desigualdade o problema fica

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} \quad & t(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Definindo o lagrangiano e aplicando a CPO em (3.28) temos:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, y, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda[x_1^2 + 2x_2^2 + y^2 - 4] \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

A figura (6) mostra o gráfico de  $f$ . Solucionando (3.30) obtemos o ponto crítico da função lagrangiana  $(x_1^*, x_2^*, y^*, \lambda^*) = (0, 0, 2, 0)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  minimizam a função objetivo, como podem observar é exatamente  $(0,0)$ , respeitando a condição de desigualdade.

### 3.4 Considerações Finais

O Método dos Multiplicadores de Lagrange é uma técnica clássica de otimização (RAO, 2009) e largamente utilizada na literatura para solucionar problemas dessa natureza. Muitos problemas de otimização de caráter econômico são enunciados em termos de formas quadráticas (SIMON; BLUME, 2004), como o DE e são solucionados utilizando o MML.

Nesse capítulo foi apresentado o MML assim como as condições suficientes para determinar o mínimo ou máximo de uma função qualquer que seja diferenciável, a CPO deixa bem claro essa condição. Esse método é eficaz e seguro no que tange a encontrar a solução ótima de funções contínuas e diferenciáveis. O MML faz uma abordagem bastante analítica e utiliza as ferramentas do cálculo diferencial para determinar os pontos críticos.

Para funções descontínuas, as quais não pode ser utilizado o cálculo diferencial, esse método torna-se limitado em muitas aplicações. No entanto, é uma técnica consolidada na condução de problemas de otimização em engenharia, especialmente na solução do DE, e forma uma base segura para experimentar técnicas numéricas e até mesmo heurísticas em problemas os quais o MML são aplicáveis.



## 4 Otimização por Enxame de Partículas

Em 1995, James Kennedy e Russell Elberhart apresentaram o algoritmo de otimização por enxame de partículas (PSO) (MAHOR; PRASAD; RANGNEKAR, 2009) e de acordo com Serapião (2009), o PSO surgiu a partir de experiências com algoritmos que descrevem o comportamento social constatado em variadas espécies de pássaros e cardumes de peixes, assim como do comportamento social humano.

Como novo método heurístico, o PSO é um algoritmo de busca das soluções ótimas com base em processos estocásticos. Para Mahor, Prasad e Rangnekar (2009), a simplicidade do algoritmo é sua principal característica e as posições de cada partícula podem apontar para a solução ótima.

O PSO está baseado em uma população composta por indivíduos capazes de interagir entre si e com o meio ambiente (SERAPIÃO, 2009). A mudança de direção e velocidade de cada indivíduo no sentido de encontrar o local mais favorável dentro do espaço de busca, é um efeito dos aspectos sociais, cognitivos e estocásticos das partículas (EBBESEN; KIWITZ; GUZZELLA, 2012). Os indivíduos utilizam, de forma resumida, três princípios para se adaptarem (KENNEDY et al., 2001): autoavaliação, adaptação e imitação. Assim, eles são capazes de lidar com as possibilidades que o meio propicia e gerar resultados provenientes das interações sociais.

### 4.1 O Algoritmo PSO

Na otimização por enxame de partículas os indivíduos inicialmente são distribuídos em posições aleatórias no espaço de busca com dimensão igual ao número de variáveis a serem determinadas. Novas posições são definidas no espaço de busca de acordo com o comportamento individual e coletivo das partículas, movimentando o enxame para a solução ótima. As partículas tenderão a se mover em direção umas às outras influenciando umas às outras e conseqüentemente todo o enxame. Os aspectos cognitivos e sociais estão diretamente ligados ao desempenho da população. Cada partícula possui sua própria experiência e como os indivíduos são sociais, eles estimam o comportamento dos vizinhos e a qualidade das experiências. Portanto, a decisão correta de uma partícula será função de suas decisões passadas e do aproveitamento dos seus vizinhos (KENNEDY et al., 2001).

No algoritmo PSO, as coordenadas no espaço de busca indicam as posições ocupadas pelas partículas que compõem um enxame ou população. As partículas tendem a se mover no espaço em busca da posição ótima e as variações ao longo do processo indicam novas posições no espaço.

Dois parâmetros, social e cognitivo, norteiam o processo de deslocamento das partículas. O primeiro é o melhor resultado individual de todo enxame,  $gBest$  ( $g_B$ ), que está relacionado com a influência que uma partícula exerce sobre toda população. O segundo,  $pBest$  ( $p_B$ ), reflete o melhor resultado obtido individualmente por cada partícula até o presente momento (SERAPIÃO, 2009).

Esses parâmetros são avaliados pela função objetivo a cada iteração e essas informações são guardadas ao longo do processo iterativo, que resultará na otimalidade do problema de otimização. Portanto, as soluções estão associadas aos vetores posição e velocidade, que serão atualizados de acordo com as variações de ( $p_B$ ) e ( $g_B$ ) no decorrer do processo de evolução de cada indivíduo indicando a provável solução no espaço de busca.

Inicialmente, os vetores posição e velocidade são gerados aleatoriamente. Durante o processo de evolução do PSO, a partícula  $\vec{p}_i$  deverá se mover com uma velocidade  $\vec{v}_i$  para um novo local no espaço  $\vec{x}_i(k+1)$ , composto pelo vetor da sua melhor posição alcançada até o instante atual,  $\vec{x}_{i_{p_B}}$  que gera a melhor solução individual  $p_B$ , e o vetor posição da melhor partícula localizada entre todas as partículas do enxame,  $\vec{x}_{i_{g_B}}$  que relaciona o melhor resultado de toda a população. A figura 7 mostra como uma partícula se movimenta no espaço de soluções.

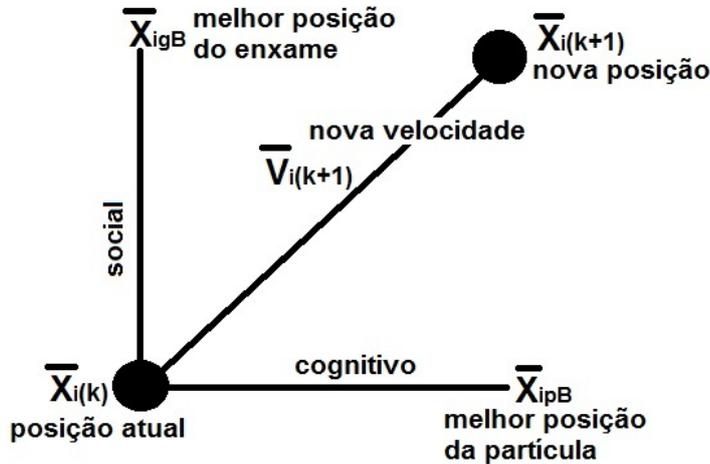


Figura 7 – Nova posição da partícula  $i$  associada aos parâmetros cognitivo e social.

A equação (4.1), é a expressão que atualiza a nova velocidade da partícula  $\vec{v}_i(k+1)$ . As constantes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  representam, respectivamente, os parâmetros cognitivo e social, conforme Kennedy et al. (2001);  $\vec{x}_{i_{p_B}}$  é a posição individual que retorna o melhor valor da função objetivo até o momento,  $p_B$ , e  $\vec{x}_{i_{g_B}}$  o ponto no espaço que possui o melhor valor da função objetivo até o momento dentre todas as partículas,  $g_B$ ;  $\vec{v}_i(k)$  a velocidade atual;

$\vec{x}_i(k)$  a posição atual da partícula e  $\vec{v}_i(k+1)$  a nova velocidade da partícula  $i$ .

$$\vec{v}_i(k+1) = \vec{v}_i(k) + \varphi_1(\vec{x}_{i_{p_B}} - \vec{x}_i(k)) + \varphi_2(\vec{x}_{i_{g_B}} - \vec{x}_i(k)) \quad (4.1)$$

A nova posição da partícula é calculada pela equação (4.2), que é função da antiga posição adicionada da nova velocidade calculada:

$$\vec{x}_i(k+1) = \vec{x}_i(k) + \vec{v}_i(k+1) \quad (4.2)$$

A velocidade dos indivíduos sofrem restrições para que o espaço de busca não seja extrapolado, dessa forma são impostos limites para o módulo do vetor velocidade,  $|\vec{v}_i| \leq v_{max}$ , conforme mostra a equação (4.3):

$$|\vec{v}_i| > v_{max} \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} v_{max} \quad (4.3)$$

Caso o espaço de busca seja extrapolado pela partícula  $\vec{p}_i$ , a mesma é desconsiderada e uma nova partícula é introduzida aleatoriamente no espaço de busca. A seguir, no algoritmo 1, se encontra a descrição em pseudocódigo do PSO em sua forma original:

---

**Algoritmo 1:** Pseudocódigo do PSO

---

- 1 Declaração das variáveis;
  - 2 Número de partículas do enxame;
  - 3 Inicializa as posição de cada partícula  $p_i$  aleatoriamente;
  - 4 Atribuir velocidade igual para todas as partículas;
  - 5 Calcule  $p_B$  e  $g_B$  e guarde suas posições;
  - 6 **while** Enquanto o critério de parada não for satisfeito, para cada partícula  $p_i$  **do**
  - 7     atualize a velocidade;
  - 8     verifique o limite de velocidade;
  - 9     atualize a posição;
  - 10    verifique o limite do espaço de busca;
  - 11    calcule  $p_B$  e guarde sua posição;
  - 12    encontre  $g_B$  e guarde sua posição;
  - 13    Se a condição de término não for satisfeita, volte a linha 7;
  - 14 **end**
- 

Nesse trabalho, foi realizado o estudo e a implementação do PSO conservando sua forma original. No entanto, alguns avanços posteriores foram introduzidos no PSO. Em problemas de alta complexidade, com frequência ocorriam divergências ou convergência prematura. Com o objetivo de sanar essas dificuldades para problemas multidimensionais, aumentar a velocidade de convergência e precisão da solução, foram propostos alguns

arranjos dentre outros a saber: o peso de inércia da velocidade ( $\omega$ ) (SHI; EBERHART, 1998) e o fator de restrição ( $\mathcal{X}$ ), que é um amortecimento que limita a velocidade da partícula baseado nos aspectos cognitivo e social (CLERC, 1999).

## 4.2 Critério de Parada

Normalmente, na literatura, o algoritmo PSO é executado até que um respectivo número máximo de iterações seja alcançado, sendo que não é apresentado um motivo para a adoção deste número, além de tentativa e erro. Há uma desvantagem nesse critério pelo fato de ser desconhecido o número de iterações necessárias para se atingir a convergência (ZIELINSKI; PETERS; LAUR, 2005), o que faz um critério de parada que estime o erro ser uma importante ferramenta para determinar o número de evoluções que são suficientes para se obter convergência.

Para evitar convergência antecipada ou divergência nos processos de otimização, pode ser adotado um entre os dois seguintes critérios: o primeiro critério,  $C_1$ , consiste em verificar se a estimativa do erro relativo nas últimas  $g$  iterações é menor que um valor previamente estabelecido para o erro mínimo; o segundo critério,  $C_2$ , se resume em calcular as distâncias euclidianas entre as partículas da população e comparar com o erro mínimo anteriormente estabelecido. Em ambos os critérios o algoritmo é repetido até que o critério de parada seja satisfeito, ou seja, quando o erro ou a distância euclidiana entre os pontos, forem menor que o erro ou a distância mínimo estabelecida a priori. Uma revisão completa sobre esses e outros critérios de parada pode ser encontrado em Zielinski, Peters e Laur (2005).

### 4.2.1 Otimização Funcional

Para uma compreensão mais ampla sobre o funcionamento do PSO no processo de otimização, foi realizado um estudo de caso a parte, voltado para o problema de minimização de funções. O PSO foi implementado conforme o algoritmo 1 apresentado anteriormente e os resultados das simulações computacionais foram obtidas utilizando o Matlab 8.5.0 (MathWorks) executado em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-2410M, de 2.30 GHz e 6GB de RAM.

O algoritmo de otimização PSO, foi utilizado para minimizar a função descrita pela equação (4.4), função F6 de Schaffer, que é uma função clássica na condução de testes para otimização de funções.

$$f_1(\vec{x}) = 0,5 + \frac{\sin^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - 0,5}{(1 + 0,001 \cdot (x_1^2 + x_2^2))^2} \quad (4.4)$$

Bidimensional e apresentando vários mínimos locais, essa função alcança o mínimo global zero somente quando todas as variáveis atingem o valor zero (SERAPIÃO, 2009), como mostra a figura 8.

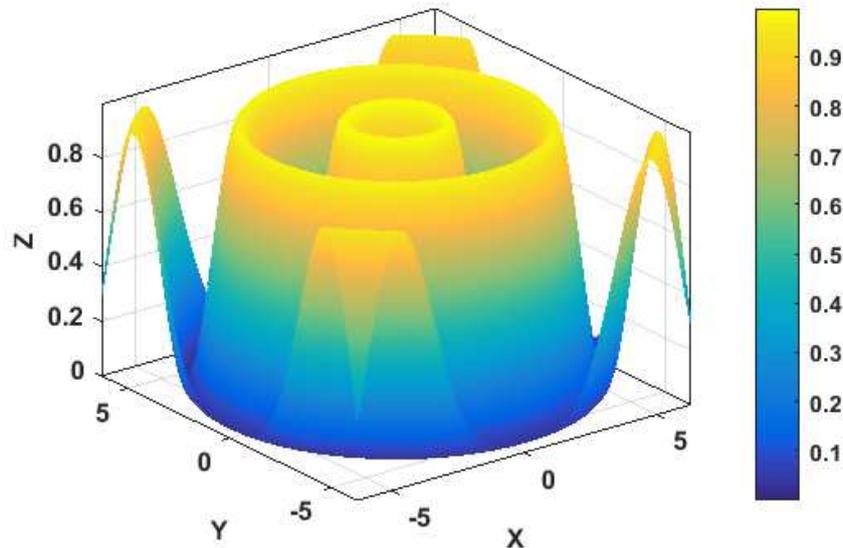


Figura 8 – Função F6 Schaffer.

Os resultados dos experimentos computacionais com a implementação do PSO para otimização da função F6 de Schaffer, como função objetivo, foram obtidos para avaliação de desempenho do PSO e dos critérios de parada mencionados aplicados a esse algoritmo. Esta análise é importante para determinar o critério de parada a ser conduzido na implementação do PSO para solucionar o problema de DE.

Foram realizados 20 experimentos para cada método aplicado. Para o critério  $C_1$ , o erro percentual  $10^{-6}$ , foi avaliado a cada 100 iterações (G100); para o critério  $C_2$ , a maior distância entre as partículas deve ser menor que  $10^{-6}$ . Os valores dos parâmetros adotados nas simulações se encontram na tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na otimização funcional.

Parâmetros	Valores
Partículas (P)	20
Dimensão (D)	2
Cognitivo ( $\varphi_1$ )	2
Social ( $\varphi_2$ )	2
Velocidade máx ( $v_{máx}$ )	10
G gerações ( $C_1$ )	$10^{-6}/G100$
Dist. Euclidiana ( $C_2$ )	$10^{-6}$

## 4.2.2 Resultados

Em cada experimento, de forma aleatória, as partículas inicialmente assumiram diferentes posições no espaço, como mostra a figura 9.

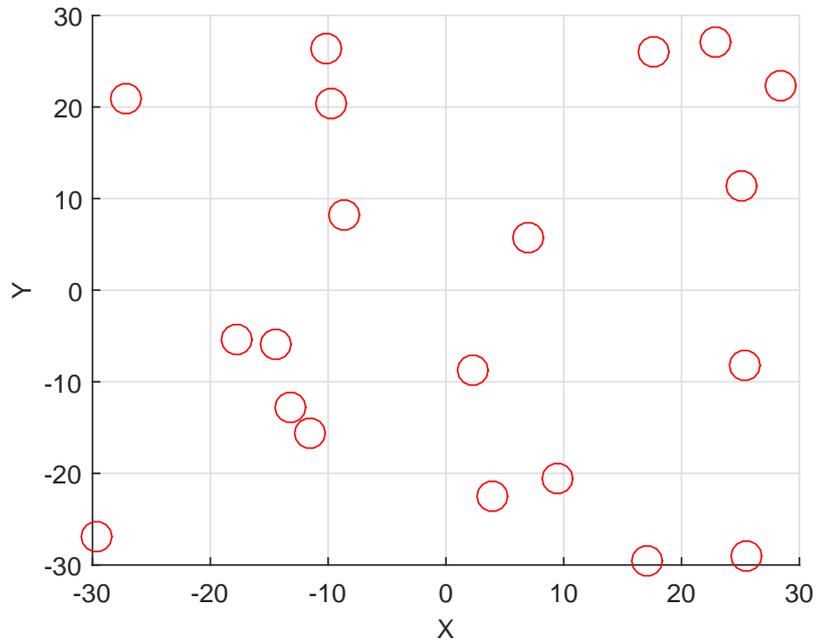


Figura 9 – Posição inicial das partículas.

No decorrer do processo de otimização as partículas ocupam diferentes posições no espaço na direção da melhor solução, como mostra a figura 10.

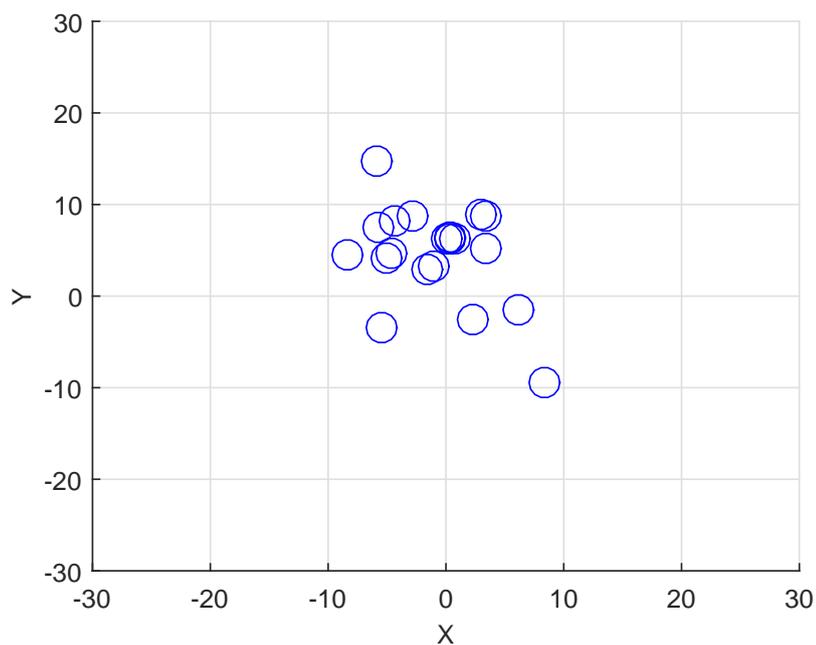


Figura 10 – Posição das partículas durante o processo de otimização.

Após o algoritmo atingir a convergência, as partículas assumem suas melhores posições no espaço, os pontos que minimizam a função objetivo, como mostra a figura 11.

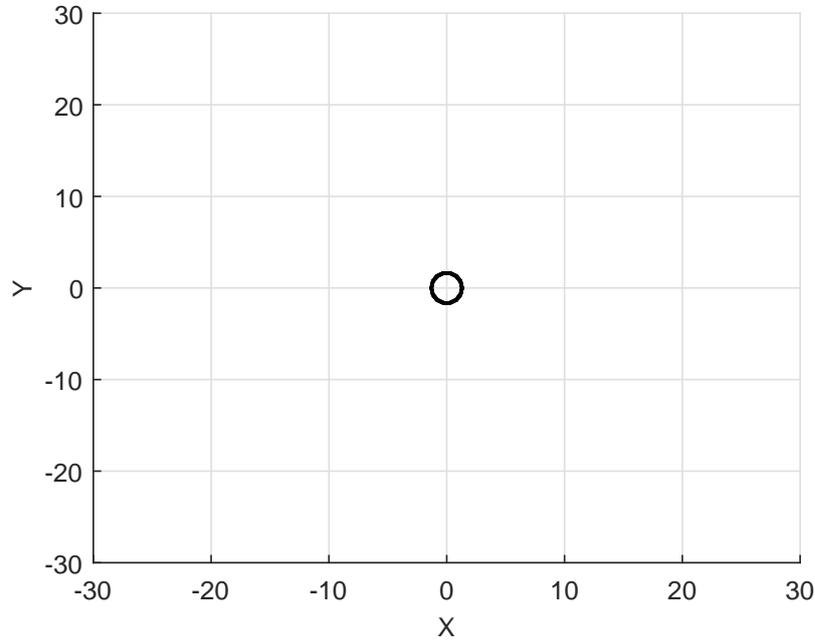


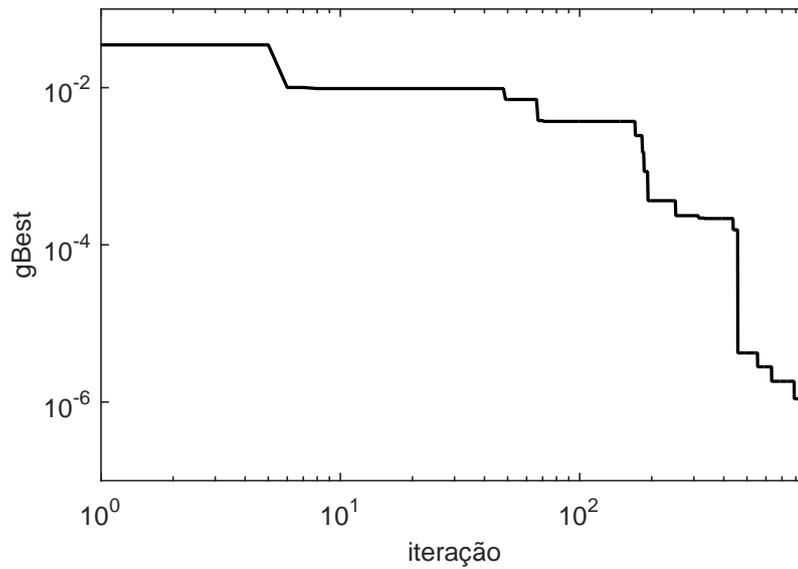
Figura 11 – Posição das partículas ao término do processo de otimização.

Para ambos critérios de parada foi calculado a média ( $\mu$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) das soluções ótimas, das iterações e do tempo decorrido necessário para convergência do algoritmo. Esses resultados podem ser observados a seguir, como mostra a tabela 2.

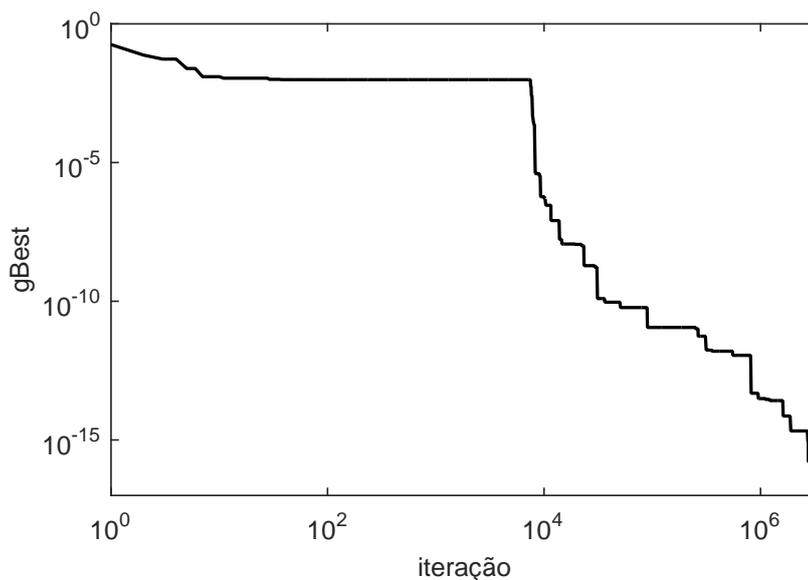
Tabela 2 – Soluções do PSO com critérios de parada.

Critério ( $C_1$ )			
	Soluções Ótimas	Tempo(s)	Iterações
$\mu$	0,0079	0,0751	450,0000
$\sigma$	0,0087	0,0470	304,9590
Critério ( $C_2$ )			
	Soluções Ótimas	Tempo(s)	Iterações
$\mu$	$1,3989 \times 10^{-15}$	823,6225	4.283.986,0000
$\sigma$	$4,2600 \times 10^{-15}$	516,0599	2.527.965,4414

A figura 12 mostra o gráfico da melhor solução obtida entre as 20 simulações realizadas para a aplicação do critério de parada ( $C_1$ ). Esse critério realizou 900 iterações, até que o algoritmo atingisse a convergência, em aproximadamente 0,1396 s e sua solução ótima atingiu o valor de  $1,1003 \times 10^{-6}$ , ou seja, aproximadamente zero. Para esse critério, o algoritmo converge para o mínimo da função, em média, após 450 iterações em aproximadamente 75,1 ms.

Figura 12 – Solução Ótima Aplicando o Critério  $C_1$ .

A figura 13 mostra o gráfico da melhor solução obtida entre os 20 experimentos realizados para a aplicação do critério de parada ( $C_2$ ). O segundo critério precisou de 3.276.255 iterações para convergir, totalizando um tempo de 611,3236 s para determinar a solução ótima de  $1,6653 \times 10^{-16}$ , absolutamente zero. Para o critério  $C_2$ , o algoritmo converge para o mínimo da função, em média, após 4.283.986 iterações levando 13,7270 min.

Figura 13 – Solução Ótima Aplicando o Critério  $C_2$ .

É notória a diferença entre a quantidade de iterações necessárias para os critérios  $C_1$  e  $C_2$  alcançarem a solução desejada, necessitando este último de muitas evoluções do algoritmo para atingir a convergência. O tempo médio necessário para que o critério  $C_2$

convirja para a solução é extremamente alto e para muitas aplicações, como a avaliação do comportamento de uma função em curto espaço de tempo, se torna inviável a utilização desse critério. Já o critério  $C_1$  alcançou a convergência do algoritmo em uma quantidade razoável de iterações além de retornar como mínimo da função (4.4), um ótimo resultado.

Esse mesmo estudo de caso foi realizado por Serapião (2009). No entanto, a autora não utilizou critério de parada, apenas determinou que o algoritmo terminasse o processo iterativo ao atingir 3.000 gerações consecutivas. A tabela 3 mostra esses resultados onde é possível fazer uma breve comparação entre as soluções.

Tabela 3 – Soluções ótimas do PSO com critério e sem critério de parada.

	$\mu$	$\sigma$	Iterações( $\mu$ )
$C_1$	0,0079	0,0087	450,0000
$C_2$	0,0087	$4,2600 \times 10^{-15}$	4.283.986,0000
$C_0^1$	0,0128	0,0312	3.000,0000

Os resultados obtidos utilizando o critério  $C_1$ , supera em todos aspectos as soluções apresentadas por Serapião (2009) ( $C_0$ ); menor média e desvio padrão das soluções ótimas e menor média de iterações. O Critério  $C_2$  apesar de retornar bons resultados requer alto custo computacional.

Devido ao esforço computacional exigido pelo critério  $C_2$  ser demasiadamente alto e o critério  $C_1$  apresentar resultados satisfatórios no que tange a sua convergência para a solução do problema, o critério  $C_1$  será utilizado como critério de parada na implementação do PSO para otimização dos problemas de DE descritos nos capítulos 5 e 6. Os resultados de todas as simulações do presente estudo de caso, estão disponíveis no apêndice A.

### 4.3 Considerações Finais

Nesse capítulo foi descrito a origem e o funcionamento do algoritmo de otimização por enxame de partículas. O PSO foi utilizado para minimizar uma função teste e mostrar como esse método, que apesar de ser heurístico, pode oferecer uma gama de recursos para solucionar diversos problemas de otimização.

Como um diferencial, do que normalmente é encontrado na literatura, foi investigado dois critérios de parada, dos quais, concluiu-se a partir do estudo de caso realizado que o critério  $C_1$ , que calcula o erro percentual em um intervalo de  $g$  iterações, é suficiente para garantir a convergência do PSO ao ser utilizado nas aplicações dos quais se propõe esse trabalho.

<sup>1</sup> Referência: Serapião (2009).

Avanços e aplicações do PSO tem sido amplamente investigado. Inclusive [Kennedy e Eberhart \(1997\)](#) sugeriram uma versão binária do PSO para resolução de problemas de ordem combinatória. O PSO tem sido aplicado em diversos problemas de engenharia e até mesmo na melhoria de desempenho de outros algoritmos, como algoritmos genéticos ([RU; JIANHUA, 2008](#)) e redes neurais ([BASHIR; EL-HAWARY, 2009](#)). Em problemas de engenharia, o PSO tem seu lugar em muitas aplicações assim como no DE ([WANG; SINGH, 2009](#)).

## 5 Comparação entre o PSO e o MML: Sistema com 3 Unidades Geradoras

Para mostrar que o PSO funciona e seus resultados são válidos, foi realizado um estudo de caso onde foi solucionado o problema de DE utilizando o PSO e confrontando o resultado obtido com a solução obtida através do Método Clássico dos Multiplicadores de Lagrange.

O PSO foi implementado conforme o algoritmo apresentado no capítulo 4 e os resultados das simulações computacionais foram obtidas utilizando o Matlab 8.5.0 (MathWorks) executado em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-2410M, de 2.30 GHz e 6GB de RAM.

O DE de unidades termais consiste em um problema de otimização onde se deseja fazer alocação da carga demandada pelo sistema de potência elétrica nas unidades geradoras, de modo a alcançar o menor custo total de geração, atendendo as devidas restrições da operação e as condições de igualdade e desigualdade individual de cada unidade.

Para comparação do PSO com o Método dos Multiplicadores de Lagrange foi simulado um sistema termoeletrico de três unidades geradoras, como consta em [Serapião \(2009\)](#) e [Saadat \(1999\)](#). O custo total do combustível na geração de  $n$  termoeletricas é o somatório do custo individual de cada unidade de geração, dado por:

$$\sum_{i=1}^n C_i(P_i) \quad (5.1)$$

onde  $C_i$  é a função de custo do combustível da unidade de geração  $i$  em \$/h e  $P_i$  em MW é a potência gerada pela mesma unidade  $i$ .

O custo individual de cada unidade é expresso pela forma quadrática em função da potência gerada:

$$C_i(P_i) = a_1 P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (5.2)$$

que estará restrito a

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (5.3)$$

onde  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são os coeficientes característicos do gerador e,  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$ , são respectivamente os limites de operação mínimos e máximos da unidade  $i$ , em MW.

A potência gerada deve satisfazer a demanda de carga solicitada pelo sistema:

$$\sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L = 0 \quad (5.4)$$

cuja demanda  $P_D$ , considerada constante, é a potência a ser suprida pelo sistema e  $P_L$  é a perda de transmissão a ser calculada conforme descrito no capítulo 2. As equações (5.3) e (5.4) são as referidas condições de desigualdade e igualdade do sistema.

O problema de minimizar o custo de  $n$  unidades geradoras considerando as perdas e limites de geração pode ser descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_n) = 0 \\ \\ P_1^{\min} \leq P_1 \leq P_1^{\max} \\ \vdots \\ P_n^{\min} \leq P_n \leq P_n^{\max} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

O estudo de caso que será apresentado compreende um parque termal de três unidades geradoras, como mostra a figura 14 (SAADAT, 1999), cuja demanda de potência  $P_D$  a ser suprida são de 150 MW.

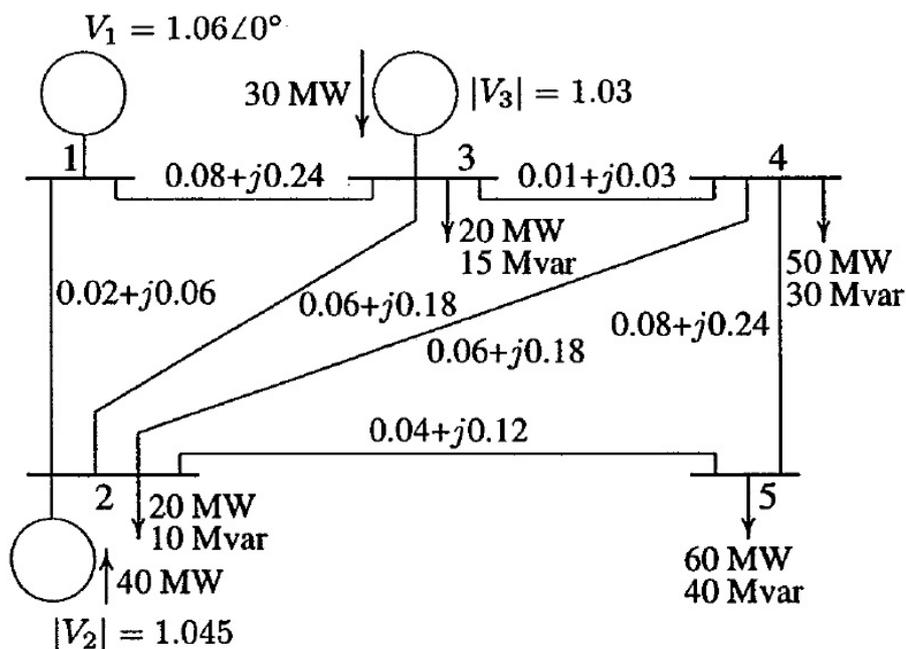


Figura 14 – Parque de geração termoelétrica.

Fonte: Saadat (1999)

Os dados do sistema estão disponíveis nas tabelas 4 e 5:

Tabela 4 – Dados das linhas de transmissão.

Susceptância Capacitiva. <sup>1</sup>							
Linha	1-2	1-3	2-3	2-4	2-5	3-4	4-5
$\frac{1}{2}B$	0,030	0,025	0,020	0,020	0,015	0,010	0,025

Tabela 5 – Coeficientes de custos e Limites da geração.

Unidade <sub><i>i</i></sub>	$a_i$ (\$/MW <sup>2</sup> )	$b_i$ (\$/MW)	$c_i$ (\$)	$P_i^{min}$ (MW)	$P_i^{max}$ (MW)
1	0,008	7	200	10	85
2	0,009	6,3	180	10	80
3	0,007	6,8	140	10	70

As matrizes B dos coeficientes de perda nas linhas de transmissão com base de 100 MVA, que podem ser obtidas a partir dos resultados do estudo de fluxo de potência do sistema da figura 14 aplicando métodos de regressão não linear, são como se segue:

$$B_{ij} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0,0218 & 0,0093 & 0,0028 \\ 0,0093 & 0,0228 & 0,0017 \\ 0,0028 & 0,0017 & 0,0179 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$B_{i0} = 10^{-2} \times [0,3 \quad 3,1 \quad 1,5] = [B_{10} \quad B_{20} \quad B_{30}], \quad (5.7)$$

$$B_{00} = 0,030523. \quad (5.8)$$

Para o sistema com três unidades considerado, o problema de otimização acima fica da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, P_2, P_3) \\ \text{s.a.} \quad P_1 + P_2 + P_3 - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3) = 0 \\ \quad \quad 10 \leq P_1 \leq 85 \\ \quad \quad 10 \leq P_2 \leq 80 \\ \quad \quad 10 \leq P_3 \leq 70 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

cujo objetivo é minimizar a função custo:

$$C(P_1, P_2, P_3) = (a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2) + (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) + (c_1 + c_2 + c_3) \quad (5.10)$$

<sup>1</sup> Referência: Saadat (1999).

que estará sujeita as restrições de desigualdade que são as referidas capacidades limites de geração de cada unidade termoeétrica e à restrição de igualdade dada pelo balanço de potência, com as perdas nas linhas de transmissão dadas por:

$$\begin{aligned}
P_L(P_1, P_2, P_3) = & (B_{11}P_1P_1 + B_{12}P_1P_2 + B_{13}P_1P_3) + \\
& (B_{21}P_2P_1 + B_{22}P_2P_2 + B_{23}P_2P_3) + \\
& (B_{31}P_3P_1 + B_{32}P_3P_2 + B_{33}P_3P_3) + \\
& (B_{10}P_1 + B_{20}P_2 + B_{30}P_3) + B_{00}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

## 5.1 Solução via MML

Como visto no capítulo 3, as restrições envolvendo desigualdades podem ser reescritas como igualdades através da introdução de variáveis “slacks”. Assim, o problema de DE (5.9) pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, P_2, P_3) \\ \text{s.a.} \quad P_1 + P_2 + P_3 - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3) = 0 \\ \quad \quad P_1 - Y_1^2 - 10 = 0 \\ \quad \quad P_1 + Y_2^2 - 85 = 0 \\ \quad \quad P_2 - Y_3^2 - 10 = 0 \\ \quad \quad P_2 + Y_4^2 - 80 = 0 \\ \quad \quad P_3 - Y_5^2 - 10 = 0 \\ \quad \quad P_3 + Y_6^2 - 70 = 0 \end{array} \right. \tag{5.12}$$

A função lagrangiana para o problema de otimização descrito pela equação (5.12) é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(P_1, P_2, P_3, Y_1, \dots, Y_6, \lambda_1, \dots, \lambda_7) = & C(P_1, P_2, P_3) + \lambda_1[P_1 + P_2 + P_3 \\
& - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3)] + \lambda_2(P_1 - Y_1^2 - 10) + \lambda_3(P_1 + Y_2^2 - 85) + \\
& \lambda_4(P_2 - Y_3^2 - 10) + \lambda_5(P_2 + Y_4^2 - 80) + \lambda_6(P_3 - Y_5^2 - 10) + \\
& \lambda_7(P_3 + Y_6^2 - 70)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Aplicando a CPO à função lagrangiana em (5.13), como descritas no capítulo 3,

obtemos o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_1P_1 + b_1 + \lambda_1(1 - 2B_{11}P_1 - B_{12}P_2 - B_{13}P_3 - B_{21}P_2 - B_{31}P_3 - B_{10}) + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2a_2P_2 + b_2 + \lambda_1(1 - B_{12}P_1 - B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2 - B_{23}P_3 - B_{32}P_3 - B_{20}) + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ 2a_3P_3 + b_3 + \lambda_1(1 - B_{13}P_1 - B_{23}P_2 - B_{31}P_1 - B_{32}P_2 - 2B_{33}P_3 - B_{30}) + \lambda_6 + \lambda_7 = 0 \\ -2\lambda_2Y_1 = 0 \\ 2\lambda_3Y_2 = 0 \\ -2\lambda_4Y_3 = 0 \\ 2\lambda_5Y_4 = 0 \\ -2\lambda_6Y_5 = 0 \\ 2\lambda_7Y_6 = 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 - P_D - [(B_{11}P_1P_1 + B_{12}P_1P_2 + B_{13}P_1P_3) + (B_{21}P_2P_1 + B_{22}P_2P_2 + \\ B_{23}P_2P_3) + (B_{31}P_3P_1 + B_{32}P_3P_2 + B_{33}P_3P_3) + (B_{10}P_1 + B_{20}P_2 + B_{30}P_3) + B_{00}] = 0 \\ P_1 - Y_1^2 - 10 = 0 \\ P_1 + Y_2^2 - 85 = 0 \\ P_2 - Y_3^2 - 10 = 0 \\ P_2 + Y_4^2 - 80 = 0 \\ P_3 - Y_5^2 - 10 = 0 \\ P_3 + Y_6^2 - 70 = 0 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

A solução do sistema (5.14) foi obtida utilizando o comando `fsolve` do Matlab e é apresentada na tabela 6.

Tabela 6 – Minimização via MML para 3 unidades de geração

Saídas de Potência	Multiplicadores de Lagrange
Unidade 1 (MW)	33,4701
Unidade 2 (MW)	64,0974
Unidade 3 (MW)	55,1012
$P_L$ (MW)	2,6687
$P_D$ (MW)	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687
Custo (\$/h)	1.599,98

Esse estudo de caso foi realizado por [Serapião \(2009\)](#) utilizando apenas o PSO, no entanto verificou-se que o método aplicado nesta seção, que nos dá o resultado exato do problema, retornou uma solução bem próxima, porém melhor que a solução encontrada pela autora (\$1.609,13/h), mostrando que o Método dos Multiplicadores de Lagrange foi eficaz na determinação do custo mínimo da geração para esse problema de DE com 3 unidades termoelétricas.

## 5.2 Solução via PSO

Primeiramente foi realizado um estudo experimental para determinar o número de gerações  $g$  apropriado para se utilizar no critério de parada. Foram realizadas 200 simulações utilizando o PSO 1, com critério de parada como definido no capítulo 4, e 20 execuções do algoritmo para cada  $g$  considerado. Na implementação do PSO, a função objetivo utilizada é dada por (5.15):

$$f(P_1, P_2, P_3) = \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^3 P_i - P_D - P_L \right| \quad (5.15)$$

onde  $\phi$  é uma constante positiva que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga. A cada experimento as partículas foram iniciadas com valores aleatórios. A tabela 7 relaciona os parâmetros utilizados na implementação do PSO 1 e a tabela 8 mostra a média ( $\mu$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) do custo para cada  $g$  analisado, destacando as melhores soluções em negrito.

Tabela 7 – Parâmetros do PSO 1 - 3 unidades de geração.

Parâmetros	Valores
Partículas (P)	20
Dimensão (D)	3
Cognitivo ( $\varphi_1$ )	2
Social ( $\varphi_2$ )	2
Constante Positiva ( $\phi$ )	100
Velocidade máx ( $v_{máx}$ )	5
Critério de parada ( $C_1$ )	$10^{-6}$

No estudo de caso em análise, para que o critério  $C_1$  atingisse a convergência, o erro foi avaliado, o parâmetro  $g$  foi alterado e diferentes simulações foram realizadas para otimização do problema de DE enunciado pela equação (5.9). Chegou-se a conclusão que 500 gerações é um valor de  $g$  conveniente para garantir uma boa convergência, sem que ocorra relevantes oscilações na solução encontrada pelo PSO, mesmo utilizando  $g$  superiores a 500. A tabela 9 relaciona o custo médio alcançado por cada  $g$  considerado, o erro percentual em relação a solução exata do MML e a média de iterações para se obter convergência.

A figura 15 mostra a diminuição do  $E_R(\%)$  do custo médio em relação a solução determinada pelo MML. A medida que o intervalo de  $g$  gerações é maior, cresce a quantidade de iterações que são necessárias para que o algoritmo convirja para a solução. Portanto, o custo computacional também cresce e confere pouca melhoria na solução do PSO em relação ao MML a partir de G500.

Tabela 8 – Custos para as g gerações.

Gerações	min (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	max (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
G1	1.606,68	1.611,99	1.645,89	17,57
G10	1.600,77	1.611,05	1.630,26	8,52
G50	1.599,98	1.605,27	1.628,82	7,48
G100	1.599,98	1.603,86	1.618,88	6,08
G500	1.599,98	1.600,00	1.600,22	0,05
G1000	<b>1.599,98</b>	1.600,17	1.603,46	0,76
G1500	1.599,98	1.600,00	1.600,24	0,06
G2000	1.599,98	1.600,38	1.607,78	1,70
G2500	1.599,98	<b>1.599,98</b>	<b>1.600,00</b>	<b>0,00</b>
G3000	1.599,98	1.600,02	1.600,56	0,13

Tabela 9 – Custo médio, erro percentual e média de iterações - 3 unidades.

Gerações	$\mu$ (\$/h)	$E_R$ (%)	Iterações
G1	1.611,99	0,7506	1,9000
G10	1.611,05	0,6919	35,5000
G50	1.605,27	0,3306	310,0000
G100	1.603,86	0,2425	705,0000
G500	1.600,00	0,0013	3.085,0000
G1000	1.600,17	0,0119	5.950,0000
G1500	1.600,00	0,0013	8.100,0000
G2000	1.600,38	0,0250	10.500,0000
G2500	1.599,98	0,0000	12.250,0000
G3000	1.600,02	0,0025	12.900,0000
MML	1.599,98	-	-

Como mostra a figura 15 e a tabela 9, a partir de G500, o custo total médio está em torno de \$1.600,00/h. O critério de parada utilizado com G500 no PSO 1, retorna melhores valores de custo mínimo, médio e máximo e ainda menores índices de desvio padrão para o mesmo problema de DE solucionado por Serapião (2009), que não utiliza critério de parada. A tabela 10 resume bem esses resultados encontrados com o PSO 1 contrastando-os com Serapião (2009) PSO 2, que não utilizou critério de parada, apenas determinou 5.000 iterações em suas simulações.

O critério de parada utilizado garantiu a convergência do algoritmo para a solução

<sup>2</sup> Referência: Serapião (2009).

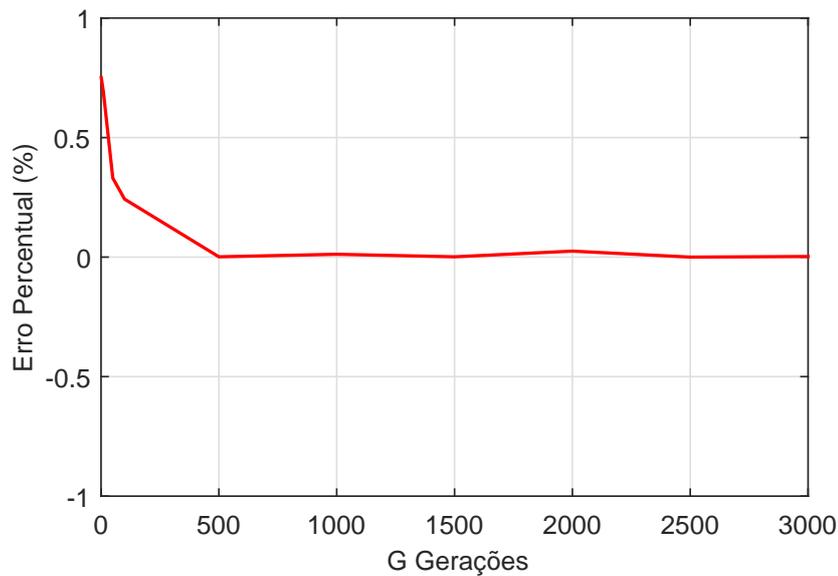


Figura 15 – Erro percentual do Custo médio *versus* as g gerações - 3 uni.

Tabela 10 – Melhor solução do PSO considerando G500.

Simulações	min (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	max (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
PSO 1	1.599,98	1.600,00	1.600,22	0,05
PSO 2 <sup>2</sup>	1.600,60	1.609,13	1.627,87	8,23

correta, além de retornar resultados melhores que Serapião (2009). Na tabela 10 é possível comprovar a qualidade das soluções através dos números resultantes para o desvio padrão.

Foi calculado a média e o desvio padrão, tabela 11, das soluções ótimas do custo de geração, das iterações e do tempo decorrido necessário para convergência do algoritmo considerando apenas as simulações com G500.

Tabela 11 – Solução do DE com PSO.

Parâmetros	Custo de Geração (\$/h)	Número de Iterações	Tempo (s)
$\mu$	1.600,00	3.085,0000	3,7243
$\sigma$	0,05	1.243,8951	1,5011

A figura 16 mostra o gráfico da melhor solução obtida entre os 20 experimentos realizados com o PSO para determinar o custo mínimo. Essa simulação necessitou de 3.500 iterações, até que o algoritmo atingisse a convergência, em aproximadamente 3,9379 s e seu custo mínimo, solução ótima, atingiu o valor de \$1.599,98/h. Nas simulações realizadas com o PSO e critério de parada G500, o algoritmo alcança o custo mínimo da função na ordem de  $10^3$  iterações no tempo médio de apenas 3,7243 s.

A figura 17 mostra o comportamento do algoritmo ao longo do processo iterativo ao determinar o nível de potência a ser despachada por cada unidade geradora. Inicialmente os

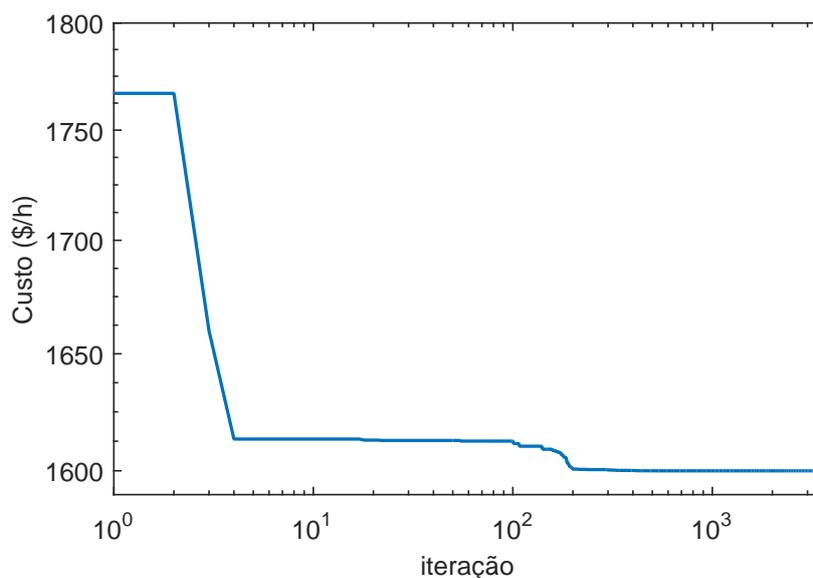


Figura 16 – Menor Custo alcançado pelo PSO.

níveis de potência são gerados aleatoriamente para cada partícula que durante a execução do PSO, especialmente nas primeiras iterações, assumem diferentes níveis de potência, posições no espaço de busca, que resultará em um perfil de geração ótimo satisfazendo o balanço de potência sem infringir as respectivas restrições de operação mínima e máxima de cada unidade.

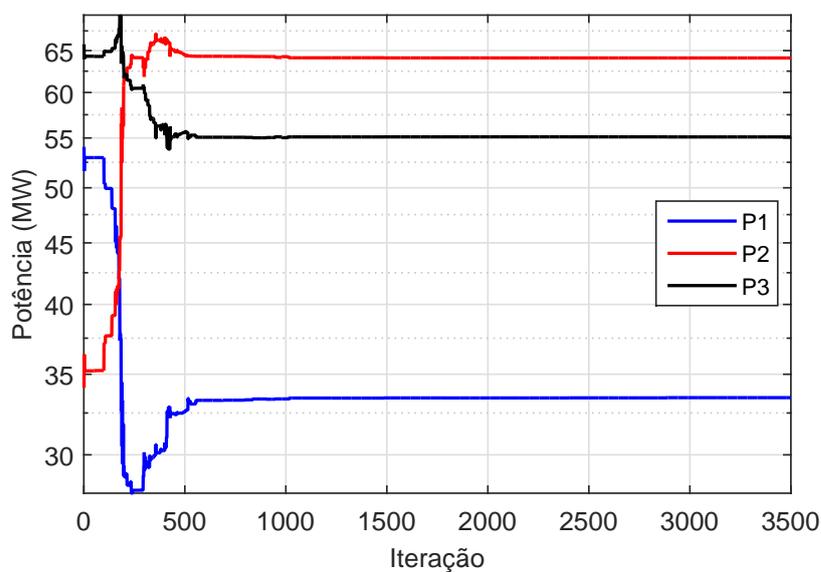


Figura 17 – Nível de potência ao longo do processo de otimização.

O PSO retornou ótimos resultados quanto a precisão da resposta esperada pelo processo de otimização realizado. O algoritmo convergiu adequadamente em uma razoável quantidade de iterações rapidamente. O baixo valor de desvio padrão (0,0545), revela a

ótima convergência do PSO para a solução do problema, mostrando ser um algoritmo seguro e eficiente.

### 5.3 Comparação dos Resultados

Para fins de comparação foi resumido na tabela 12 as respostas da melhor simulação entre os resultados obtidos com o PSO 1 com critério de parada e o PSO 2 sem critério de parada, assim como as respostas obtidas com o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Tabela 12 – Métodos e Resultados.

Saídas de Potência	Lagrange	PSO 1	PSO 2 <sup>3</sup>
Unidade 1 (MW)	33,4701	33,4672	30,6170
Unidade 2 (MW)	64,0974	64,0926	66,7590
Unidade 3 (MW)	55,1012	55,1088	55,3850
$P_L$ (MW)	2,6687	2,6686	2,7600
$P_D$ (MW)	150,0000	150,0000	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687	152,6686	152,7600
Custo (\$/h)	1.599,98	1.599,98	1.600,60

Observando a tabela 12, pode-se concluir que os métodos de solução retornaram praticamente a mesma resposta no que diz respeito ao custo mínimo de geração. O PSO com critério de parada retornou o menor custo da geração igual a solução exata do MML, com pouca diferença entre o PSO sem critério, no entanto um resultado melhor. A grande diferença porém, foi nas perdas de transmissão. O PSO 2, sem critério de parada, apresentou maiores perdas, uma diferença de quase 92 KW em relação ao PSO 1, com critério de parada e o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os níveis de potência díspar entre o PSO com critério e o Método dos Multiplicadores de Lagrange em relação ao PSO sem critério justificam a diferença do  $P_L$ , porém mesmo com as disparidades de perdas e potências despachadas, todos os métodos atenderam o balaço de carga dentro do limite de geração de cada unidade termoelétrica.

Os resultados obtidos por Serapião (2009), foram alcançados com 5.000 iterações, ao passo que as soluções obtidas utilizando o critério de parada foram adquiridas em média com 3.085 iterações, tendo a melhor simulação com menor custo mínimo, atingido o máximo de 3.500 evoluções. Esses números mostram a importância de utilizar um critério de parada que além de garantir uma rápida convergência, retorna respostas com baixos índices de desvio padrão assegurando a qualidade das soluções obtidas. Os resultados de todas as simulações realizadas com o PSO nesse capítulo, estão disponíveis no apêndice B.

<sup>3</sup> Referência: Serapião (2009).

## 5.4 Considerações Finais

O Método dos Multiplicadores de Lagrange mostrou ser um procedimento eficiente na solução do DE, pois sua metodologia é bem mecânica, com passos bem definidos, que se bem aplicados certamente retornarão a solução do problema. No entanto, esse método aumentou o número de variáveis a serem definidas para obtenção da resposta do DE. O problema iniciou com 3 variáveis e o tratamento matemático necessário para que pudesse ser resolvido aumentou para 16 variáveis compondo um sistema de 16 equações não-lineares. Vale ressaltar que a utilização dessa técnica, apesar de ser poderosa, pode se tornar bastante complicada ou até mesmo inviável dependendo do tamanho do sistema de geração a ser otimizado.

Para solucionar o DE, o PSO revelou ser uma ferramenta melhor e mais flexível que o Método dos Multiplicadores de Lagrange, se comparado a sua forma metodológica para resolver esse problema de otimização. Possui uma abordagem simples e direta, facilitando a maneira de tratar com os dados e restrições relacionados ao problema oposto à dificuldade matemática que os Multiplicadores de Lagrange impõe.

Ambos os métodos de otimização, PSO e Multiplicadores de Lagrange, podem ser utilizados para a solução do DE, embora o MML só possa ser aplicado quando a função objetivo for diferenciável, restrição esta que não existe para o PSO. Esses procedimentos retornaram resultados equivalentes, evidenciando sua mútua eficiência e conformidade e validando individualmente as soluções determinadas por cada método aplicado na condução do estudo de caso apresentado.



## 6 Aplicações e Resultados Numéricos: Sistema com 15 Unidades Geradoras

Este capítulo dará continuidade ao que foi realizado no capítulo anterior com algumas diferenças. Será resolvido um problema de DE considerando as perdas nas linhas de transmissão, limites de geração e zonas de operação proibidas de um sistema composto por 15 unidades geradoras. Além de solucionar o DE pelo método ao qual propõe esse trabalho, para fins de comparação, será utilizado o MML como principal referência matemática para comparação dos resultados a serem apresentados neste capítulo e os disponíveis na literatura, principalmente em Gaing (2003), que é a referência das aplicações e resultados numéricos que aqui serão abordados.

O DE de unidades termais consiste em um problema de otimização onde se deseja fazer alocação da carga demandada pelo sistema de potência elétrica nas unidades geradoras, de modo a alcançar o menor custo total de geração, atendendo as devidas restrições da operação e as condições de igualdade e desigualdade individual de cada unidade.

O custo total do combustível na geração de 15 termoelétricas é o somatório do custo individual de cada unidade de geração, dado por:

$$\sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) \quad (6.1)$$

onde  $C_i$  é a função de custo do combustível da unidade de geração  $i$  em \$/h e  $P_i$  em MW é a potência gerada pela mesma unidade  $i$ .

O custo individual de cada unidade é expresso pela forma quadrática em função da potência gerada:

$$C_i(P_i) = a_1 P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (6.2)$$

que estará restrito a

$$\begin{aligned} P_i^{mín} &\leq P_i \leq P_{i,1}^l \\ P_{i,k-1}^u &\leq P_i \leq P_{i,k}^l \quad k = 2, 3, 4, \dots, z_i \\ P_{i,z_i}^u &\leq P_i \leq P_i^{máx} \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são os coeficientes característicos do gerador;  $P_i^{mín}$  e  $P_i^{máx}$ , são respectivamente os limites de operação mínimos e máximos da unidade  $i$  em MW;  $z_i$  o número de zonas proibidas para a unidade  $i$ ;  $k$  o índice da zona proibida da unidade  $i$ ;  $l$  o limite inferior e  $u$  o limite superior da  $k$ -ésima zona proibida da unidade  $i$ .

Para as unidades que não possuem restrições de zonas proibidas, o custo estará sujeito somente às limitações de operação:

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (6.4)$$

onde  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$ , são respectivamente os limites de operação mínimos e máximos da unidade  $i$  em MW.

A potência gerada deve satisfazer a demanda de carga solicitada pelo sistema:

$$\sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{15}) = 0 \quad (6.5)$$

cuja demanda  $P_D$ , considerada constante, é a potência a ser suprida pelo sistema e  $P_L$  é a perda de transmissão a ser calculada conforme descrito no capítulo 2. As equações (6.3), (6.4) e (6.5) são as referidas condições de desigualdade e igualdade do sistema.

O problema de minimizar o custo de 15 unidades geradoras considerando as perdas nas linhas de transmissão e limites de geração com zonas proibidas pode ser descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, \dots, P_{15}) = \sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{15}) = 0 \\ \\ P_i^{min} \leq P_i \leq P_{i,1}^l \\ P_{i,k-1}^u \leq P_i \leq P_{i,k}^l \quad k = 2, 3, 4, \dots, z_i \\ P_{i,z_i}^u \leq P_i \leq P_i^{max} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

O estudo de caso que será apresentado compreendendo um parque termal de 15 unidade geradoras, possui carga demanda de potência  $P_D$  a ser suprida de 2.630 MW. Em ambos casos testes o custo estará sujeito ao balanço de potência considerando as perdas de transmissão. No primeiro caso teste, além de estar sujeito ao balanço de potência, o custo estará restrito também, à desigualdade dos limites de geração. No segundo caso teste, assim como no primeiro, o custo estará restrito pelo balanço de potência e limites de geração; no entanto, será considerado também zonas proibidas de operação. Os dados do sistema estão disponíveis nas tabelas 13 conforme Gaing (2003).

As matrizes B dos coeficientes de perda nas linhas de transmissão com base de 100 MVA, estão listadas abaixo. Essas matrizes podem ser obtidas a partir dos resultados do estudo de fluxo de potência do sistema, aplicando métodos de regressão não linear como é apresentado por Saadat (1999).

$$B_{ij} = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 1,4 & 1,2 & 0,7 & -0,1 & -0,3 & -0,1 & -0,1 & -0,1 & -0,3 & -0,5 & -0,3 & -0,2 & 0,4 & 0,3 & -0,1 \\ 1,2 & 1,5 & 1,3 & 0,0 & -0,5 & -0,2 & 0,0 & 0,1 & -0,2 & -0,4 & -0,4 & -0,0 & 0,4 & 1,0 & -0,2 \\ 0,7 & 1,3 & 7,6 & -0,1 & -1,3 & -0,9 & -0,1 & 0,0 & -0,8 & -1,2 & -1,7 & -0,0 & -2,6 & 11,1 & -2,8 \\ -0,1 & 0,0 & -0,1 & 3,4 & -0,7 & -0,4 & 1,1 & 5,0 & 2,9 & 3,2 & -1,1 & -0,0 & 0,1 & 0,1 & -2,6 \\ -0,3 & -0,5 & -1,3 & -0,7 & 9,0 & 1,4 & -0,3 & -1,2 & -1,0 & -1,3 & 0,7 & -0,2 & -0,2 & -2,4 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & -0,9 & -0,4 & 1,4 & 1,6 & -0,0 & -0,6 & -0,5 & -0,8 & 1,1 & -0,1 & -0,2 & -1,7 & 0,3 \\ -0,1 & 0,0 & -0,1 & 1,1 & -0,3 & -0,0 & 1,5 & 1,7 & 1,5 & 0,9 & -0,5 & 0,7 & -0,0 & -0,2 & -0,8 \\ -0,1 & 0,1 & 0,0 & 5,0 & -1,2 & -0,6 & 1,7 & 16,8 & 8,2 & 7,9 & -2,3 & -3,6 & 0,1 & 0,5 & -7,8 \\ -0,3 & -0,2 & -0,8 & 2,9 & -1,0 & -0,5 & 1,5 & 8,2 & 12,9 & 11,6 & -2,1 & -2,5 & 0,7 & -1,2 & -7,2 \\ -0,5 & -0,4 & -1,2 & 3,2 & -1,3 & -0,8 & 0,9 & 7,9 & 11,6 & 20,0 & -2,7 & -3,4 & 0,9 & -1,1 & -8,8 \\ -0,3 & -0,4 & -1,7 & -1,1 & 0,7 & 1,1 & -0,5 & -2,3 & -2,1 & -2,7 & 14,0 & 0,1 & 0,4 & -3,8 & 16,8 \\ -0,2 & -0,0 & -0,0 & -0,0 & -0,2 & -0,1 & 0,7 & -3,6 & -2,5 & -3,4 & 0,1 & 5,4 & -0,1 & -0,4 & 2,8 \\ 0,4 & 0,4 & -2,6 & 0,1 & -0,2 & -0,2 & -0,0 & 0,1 & 0,7 & 0,9 & 0,4 & -0,1 & 10,3 & -10,1 & 2,8 \\ 0,3 & 1,0 & 11,1 & 0,1 & -2,4 & -1,7 & -0,2 & 0,5 & -1,2 & -1,1 & -3,8 & -0,4 & -10,1 & 57,8 & -9,4 \\ -0,1 & -0,2 & -2,8 & -2,6 & -0,3 & 0,3 & -0,8 & -7,8 & -7,2 & -8,8 & 16,8 & 2,8 & 2,8 & -9,4 & 128,3 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0,1 & -0,2 & 2,8 & -0,1 & 0,1 & -0,3 & -0,2 & -0,2 & 0,6 & 3,9 & -1,7 & -0,0 & -3,2 & 6,7 & -6,4 \end{bmatrix}$$

$$B_{00} = \begin{bmatrix} 0,0055 \end{bmatrix}$$

Tabela 13 – Dados das unidades de geração.

Uni	$P_i^{mín}$	$P_i^{máx}$	$a_i$ (\$/MW <sup>2</sup> )	$b_i$ (\$/MW)	$c_i$ (\$)	Zonas Proibidas (MW)
1	150	455	0,000299	10,1	671	-
2	150	455	0,000183	10,2	574	[185 225] [305 335] [420 450]
3	20	130	0,001126	8,8	374	-
4	20	130	0,001126	8,8	374	-
5	150	470	0,000205	10,4	461	[180 200] [305 335] [390 420]
6	135	460	0,000301	10,1	630	[230 255] [365 395] [430 455]
7	135	465	0,000364	9,8	548	-
8	60	300	0,000338	11,2	227	-
9	25	162	0,000807	11,2	173	-
10	25	160	0,001203	10,7	175	-
11	20	80	0,003586	10,2	186	-
12	20	80	0,005513	9,9	230	[30 40] [55 65]
13	25	85	0,000371	13,1	225	-
14	15	55	0,001929	12,1	309	-
15	15	55	0,004447	12,4	323	-

As seções seguintes tem por objetivo apresentar os resultados das simulações computacionais realizados para avaliação do desempenho do PSO mediante a solução determinada pelo método clássico dos multiplicadores de Lagrange e as soluções publicadas por Gaing (2003), que utilizou o PSO e algoritmos genéticos elitista (AGE) para solucionar esse mesmo caso teste. Porém, assim como Serapião (2009), não utilizaram critério de parada.

A implementação do PSO para esse trabalho, foi conforme o algoritmo apresentado no capítulo 4 e os resultados das simulações computacionais foram obtidas utilizando o Matlab 8.5.0 (MathWorks) executado em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-2410M, de 2.30 GHz e 6GB de RAM.



Tabela 14 – Minimização via MML para 15 unidades de geração.

Saídas de Potência	Multiplicadores de Lagrange
Unidade 1 (MW)	455,0000
Unidade 2 (MW)	455,0000
Unidade 3 (MW)	130,0000
Unidade 4 (MW)	130,0000
Unidade 5 (MW)	207,6610
Unidade 6 (MW)	460,0000
Unidade 7 (MW)	465,0000
Unidade 8 (MW)	60,0000
Unidade 9 (MW)	25,0000
Unidade 10 (MW)	25,0000
Unidade 11 (MW)	71,7149
Unidade 12 (MW)	78,3122
Unidade 13 (MW)	25,0000
Unidade 14 (MW)	55,0000
Unidade 15 (MW)	15,0000
$P_L$ (MW)	27,6882
$P_D$ (MW)	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.657,6882
Custo (\$/h)	32.623,33

em suas melhores simulações, alcançaram o custo mínimo de geração encontrado aplicando o MML, que nos dá um resultado exato do problema. Mesmo assim eles alcançaram bons resultados do ponto de vista percentual, como mostra a tabela 15.

Tabela 15 – Custo mínimo do MML em comparação com a literatura.

Métodos	Custo (\$/h)	Erro percentual $E_R(\%)$
EEM <sup>1</sup>	32.722,00	0,3025
PSO <sup>1</sup>	32.858,00	0,7193
AGE <sup>1</sup>	33.113,00	1,5010
MML	32.623,33	-

É importante citar, que os autores consideraram outras restrições de desigualdades em suas simulações, tais como: limites de rampa e zonas de operação proibida. Apesar disso, a solução encontrada pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange é um parâmetro confiável para se medir a qualidade das soluções determinadas por métodos heurísticos, já que o MML é determinístico. Novamente o MML demonstrou ser eficiente, embora extremamente exaustivo, ao ser aplicado no problema de DE para determinar o custo mínimo da geração de unidades termoelétrica.

<sup>1</sup> Referência: (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008).

### 6.1.2 Solução via PSO

Primeiramente foi realizado um estudo experimental para determinar o número de gerações  $g$  apropriado para se utilizar no critério de parada. Foram realizadas 140 simulações utilizando o PSO 1, com critério de parada como definido no capítulo 4, e 20 execuções do algoritmo para cada  $g$  considerado. Na implementação do PSO, a função objetivo utilizada é dada por (6.9):

$$f(P_1, \dots, P_{15}) = \sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L \right| \quad (6.9)$$

onde  $\phi$  é uma constante positiva que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga. A cada experimento as partículas foram iniciadas com valores aleatórios. A tabela 16 relaciona os parâmetros utilizados na implementação do PSO 1 e a tabela 17 mostra a média ( $\mu$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) do custo para cada  $g$  analisado, destacando as melhores soluções em negrito.

Tabela 16 – Parâmetros do PSO 1 - 15 unidades de geração.

Parâmetros	Valores
Partículas (P)	100
Dimensão (D)	15
Cognitivo ( $\varphi_1$ )	2
Social ( $\varphi_2$ )	2
Constante Positiva ( $\phi$ )	50
Velocidade máx ( $v_{máx}$ )	5
Critério de parada ( $C_1$ )	$10^{-6}$

Tabela 17 – Custos para as  $g$  gerações - Caso teste 1.

Gerações	min (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	max (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
G100	32.993,69	33.244,67	33.600,23	177,02
G250	32.869,60	33.113,37	33.380,20	119,93
G500	32.886,50	33.077,63	33.251,09	101,02
G1000	32.844,39	33.029,49	33.135,74	65,95
G2000	32.821,44	32.951,08	33.102,82	76,49
G3000	32.876,67	32.935,99	33.036,71	<b>47,55</b>
G6000	<b>32.770,87</b>	<b>32.914,29</b>	<b>33.026,34</b>	64,82

No estudo de caso em análise, para que o critério de parada atingisse a convergência, o erro foi avaliado, o parâmetro  $g$  foi alterado e diferentes simulações foram realizadas para otimização do DE proposto. Chegou-se a conclusão que 2.000 gerações é um valor

de  $g$  conveniente para garantir uma boa convergência, sem que haja relevantes perdas na qualidade da solução encontrada pelo PSO, mesmo utilizando  $g$  superiores a 2.000. A tabela 18 relaciona o custo médio alcançado por cada  $g$  considerado, o erro percentual em relação a solução exata do MML e a média de iterações para se obter convergência.

Tabela 18 – Custo médio, erro percentual e média de iterações para as  $g$  gerações.

Gerações	$\mu$ (\$/h)	$E_R$ (%)	Iterações
G100	33.244,67	1,9046	395,0000
G250	33.113,37	1,5021	1.237,5000
G500	33.077,63	1,3926	2.750,0000
G1000	33.029,49	1,2450	4.600,0000
G2000	32.951,08	1,0046	13.900,0000
G3000	32.935,99	0,9584	23.850,0000
G6000	32.914,29	0,8919	41.400,0000
MML	32.623,33	-	-

A figura 18 mostra a diminuição do  $E_R(\%)$  do custo médio em relação a solução determinada pelo MML. A medida que o intervalo de  $g$  gerações é maior, cresce a quantidade de iterações que são necessárias para que o algoritmo convirja para a solução. Portanto, o custo computacional também cresce, e no presente caso é bastante elevado, conferindo pouca melhoria na solução do PSO em relação ao MML a partir de G2000.

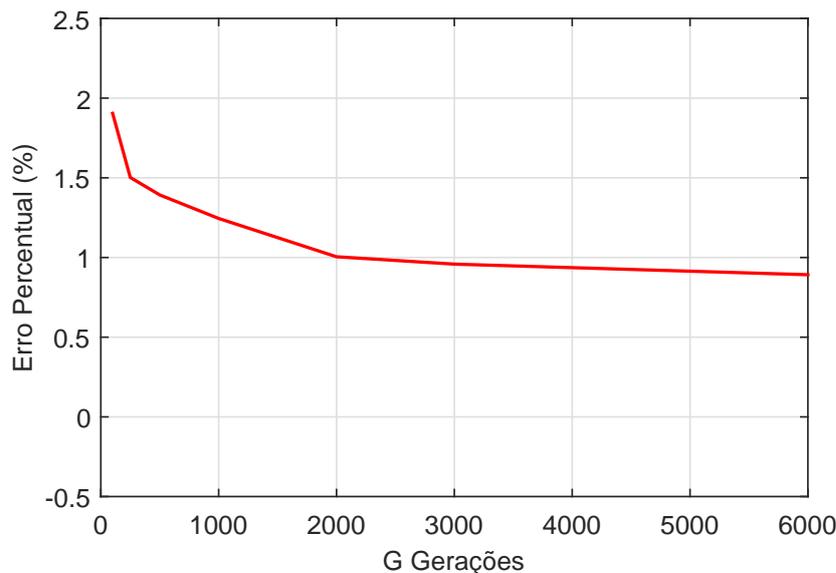


Figura 18 – Erro percentual do Custo médio *versus* as  $g$  gerações - 15 uni.

Foi calculado a média e o desvio padrão, tabela 19, das soluções ótimas do custo de geração, das iterações e do tempo decorrido necessário para convergência do algoritmo

considerando apenas as simulações com G2000, já que não se obteve um ganho considerável na qualidade da solução em comparação com o custo computacional empregado para  $g$  gerações maiores.

Tabela 19 – Solução do DE de 15 unidades termais com limites de geração.

Parâmetros	Custo de Geração (\$/h)	Número de Iterações	Tempo (s)
$\mu$	32.951,08	13.900,0000	139,3539
$\sigma$	76,49	7.224,2647	75,0053

A figura 19 mostra o gráfico da melhor solução obtida entre os 20 experimentos realizados com o PSO para determinar o custo mínimo. Essa simulação necessitou de 22.000 iterações, até que o algoritmo atingisse a convergência, em aproximadamente 3,8399 min e seu custo mínimo, solução ótima, atingiu o valor de \$32.821,44/h. Nas simulações realizadas com o PSO e critério de parada G2000, o algoritmo alcança o custo mínimo da função na ordem de  $10^4$  iterações no tempo médio de 2,3226 min.

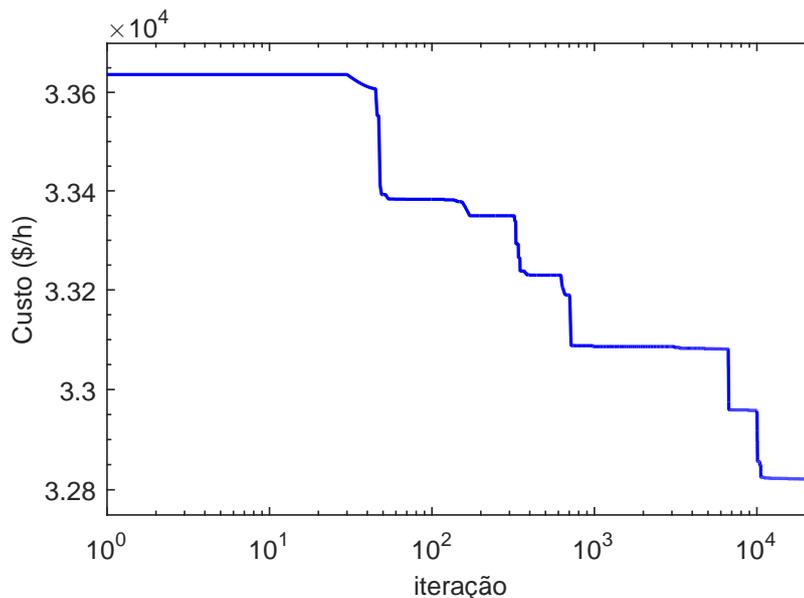


Figura 19 – Menor Custo alcançado pelo PSO.

As figuras 20, 21, e 22 mostram o comportamento do algoritmo ao longo do processo iterativo ao determinar o nível de potência a ser despachada por cada unidade geradora. Inicialmente os níveis de potência são gerados aleatoriamente para cada partícula que durante a execução do PSO, assumem diferentes níveis de potência ou posições no espaço de busca, que resultará em um perfil de geração ótimo satisfazendo o balanço de potência sem infringir as respectivas restrições de operação mínima e máxima de cada unidade.

O PSO retornou ótimos resultados quanto a precisão da resposta esperada pelo processo de otimização realizado. O algoritmo convergiu adequadamente em uma razoável quantidade de iterações num espaço de tempo aceitável. O  $E_R(\%)$  entre a pior e a melhor

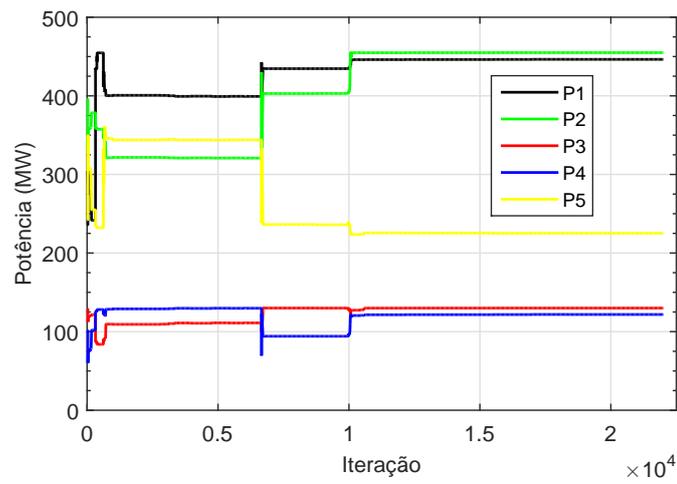


Figura 20 – Nível de potência das unidades 1-5 ao longo do processo de otimização.

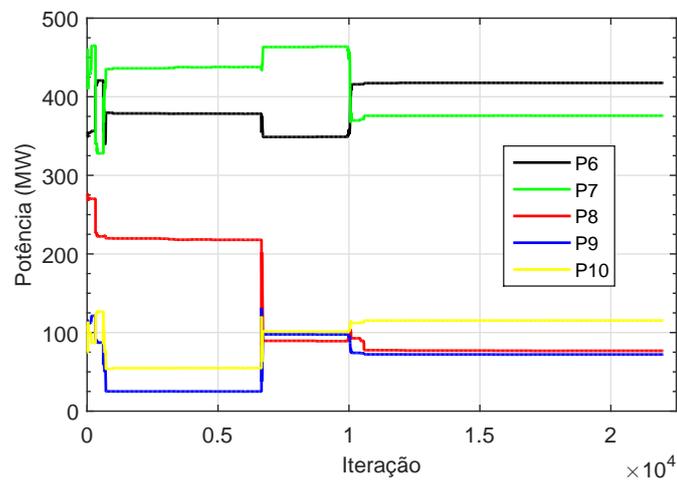


Figura 21 – Nível de potência das unidades 6-10 ao longo do processo de otimização.

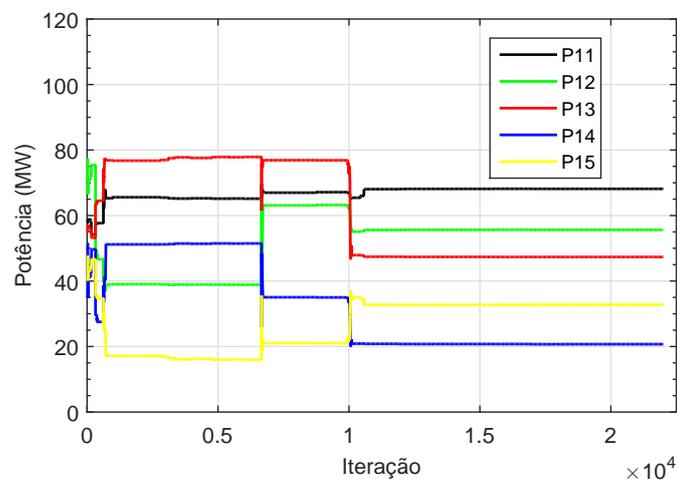


Figura 22 – Nível de potência das unidades 11-15 ao longo do processo de otimização.

solução foi de apenas 0,8573, menos de 1%. Esses valores revelam a ótima convergência do PSO com critério de parada para a solução do problema, mostrando ser um algoritmo seguro e eficiente.

### 6.1.3 Comparação dos Resultados - Caso teste 1

A tabela 20 relaciona a melhor solução do PSO 1, com G2000, e os resultados obtidos com o MML. O MML apresentou custo total da geração menor que o PSO 1. No entanto, a diferença no custo total corresponde a 0,6073% de erro em relação a solução exata determinada pelo MML, ou seja 99,3927% de acerto. Estes números mostram a confiabilidade do PSO 1 ao ser aplicado em problemas de despacho econômico.

No capítulo 5 o  $E_R(\%)$  é nulo, 100% de acerto do PSO 1 em relação ao MML. No presente capítulo o problema de otimização solucionado tem sua complexidade aumentada em 5 vezes mais. Apesar disso, o algoritmo apresentou ótimos resultados, com soluções bastante expressivas em se tratando de um método heurístico onde não se possui a garantia de uma solução exata.

Tabela 20 – Métodos e Resultados para as 15 unidades.

Saídas de Potência	MML	PSO 1
Unidade 1 (MW)	455,0000	446,4041
Unidade 2 (MW)	455,0000	454,9607
Unidade 3 (MW)	130,0000	129,9524
Unidade 4 (MW)	130,0000	121,8070
Unidade 5 (MW)	207,6610	225,1883
Unidade 6 (MW)	460,0000	417,6059
Unidade 7 (MW)	465,0000	375,9086
Unidade 8 (MW)	60,0000	76,7764
Unidade 9 (MW)	25,0000	72,0534
Unidade 10 (MW)	25,0000	115,2863
Unidade 11 (MW)	71,7149	68,1507
Unidade 12 (MW)	78,3122	55,6356
Unidade 13 (MW)	25,0000	47,3352
Unidade 14 (MW)	55,0000	20,7189
Unidade 15 (MW)	15,0000	32,7413
$P_L$ (MW)	27,6882	30,5249
$P_D$ (MW)	2.630,0000	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.657,6882	2.660,5249
Custo (\$/h)	32.623,33	32.821,44

Como apresentado na tabela 15, os resultados disponíveis na literatura por Gaing (2003) e Oliveira, Nascimento e Saavedra (2008), também obtiveram um certo  $E_R(\%)$ , mesmo que pequeno, assim como apresentado pelo PSO 1. No entanto, essa similaridade além de mostrar que o algoritmo pode ser perfeitamente aplicado em otimização de DE, vem

assegurar o procedimento utilizado na implementação do PSO 1 e confirmar a qualidade das soluções obtidas. Os resultados de todas as simulações realizadas com o PSO nesse capítulo, estão disponíveis no apêndice C.

## 6.2 Caso teste 2: limites de geração com zonas proibidas

A diferença entre este caso teste e o apresentado na seção anterior, consiste na inclusão de zonas proibidas de operação, aos limites de capacidade de geração das 15 unidades termais. Essa restrição implica no aumento de inequações de desigualdades no problema de otimização. Essa particularidade acarreta uma maior complexidade ao DE conferindo características não lineares em um espaço de busca não convexo (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008). A seguir, serão apresentadas as soluções utilizando o PSO 1, com critério de parada, e uma comparação com os resultados que constam na literatura.

### 6.2.1 Solução via PSO

Novamente foi realizado um estudo experimental para determinar o número de gerações  $g$  apropriado para se utilizar no critério de parada. Foram realizadas 100 simulações utilizando o PSO 1 com critério de parada como definido no capítulo 4, e 20 execuções do algoritmo para cada  $g$  considerado. Na implementação do PSO 1, a função objetivo utilizada é dada por (6.10):

$$f(P_1, \dots, P_{15}) = \sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L \right| \quad (6.10)$$

onde  $\phi$  é uma constante positiva que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga. A cada experimento as partículas foram iniciadas com valores aleatórios. A tabela 21 relaciona os parâmetros utilizados na implementação do PSO 1 para esse caso teste e a tabela 22 mostra a média ( $\mu$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ) do custo para cada  $g$  analisado, destacando as melhores soluções em negrito.

Observando a tabela 22, é possível notar que as melhores soluções para custo mínimo, médio, máximo e desvio padrão foram alcançados utilizando o intervalo de 2.000 gerações. A tabela 23 relaciona o custo médio alcançado por cada  $g$  considerado, o erro percentual em relação a melhor solução dentre as 100 simulações e a média de iterações para se obter convergência.

A figura 23 mostra a diminuição do  $E_R(\%)$  do custo médio em relação a melhor solução dentre todas. O ganho em comparação com o melhor resultado diminui bastante a

Tabela 21 – Parâmetros do PSO 1 - zonas proibidas.

Parâmetros	Valores
Partículas (P)	100
Dimensão (D)	15
Cognitivo ( $\varphi_1$ )	2
Social ( $\varphi_2$ )	2
Constante Positiva ( $\phi$ )	50
Velocidade máx ( $v_{máx}$ )	5
Critério de parada ( $C_1$ )	$10^{-6}$

Tabela 22 – Custos para as g gerações - Caso teste 2.

Gerações	min (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	max (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
G100	32.944,42	33.058,62	33.244,70	96,30
G250	32.858,45	33.030,00	33.186,85	77,22
G500	32.876,73	33.001,98	33.182,83	79,64
G1000	32.859,24	32.961,01	33.066,14	59,92
G2000	<b>32.807,60</b>	<b>32.944,43</b>	<b>33.061,11</b>	<b>56,83</b>

Tabela 23 – Custo médio, erro percentual e média de iterações com zonas proibidas.

Gerações	$\mu$ (\$/h)	$E_R$ (%)	Iterações
G100	33.058,62	0,7651	535,0000
G250	33.030,00	0,6779	1.237,5000
G500	33.001,98	0,5925	2.350,0000
G1000	32.961,01	0,4676	6.500,0000
G2000	32.944,43	0,4171	13.400,0000
Melhor simulação	32.807,60	-	32.000,0000

partir de G1000 e como G2000 apresentou os melhores resultados, adotou-se esse intervalo de gerações para análise das soluções a seguir em comparação com a literatura.

Foi calculado a média e o desvio padrão, tabela 24, das soluções ótimas do custo de geração, das iterações e do tempo decorrido necessário para convergência do algoritmo considerando apenas as simulações com G2000.

Tabela 24 – Solução do DE de 15 unidades termais com zonas proibidas.

Parâmetros	Custo de Geração (\$/h)	Número de Iterações	Tempo (s)
$\mu$	32.944,43	13.400,0000	140,2186
$\sigma$	56,83	6.726,0687	72,5714

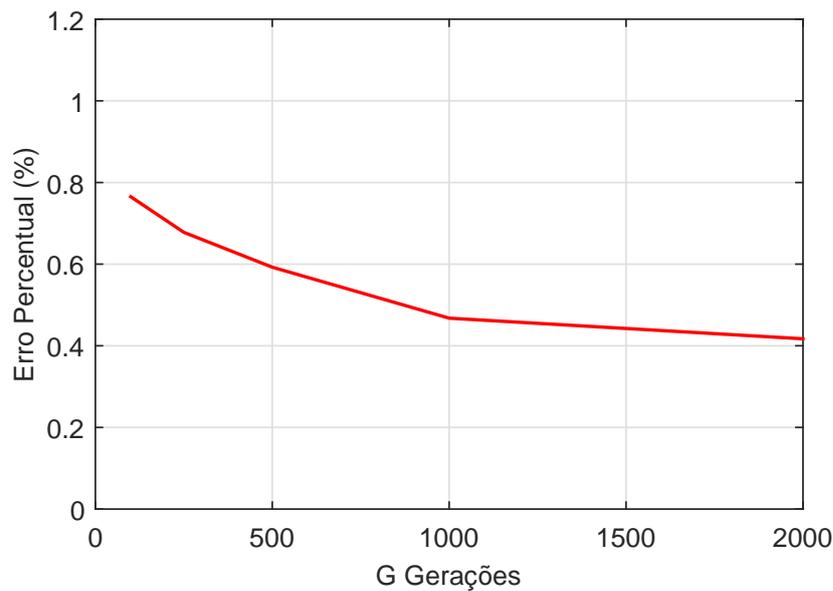


Figura 23 – Erro percentual do Custo médio *versus* as  $g$  gerações com zonas proibidas.

A figura 24 mostra o gráfico da melhor solução obtida entre os 20 experimentos realizados com o PSO 1 para determinar o custo mínimo. Essa simulação necessitou de 32.000 iterações, até que o algoritmo atingisse a convergência, em aproximadamente 5,3159 min e seu custo mínimo, solução ótima, atingiu o valor de \$32.807,60/h. Nas simulações realizadas com o PSO e critério de parada G2000, o algoritmo alcança o custo mínimo da função na ordem de  $10^4$  iterações no tempo médio de 2,3370 min.

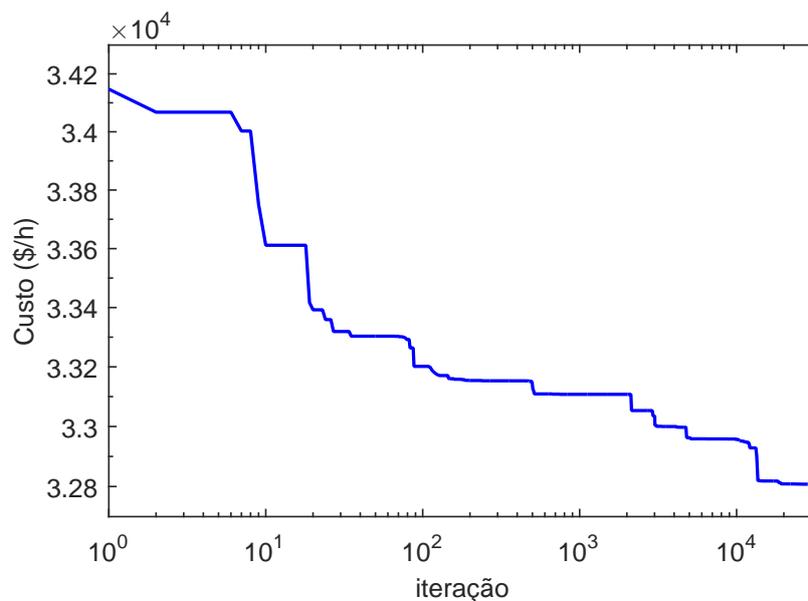


Figura 24 – Menor Custo alcançado pelo PSO com zonas proibidas.

As figuras 25, 26, e 27 mostram o comportamento do algoritmo ao longo do processo iterativo ao determinar o nível de potência a ser despachada por cada unidade geradora. Inicialmente os níveis de potência são gerados aleatoriamente para cada partícula que

durante a execução do PSO, assumem diferentes níveis de potência ou posições no espaço de busca, que resultará em um perfil de geração ótimo satisfazendo o balanço de potência sem infringir as zonas proibidas de cada unidade.

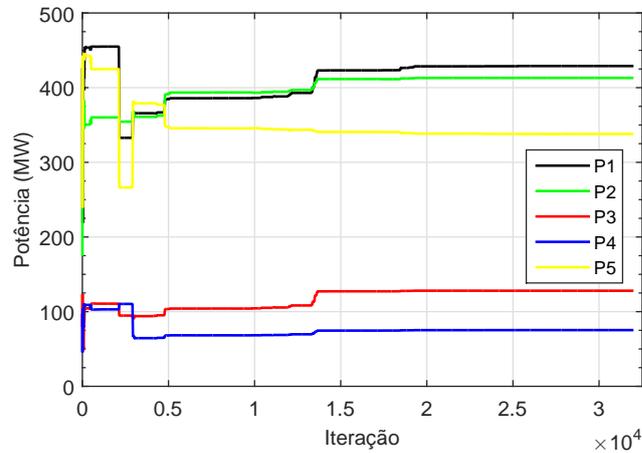


Figura 25 – Potência das unidades 1-5 ao longo da otimização com zonas proibidas.

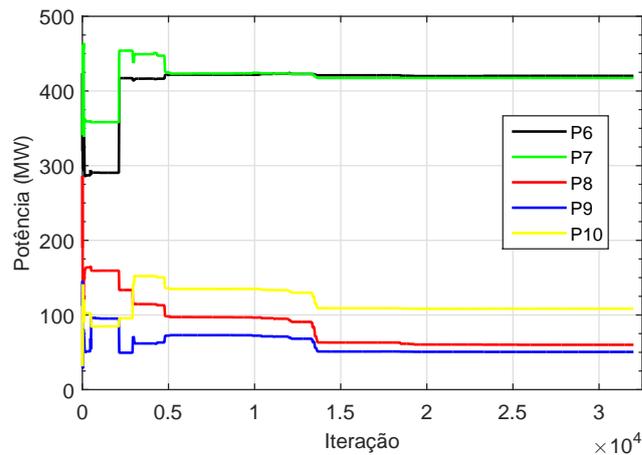


Figura 26 – Potência das unidades 6-10 ao longo da otimização com zonas proibidas.

O  $E_R(\%)$  entre o custo médio e o custo da melhor simulação são de apenas 0,4171%, ou seja, em média o conjunto das 20 simulações possuem 99,5829% de acerto em relação a melhor solução encontrada, indicando a convergência do algoritmo de cada simulação para uma única solução. Essa mesma análise pode ser aplicada para as soluções determinadas pelas 100 partículas do enxame que resultou na melhor simulação. A tabela 25 relaciona esses valores.

A tabela 25 mostra o menor, médio e maior erro percentual da melhor solução individual da população em relação ao melhor resultado individual de todo o enxame. Como podemos observar, o maior  $E_R(\%)$  de toda população é aproximadamente 1%, com uma média de 0,0901%. Ou seja, o erro percentual entre as soluções de cada partícula do enxame que resultou na melhor solução varia em aproximadamente de 0 a 1. Esses

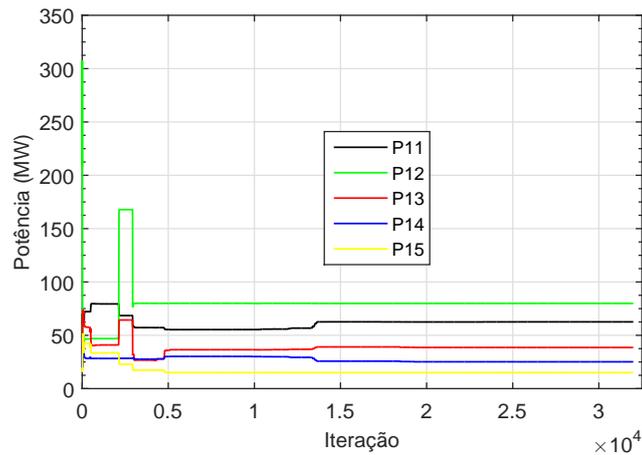


Figura 27 – Potência das unidades 11-15 ao longo da otimização com zonas proibidas.

Tabela 25 – Erro percentual entre pBest e gBest para a melhor simulação.

Parâmetros	Erro Percentual $E_R(\%)$
mínimo	$2,5747 \times 10^{-5}$
média	0,0901
máximo	1,1891

números mostram que todas as partículas convergiam para mesma solução ótima, algo que se esperava, conforme foi mostrado no capítulo 4 pelas figuras 9, 10 e 11, com relação ao comportamento da população no transcorrer do processo de otimização até ser finalizado.

### 6.2.2 Comparação dos Resultados - Caso teste 2

A tabela 26 relaciona a melhor solução do PSO 1, com critério de parada G2000, e os melhores resultados obtidos pela literatura permitindo realizar uma melhor comparação entre as soluções.

Um ponto de análise importante é verificar se as restrições impostas pelo problema foram atendidas. Para a restrição de igualdade, o balanço de potência apresentou 0,0324, aproximadamente zero. Quanto aos limites de zona proibida nenhuma das 4 unidades (2,5,6 e 12), desrespeitaram esta restrição e operaram fora da zona proibida assim como todas as unidades operam dentro dos limites de capacidade da geração.

O PSO 1 apresentou custo total da geração menor que o PSO e o AGE. Essa diferença no custo total entre o PSO 1 e o PSO corresponde a 0,1536%, e do PSO 1 em relação ao AGE de 0,9309%. Uma diferença pequena em termos percentuais, no entanto vale ressaltar que Gaing (2003) não utilizou o PSO em sua forma original. O algoritmo implementado pelo autor considerou uma melhoria introduzindo o peso de inércia. Apesar disso, o PSO 1 em sua forma original utilizando apenas critério de parada obteve melhor

resultado, que em termos monetários corresponde a \$50,40/h a menos no custo total que o PSO e \$305,40/h a menos no custo total que o AGE.

Tabela 26 – Métodos e Resultados considerando zonas proibidas.

Saídas de Potência	PSO 1	PSO <sup>2</sup>	AGE <sup>2</sup>
Unidade 1 (MW)	428,9873	439,1162	415,3108
Unidade 2 (MW)	413,0294	407,9727	359,7206
Unidade 3 (MW)	128,0196	119,6324	104,4250
Unidade 4 (MW)	75,3040	129,9925	74,9853
Unidade 5 (MW)	337,8971	151,0681	380,2844
Unidade 6 (MW)	420,2300	459,9978	426,7902
Unidade 7 (MW)	417,3929	425,5601	341,3164
Unidade 8 (MW)	60,0701	98,5699	124,7867
Unidade 9 (MW)	50,5548	113,4936	133,1445
Unidade 10 (MW)	108,3491	101,1142	89,2567
Unidade 11 (MW)	62,5806	33,9116	60,0572
Unidade 12 (MW)	79,8962	79,9583	49,9998
Unidade 13 (MW)	38,5659	25,0042	38,7713
Unidade 14 (MW)	25,1374	41,4140	41,9425
Unidade 15 (MW)	15,0237	35,6140	22,6445
$P_L$ (MW)	<b>31,0384</b>	32,4306	38,2782
$P_D$ (MW)	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	<b>2.661,0384</b>	2.662,4000	2.668,4000
Custo (\$/h)	<b>32.807,60</b>	32.858,00	33.113,00

O PSO 1 utilizou 32.000 iterações para atingir a melhor solução, a literatura utilizou no máximo 200 iterações. Essa diferença de custo computacional é devido a melhoria utilizada no algoritmo pela literatura e pelo critério de parada utilizado no PSO 1, que são no mínimo 2.000 gerações para atingir convergência. No entanto, vale ressaltar que apesar do custo computacional ter aumentado, o custo total obtido pelo PSO 1 foi menor e com baixo índice de  $E_R(\%)$  em comparação com a literatura.

Pode-se realizar uma análise em torno das perdas. O PSO 1 apresentou menores perdas que aqueles apresentado pela literatura. O PSO 1 minimizou as perdas em virtude das potências despachadas apresentadas em sua melhor solução, já que as perdas são obtidas em função da potência gerada para o despacho. O PSO são 1,3922 MW e o AGE são 7,2398 MW de perdas nas linhas de transmissão a mais que o PSO 1. Em termos percentuais essa diferença corresponde a 4,4854% para o PSO e 23,3253% para o AGE. Esses valores são bem expressivos, o que evidencia a boa qualidade dos resultados obtidos pelo PSO 1. As soluções de todas as simulações realizadas com o PSO nesse capítulo, estão disponíveis no apêndice C.

<sup>1</sup> Referência: (GAING, 2003).

## 6.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou dois estudos de caso, em diferentes graus de dificuldade que permitisse utilizar o PSO para obter a solução e aplicar uma análise mais cuidadosa.

O primeiro caso teste, foi considerado as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, o balanço de potência e os limites de capacidade. Para solução do DE com essas características foi utilizado o MML em comparação com o PSO. Esse apresentou bons resultados e mostrou ser perfeitamente aplicável em problemas de DE com as referidas restrições citadas, principalmente por apresentar simplicidade em sua implementação se comparado ao MML e eficiência na obtenção da solução.

O segundo caso teste, foi considerado as mesmas restrições do primeiro estudo de caso com o acréscimo de mais uma restrição: zonas de operação proibidas. Essa última restrição aumentou a complexidade do problema criando espaços de busca não convexo e não linear, permitindo uma análise mais concreta e realista do PSO 1, implementado com critério de parada. Esse apresentou resultados melhores que aqueles na literatura, PSO sem critério de parada e AGE, e novamente demonstrou ser um método eficiente e seguro para solução de problemas de otimização como o DE.

Uma característica importante que deve ser observada, foi o aumento do custo computacional. O PSO apresentou ótimos resultados, no entanto, a um custo computacional maior. Os problemas de despacho tratados no presente capítulo foi com um grau de dificuldade maior com o aumento da dimensão. Apesar dos bons resultados, o PSO apresentou certa dificuldade em determinar as soluções, que foi compensado com o aumento do número de iterações e uma perda, pequena cerca de 0,6073%, na qualidade da solução se comparado ao estudo de caso realizado no capítulo 5 que não apresentou erro percentual em relação a solução exata do MML. Essa mesma observação é feita por [Serapião \(2009\)](#), que em seu resultados verificou que o PSO apresentou as melhores soluções nos problemas de baixa dimensão.



## 7 Conclusões e Trabalhos Futuros

Com o crescimento da demanda energética e a formação de um mercado livre de energia altamente competitivo, a diminuição do custo de geração em meio a esse cenário torna-se o principal objetivo do setor energético. Nesse contexto, o presente trabalho se ocupou em investigar o problema de DE, que consiste em minimizar o custo total de geração, atendendo a demanda de carga e restrições do sistema. Algumas das suas principais variantes foram consideradas nos estudos de caso testes, visando mostrar a importância de considerar as características de um sistema real ao solucionar o problema de otimização. Foram investigados casos de DE clássico considerando as perdas nas linhas de transmissão e os limites de capacidade. A esse modelo foi inserido a restrição de zonas proibidas, aumentando a complexidade do problema e permitindo uma análise mais ampla.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange mostrou ser um procedimento eficiente na solução do DE, pois sua metodologia é bem mecânica, com passos bem definidos, que se bem aplicados certamente retornará a solução do problema. No entanto, esse método aumentou muito o número de variáveis do problema. O problema com 3 unidades, com o tratamento matemático necessário para que pudesse ser resolvido, aumentou para 16 incógnitas e o caso com 15 unidades, aumentou para 76 variáveis, ambos compondo sistemas de equações não-lineares. Vale ressaltar que a utilização dessa técnica, apesar de ser poderosa, pode se tornar bastante complicada ou até mesmo inviável dependendo do tamanho do sistema de geração a ser otimizado, e caso as funções envolvidas sejam não diferenciáveis. O PSO revelou ser uma ferramenta melhor do que o Método dos Multiplicadores de Lagrange, se considerarmos sua forma metodológica para resolver esse problema de otimização. Possui uma abordagem simples e direta, facilitando a maneira de tratar com os dados e restrições relacionados ao problema, oposto à dificuldade matemática que os Multiplicadores de Lagrange impõe, além de apresentar grande flexibilidade.

A principal conclusão deste trabalho é que a utilização de um critério de parada na implementação do PSO acrescentou uma melhoria substancial, quando comparado à literatura, aos resultados obtidos na resolução do problema teste de despacho econômico com três unidades geradoras e levando em consideração as perdas nas linhas de transmissão. Em especial, a solução obtida desta forma, apresentou menor custo total de geração, menores perdas nas linhas de transmissão e menor custo computacional, com o algoritmo convergindo mais rapidamente para a solução. Além disso, o custo total de geração assim obtido foi o mesmo que a solução exata dada pelo método dos multiplicadores de Lagrange, apresentado um desvio padrão muito menor do que o constante na literatura.

No capítulo 6, onde foi realizado a otimização de quinze unidades geradoras, o PSO

com critério de parada atingiu as expectativas. Alcançou ótimos resultados: minimizando o custo total de geração em comparação com a literatura, atendendo estritamente as restrições inerentes ao problema e principalmente minimizando as perdas nas linhas de transmissão. As perdas que resultaram da otimização utilizando o PSO com critério de parada, foram sensivelmente menores que aquelas apresentadas pela literatura. O critério de parada aumentou o custo computacional em comparação com a literatura. No entanto, os autores utilizaram em seus experimentos um algoritmo melhorado e mesmo assim, obtiveram resultados inferiores. A precisão das soluções e garantia de convergência do algoritmo, justifica a utilização do critério de parada e torna aceitável o aumento do custo computacional. O PSO apresentou relativa facilidade em problemas de baixa dimensão e o contrário para altas dimensões. Porém em ambos, baixa ou alta dimensão, as soluções encontradas utilizando o PSO com critério de parada foram melhores que os encontrados na literatura.

Como proposta para trabalhos futuros estão a análise de outros casos de DE os quais não foram mencionados. Entre eles: a análise do Despacho Econômico-Ambiental, cuja função é multiobjetivo e busca minimizar custo de geração e emissão de poluentes; o DE de usinas eólicas e/ou outras fontes de geração de energia renovável; e o DE de unidades que apresentam descontinuidade na função custo, cujo os métodos clássicos que constam na literatura baseados em gradiente não são suficientes para determinar a solução, porém, métodos heurísticos como o PSO têm apresentado resultados promissores.

## Referências

- BASHIR, Z.; EL-HAWARY, M. Applying wavelets to short-term load forecasting using pso-based neural networks. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 24, n. 1, p. 20–27, 2009. Citado na página 50.
- CLERC, M. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*. [S.l.], 1999. v. 3. Citado na página 44.
- DJUROVIC, M.; MILANCIC, A.; KRSULJA, M. A simplified model of quadratic cost function for thermal generators. In: *Proceedings of the 23rd DAAAM Symposium*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 25–25. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 37.
- EBBESEN, S.; KIWITZ, P.; GUZZELLA, L. A generic particle swarm optimization matlab function. In: IEEE. *American Control Conference (ACC), 2012*. [S.l.], 2012. p. 1519–1524. Citado na página 41.
- FERNANDES, E. J. *Despacho econômico com perdas e suas variantes utilizando o Algoritmo de Busca Harmônica*. 2009. Citado 4 vezes nas páginas 13, 24, 25 e 26.
- GAING, Z.-L. Particle swarm optimization to solving the economic dispatch considering the generator constraints. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 18, n. 3, p. 1187–1195, 2003. Citado 8 vezes nas páginas 19, 63, 64, 65, 66, 72, 77 e 78.
- GÓMEZ-EXPÓSITO, A.; CONEJO, A.; CAÑIZARES, C. Sistemas de energia elétrica: análise e operação. *RJ: LTC*, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 21, 24 e 29.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. A discrete binary version of the particle swarm algorithm. In: IEEE. *Systems, Man, and Cybernetics, 1997. Computational Cybernetics and Simulation., 1997 IEEE International Conference on*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 4104–4108. Citado na página 50.
- KENNEDY, J. et al. *Swarm intelligence*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- MAHOR, A.; PRASAD, V.; RANGNEKAR, S. Economic dispatch using particle swarm optimization: a review. *Renewable and sustainable energy reviews*, Elsevier, v. 13, n. 8, p. 2134–2141, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 41.
- OLIVEIRA, K.; NASCIMENTO, N.; SAAVEDRA, O. R. Uma abordagem via estratégias evolutivas para o despacho econômico considerando restrições de geração. *IEEE Transactions on Education*, v. 6, n. 1, p. 42–50, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 24, 25, 26, 66, 67, 72 e 73.
- RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- RU, N.; JIANHUA, Y. A ga and particle swarm optimization based hybrid algorithm. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2008. CEC 2008. (IEEE World Congress on*

- Computational Intelligence*). *IEEE Congress on*. [S.l.], 2008. p. 1047–1050. Citado na página 50.
- SAADAT, H. *Power system analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1999. Citado 8 vezes nas páginas 13, 19, 22, 23, 51, 52, 53 e 64.
- SERAPIÃO, A. B. d. S. Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 20, n. 3, p. 271–304, 2009. Citado 12 vezes nas páginas 19, 41, 42, 45, 49, 51, 55, 57, 58, 60, 65 e 79.
- SHI, Y.; EBERHART, R. A modified particle swarm optimizer. In: IEEE. *Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*. [S.l.], 1998. p. 69–73. Citado na página 44.
- SIMON, C. P.; BLUME, L. *Matemática para economistas*. [S.l.]: Bookman, 2004. Citado 8 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 34, 35, 37 e 39.
- STEWART, J. Cálculo, vol. 2, 5ª edição. *Editora Thompson*, 2006. Citado na página 34.
- WALTERS, D. C.; SHEBLE, G. B. Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 1325–1332, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- WANG, L.; SINGH, C. Reserve-constrained multiarea environmental/economic dispatch based on particle swarm optimization with local search. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 298–307, 2009. Citado na página 50.
- YALCINOZ, T.; SHORT, M. Economic dispatch problem with transmission capacity constraints using matlab. In: *The 1997 32 nd Universities Power Engineering Conference, UPEC'97. Part 1(of 2)*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 81–84. Citado na página 25.
- ZIELINSKI, K.; PETERS, D.; LAUR, R. Stopping criteria for single-objective optimization. In: CITESEER. *Proceedings of the Third International Conference on Computational Intelligence, Robotics and Autonomous Systems*. [S.l.], 2005. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 44.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Resultados da Otimização Funcional

Tabela 27 – Minimização da função F6 de SCHAFFER - G Gerações.

Critério $C_1$			
simu	Soluções	Iterações	Tempo(s)
1	6,6743E-06	600,0000	0,0989
2	6,4849E-05	600,0000	0,0978
3	9,7160E-03	300,0000	0,0537
4	3,4375E-06	300,0000	0,0542
5	5,2098E-05	400,0000	0,0650
6	9,7165E-03	200,0000	0,0366
7	4,5664E-05	600,0000	0,0997
8	9,7160E-03	300,0000	0,0518
9	<b>1,1003E-06</b> <sup>1</sup>	900,0000	0,1396
10	<b>9,7159E-03</b> <sup>2</sup>	300,0000	0,0533
11	1,5221E-04	400,0000	0,0715
12	9,7160E-03	200,0000	0,0369
13	5,9519E-04	200,0000	0,0366
14	1,7021E-05	700,0000	0,1120
15	7,2829E-06	300,0000	0,0514
16	9,7159E-03	200,0000	0,0359
17	9,7160E-03	200,0000	0,0389
18	2,3198E-05	600,0000	0,1056
19	2,7452E-06	800,0000	0,1357
20	9,7160E-03	300,0000	0,0537
$\mu$	0,0079	450,0000	0,0751
$\sigma$	0,0087	304,9590	0,0470

<sup>1</sup> Melhor solução.

<sup>2</sup> Pior resultado.

Tabela 28 – Minimização da função F6 de SCHAFFER - Distâncias Euclidianas.

Critério $C_2$			
Simu	Soluções	Iterações	Tempo(s)
1	0,0000E+00	4.486.543,0000	896,5882
2	9,9920E-16	3.280.473,0000	646,0009
3	0,0000E+00	3.359.983,0000	628,8112
4	3,3307E-16	5.071.406,0000	933,7114
5	6,5503E-15	2.685.167,0000	491,9441
6	1,6653E-16	3.276.255,0000	611,3236
7	4,1633E-15	3.507.272,0000	704,7152
8	3,8858E-16	6.880.595,0000	1.384,8868
9	1,2212E-15	6.090.819,0000	1.155,4568
10	1,6653E-16	4.201.347,0000	782,7867
11	5,7176E-15	3.244.985,0000	589,4457
12	<b>1,1324E-14<sup>2</sup></b>	3.100.625,0000	591,1557
13	<b>0,0000E+00<sup>1</sup></b>	3.671.878,0000	699,1678
14	4,4409E-16	4.460.920,0000	857,7832
15	3,8858E-16	10.407.209,0000	2.099,9063
16	6,6613E-16	5.934.875,0000	1.135,5744
17	4,4409E-16	3.508.690,0000	725,9841
18	3,2752E-15	2.874.607,0000	558,5696
19	4,4964E-15	3.633.001,0000	694,8331
20	2,9421E-15	3.245.249,0000	644,4818
$\mu$	1,3989E-15	4.283.986,0000	823,6225
$\sigma$	4,2600E-15	2.527.965,4414	516,0599

# APÊNDICE B – Resultados do DE com 3 Unidades

Tabela 29 – DE de 3 Unidades - parte 1.

Simu	G1			G10			G50			G100		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)
1	1.616,66	1,0000	0,0167	1.609,76	40,0000	0,0569	1.601,37	150,0000	0,1778	1.599,98	1.000,0000	1,0006
2	1.555,41	1,0000	0,0154	1.602,79	20,0000	0,0368	1.610,19	100,0000	0,1172	1.600,74	1.100,0000	1,0809
3	1.618,59	1,0000	0,0091	<b>1.600,77<sup>1</sup></b>	40,0000	0,0539	1.608,01	250,0000	0,2900	1.599,98	1.200,0000	1,2350
4	1.623,50	5,0000	0,0142	1.609,37	20,0000	0,0416	1.600,83	550,0000	0,5980	1.601,59	600,0000	0,6274
5	1.620,53	1,0000	0,0111	1.607,88	30,0000	0,0510	1.601,10	300,0000	0,3172	1.599,98	1.300,0000	1,3322
6	1.605,18	1,0000	0,0093	1.605,70	70,0000	0,0887	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	550,0000	0,5470	1.600,00	600,0000	0,6097
7	1.598,07	1,0000	0,0090	1.616,46	60,0000	0,0856	1.602,66	250,0000	0,2718	1.610,78	300,0000	0,3272
8	1.612,89	1,0000	0,0108	1.616,83	30,0000	0,0505	1.600,03	350,0000	0,3982	1.612,56	200,0000	0,2454
9	1.629,30	1,0000	0,0098	1.602,33	30,0000	0,0399	1.616,80	100,0000	0,1302	1.600,54	400,0000	0,4132
10	1.603,29	1,0000	0,0094	1.600,81	30,0000	0,0525	1.605,06	100,0000	0,1257	1.600,84	900,0000	0,9155
11	1.612,90	1,0000	0,0089	1.615,46	20,0000	0,0324	1.600,14	550,0000	0,5979	1.608,28	200,0000	0,2092
12	1.634,81	1,0000	0,0099	1.610,31	40,0000	0,0590	1.603,61	250,0000	0,2919	<b>1.618,88<sup>1</sup></b>	200,0000	0,1910
13	1.614,03	6,0000	0,0138	<b>1.630,26<sup>2</sup></b>	40,0000	0,0584	1.599,99	300,0000	0,3533	1.599,99	1.500,0000	1,4799
14	1.622,22	3,0000	0,0118	1.606,55	40,0000	0,0602	1.613,40	400,0000	0,4318	1.600,56	500,0000	0,6695
15	1.598,36	4,0000	0,0140	1.616,11	50,0000	0,0670	1.612,83	150,0000	0,1652	1.603,11	300,0000	0,4759
16	<b>1.606,68<sup>1</sup></b>	1,0000	0,0093	1.606,13	20,0000	0,0353	1.599,98	750,0000	0,7753	1.618,01	300,0000	0,4679
17	<b>1.645,89<sup>2</sup></b>	1,0000	0,0088	1.605,61	20,0000	0,0401	1.600,11	100,0000	0,1120	1.600,85	700,0000	0,9286
18	1.603,22	5,0000	0,0153	1.628,21	20,0000	0,0392	1.599,99	550,0000	0,6754	1.600,23	600,0000	0,8108
19	1.608,13	1,0000	0,0091	1.624,31	50,0000	0,0725	1.600,57	350,0000	0,3763	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	1.700,0000	2,3497
20	1.610,15	1,0000	0,0094	1.605,42	40,0000	0,0614	<b>1.628,82<sup>2</sup></b>	100,0000	0,1382	1.600,40	500,0000	0,6744
$\mu$	1.611,99	1,9000	0,0113	1.611,05	35,5000	0,0541	1.605,27	310,0000	0,3445	1.603,86	705,0000	0,8022
$\sigma$	17,57	1,6401	0,0026	8,52	13,9553	0,0154	7,48	189,4730	0,1987	6,08	445,5053	0,5099

<sup>1</sup> Menor custo.

<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 30 – DE de 3 Unidades - parte 2.

Simu	G500			G1000			G1500		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)
1	1.599,98	3.000,0000	3,1981	1.599,98	8.000,0000	7,6589	1.599,98	7.500,0000	7,2811
2	1.599,98	3.500,0000	3,6635	1.599,98	8.000,0000	7,7187	1.599,98	12.000,0000	11,5645
3	1.600,09	1.500,0000	1,7291	1.599,98	9.000,0000	8,5875	1.599,98	6.000,0000	5,7437
4	1.599,98	3.000,0000	3,3471	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	5.000,0000	4,7509	1.599,98	6.000,0000	5,7368
5	1.599,98	3.500,0000	3,9496	1.599,98	5.000,0000	4,6774	1.599,98	4.500,0000	4,2908
6	1.599,98	2.500,0000	2,5889	<b>1.603,46<sup>2</sup></b>	3.000,0000	2,7612	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	24.000,0000	23,5125
7	1.599,98	4.000,0000	5,0855	1.599,98	3.000,0000	2,8814	1.599,98	6.000,0000	5,6825
8	1.599,98	5.000,0000	6,2536	1.599,98	6.000,0000	5,6546	1.599,98	6.000,0000	5,6770
9	<b>1.600,22<sup>2</sup></b>	3.000,0000	3,3954	1.599,98	4.000,0000	3,7874	1.600,00	7.500,0000	7,1258
10	1.599,98	2.500,0000	3,4309	1.599,98	8.000,0000	7,6003	1.599,98	6.000,0000	5,9494
11	1.599,98	5.500,0000	7,9131	1.600,26	3.000,0000	2,8181	1.599,98	7.500,0000	7,1270
12	1.599,98	2.500,0000	2,9373	1.599,98	12.000,0000	11,5615	1.599,98	10.500,0000	10,0829
13	1.599,98	2.500,0000	2,8443	1.599,98	10.000,0000	9,5214	1.599,98	10.500,0000	10,1622
14	1.600,00	200,0000	2,2323	1.599,98	10.000,0000	9,5609	1.599,98	7.500,0000	7,2018
15	1.599,98	3.500,0000	3,9131	1.599,98	4.000,0000	3,7996	<b>1.600,24<sup>2</sup></b>	4.500,0000	4,2630
16	1.599,98	2.500,0000	2,7522	1.599,99	3.000,0000	2,8229	1.599,98	12.000,0000	11,6102
17	1.599,98	5.500,0000	6,1609	1.600,02	3.000,0000	2,8674	1.599,98	4.500,0000	4,2956
18	1.599,98	2.500,0000	2,8123	1.599,98	7.000,0000	6,5924	1.599,98	4.500,0000	4,5610
19	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	3.500,0000	3,9379	1.599,98	5.000,0000	4,7996	1.599,98	3.000,0000	2,8353
20	1.599,98	2.000,0000	2,3403	1.599,98	3.000,0000	2,9031	1.599,98	12.000,0000	11,5340
$\mu$	1.600,00	3.085,0000	3,7243	1.600,17	5.950,0000	5,6663	1.600,00	8.100,0000	7,8119
$\sigma$	0,05	1.243,8951	1,5011	0,76	2.783,4331	2,6790	0,06	4.534,8649	4,4440

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 31 – DE de 3 Unidades - parte 3.

Simu	G2000			G2500			G3000		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)
1	1.599,98	10.000,0000	9,6636	1.599,98	12.500,0000	12,5909	1.599,98	12.000,0000	12,2514
2	1.599,98	10.000,0000	9,8065	1.599,98	10.000,0000	10,0509	1.599,98	15.000,0000	14,6868
3	1.599,98	14.000,0000	14,1366	1.599,98	15.000,0000	14,4693	<b>1.600,56<sup>2</sup></b>	9.000,0000	8,7362
4	1.599,98	8.000,0000	8,1238	1.599,98	12.500,0000	12,4368	1.599,98	12.000,0000	11,8683
5	1.599,98	10.000,0000	9,6496	1.599,98	10.000,0000	9,8056	1.599,98	9.000,0000	9,1678
6	1.600,02	8.000,0000	7,7310	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	12.500,0000	12,0554	1.599,98	15.000,0000	14,5992
7	1.599,98	12.000,0000	11,7348	1.599,98	7.500,0000	7,2937	1.600,10	15.000,0000	15,0824
8	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	10.000,0000	9,8466	1.599,98	7.500,0000	7,3083	1.599,98	15.000,0000	14,8464
9	1.599,98	12.000,0000	11,6906	1.599,98	17.500,0000	17,2037	1.599,98	9.000,0000	9,2936
10	1.599,98	8.000,0000	7,6676	1.599,98	7.500,0000	7,5499	1.599,98	12.000,0000	11,6713
11	1.599,98	8.000,0000	7,7600	1.599,98	10.000,0000	9,6019	1.599,98	12.000,0000	11,6931
12	1.599,98	8.000,0000	7,8235	1.599,98	17.500,0000	17,2632	1.599,98	18.000,0000	17,9319
13	<b>1.607,78<sup>2</sup></b>	16.000,0000	16,3616	<b>1.600,00<sup>2</sup></b>	10.000,0000	9,7631	1.599,98	12.000,0000	12,0439
14	1.599,98	10.000,0000	9,8260	1.599,98	12.500,0000	12,0835	1.599,98	9.000,0000	8,7207
15	1.599,98	8.000,0000	7,8010	1.599,98	20.000,0000	20,3644	1.599,98	15.000,0000	15,1229
16	1.599,98	12.000,0000	11,6899	1.599,98	20.000,0000	20,3001	1.599,98	6.000,0000	5,7770
17	1.599,98	8.000,0000	7,9235	1.599,98	7.500,0000	7,2155	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	18.000,0000	18,3645
18	1.599,98	10.000,0000	9,6709	1.599,98	5.000,0000	4,8077	1.599,98	12.000,0000	11,7190
19	1.599,98	12.000,0000	11,6015	1.599,98	10.000,0000	9,6555	1.599,98	18.000,0000	17,8856
20	1.599,98	16.000,0000	16,1966	1.599,98	20.000,0000	19,7297	1.599,98	15.000,0000	15,2525
$\mu$	1.600,38	10.500,0000	10,3353	1.599,98	12.250,0000	12,0775	1.600,02	12.900,0000	12,8357
$\sigma$	1,70	2.519,9206	2,6312	0,00	4.534,5893	4,6009	0,13	3.300,0000	3,3475

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 32 – Resumo do DE com 3 Unidades.

CRITÉRIO	CUSTO MÍN (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	CUSTO MÁX (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
G1	1.606,68	1.611,99	1.645,89	17,57
G10	1.600,77	1.611,05	1.630,26	8,52
G50	1.599,98	1.605,27	1.628,82	7,48
G100	1.599,98	1.603,86	1.618,88	6,08
G500	1.599,98	1.600,00	1.600,22	0,05
G1000	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	1.600,17	1.603,46	0,76
G1500	1.599,98	1.600,00	1.600,24	0,06
G2000	1.599,98	1.600,38	1.607,78	1,70
G2500	1.599,98	<b>1.599,98<sup>1</sup></b>	<b>1.600,00<sup>1</sup></b>	<b>0,00<sup>1</sup></b>
G3000	1.599,98	1.600,02	1.600,56	0,13

Tabela 33 – Melhor Solução do DE com 3 Unidades - parte 1.

POTÊNCIA	G1	G10	G50	G100	G500
UNI 1 (MW)	45,4575	41,1213	33,3379	33,4563	33,4672
UNI 2 (MW)	48,2550	59,7263	64,3234	64,1248	64,0926
UNI 3 (MW)	59,1860	51,7980	55,0104	55,0879	55,1088
$P_L$ (MW)	<b>2,5467<sup>2</sup></b>	2,6492	2,6716	2,6691	2,6686
$P_D$ (MW)	150,0000	150,0000	150,0000	150,0000	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,8985	<b>152,6456<sup>3</sup></b>	152,6717	152,6690	152,6686
CUSTO(\$)	1606,68	1600,77	1599,98	1599,98	1599,98

Tabela 34 – Melhor Solução do DE com 3 Unidades - parte 2.

POTÊNCIA	G1000	G1500	G2000	G2500	G3000
UNI 1 (MW)	33,4697	33,4726	33,4702	33,4701	33,4696
UNI 2 (MW)	64,0953	64,0967	64,0971	64,0978	64,0978
UNI 3 (MW)	55,1037	55,0994	55,1014	55,1008	55,1014
$P_L$ (MW)	2,6687	2,6687	2,6687	2,6687	2,6687
$P_D$ (MW)	150,0000	150,0000	150,0000	150,0000	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687	152,6687	152,6687	152,6687	152,6688
CUSTO(\$)	<b>1599,98<sup>1</sup></b>	1599,98	1599,98	1599,98	1599,98

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Menor perda.<sup>3</sup> Menor despacho.

# APÊNDICE C – Resultados do DE com 15 Unidades

## C.1 Limites de Capacidade

Tabela 35 – DE de 15 unidades com Limite de Capacidade - parte 1.

Simu	G100			G250			G500		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)
1	33.206,58	400,0000	3,5730	33.195,51	750,0000	6,6997	32.966,63	2.500,0000	22,0574
2	33.435,56	300,0000	2,6501	33.025,35	1.500,0000	14,5383	33.062,28	2.000,0000	22,5145
3	33.595,85	200,0000	1,9988	33.029,98	1.250,0000	12,5854	32.954,77	6.000,0000	57,3752
4	33.032,03	600,0000	5,3035	33.177,65	2.500,0000	24,0755	<b>32.886,50<sup>1</sup></b>	3.000,0000	41,2797
5	33.292,91	400,0000	3,5329	33.149,94	750,0000	9,0411	32.947,83	3.500,0000	32,2440
6	<b>33.600,23<sup>2</sup></b>	200,0000	1,7614	33.297,74	1.000,0000	9,6591	33.179,54	2.000,0000	21,9849
7	33.173,31	300,0000	2,6542	33.059,09	750,0000	6,6908	32.991,59	4.500,0000	57,5525
8	33.164,58	400,0000	3,5758	33.133,99	1.000,0000	9,9357	33.208,86	1.500,0000	16,8887
9	33.092,35	500,0000	4,4090	33.076,99	750,0000	6,6402	33.053,41	5.000,0000	50,8714
10	33.221,09	200,0000	1,8085	<b>33.380,20<sup>2</sup></b>	500,0000	4,4403	33.185,32	1.000,0000	10,2830
11	<b>32.993,69<sup>1</sup></b>	400,0000	3,6023	33.187,15	1.000,0000	8,7830	33.109,55	1.500,0000	13,3865
12	33.249,00	400,0000	3,5202	33.152,21	1.000,0000	10,1306	33.076,94	2.500,0000	26,5260
13	33.023,23	200,0000	1,7834	33.050,71	3.500,0000	30,7984	33.160,57	3.000,0000	27,3065
14	33.135,24	300,0000	2,7473	<b>32.869,60<sup>1</sup></b>	750,0000	6,6437	33.245,16	2.000,0000	24,7362
15	33.353,25	300,0000	2,6778	33.098,64	1.750,0000	15,6000	33.098,74	2.500,0000	28,7590
16	33.258,55	800,0000	7,0245	33.105,62	1.250,0000	12,0131	33.000,42	1.000,0000	9,2253
17	33.118,58	700,0000	6,2266	33.144,77	750,0000	6,9107	33.019,32	2.000,0000	18,3620
18	33.135,48	700,0000	6,2209	32.936,14	1.250,0000	11,6979	33.074,48	5.500,0000	56,5955
19	33.263,64	300,0000	2,6571	32.944,03	1.250,0000	11,3567	33.079,67	3.000,0000	28,0109
20	33.548,17	300,0000	2,6686	33.252,03	1.500,0000	13,4626	<b>33.251,09<sup>2</sup></b>	1.000,0000	9,1158
$\mu$	33.244,67	395,0000	3,5198	33.113,37	1.237,5000	11,5851	33.077,63	2.750,0000	28,7537
$\sigma$	177,02	174,5709	1,5251	119,93	682,2527	6,1124	101,02	1.444,8183	15,5377

<sup>1</sup> Menor custo.

<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 36 – DE de 15 unidades com Limite de Capacidade - parte 2.

Simu	G1000			G2000			G3000			G6000		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)									
1	33.003,45	6.000,0000	61,1436	<b>33.102,82<sup>2</sup></b>	4.000,0000	42,1015	32.916,82	21.000,0000	200,5067	32.910,95	36.000,0000	320,0538
2	33.066,27	2.000,0000	25,0943	<b>32.821,44<sup>1</sup></b>	22.000,0000	230,3960	<b>33.036,71<sup>2</sup></b>	9.000,0000	81,8220	32.883,90	42.000,0000	374,3234
3	33.052,38	4.000,0000	46,0086	32.900,05	14.000,0000	139,9348	32.958,04	18.000,0000	157,3752	32.869,08	84.000,0000	813,3132
4	32.992,84	2.000,0000	22,9288	33.020,81	8.000,0000	74,9754	32.885,66	48.000,0000	458,3858	32.922,18	36.000,0000	325,3469
5	32.982,83	3.000,0000	33,2244	32.974,07	12.000,0000	113,9162	32.998,55	6.000,0000	53,1176	32.847,69	36.000,0000	383,1161
6	33.063,48	4.000,0000	37,9906	32.923,14	28.000,0000	269,0217	32.878,66	18.000,0000	178,9782	32.967,94	24.000,0000	212,7714
7	33.063,48	4.000,0000	43,0283	33.031,58	8.000,0000	77,9285	32.884,77	24.000,0000	227,0143	<b>33.026,34<sup>2</sup></b>	12.000,0000	121,9232
8	33.001,57	2.000,0000	20,1219	33.048,51	4.000,0000	36,8179	32.931,29	51.000,0000	442,4727	32.857,64	48.000,0000	503,9125
9	33.002,74	3.000,0000	32,2258	32.915,36	10.000,0000	93,8318	32.896,08	18.000,0000	161,5612	32.986,60	24.000,0000	225,1272
10	<b>33.135,74<sup>2</sup></b>	2.000,0000	19,3142	33.030,27	4.000,0000	37,8257	32.885,50	30.000,0000	329,7634	32.830,29	42.000,0000	413,2920
11	<b>32.844,39<sup>1</sup></b>	5.000,0000	51,8088	32.909,29	14.000,0000	131,3678	32.910,95	30.000,0000	276,4919	32.924,49	36.000,0000	353,3761
12	33.028,64	7.000,0000	71,2595	33.004,12	12.000,0000	119,7012	32.990,02	21.000,0000	193,2555	32.915,36	72.000,0000	808,3811
13	33.006,30	11.000,0000	104,6116	32.906,62	32.000,0000	335,6794	<b>32.876,67<sup>1</sup></b>	12.000,0000	108,4767	33.015,79	24.000,0000	227,0095
14	33.103,58	4.000,0000	43,8674	32.906,80	10.000,0000	100,8407	32.983,89	9.000,0000	87,5680	32.902,39	36.000,0000	359,3017
15	33.059,62	4.000,0000	37,1434	32.856,60	16.000,0000	161,9071	33.010,42	6.000,0000	67,0779	32.844,66	72.000,0000	729,3511
16	32.946,82	6.000,0000	55,8627	33.039,16	14.000,0000	142,3597	32.906,59	30.000,0000	307,5664	32.981,44	18.000,0000	160,9289
17	33.079,28	3.000,0000	28,1006	32.848,16	16.000,0000	161,7893	32.938,95	12.000,0000	105,0877	32.984,73	18.000,0000	166,1037
18	33.060,66	7.000,0000	66,4468	32.917,20	20.000,0000	205,0495	32.946,24	30.000,0000	295,8114	32.915,96	24.000,0000	211,6392
19	32.965,20	11.000,0000	105,3091	32.993,14	16.000,0000	164,2005	32.912,46	69.000,0000	687,7632	<b>32.770,87<sup>1</sup></b>	96.000,0000	1.080,7310
20	33.130,46	2.000,0000	18,7091	32.872,36	14.000,0000	147,4338	32.971,65	15.000,0000	143,4172	32.927,58	48.000,0000	507,5230
$\mu$	33.029,49	4.600,0000	46,2100	32.951,08	13.900,0000	139,3539	32.935,99	23.850,0000	228,1757	32.914,29	41.400,0000	414,8762
$\sigma$	65,95	2.653,2998	24,7928	76,49	7.224,2647	75,0053	47,55	15.916,2653	155,2385	64,82	22.441,9251	251,4506

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 37 – Resumo do DE com 15 Unidades - Limite de Capacidade.

CRITÉRIO	CUSTO MÍN (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	CUSTO MÁX (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
G100	32.993,69	33.244,67	33.600,23	177,02
G250	32.869,60	33.113,37	33.380,20	119,93
G500	32.886,50	33.077,63	33.251,09	101,02
G1000	32.844,39	33.029,49	33.135,74	65,95
G2000	32.821,44	32.951,08	33.102,82	76,49
G3000	32.876,67	32.935,99	33.036,71	<b>47,55<sup>1</sup></b>
G6000	<b>32.770,87<sup>1</sup></b>	<b>32.914,29<sup>1</sup></b>	<b>33.026,34<sup>1</sup></b>	64,82

Tabela 38 – Melhor solução do DE com 15 Unidades - Limite de Capacidade.

POTÊNCIA	G100	G250	G500	G1000	G2000	G3000	G6000
UNI 1 (MW)	389,5469	454,1483	403,9988	367,6522	446,4041	358,9071	365,0356
UNI 2 (MW)	442,9303	429,8601	452,9786	391,5125	454,9607	354,4255	398,1049
UNI 3 (MW)	128,4531	104,7960	119,3332	97,2504	129,9524	127,1772	124,8478
UNI 4 (MW)	121,3295	110,6842	124,5245	129,6873	121,8070	111,5277	110,4899
UNI 5 (MW)	150,0168	322,5530	385,3735	336,9922	225,1883	391,9858	333,5499
UNI 6 (MW)	388,6901	341,2900	327,3876	451,8943	417,6059	451,8328	459,9752
UNI 7 (MW)	430,0895	458,5489	386,9284	455,3122	375,9086	444,4196	423,6794
UNI 8 (MW)	169,8132	134,3217	125,7933	60,0540	76,7764	60,0034	73,4444
UNI 9 (MW)	137,6541	68,4116	25,5326	87,8926	72,0534	56,2739	50,3870
UNI 10 (MW)	101,6356	25,0209	121,5536	89,6635	115,2863	97,7199	98,6075
UNI 11 (MW)	65,2268	48,9943	36,8460	46,2335	68,1507	40,9915	75,2459
UNI 12 (MW)	56,9054	70,2284	71,0272	44,6763	55,6356	51,4989	66,0615
UNI 13 (MW)	32,0849	30,0470	45,2949	30,6301	47,3352	55,1514	29,0711
UNI 14 (MW)	30,8286	22,1541	15,0076	43,4803	20,7189	25,1028	37,9546
UNI 15 (MW)	24,1996	42,0470	24,7313	29,8434	32,7413	36,7403	15,0024
$P_L$ (MW)	39,4043	33,1053	36,3110	32,7747	<b>30,5249<sup>2</sup></b>	33,7579	31,4572
$P_D$ (MW)	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.669,4043	2.663,1053	2.666,3110	2.662,7747	<b>2.660,5249<sup>3</sup></b>	2.663,7579	2.661,4572
CUSTO(\$/h)	32.993,69	32.869,60	32.886,50	32.844,39	32.821,44	32.876,67	<b>32.770,87<sup>1</sup></b>

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Menor perda.<sup>3</sup> Menor despacho.

## C.2 Zonas Proibidas

Tabela 39 – DE de 15 Unidades com Zonas Proibidas - parte 1.

Simu	G100			G250		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)
1	33.047,29	500,0000	5,8442	33.051,98	1.750,0000	18,8078
2	<b>32.944,42<sup>1</sup></b>	900,0000	10,5755	33.149,11	1.250,0000	13,1618
3	32.967,79	400,0000	4,4001	32.998,34	750,0000	7,7214
4	33.096,61	1.000,0000	10,5043	33.099,27	1.000,0000	10,6212
5	32.956,56	500,0000	5,5048	32.918,66	2.500,0000	28,4579
6	32.989,08	300,0000	3,5087	32.971,24	1.250,0000	13,2936
7	32.978,66	200,0000	2,8336	<b>32.858,45<sup>1</sup></b>	1.250,0000	13,4648
8	32.972,20	900,0000	10,5117	32.932,15	2.500,0000	27,0338
9	<b>33.244,70<sup>2</sup></b>	400,0000	4,4017	33.073,97	1.250,0000	13,1456
10	33.003,85	1.000,0000	10,8460	33.010,47	1.750,0000	17,5280
11	33.200,64	400,0000	4,4796	32.986,74	2.250,0000	25,1488
12	33.141,79	300,0000	3,3828	33.034,88	500,0000	5,7703
13	33.005,11	800,0000	8,3147	32.961,22	1.000,0000	12,3063
14	32.953,29	400,0000	4,8076	<b>33.186,85<sup>2</sup></b>	500,0000	6,3395
15	33.032,78	1.000,0000	10,7699	33.057,66	500,0000	5,7358
16	33.027,26	200,0000	2,5400	33.012,71	1.250,0000	14,9845
17	33.181,60	500,0000	5,8128	33.094,25	1.250,0000	13,6932
18	33.055,30	300,0000	3,1879	33.090,10	1.000,0000	12,5726
19	33.135,51	300,0000	3,2676	33.045,00	750,0000	10,7847
20	33.237,87	400,0000	4,4301	33.067,05	500,0000	6,2055
$\mu$	33.058,62	535,0000	5,9962	33.030,00	1.237,5000	13,8389
$\sigma$	96,30	276,1793	2,9599	77,22	614,7916	6,5692

<sup>1</sup> Menor custo.

<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 40 – DE de 15 Unidades com Zonas Proibidas - parte 2.

Simu	G500			G1000			G2000		
	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)	Custo(\$/h)	Iterações	Tempo(s)
1	<b>32.876,73</b> <sup>1</sup>	5.500,0000	57,4327	33.048,91	3.000,0000	37,2770	32.978,95	18.000,0000	200,7419
2	32.980,05	3.000,0000	40,4867	32.950,74	4.000,0000	44,7683	32.992,09	12.000,0000	122,1357
3	32.883,57	1.500,0000	15,6348	32.887,89	27.000,0000	303,8445	32.964,56	4.000,0000	41,5650
4	33.045,11	1.500,0000	16,2128	32.913,14	3.000,0000	34,2089	32.966,07	10.000,0000	99,9186
5	32.919,94	2.000,0000	22,4932	<b>32.859,24</b> <sup>1</sup>	10.000,0000	104,0345	32.907,85	10.000,0000	107,7329
6	32.993,74	1.500,0000	16,0843	32.981,54	2.000,0000	20,2348	32.869,32	8.000,0000	82,6106
7	32.933,83	4.000,0000	40,4445	33.017,10	2.000,0000	20,1029	32.932,50	14.000,0000	149,0278
8	33.010,75	3.500,0000	35,9550	32.997,23	4.000,0000	40,9358	32.956,54	14.000,0000	149,8642
9	32.989,65	3.000,0000	34,7009	32.937,98	7.000,0000	69,2469	32.950,70	24.000,0000	243,4396
10	32.999,28	2.500,0000	28,3680	32.959,86	9.000,0000	92,5049	32.940,85	6.000,0000	60,2798
11	32.950,26	1.000,0000	10,8074	32.983,28	3.000,0000	31,0506	33.018,45	10.000,0000	112,9014
12	32.932,87	2.000,0000	21,4731	32.910,09	8.000,0000	86,3009	32.827,18	24.000,0000	291,3307
13	33.041,85	1.500,0000	16,8562	<b>33.066,14</b> <sup>2</sup>	4.000,0000	42,4773	32.949,14	6.000,0000	61,2665
14	33.073,38	1.000,0000	12,4064	32.912,35	5.000,0000	51,0094	32.976,61	12.000,0000	118,4186
15	<b>33.182,83</b> <sup>2</sup>	1.000,0000	10,9554	32.982,49	5.000,0000	51,3234	32.959,91	10.000,0000	97,5723
16	32.922,52	2.000,0000	21,3655	33.060,19	4.000,0000	42,4485	<b>32.807,60</b> <sup>1</sup>	32.000,0000	318,9531
17	33.085,16	2.500,0000	29,0949	32.890,95	5.000,0000	50,8811	32.939,16	10.000,0000	101,0975
18	33.094,52	3.000,0000	33,6291	33.023,41	6.000,0000	63,1452	32.940,85	18.000,0000	187,3642
19	33.122,27	1.000,0000	12,4407	32.945,27	10.000,0000	104,1539	<b>33.061,11</b> <sup>2</sup>	12.000,0000	116,0384
20	33.001,19	4.000,0000	43,0228	32.892,43	9.000,0000	91,0409	32.949,20	14.000,0000	142,1130
$\mu$	33.001,98	2.350,0000	25,9932	32.961,01	6.500,0000	69,0495	32.944,43	13.400,0000	140,2186
$\sigma$	79,64	1.194,7803	12,6683	59,92	5.333,8541	59,6492	56,83	6.726,0687	72,5714

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Maior custo.

Tabela 41 – Resumo do DE de 15 Unidades com Zonas Proibidas.

CRITÉRIO	CUSTO MÍN (\$/h)	$\mu$ (\$/h)	CUSTO MÁX (\$/h)	$\sigma$ (\$/h)
G100	32.944,42	33.058,62	33.244,70	96,30
G250	32.858,45	33.030,00	33.186,85	77,22
G500	32.876,73	33.001,98	33.182,83	79,64
G1000	32.859,24	32.961,01	33.066,14	59,92
G2000	<b>32.807,60<sup>1</sup></b>	<b>32.944,43<sup>1</sup></b>	<b>33.061,11<sup>1</sup></b>	<b>56,83<sup>1</sup></b>

Tabela 42 – Melhor solução do DE com 15 Unidades - Zonas Proibidas.

POTÊNCIA	G100	G250	G500	G1000	G2000
UNI 1 (MW)	388,9561	378,0279	444,8462	437,9733	428,9873
UNI 2 (MW)	414,0877	395,8786	360,1509	380,6290	413,0294
UNI 3 (MW)	117,1954	123,5480	127,1556	129,7058	128,0196
UNI 4 (MW)	104,8038	103,1092	103,4643	109,3104	75,3040
UNI 5 (MW)	200,0249	389,8790	354,8602	340,1825	337,8971
UNI 6 (MW)	414,0780	421,7499	364,7335	363,1460	420,2300
UNI 7 (MW)	456,3855	436,3362	453,5662	419,8348	417,3929
UNI 8 (MW)	99,1600	60,3983	79,0550	108,2141	60,0701
UNI 9 (MW)	88,7245	58,6665	116,3997	74,0957	50,5548
UNI 10 (MW)	128,0253	31,7831	25,2980	81,8875	108,3491
UNI 11 (MW)	55,6914	65,4170	76,5394	55,6316	62,5806
UNI 12 (MW)	74,4706	77,2316	50,5022	67,5576	79,8962
UNI 13 (MW)	63,1979	31,2015	43,6825	25,0025	38,5659
UNI 14 (MW)	35,0731	47,1250	40,3318	36,8541	25,1374
UNI 15 (MW)	22,1521	42,9077	21,9351	33,6812	15,0237
$P_L$ (MW)	32,0264	33,2595	32,5208	33,7062	<b>31,0384<sup>2</sup></b>
$P_D$ (MW)	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.662,0264	2.663,2595	2.662,5208	2.663,7062	<b>2.661,0384<sup>3</sup></b>
CUSTO(\$/h)	32.944,42	32.858,45	32.876,73	32.859,24	<b>32.807,60<sup>1</sup></b>

<sup>1</sup> Menor custo.<sup>2</sup> Menor perda.<sup>3</sup> Menor despacho.