RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: Uma Introdução à Geometria Fractal no Ensino Fundamental

Jeruza Quintana Petrarca de Freitas[1]
Mara Elisângela Jappe Goi[2]
Osmar Francisco Giuliani[3]

RESUMO

Este estudo insere-se no campo de pesquisa da Educação Matemática, tendo o objetivo de articular a metodologia de Resolução de Problemas ao conteúdo da Geometria. O trabalho foi desenvolvido no Ensino Fundamental, envolvendo alunos de uma escola pública de Lavras do Sul/RS, durante o mês de abril de 2015. De cunho qualitativo, utilizou-se como instrumentos de pesquisa: questionários, gravações em áudio e também relatórios produzidos pelos alunos. A análise da implementação evidencia que os discentes não possuem conhecimento sobre a Geometria Fractal e também não conhecem a metodologia de Resolução de Problemas. Os resultados indicam que a articulação do tema com a metodologia de Resolução de Problemas deve ser desenvolvida com mais frequência nas aulas para que, assim, os estudantes se familiarizem com a metodologia.

Palavras-Chave: Resolução de Problemas, Geometria Fractal, Educação Básica.

1 INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 24) caracterizam a Matemática “como uma forma de compreender e atuar no mundo, e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural”. Sendo assim, percebemos o quanto a Matemática está próxima à realidade e pode ser abrangida pelo professor em seus contextos de sala de aula.

Quanto à Educação Matemática, Onuchic (2013), relata que esta área é relativamente nova e gera debates intensos. Professores de diversos níveis contribuem com suas técnicas, conceitos, conteúdos e currículos. Mesmo assim, a autora expõe que ainda há uma visível separação entre matemáticos

[1]Licencianda em Ciências Exatas - Habilitação em Matemática (jeruza.quintana@gmail.com)
[2] Orientadora (maragoi@unipampa.edu.br)
[3]Co-orientador (osmargiuliani@gmail.com)

e educadores matemáticos, por consequência devemos observar pesquisas de diferentes níveis educacionais para um entendimento que nos auxilie a aprender e colaborar uns com os outros.

No ano de 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que é a maior organização de educação matemática do mundo, publica o documento intitulado "*An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's*", o qual aponta que a "resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2009, p. 4). Inicia-se então um trabalho mais intenso relacionado à Resolução de Problemas na Educação Matemática.

Deste modo a proposta desta investigação, vem de encontro, com o questionamento da possibilidade em articular a resolução de problemas à Geometria Fractal. Visto que a "Geometria Fractal é um tema de grande potencial que muito ainda precisa ser explorado, objetivando uma abordagem nos diferentes níveis da Educação Básica" (PADILHA, 2013, p. 48). Queremos despertar o interesse pela Matemática através do lúdico, pois através da geometria fractal os objetos matemáticos são vistos como formas belas e coloridas podendo provocar a curiosidade dos estudantes contribuindo no aprimoramento dos conceitos matemáticos. Essas formas podem ser encontradas em filmes de ficção científica e jogos eletrônicos, proporcionando prazer estético e conduzindo indagações sobre suas relações com a Matemática, Baier (2005).

A ideia de envolver a metodologia de Resolução de Problemas à Geometria Fractal veio da influência de duas professoras de minha graduação. Na disciplina de Instrumentação para o Ensino de Química conheci a metodologia de Resolução de Problemas, em que tivemos que construir um bloco de problemas para ser aplicado na Educação Básica, e foi onde eu como aluna percebi o quanto chama atenção dos alunos e torna as aulas menos monótonas.

Já a temática Geometria Fractal surgiu inicialmente de um convite da Prof. Dr.ª Ângela Maria Hartmann para ministrar juntamente do acadêmico Hudá Augusto Cardoso, que estuda Geofísica, uma oficina para alunos do Ensino Médio e Professores da Educação Básica, tendo esta sido elaborada pelo acadêmico Matheus Garcia, também acadêmico de Geofísica, para ser desenvolvida no projeto Novos Talentos desenvolvido na UNIPAMPA.

Fractais são gerados pela repetição de padrões, esse processo é denominado iteração. A propriedade de complexidade infinita está intimamente relacionada a estas iterações, pois para a criação de um fractal elas são realizadas infinitamente, ou seja, nunca conseguiremos representá-lo completamente.

Este trabalho justifica-se na afirmação de Baier (2005, p. 84) que trata sobre o estudo de padrões, pois este “não sendo significativo na visão de mundo mecanicista, não é valorizado nos currículos escolares, porém, torna-se importante a partir do advento do pensamento sistêmico”. De acordo com o autor na atualidade é imprescindível a compreensão de ordens e padrões para o desenvolvimento dos seres vivos. Padrões não se encontram apenas em números e equações, mas em tudo que nos rodeia. O mundo está repleto de padrões e ordem: na natureza, na arte, na construção de prédios e na música. Padrão e ordem são encontrados em várias áreas do conhecimento, como na ciência, medicina, sociologia, entre outros (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p. 169).

Intenções se fazem presentes no momento em que pensamos sobre o distanciamento entre os conteúdos matemáticos estudados nas escolas e o mundo onde vivemos. Preocupações vêm à tona com a ausência, nos currículos escolares, dos conteúdos matemáticos construídos nas últimas décadas (BAIER, 2005). Com esse objetivo, articulamos a metodologia de resolução de problemas ao conteúdo da Geometria fractal.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Resolução de Problemas

Nos últimos anos, a resolução de problemas vem sendo trabalhada em várias áreas do conhecimento. Na Matemática, essa metodologia também é amplamente estudada, vista como uma habilidade que conquistamos principalmente pela sua prática. Pode-se afirmar que a metodologia de resolução de problemas não é um recurso com o qual se pretende automatizar rotinas de procedimentos, nem assimilar algoritmos por repetições mecânicas, essa definição caracteriza-se como exercício (CONTRERAS, 1987). Diferentemente de exercícios, a resolução de problemas consiste em utilizar diversas estratégias para buscar uma ou mais soluções para resolver uma determinada situação. Porém para CONTRERAS (1987), é necessário ter sensatez, pois o que pode ser exercício para um discente pode ser problema para outro.

Há várias definições para problemas, eles podem ser classificados em: problemas qualitativos ou quantitativos. Os problemas qualitativos são geralmente abertos, que instigam o aluno a analisar situações cotidianas relacionando-as ao conhecimento científico. O segundo tipo de problema, relacionado aos problemas quantitativos, geralmente exige a manipulação de dados numéricos e, a partir desses, encontrar soluções. Esses problemas também são denominados problemas de lápis e papel. Há outra classificação encontrada na literatura que são as pequenas pesquisas caracterizadas por trabalho prático, em que o aluno deve aproximar-se do trabalho científico, formulando hipóteses, trabalhando no laboratório, analisando dados, etc. (POZO e CRESPO, 2009).

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) expõe como relevante o domínio da Matemática. Para o PISA é imprescindível que os estudantes sejam ativos na resolução de problemas, sabendo dominar os processos de formular, empregar e interpretar. Ao processo de formular abarca a capacidade de identificar oportunidades, fazer suposições sobre como resolver o problema. Já o processo de empregar consiste em saber aplicar o conhecimento matemático, enquanto que Interpretar é a habilidade de refletir sobre soluções, verificando se os resultados são condizentes com a situação específica (PISA, 2012). Vimos então que resolver problemas não consiste apenas em repetir algoritmos, é preciso utilizar diversas competências, fazendo o aluno refletir sobre sua prática e empregar conceitos adquiridos em aula.

A resolução de problemas contribui para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, possibilitando ao aluno criar diversas habilidades, como: iniciativa, criatividade, independência e raciocínio lógico. Distanciando-se de aulas condicionadas somente a exercícios rotineiros, descontextualizados, os quais valorizam apenas a aprendizagem por imitação e reprodução (SALIN, 2013).

Para alguns pesquisadores (POZO e CRESPO, 1998; DEWEY, 2010), a aprendizagem através da Resolução de Problemas não é tarefa apenas do aluno, pois o professor deve mediar esse processo. É crucial que o professor não resolva os problemas e que instigue seus alunos a pensar, refletir sobre os possíveis caminhos a serem tomados.

Sendo o problema o ponto relevante para a construção do conhecimento cientifico, a definição de conceitos isolados fica irrelevante. Em processos de ensinar e aprender conceitos e ideias matemáticas, é importante explorar, por meio de problemas, situações que incitem os alunos a criar estratégias para encontrar soluções (ROMANATTO, 2012).

Schoenfeld (1991) argumenta que os problemas devem servir como introdução ao pensamento matemático. Para o autor, os problemas necessitam possuir quatro propriedades: ser relativamente acessíveis; permitir a resolução por diversos caminhos; servir como introdução a importantes ideias matemáticas e possibilitar explorações matemáticas, ou seja, que o problema seja capaz de gerar mais problemas. Nesse sentido, compreendemos que para a criação dos problemas é indispensável conhecer a realidade e a capacidade dos discentes, pois os problemas devem ser significativos, ao mesmo tempo em que precisam despertar a curiosidade e empenho para resolvê-lo.

A resolução de problemas contempla a concepção do conhecimento, visto que estimula e amplia a rede de significação dos elementos apreendidos na realidade. Estabelece uma relação de continuidade e ruptura na análise, levantamento dos dados e também na construção de hipóteses. Permite a reflexão e o pensamento crítico em todas as etapas da resolução (ANASTASIOU, 2012).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 70) trazem à tona a relevância em trabalhar a Matemática através da metodologia de resolução de problemas. Suas orientações apontam que é fundamental evitar memorização, apresentações de “regras” desprovidas de explicações, resolução de exercícios repetitivos de “fixação”, e a aplicação direta de fórmulas. Assim a resolução de problemas é uma estratégia que contribui na formação cognitiva do indivíduo (SALIN, 2013).

2.2 Geometria Fractal

A Matemática procura representar nossa percepção da natureza, e a Geometria Euclidiana nos oferece uma aproximação para a análise de seus objetos, porém muitos deles apresentam irregularidades que não podem ser descritos pela Geometria Euclidiana (CAMARA, 2010).

Uma teoria em especial, que auxilia no estudo destas irregularidades, é a Geometria Fractal, assim denominada por Benoit Mandelbrot, em 1975. O matemático francês, natural da Polônia, "baseou-se no latim, do adjetivo *fractus,* cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar" (BARBOSA, 2005, p. 9).

Esse pesquisador procurou durante anos situações para aplicar suas ideias, e durante seu trabalho na *International Business Machines* (IBM) deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em redes de computadores. Esses ruídos foram eliminados com o emprego de um antigo trabalho de George Cantor chamado Poeira de Cantor (Idem).

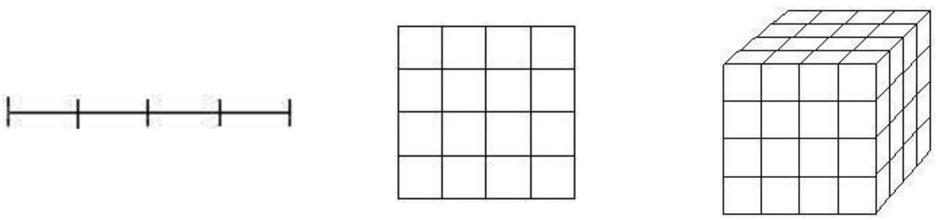
A definição de Fractal foi criada por Mandelbrot e há pesquisadores que se baseiam em sua definição para criar outras que sejam de melhor compreensão. Para Vale *et al*. (2005) entende-se que "ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade, sequência, motivo, regra e ordem", aqui ele se refere ao padrão Fractal. Já Gouvea e Muraru (2004, p.5) consideram os fractais como "formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita" e ainda explicitam que:

> São formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (autossimilaridade). Em consequência da autossimilaridade, quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo (GOUVEA e MURARU, 2004, p. 5).

Fractais são objetos que podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente, apresentando determinadas características: autossemelhança, escala, complexidade e dimensão. Independente da escala ser reduzida ou ampliada, o objeto apresenta sempre o mesmo aspecto visual, essa característica é denominada autossemelhança, uma das características ressaltadas por Gouvea e Muraru (2004) em sua definição. Esta pode ser exata (gerada por processos matemáticos) ou aproximada (formas na natureza). A complexidade infinita prende-se ao fato do processo que o gera ser estabelecido de infinitas iterações.

A dimensão do fractal é vista como a densidade do objeto porque são mais do que linhas e “menos” que superfícies. Ou seja, representa o grau de irregularidade do objeto e o espaço que ele ocupa (SOUZA, 2011). Para compreendermos melhor este conceito observemos a seguinte elucidação de Barbosa (2005), considerando a imagem a seguir:

Figura 1 – Representação das três dimensões



Fonte: (NUNES, 2006)

A imagem acima mostra um segmento de reta, um quadrado e um cubo, que representam respectivamente as dimensões 1, 2 e 3. Os objetos possuem a propriedade de autossimilaridade, ou seja, podem ser divididos em objetos semelhantes.

Percebemos que o segmento de reta está divido em 4 peças. Já o quadrado com 16 peças, tem o lado formado por 4 peças. O cubo é formado por 64 peças cúbicas e possui arestas composta de 4 peças. Cada pequena peça é autossimilar ao todo; assim, para que cada peça fique igual ao todo, devemos ampliá-la por um fator de aumento aqui denominado coeficiente de proporcionalidade.

O número de peças no segmento de retas é igual ao fator de aumento (4^1), o quadrado (4^2) e o cubo (4^3). E em geral, o número **n** de peças é dado por $n=m^D$, onde **m** é o fator de aumento e **D** a dimensão. Para isolarmos D multiplicamos ambos os lados da equação por log, assim obtemos:

$$\log n = \log m^D$$

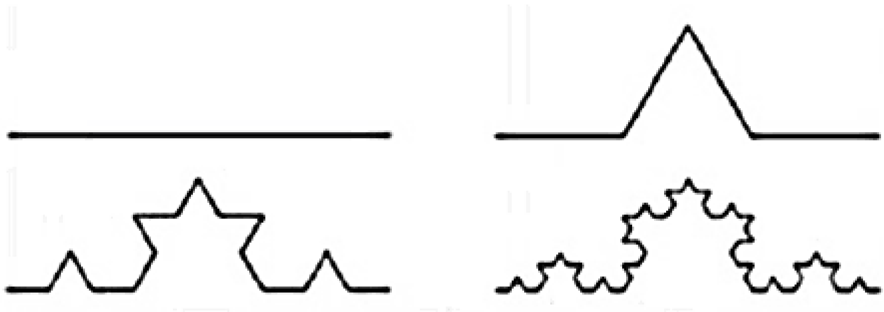
$$\log n = D \log m$$

$$D = \frac{\log n}{\log m} \qquad (01)$$

As primeiras investigações sobre a Geometria Fractal e a Teoria do Caos ocorrem separadamente, pois no início não são percebidas suas ligações (BAIER, 2005). As duas teorias se desenvolveram rapidamente, principalmente pelo aprimoramento das técnicas computacionais. Cientistas de áreas diversas, como Biologia, Física, Economia, Astronomia, Meteorologia, Ecologia, Fisiologia, entre outras, aliaram-se a então surpreendente descoberta de ordens no caos (BARBOSA, 2005).

Barbosa (2005) apresenta famosos fractais precursores em ordem cronológica de suas criações. Mandelbrot, considerado o pai dos Fractais, curiosamente deve ter considerado esses entes matemáticos denominados por alguns como “monstros matemáticos” para a sua criação. Todavia, seus estudos realçam alguns trabalhos do passado, como o de George Cantor (1883) com o trabalho Poeira de Cantor, Giuseppe Peano (1890) publica a sua famosa Curva de Peano, David Hilbert (1891) coloca a público sua curva de cobertura da superfície de um quadrado, Helge Von Koch (1904) introduziu uma curva que leva o seu nome. Essa curva, aplicada a um triângulo equilátero, aparenta ser um floco de neve (Figura 2).

Figura 2– Curva de Koch



Fonte: (RINALDI, MENEZES, 2007).

Waclaw Sierpinski (1916), matemático polonês, contribui com o triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski, Pierre Fatou (1919) e Gaston Julia (1918), mesmo que não tenham realizado pesquisas em conjunto, estudaram o que acontece com a imagem no plano complexo quando se aplica iteradamente a transformação $f(z) = z^2 + c$, para um z complexo inicial e c, complexo constante.

A Geometria Fractal é pouco estudada nos contextos das aulas de Matemática. A literatura nos mostra que é importante trabalhar essa temática, pois a exploração da mesma provoca o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos estudantes, promovendo a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar. Auxilia na compreensão de conceitos geométricos, ao mesmo tempo em que impulsiona a análise e o reconhecimento de padrões e regularidades presente em suas realidades (NUNES, 2006)

Para Niedermeyer, Koefender e Roos (2009, p.8), a Geometria Fractal pode ser “trabalhada em qualquer nível de ensino, pois ela vai de uma simples dobradura de papel até os entes matemáticos modernos, que envolvem números complexos, modelagem, etc.”.

Tendo em vista o pouco conhecimento que, de um modo geral, as pessoas possuem sobre a geometria fractal, por ser um conteúdo que não é usualmente estudado na escola, ou mesmo em nível universitário, compreendemos ser uma temática relevante porque pode abarcar vários conteúdos matemáticos, além de possuir um aspecto visual que prende a atenção e provoca a curiosidade da sua relação com a Matemática.

2.3 Revisão de Literatura: Resolução de Problemas e Fractais

Com o intuito de verificar como a Metodologia de Resolução de Problemas e o conteúdo da Geometria Fractal têm sido trabalhado na Educação Básica, foram pesquisados 4 periódicos da área de Ensino de Ciências e Educação Matemática. Foram encontrados 72 artigos nos periódicos: Investigações em Ensino de Ciências (http://www.if.ufrgs.br/ieci - ISSN 1518- 8795), Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (http://periodicos.uniban.br/index.php?journal=jieem – ISSN 2176-5634), Revista Eletrônica de Educação Matemática (https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat - ISSN 1981-1322) e Educação Matemática em Revista (http://www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr/index). O período compreendido da revisão bibliográfica foi respectivamente: 2004-2014, 2009-2014, 2006-2014 e 2009-2014. Não foi possível fazer a revisão em todos os periódicos nos últimos 10 anos por não haver edições anteriores.

A busca por expressões que se vinculassem ao tema foi realizada pela leitura das palavras-chave, títulos e resumos dos artigos. Foram identificadas variações para o uso do termo resolução de problemas, a saber: Resolução de Problemas (44 artigos), Situação–Problema (9 artigos), Solução de Problemas (8 artigos), Problemas (4 artigos), Tipo de Problema (1 artigo), Função do Problema (1 artigo), Resolução (1 artigo). O mesmo não ocorreu para o termo Geometria Fractal (4 artigos).

No Quadro 1 temos uma visão geral dos periódicos e o total de artigos encontrados.

Quadro 1 – Periódicos pesquisados e totais de artigos encontrados

Identificação do Periódico	Periódico	Total de Artigos
IENCI	Investigações em Ensino de Ciências	14
JIEEM	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	16
REVEMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática	21
EMR	Educação Matemática em Revista	21

Fonte: os autores.

Os artigos foram submetidos a agrupamentos de palavras-chave, buscando articular a Geometria Fractal à Resolução de Problemas. A seguir, o Quadro 2 apresenta o número de artigos encontrados para as palavras-chave: resolução de problemas e Geometria Fractal em cada periódico.

Quadro 2 - Artigos encontrados em cada Revista

Expressões	IENCI	JIEEM	REVEMAT	EMR
Resolução de Problemas	14	16	21	17
Geometria Fractal	-	-	-	4
Resolução de Problemas e Geometria Fractal	-	-	-	-

Fonte: os autores.

A partir do Quadro 2, pode-se perceber que o tema Geometria Fractal possui uma frequência mínima comparada à Resolução de Problemas. Esse fato é compreensível, visto que a Geometria Fractal é considerada muito nova e ainda não se tornou “acadêmica”, todavia esse fato não diminui sua importância (MOURA, 2011).

Os artigos relacionados à Resolução de Problemas apresentam uma diversidade de abordagens e perspectivas teóricas e metodológicas, pois em alguns casos os intitulados problemas confundem-se com exercícios.

Quadro 3 – Artigos relacionados à Geometria Fractal

Artigo	Referência
A	CAMARA, A. Para Ler com os Alunos um Conversa Inicial Sobre a Geometria dos Fractais. **Educação Matemática em Revista**, v. 15, n. 29, p.15-18, mar. 2010.
B	LOPES, M. R. C. M.; AMARAL, A.; MATTO, A. F.; SILVA, K. B. R.. Fractais na Educação Básica: Aprendendo com Quebra-Cabeças, Arte Francesa e Cartões. **Educação Matemática em Revista**, v. 18, n. 41, p. 37-44, mar. 2014.
C	GOMES, A. N.; SALVADOR, J. A. Dobras, Cortes e Fractais no Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista**, v. 17, n.37, p. 5-13, nov. 2012.
D	PADILHA, T. A. F. Aprendizagens Matemáticas a Partir da Construção de Fractais. **Educação Matemática em Revista**, v. 18, n. 39, p. 5-48, ago. 2013.

Fonte: os autores.

A análise dos artigos sobre a Geometria Fractal revelou que apenas o artigo C é uma pesquisa de mestrado, o qual se baseou na atividade de confecção de cartões, entre outros estudos para o desenvolvimento posterior de Folhas de Atividade que abordam o conteúdo de semelhança de figuras planas.

O artigo B está relacionado à oficina dirigida à formação continuada de professores, utilizando quebra-cabeças e cartões fractais como ferramenta. O artigo D realizou intervenções na 7ª série do Ensino Fundamental, que trabalhou a Geometria Fractal aliada ao software GEOGEBRA. O artigo A relatou a Geometria Fractal sugerindo a construção de outros Fractais e o seu trabalho em sala de aula.

Após análise dos artigos relacionados à resolução de problemas, podemos destacar alguns aspectos: o nível de ensino que mais contou com este tipo de trabalho foi o Ensino Fundamental, com 24 artigos, seguido do Ensino Médio, com 7, e o Ensino Superior, com 9 trabalhos. Outro nível de ensino abordado foi o maternal (1 a 3 anos), em que seus alunos trabalharam noções de geometria. Também temos um trabalho que contemplou os níveis Fundamental, Médio e Superior, e um artigo que desenvolveu seu estudo com a Educação de Jovens e Adultos.

A formação continuada de professores é abordada em 7 trabalhos. Quanto a pesquisas de mestrado foram encontrados 4 artigos e somente uma monografia. Também nos deparamos com textos que, além de desenvolver a metodologia de Resolução de Problemas juntamente da Matemática, aliaram-se à Literatura Infantil, Jogos e as diversas áreas do conhecimento como: Biologia, Física, Geologia e Linguagem.

Os artigos encontrados relatam suas experiências empregando diversos conteúdos, tais como: Adição, Frações, Funções, Função Exponencial e Logarítmica, Geometria Espacial, Geometria Analítica, Divisão, Combinatória, Multiplicação, Probabilidade, Educação Financeira e Expressões Algébricas.

Para o desenvolvimento de alguns trabalhos, os autores a seguir destacaram-se como embasamento teórico: Vigotsky, Paulo Freire,Verganaud, Duval, Polya, Fischhein, Roger Chartier. Alguns artigos propõem a resolução de “problemas” caracterizados como atividades que não necessitam de pesquisas e até mesmo desprovidos de contextualização. Porém, como afirma Contreras (1987), não podemos aqui avaliar quais são estes, pois o que pode ser exercício para um discente pode ser problema para outro.

No entanto, nas revistas analisadas não foram encontrados artigos que relacionem o ensino de Geometria Fractal à Resolução de Problemas. Desse modo, percebemos que esse é um amplo campo para ser estudado.

3 METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

Os sujeitos desta pesquisa foram alunos do Ensino Fundamental, sendo três do 6º ano, dois do 7º ano e um do 8º ano, de uma escola pública do município de Lavras do Sul/RS (denominados por A1, A2, A3, A4, A5, A6), os quais foram convidados a participar das oficinas (adesão espontânea) realizadas duas vezes na semana durante o mês de abril de 2015, perfazendo um total de oito encontros.

A sequência metodológica desenvolvida nessa investigação foi embasada nos trabalhos de Zuliani e Ângelo (2001), com adaptações. Ela prevê inicialmente uma aproximação ao conteúdo que será apresentado.

A seguir, foi aplicado um questionário inicial (Apêndice A) a fim de verificar os conhecimentos dos estudantes sobre o conteúdo de Geometria Fractal e sua relação com a disciplina de Matemática.

Em um segundo momento, os alunos foram divididos em grupos para resolver o bloco de problemas já convencionado pela pesquisadora. Os estudantes tiveram um tempo para levantar hipóteses e pesquisar com a intenção de sustentar suas soluções.

Ao final da resolução dos problemas, os grupos relataram aos demais os resultados obtidos, erros e caminho percorrido, no sentindo de analisar e comparar as diferentes soluções propostas. Cada situação-problema foi avaliada utilizando-se as produções escritas. Os relatórios das atividades práticas desenvolvidas são instrumentos que investigam a metodologia adotada.

Como finalização da proposta de implementação didática, foi entregue um questionário final (Apêndice B), que tem por objetivo apurar os conhecimentos desenvolvidos e averiguar a eficácia da utilização da metodologia de resolução de problemas na Educação Básica.

Além dos questionários (Inicial e Final), utilizamos gravações das aulas em áudio e análise dos relatórios produzidos pelos alunos. As transcrições dos áudios foram analisadas qualitativamente.

Já os questionários foram analisados através das respostas dos estudantes seguindo a escala Likert. Esses questionários utilizam a escala a seguir:

CP (Concordo Plenamente)	5
C (Concordo)	4
NO (Não tenho opinião)	3
D (Discordo)	2
DT (Discordo Totalmente)	1

Os valores indicam o grau de concordância do aluno a respeito das questões. Os gráficos gerados apresentam os escores das respostas obtidas, esse valor é gerado a partir da soma de cada um do número de informantes, multiplicando pelo valor correspondente de cada grau de concordância e por fim divide-se pelo total de informantes.

A análise das respostas foi baseada no cálculo de Ranking Médio (RM), procedimento já utilizado em diferentes trabalhos da área de Educação em Ciências (BOHRER; FARIAS, 2013). A equação 01 orienta os cálculos, lembrando que já havíamos atribuído valores de 1 a 5 para cada resposta. Por conseguinte quanto mais o RM se aproxima dos valores extremos, maior a concordância dos alunos para com aquelas afirmações.

$$RM = \frac{\sum F_i . V_i}{NT} \qquad (02)$$

RM = Ranking Médio; F_i = Frequência Observada; V_i = Valor de cada resposta; NT = Número total de Informantes

Assim, a análise dos resultados das atividades foi realizada sob um enfoque qualitativo, o qual para Lüdke e André (1986) possui algumas características que a define. São elas: ter o ambiente natural como fonte de pesquisa, o pesquisador ser o seu principal instrumento, os dados predominantemente descritivos, entre outros. Flick(2004) argumenta que um dos aspectos essenciais da pesquisa qualitativa consiste na variedade de abordagens e métodos, pois evidenciam as discussões e a prática da pesquisa.

A seguir destacamos o bloco de problemas sobre a Geometria Fractal que foi aplicado nessa investigação.

Quadro 4 – Bloco de Problemas sugerido aos alunos

Problema 1 (P1)	A geometria fractal descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela Geometria Euclidiana. Sua construção pode ocorrer de diversas formas, seja com lápis e papel, com pequenas peças ou até mesmo através de softwares especializados. Construções de fractais através de materiais concretos são denominados: Fractais manipulativos, em nosso caso TRIMINÓ. Não é apenas a repetição de um padrão que gerará um fractal, é preciso satisfazer algumas condições, quais são essas condições? Se você tivesse que descrever a um amigo como criar um Triminó Fractal como seria, quais dicas você daria?
Problema 2 (P2)	A neve é uma ocorrência meteorológica que consiste na precipitação de flocos formados por cristais de gelo. Um dos tipos de precipitações sólidas existentes são os Flocos de neve, esses que possuem formato hexagonal e aspecto de uma pequena estrela. Um floco de neve que desperta o senso estético é o floco de neve de Koch, além de apresentar certas particularidades com a área da matemática. Em grupos realizar uma pesquisa minuciosa sobre a criação deste floco. Após sua construção em sala de aula, avaliar o valor do perímetro na 5ª iteração. Seguindo esse raciocínio, nas próximas iterações, o que podemos afirmar sobre o perímetro do floco de neve de Koch?

Problema 3 (P3)	Fractais podem ser usados para descrever as muitas formas que são encontradas na natureza. Isso inclui árvores, nuvens, montanhas, vegetais, entre outros. Uma maneira de examinar fractais na natureza é comparar um ramo de árvore com a árvore toda. O padrão dos galhos e folhas sobre o pequeno ramo deve imitar a forma geral e toda a árvore. Em uma pesquisa de campo, recolher, tirar fotos de vários tipos de objetos da natureza que você creia que possuía propriedades fractais. Em sala de aula, analisar o que foi coletado procurando autossimilariades.

Fonte: Problemas elaborados pelos autores.

Além da introdução à Geometria Fractal os problemas possuem como objetivo introduzir conceitos matemáticos como: potenciação, frações, noções de sequências e noções de padrões, além de instigar os discentes à realização de pesquisas.

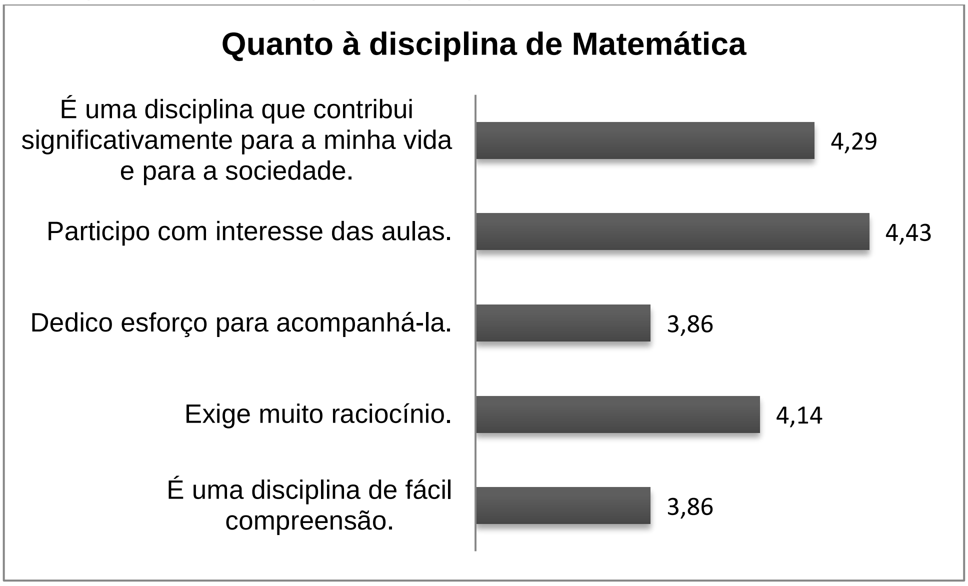
4 DADOS E DISCUSSÃO DOS DADOS

4.1 Análise dos questionários

4.1.1 Análise do questionário inicial

A seguir, apresentamos os resultados do questionário inicial entregue aos discentes após uma breve introdução sobre a Geometria Fractal.

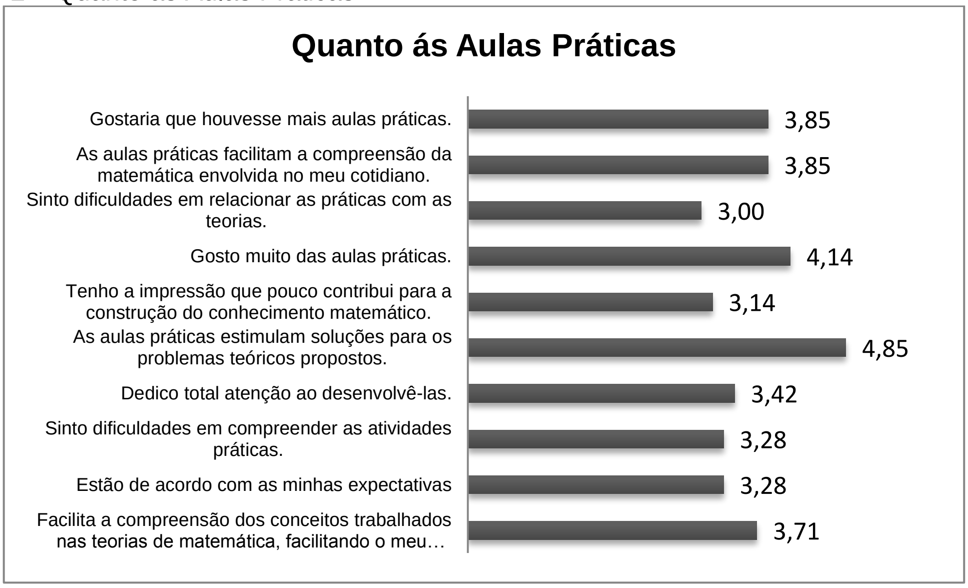
Gráfico 1 – Aspectos relevantes quanto à disciplina de Matemática



Fonte: dados coletados pelos autores.

Observamos no Gráfico 1 que os discentes concordam que a disciplina de Matemática contribui significativamente para a vida e para a sociedade. Além disso, concordam que participam com interesse das aulas. Também concordam que é uma disiciplina que exige muito raciocínio. Ao mesmo tempo que dedicam esforço para acompanhá-la concordam que é uma disciplina de fácil compreensão.

Gráfico 2 – Quanto às Aulas Práticas

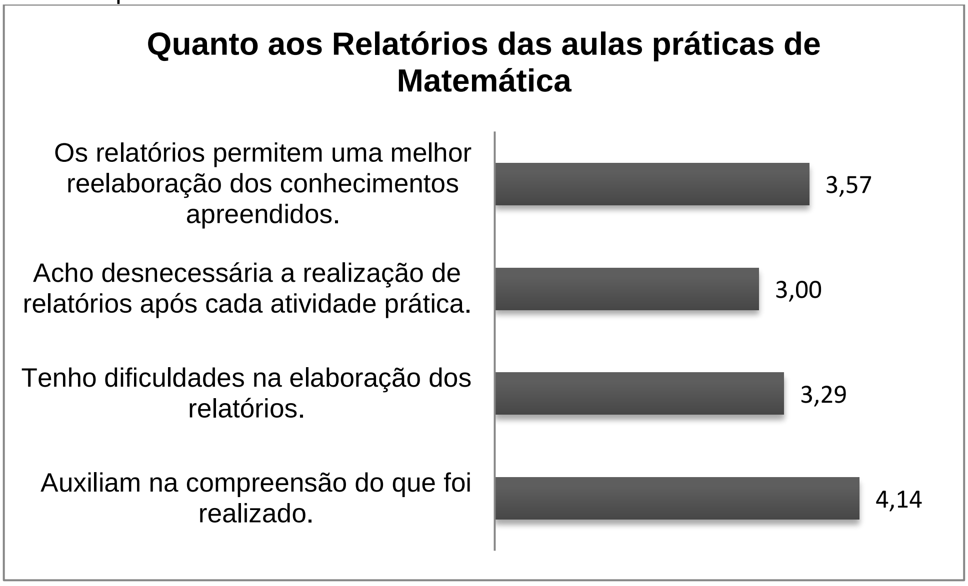


Fonte: dados coletados pela pesquisadora no questionário inicial.

Os discentes afirmam que gostariam que houvesse mais aulas práticas, e que as mesmas facilitam a compreensão da matemática envolvida no cotidiano. Concordam que gostam das aulas práticas e que elas facilitam a compreensão dos conceitos trabalhados nas teorias da matemática, facilitando a aprendizagem. Concordam plenamente que as aulas práticas estimulam soluções para os problemas teóricos.

Não possuem opinião quanto às dificuldades em relacionar prática com teoria. Assim como também não possuem opinião se as atividades práticas pouco contribuem para a construção do conhecimento matemático. Não têm opinião se dedicam total atenção ao desenvolver as aulas práticas e também se sentem dificuldade em compreender as atividades práticas, assim como não têm opinião se está de acordo com as expectativas deles.

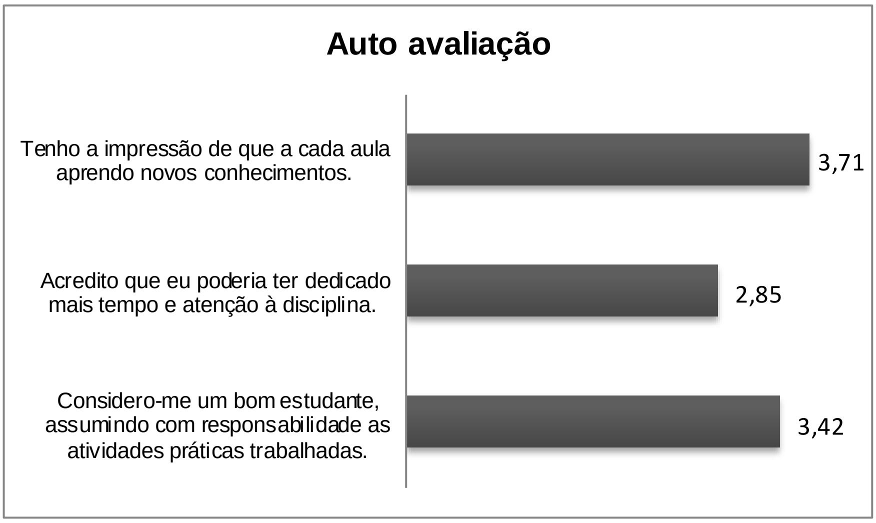
Gráfico 3 – Aula práticas de Matemática



Fonte: dados coletados pelos autores no questionário inicial.

O Gráfico 3 mostra que, os alunos demonstram que os relatórios auxiliam na compreensão do conteúdo trabalhado e permitem uma melhor reelaboração dos conhecimentos apreendidos. Não possuem opinião quanto às dificuldades na elaboração dos relatórios e também na realização dos mesmos.

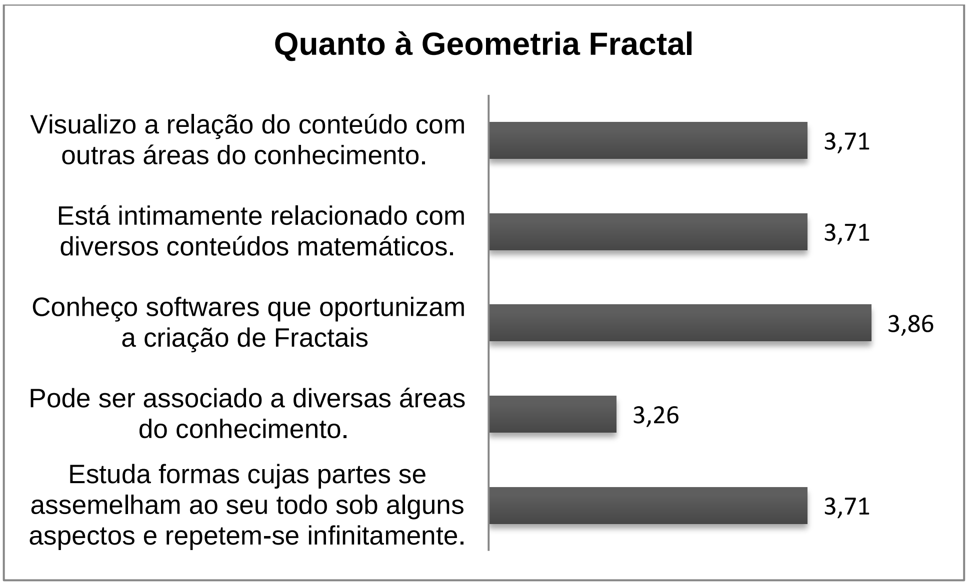
Gráfico 4–Auto avaliação



Fonte: dados coletados pelos autores no questionário inicial.

Observamos que o grupo concorda que a cada aula aprendem novos conhecimentos, não possuem opinião sobre a dedicação de tempo e atenção à disciplina, assim como não possuem opinião sobre ser um bom estudante, assumindo com responsabilidades as atividades práticas trabalhadas. Isso pode ser evidenciado pelo escore médio de 3,42.

Gráfico 5 – Conteúdo de Geometria Fractal

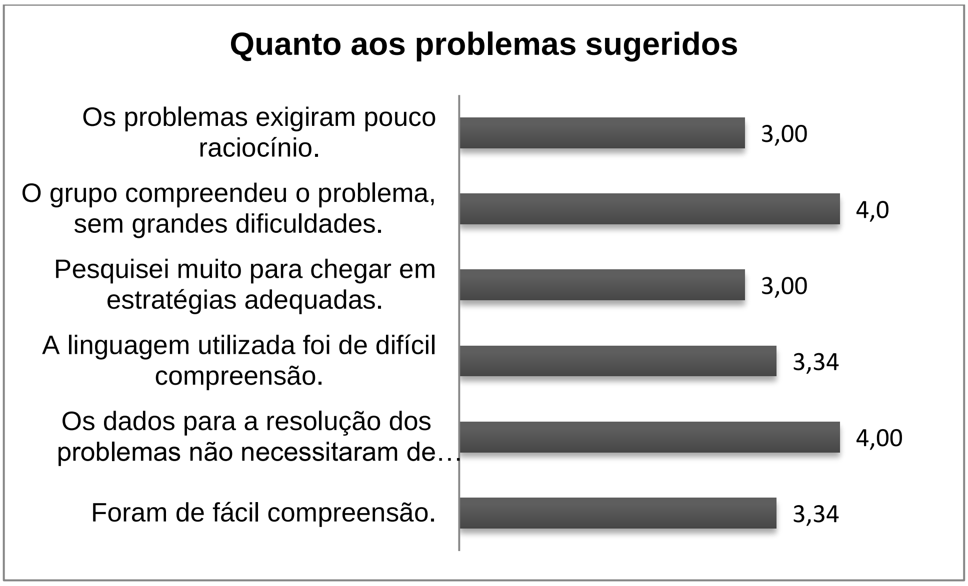


Fonte: dados coletados pelos autores no questionário inicial.

Com relação à Geometria Fractal, notamos que os alunos concordam que ela está intimamente relacionada com diversos conteúdos matemáticos e estuda formas cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos e repetem-se infinitamente. Não possuem opinião sobre a associação com diversas áreas do conhecimento, ao mesmo tempo em que visualizam a relação do conteúdo com outras áreas do conhecimento. Os estudantes possuem conhecimento de softwares que oportunizam a criação de Fractais, isso foi visualizado no escore médio de 3,86.

4.1.2 Análise do questionário final

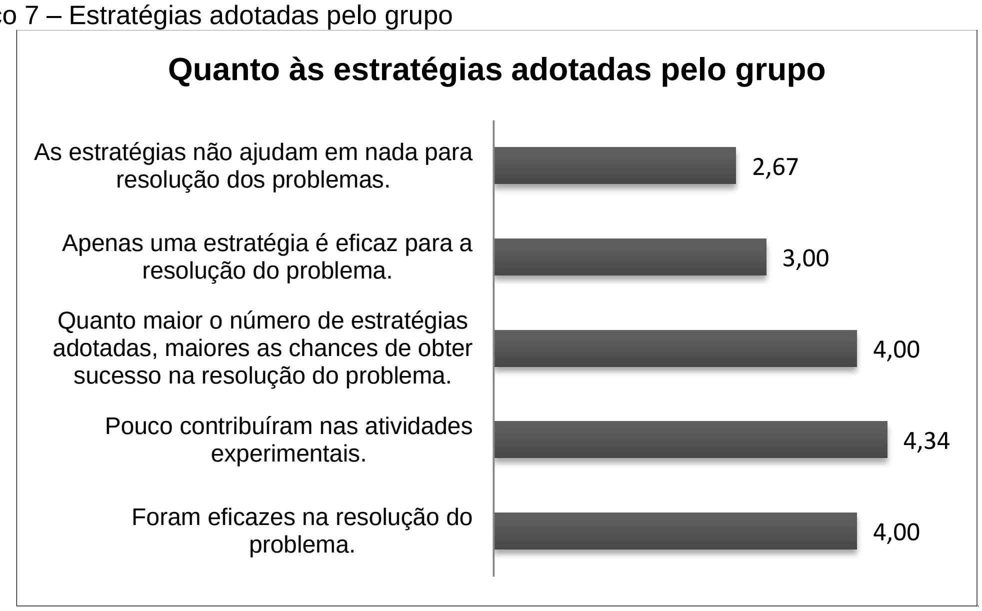
Gráfico 6 – Problemas Sugeridos



Fonte: dados coletados pelos autores no questionário final.

No Gráfico 6, salienta-se a falta de opinião dos discentes em relação aos problemas exigirem pouco raciocínio para fazer a sua resolução. Também parece que os estudantes não têm opinião sobre pesquisar para chegar às estratégias adequadas para resolver determinadas situações-problema. Da mesma forma, não têm opinião se a linguagem utilizada nas situações-problema foi de fácil compreensão. Por outro lado, os estudantes dizem entender o problema sem dificuldades.

Gráfico 7 – Estratégias adotadas pelo grupo

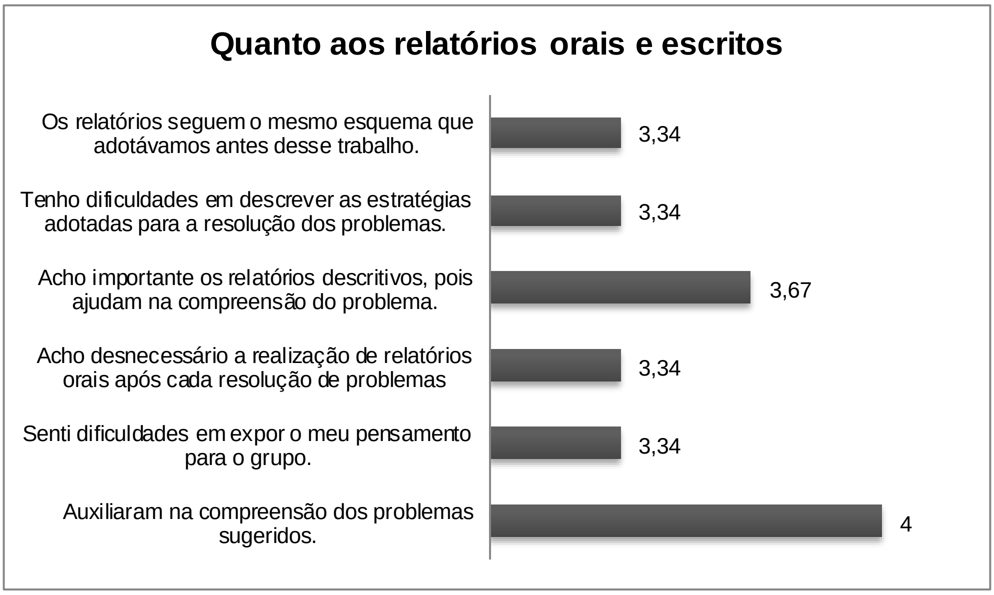


Fonte: dados coletados pelos autores no questionário final.

Quanto às estratégias adotadas pelo grupo, concordam que quanto maior o número de estratégias, maiores as chances de obter sucesso na resolução do problema, e que as estratégias adotadas foram eficazes na resolução da situação. Também concordam que as mesmas estratégias pouco contribuem na compreensão das atividades práticas, mais uma vez contradizem o que haviam concordado.

Outro aspecto considerado está relacionado ao fato dos estudantes não possuírem opinião se apenas uma estratégia é eficaz para a resolução da situação-problema, assim como não sabem se as estratégias não ajudam para a resolução dos problemas.

Gráfico 8 – Relatório orais e escritos

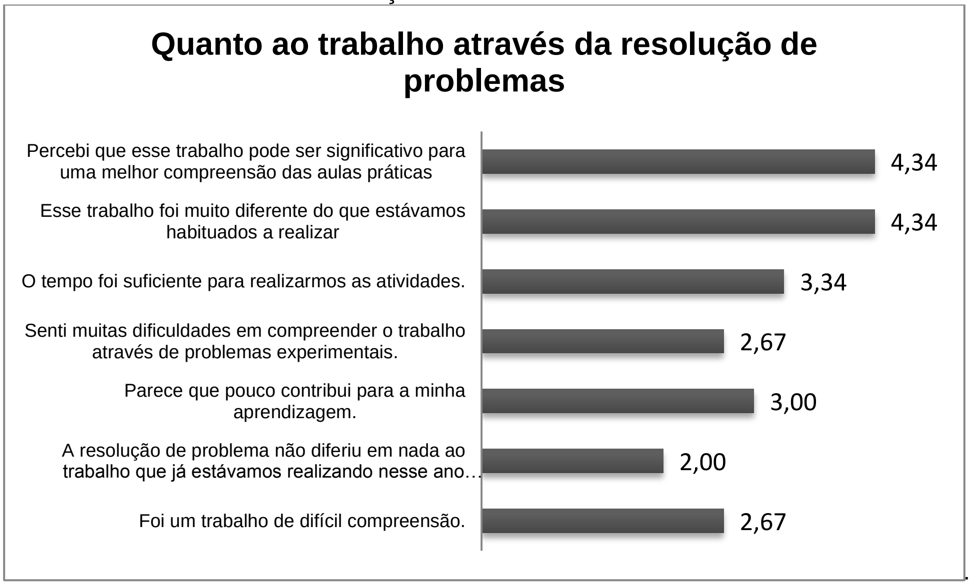


Fonte: dados coletados pelos autores no questionário final.

Quanto aos relatórios orais e escritos, os discentes acham importante serem descritivos, e acreditam que eles auxiliam na compreensão dos problemas.

Com relação às dificuldades em expor o pensamento para o grupo, os estudantes não têm opinião. Os discentes também não têm opinião sobre as dificuldades em descrever as estratégias adotadas para a resolução dos problemas. Quanto à descrição das estratégias adotadas para a resolução, se os relatórios seguem o mesmo esquema adotado antes do desenvolvimento da pesquisa e se acham desnecessários os relatórios orais após cada resolução, os estudantes não têm opinião para esses itens.

Gráfico 9 – Trabalho através da Resolução de Problemas

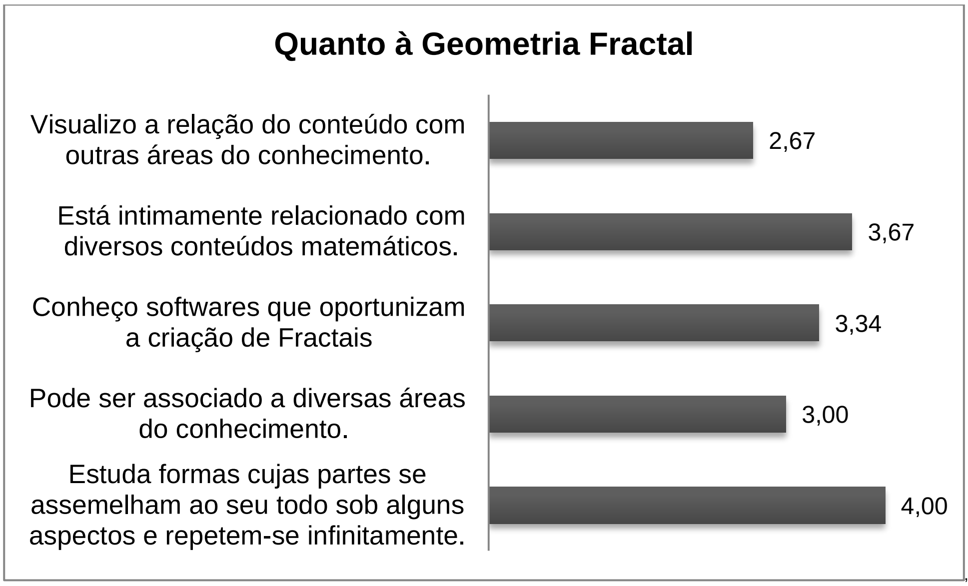


Fonte: dados coletados pelos autores no questionário final.

Com relação ao trabalho desenvolvido sobre a metodologia de resolução de problemas, os alunos acreditam que esse trabalho pode ser significativo para uma melhor compreensão dos conteúdos científicos. Também concordam que este trabalho é diferente do que são habituados a desenvolver nas aulas de Matemática.

Os estudantes não têm opinião se o tempo destinado à resolução dos problemas foi suficiente para a realização das atividades. Assim como não têm opinião sobre as dificuldades em compreender o trabalho através de problemas práticos. Também não têm opinião se o trabalho através da metodologia de Resolução de Problemas contribui para a aprendizagem e se é um trabalho de difícil compreensão.

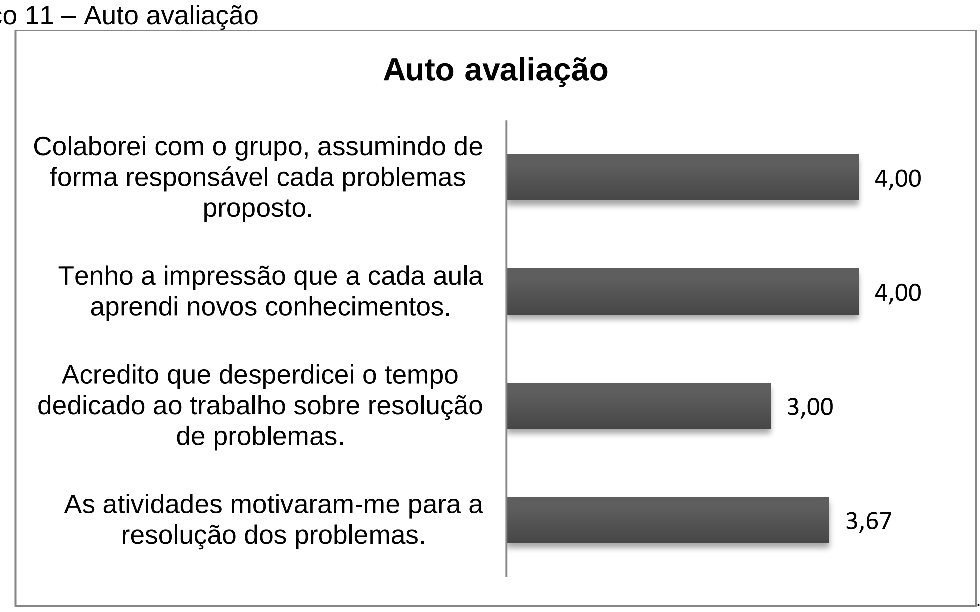
Gráfico 10 – Conteúdo de Geometria Fractal



Fonte: dados coletados pelos autores no questionário final.

No Gráfico 10, percebemos que os estudantes não possuem opinião se a Geometria Fractal pode ser associada às diversas áreas do conhecimento, como também se o conhecimento de softwares oportuniza a criação de Fractais. Por outro lado, concordam que este conteúdo está intimamente relacionado à Matemática e estuda formas cujas partes se assemelham ao todo.

Gráfico 11 – Auto avaliação



Fonte: dados coletados pelos autores no questionário final.

Após a resolução dos problemas, os alunos concordam que esse tipo de atividade os motiva. Também concordam que colaboraram com os colegas de sala de aula, assumindo de forma responsável ao trabalho proposto, isso demonstra que os estudantes têm a impressão de que contribuíram com o trabalho em equipes colaborativas.

Concordam que a cada aula construíram novos conhecimentos. Quanto ao tempo dedicado ao trabalho de resolução de problemas, os alunos não têm opinião.

Em geral, os estudantes possuem pouca opinião sobre diversos pontos do questionário. Porém, é possível observar que a metodologia empregada foi realmente diferente do que os discentes estavam habituados a desenvolver nas aulas de Matemática, tendo um escore médio de 4,34.

Apesar das diversas pesquisas e do desenvolvimento sobre a metodologia de Resolução de Problemas, os estudantes ainda necessitam de melhorias em suas habilidades de resolução. De fato os pesquisadores e discentes estão dando os seus primeiros passos com a Resolução de Problemas e “tal metodologia demanda professores bem preparados para o seu uso” (ONUCHIC, 2013, p. 102).

Quanto aos problemas, os estudantes avaliam que não demonstraram dificuldades para entendê-los e os relatórios auxiliaram na compreensão das situações-problema. Esse tipo de trabalho os motiva e pode ser significativo para uma melhor compreensão dos conteúdos científicos.

4. 2 Resolução das situações-problema: contextos das aulas

Para a resolução do P1, os alunos necessitaram ter o conhecimento sobre potenciação, que foi revisado antes de iniciarmos a resolução. Os mesmos agruparam-se em pequenos grupos para a resolução do P1 e em seguida foram distribuídos pequenos quadrados em Etil Vinil Acetato (EVA). Desenvolvemos um exemplo a partir de um “L” formado com três quadrados, a partir do exemplo os discentes deveriam criar seu próprio padrão.

Eles apresentaram dificuldades para interpretar o exemplo, não estavam compreendendo a ideia de padrão, então a pesquisadora auxiliou-os na sua construção, pois como sugere Polya, “Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar na vista" (POLYA, 1887;1985, p.1)

Depois disso, eles tiveram um tempo para criar seu próprio padrão, porém os discentes não alcançaram o objetivo. À vista disso, seguimos investigando as questões matemáticas envolvidas no exemplo. Como recorda o Aluno A1:

> *... não é de 3, 27 e 81 (Aluno A1)*

Esses números representam a quantidade de quadrados a cada iteração, que foram transformados em potências de base 3. Na iteração 2, a pesquisadora questiona:

> *Pesquisadora: Qual seria o próximo passo?*
> *Aluno A1: Aumenta mais*
> *Pesquisadora: Aumenta,o quê? Que vocês têm que repetir?*
> *Aluno A1: A mesma forma só que diferente, três Ls*

A aluna explica o padrão a ser repetido na iteração três, que é a reprodução da iteração 1 e 2, formando três "L", no sentido convencionado. Após os alunos terem confeccionado o relatório, foram introduzidas noções de sequência.

Posteriormente, encaminhou-se o problema 2, em que os alunos deveriam pesquisar sobre a construção do Floco de Neve de Koch. Contudo, apenas uma aluna teve a iniciativa de realizar a pesquisa. Ao perguntar o que ela encontrou, mencionou:

> *Aluno A: Eu descobri que ele tem a base triangular*
> *Pesquisadora: E o que mais?*
> *Aluno A: Ele vai seguindo sequências*

Sendo assim, a pesquisadora deu continuação na resolução do problema. Realizado isso, os alunos construíram o Floco de Neve de Koch, que se inicia com a construção de um triângulo equilátero, em seguida, cada lado é dividido em três partes, sendo o segmento do meio de cada lado substituído por outro triângulo equilátero. Analisamos o tamanho de cada segmento que consideramos ter valor de uma unidade, que foi divida por 3 a cada iteração, consequentemente, revisamos os conteúdos de multiplicação, divisão de frações e também potenciação. Chegando à construção do Quadro a seguir:

Quadro 5 –Número de segmentos e seu comprimento a cada iteração da Curva de Koch.

Iteração	Nº de Segmentos	Tamanho do Segmento	
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^1}$
2	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3^2}$
3	16	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3^3}$
4	64	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{3^4}$
5	256	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{3^5}$

Fonte: Quadro construído pelos autores.

Ao retomar o que havíamos construído, o Aluno A1 expõe que quanto menor o segmento do Floco de Neve, maior será seu perímetro a cada iteração. Isso pode ser visualizado no excerto abaixo:

Aí quanto menor, mais longo ele vai ficando (Aluno A1).

A cada iteração, o tamanho do segmento vai diminuindo, pois o dividimos em três partes, já seu perímetro aumenta devido ao acréscimo de segmentos, isto é, o perímetro da Curva de Koch tende ao infinito, em um crescimento rápido.

Para a resolução do P3 foi apresentada a sequência de Fibonacci, em que cada termo é igual à soma dos dois anteriores, definida como:

$$U_{(n+1)} = u_{(n-1)} + u_{(n)} \qquad (02)$$

Os alunos foram instigados a refletir sobre a sequência de Fibonacci e encontrar proporções no corpo humano que apresentassem alguma relação com essa sequência. Para isso, utilizaram algumas medidas e suas respectivas divisões: (1) a própria altura pela distância do umbigo até o chão; (2) a medida da cintura até a cabeça e a largura do tórax; (3) a medida do ombro à ponta do dedo pela do cotovelo à ponta do dedo. A razão encontrada tem por limite justamente o valor do número áureo.

Na resolução do Problema 3 os discentes foram conduzidos em torno da escola para a coleta de objetos da natureza. Em sala de aula, os objetos recolhidos foram analisados em uma busca por padrões aproximados de repetição, o que caracteriza o P3. O aluno A3 encontrou o objeto mais aproximado de um fractal. No excerto a seguir ele elucida o padrão encontrado:

> *Pesquisadora: Agora tu explica aqui pra nós, qual é o padrão?*
> *Aluno A3: Ué, o primeiro vai de dois, depois mais em cima vai de ....depois do caule vem três, depois do caule do três vem dois, depois do caule do dois vem três.*
> *Pesquisadora: Isso dos segmentos, mas sempre se divide em quantos?*
> *Aluno A3: Deixa eu ver...um, dois, três. Três?*
> *Pesquisadora: Isso, sempre forma três.*

Observa-se que o padrão do aluno A3 consta na divisão em mais três segmentos a cada bifurcação da vegetação, demonstrando sua compreensão sobre padrões aproximados, uma das características de objetos Fractais. Em consequência, Rinaldi e Menezes (2007, p. 10) evidenciam que “a apreciação de uma nova geometria só faz enriquecer o repertório e transforma a visão dos estudantes sobre os formatos orgânicos que se encontra em nosso entorno”.

As dificuldades em interpretar o problema, utilizar os conhecimentos científicos como auxiliares na resolução, a falta de conhecimentos prévios, entre outros obstáculos enfrentados pelos estudantes, ficaram evidentes durante a resolução dos problemas, pois resolver problemas não faz parte de sua rotina na sala de aula, mas faz parte do seu dia a dia. Polya (1887-19885, p. 10), em seu discurso, afirma que para a ideia da resolução é preciso “conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo”.

Os conteúdos abordados foram potenciação, noções de sequências, padrões e frações. No início de cada resolução, a pesquisadora revisava com os discentes os conteúdos necessários para cada situação-problema. Nesse momento os discentes não apresentaram dificuldades, inclusive na etapa de noções de sequências, que era um conteúdo que eles não haviam estudado ainda. Significando que é possível introduzir conteúdos matemáticos sem obedecer a ordem tradicional. Porém, quando era necessário que esses conteúdos fossem aplicados, ou seja, quando os alunos necessitaram realizar os processos de formular, empregar e interpretar (PISA, 2003), eles apresentaram grandes dificuldades.

É possível notar que isso ocorre devido ao estilo de aprendizagem que este grupo de discentes está acostumado a desenvolver em sala de aula, por isso, quando a proposta é distinta, sentem grandes dificuldades em transpor o conteúdo científico para a prática. Essa afirmação é verificada nas respostas dos alunos no questionário final, em que concordam plenamente que a metodologia empregada foi diferente do que os discentes estavam acostumados, tendo um escore médio de 4,34.

4.3 Análise dos relatórios

Após a resolução de cada problema, os estudantes eram questionados, retomando alguns conceitos científicos e relembrando os procedimentos adotados. Em seguida, produziam relatórios descritivos, narrando como realizaram a pesquisa e qual o caminho percorrido para encontrar as soluções.

No excerto abaixo, evidenciamos a opinião de um aluno com relação à resolução da situação-problema 1. Nesse excerto, parece que o estudante compreendeu o conceito matemático de potenciação e a relação de sequência.

> Ter raciocínio é o mais importante, ter paciência, ter calma e ter uma sequência de base 3, e sempre ir seguindo o mesmo ritmo se começar de uma forma termina sempre com outra. (Aluno A1).

Além de corroborar com o que Polya (1887-1985) argumenta em sua obra, ao explicar que o plano de resolução de um problema é muito mais fácil, porém o que mais se precisa é ter paciência. Na Figura 3, a aluna representou o triminó, construído em sala de aula, identificando o número de peças necessárias para cada iteração representando-os em forma de potência.

Figura 3 – Ilustração do Triminó construído na Resolução do P1

Fonte: Relatório Aluno A1.

Isso evidencia que o aluno A1 compreendeu conceitos matemáticos, visto que atividades envolvendo Geometria Fractal são de grande potencial para a revisão de conteúdos (GOMES, SALVADOR, 2012), abrangendo um dos propósitos desta atividade. Por outro lado, observa-se que os demais alunos não alcançaram esse raciocínio.

Na resolução da situação-problema 2, os alunos descreveram o que a pesquisadora havia sugerido como formato de começo do relatório. Podendo ser observado nos excertos abaixo em que os alunos A2, A4, A5 e A6 narram os instrumentos utilizados na construção da Curva de Koch.

> *Para desenhar um floco de neve é preciso de lápis, régua, borracha. Um triângulo tem três lados. (Aluno A2).*
>
> *Eu usei a régua para fazer o floco de neve, tivemos que usar o transferidor, marquei 60 graus de comprimento, marquei 21 cm dividi por 3 cm (Aluno A4).*
>
> *Hoje a gente aprendeu a fazer um floco de neve. Através de lápis, borracha e régua e explicações da professora. Um floco de neve tem em cada lado 21m na primeira parte, na segunda tem 60 cm na terceira 2,3, assim o floco de neve fica pronto (Aluno A5).*
>
> *Usa-se lápis, papel, borracha, régua e passador. Também cálculos, assim, pegamos e medimos de 21 cm e no segundo usamos 2,3 cm. (Aluno A6).*

Nota-se um amadurecimento no depoimento do Aluno A1, pois constatamos noções de sequências, frações, potenciação e ângulos.

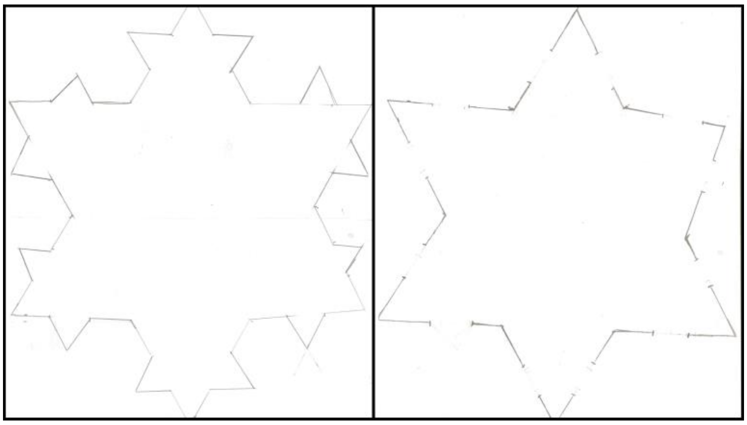
> *Sequência de triângulos sempre seguindo um lado igual ao outro com uma única diferença de* $\frac{1}{3^1} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^4}$*, mas também seguindo uma fração:* $1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$*. E também um grau o tamanho dos triângulos muda mas o grau não (Aluno A1).*

O aluno percebe que, mesmo o triângulo reduzindo seu segmento, o ângulo não varia, assim como a noção de sequência é mencionada ligada ao trecho: “uma única diferença”, ou seja, o padrão que gera a sequência quando em forma de potência altera somente os expoentes.

Entretanto, é evidente a dificuldade que os alunos possuem para descrever os conceitos matemáticos corretamente, em razão de igualar 1 à $\frac{1}{3}$, ou mesclar unidades de medidas como centímetros com metros, observamos a necessidade de melhorias no aspecto matemático das descrições. É necessário um acompanhamento dos professores nesse sentido para que seus alunos não construam suas próprias "técnicas" para descrever seus resultados.

Na Figura 4 é apresentado a resolução do problema 2, em que os alunos construíram a curva de Koch. Alguns estudantes apresentaram dificuldades com o uso da régua, como o seu posicionamento para medir determinado segmento. Assim como o manejo do transferidor, pois muitos estavam utilizando-o pela primeira vez, o que eles consideraram um pouco complicado no início da atividade.

Figura 4 – Floco de Neve construído pelos alunos



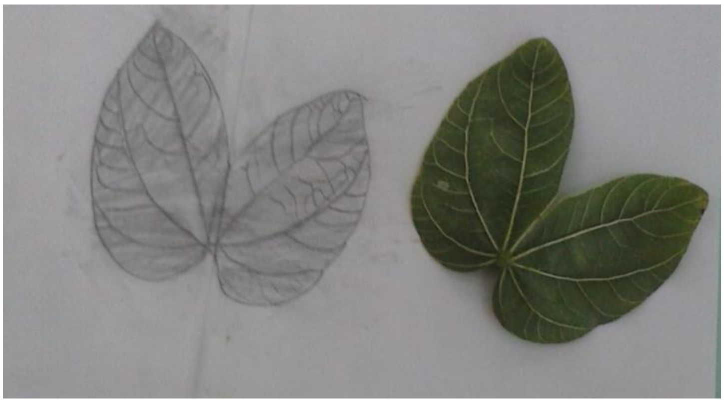
Fonte: Relatório dos Alunos A1 e A3

No relatório do problema 3, os discentes conseguiram construir o conceito de padrão, uma vez que não se tratava de padrões exatos, e sim aproximados, ou seja, aqueles que encontramos na natureza. Consequentemente, como argumentam Rinaldi e Menezes (2007, p. 9), "a Geometria Fractal pode ser ensinada, a princípio, como estímulo de aprendizagem", pois em uma vegetação comum, que antes não se destacava, passa ser objeto de estudo em uma aula de Matemática.

Como observamos no excerto do aluno A1, o padrão foi encontrado em uma vegetação comum em nossa região, popularmente denominada pata de vaca (Figura 5). O aluno A1 expõe que o padrão de três nervuras não se reproduz apenas em uma folha, e sim em todo o ramo da pata de vaca, como relata abaixo:

> *A folha se divide na árvore inteira com padrão de três nervuras e depois se divide em várias outras nervuras (Pata de Vaca) (Depoimento descritivo do Aluno A1).*

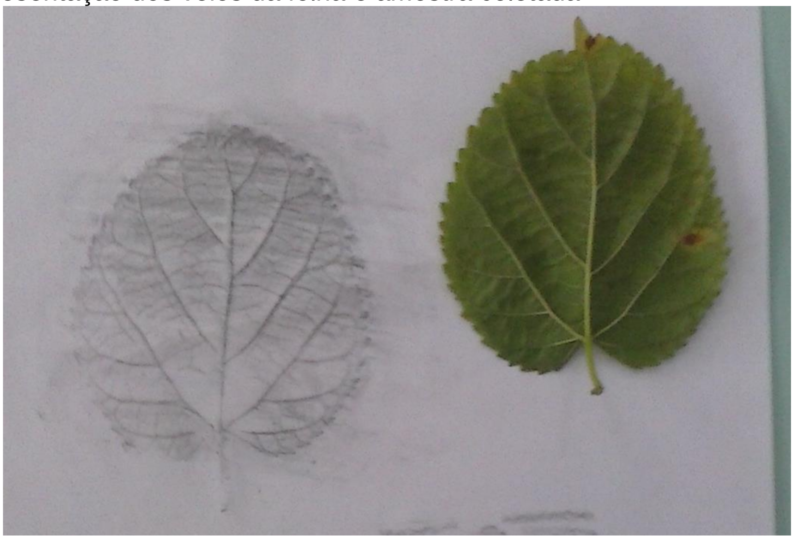
Figura 5 – Representação e amostra da vegetação denominada Pata de Vaca



Fonte: Acervo pessoal

Na Figura 6, o Aluno A2 identificou o padrão de seguimentos, ou melhor, os veios da folha dividem-se em dois, próximo à borda da folha, visualizado na Figura 6.

Figura 6–Representação dos veios da folha e amostra coletada

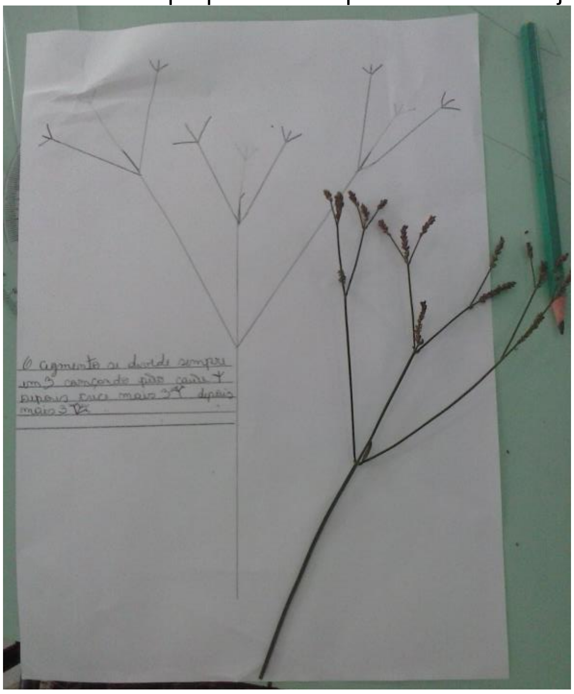


Fonte: Acervo pessoal

No excerto abaixo, o aluno A3 encontrou padrões em uma vegetação que sofre três bifurcações a cada nó. Foi solicitado que o mesmo conferisse a angulação entre os caules que não apresentaram algum padrão. É possível visualizar essas características na Figura 7, juntamente da descrição elaborada pelo Aluno A3:

> *O segmento se divide sempre em 3 começando pelo caule Ψ. Depois cresce mais 3 Ψ depois mais 3 Ψ (AlunoA3).*

Figura 7- Vegetação encontrada com propriedades aproximadas de objetos Fractais



Fonte: Acervo pessoal

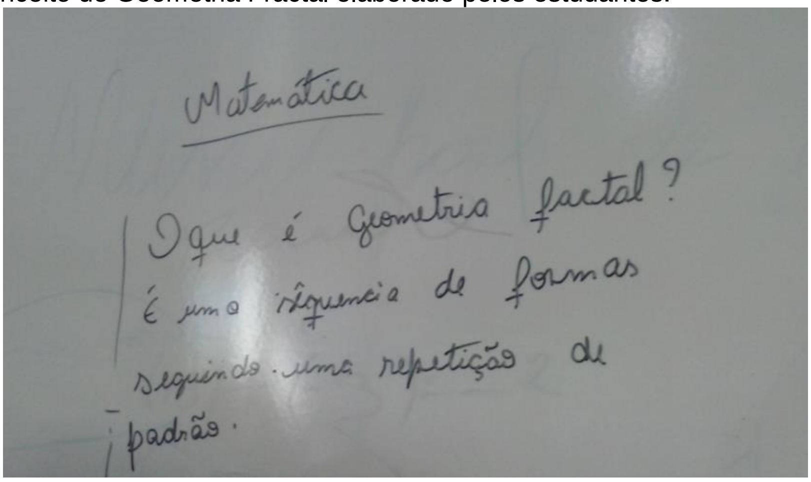
A resolução do problema 3 não é delimitada por números, e sim pela descrição de padrões aproximados, o que pode gerar equívocos quanto ao envolvimento de conceitos matemáticos. No entanto, Baier (2005) retrata que a área da Matemática prioriza demasiadamente aspectos quantitativos, considerando corretos apenas números como resultados. Entretanto, a matemática apresentada dessa forma cria uma postura de ciência pronta, excluindo o sentido da ciência que está em constante transformação. Nesse sentindo, aulas com cálculos repetitivos, carentes de significado, instalam o desânimo, tornando as aulas monótonas.

Ao analisar os relatórios, observa-se que os estudantes não possuem o hábito de descrever os resultados de seu aprendizado, pois manifestaram muitas dificuldades para relatar. Em muitos momentos perguntavam à pesquisadora como deveriam proceder para executar essa atividade. Em seu discurso, Echeverria e Pozo (1998) afirmam que o trabalho baseado na metodologia de resolução de problemas terá êxito se o professor utilizá-la rotineiramente, porque se o aluno não possui a rotina de resolver problemas, pouco adianta esperar a sua resolução.

Contudo, é possível verificar determinados aspectos que tornam os relatórios relevantes na avaliação da atividade e compreensão de alguns conceitos matemáticos que foram significativos para os discentes, como a verificação do nível de entendimento dos conceitos introduzidos com a resolução dos problemas, e o quanto é necessário que se faça mais este tipo de atividade para que eles possam aprimorar seus relatórios e que consigam descrever ainda mais suas experiências. O que consideramos mais importante é a visualização dos erros cometidos pelos discentes, sendo que se o professor realizar somente testes e provas não poderá acompanhar a evolução dos seus alunos e auxiliá-los com outras atividades para o enriquecimento de seus conhecimentos.

Ao finalizar as atividades, enquanto organizava a sala de aula, um grupo de alunos decidiu escrever no quadro (Figura 8) o que para eles seria o conceito de Geometria Fractal.

Figura 8 – Conceito de Geometria Fractal elaborado pelos estudantes.



Fonte: Acervo pessoal

A imagem acima, exibida ao final do trabalho, aponta que os discentes estão se apropriando do conceito, tendo registrado de forma espontânea sua definição na lousa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Temos o conhecimento que resolução de problemas está presente no ensino desde tempos remotos dos antigos egípcios, chineses e gregos. Contudo, a Educação Matemática é relativamente nova e o acúmulo de conhecimento sobre o ensino de Resolução de Problemas tem sido lento (ONUCHIC, 2013). Esse fato é observado quando os alunos afirmam que o trabalho foi muito diferente do que estavam habituados a realizar em sala de aula, evidenciando que o modo com que desenvolviam suas aulas de Matemática não se diferencia muito de aulas expositivas e dialogadas.

Por ser tratar de uma temática pouco abordada na Educação Básica, os estudantes não tinham o conhecimento sobre a Geometria Fractal e também em nenhum momento ouviram este termo. A Geometria fractal é um tema com um grande potencial para o trabalho em sala de aula, pois é possível trabalhar diversos conteúdos matemáticos, como potenciação, frações, sequências, progressão geométrica, número complexos, noções de padrão, entre outros, ao mesmo tempo em que explora diferentes áreas do conhecimento.

Apesar de constarem no plano de ensino os conceitos científicos aqui abordados, a maioria dos discentes apresentou numerosas limitações para exteriorizá-los. O grupo também não está habituado a realizar pesquisas. Esses pontos contribuíram como um dos obstáculos para o devido andamento do trabalho.

Entretanto foi possível observar que os discentes não apresentaram dificuldades no entendimento sobre noções de sequências, que era um conteúdo que eles não haviam estudado ainda. Em consequência deste fato repensa-se assim a ordem atribuída ao ensino de alguns conceitos matemáticos. Já nos relatórios é permitida a visualização dos erros cometidos pelos discentes, além da evolução dos mesmos. Pois o professor utilizando somente testes e provas, como avaliação, não poderá participar e auxiliar a evolução dos seus alunos.

Aqui é apresentada apenas uma forma de trabalho na Educação Básica, todavia a exploração da Geometria Fractal independe do nível de escolaridade, uma vez que é possível variar o nível de profundidade com que o conteúdo é abordado. Visto que foi possível encontrar uma maneira de tratar a temática Geometria Fractal de uma forma que os alunos compreendessem sua essência e conceitos matemáticos, não muito aprofundados, mas a ideia fundamental do que é um fractal e onde ele está presente.

A resolução do bloco de problemas exigiu uma demanda cognitiva maior do que os discentes estavam habituados a desenvolver, como: pensamento lógico, criatividade, expressão oral e escrita. Dessa forma, a pouca familiarização dos alunos com o processo dificultou o desenvolvimento das atividades. Nessa situação, aconselha-se um maior e mais frequente uso da metodologia de Resolução de Problemas, uma vez que a complexidade demanda atitudes inovadoras dos professores para o seu trabalho em sala de aula, e a Metodologia de Resolução de Problemas é uma das diversas alternativas que encontramos na área de Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ANASTASIOU, L. G. C; ALVES, L. P. **Processos de ensinagem na universidade**: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula. 10. ed. Joinville: UNIVILLE, 2012. 145p.

BAIER, T. O nexo “Geometria Fractal – Produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico. Tese (doutorado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2015.

______, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, vol. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 11 mai. 2015.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal**: para a sala de aula. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

CAMARA, Alexsandra. Para Ler com os Alunos uma Conversa Inicial Sobre a Geometria dos Fractais. **Educação Matemática em Revista**, v. 15, n. 29, p.15-18, mar. 2010.

CONTRERAS, L.C. La Resolución de Problemas: ¿una panacea metodológica?.**Enseñanza de lasCiencias**. v. 5, n. 1, p. 49-52, 1987.

DEWEY, J. (1938). **Experiência e Educação.** Tradução de Renata Gaspar-Petrópolis, RJ: Vozes. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

ECHEVERRIA, M. D. P. P.; POZO, J. I. **Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para aprender**. In: POZO, J.I. (org). A Solução de Problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

FLICK, U.; NETZ, S. Uma introdução à pesquisa qualitativa. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

GOMES, A. N.; SALVADOR, J. A. Dobras, Cortes e Fractais no Ensino Fundamental. Educação Matemática em Revista, v. 17, n.37, p. 5-13, nov. 2012.

GOUVEA, F.R; MURARU, C. **Fractais de bases caleidoscópicas**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife-PE.

LÜDCKE, M.; ANDRÉ, M. Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MOURA, E. O conceito fractal e sua presença pedagógica na educação básica. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

NIEDERMEYER, C.; KOEFENDER, C.; ROOS, L. Geometria Fractal e Ensino de Matemática. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí: UNISC, 2009.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Tese (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências do Porto, Janeiro, 2006.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?. **Espaço Pedagógico**, Passo Fundo (RS), v.20, n.1, p. 88-104, jan./jun. 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**. Rio de Janeiro; v. 55, p. 1-19, 2009.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de professores urgentes na licenciatura em matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 169 – 187.

POLYA, G. (1887-1985). **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZO, J. I. & CRESPO, M. A. G. **A aprendizagem e o ensino de ciências**: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico. Porto Alegre: Artmed, 2009.

POZO, J. I.; CRESPO, M. Á. G. A. A solução de Problemas nas Ciências da Natureza. In: POZO, J. I. (org). **A solução de Problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RINALDI, R. M; MENEZES, M. S.Geometria fractal: uma nova proposta para o ensino do desenho geométrico. Disponível em: < http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/GEOMETRIAFRACTAL.pdf>. Acesso em:08 ago. 2014.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos (SP), v. 6, n. 1, p. 299-311, mai. 2012.

SALIN, E. B. Geometria Espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis (SC), v. 08, n. 2, p. 261-274, 2013.

SCHOENFELD, A. Por que toda esta agitação acerca da Resolução de Problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P.**Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, p. 61 – 72, 1996. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

SOUZA, P. A.; YAMAMOTO, E. M. **A abordagem de fractais no ensino médio**. In: VII Jornada de Iniciação Científica, 2011. Disponível em: <http://www.mackenzie.com.br/fileadmin/Pesquisa/pibic/publicacoes/2011/pdf/mat/pamela_araujo.pdf>. Acesso em: 11 mai. 2015.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE, Lisboa, 2005.

ZULIANI, S. R. Q. A.; ÂNGELO, A. C. D.O querer aprender: aspectos relacionados ao conhecimento e controle do processo de aprendizagem num grupo de licenciatura em Física. In: Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. Atas do V Congresso de Ciências humanas, Letras e Arte, 2001.

APÊNDICE A – Questionário Inicial

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS AULAS PRÁTICAS DE MATEMÁTICA

É importante que você assine o questionário e expresse a sua opinião livremente. Em hipótese alguma os resultados do questionário terão influência na avaliação e nas notas desta disciplina. Nas folhas que seguem você, encontrará várias afirmativas que, de um modo geral, refletem algumas questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Algumas destas alternativas são favoráveis e outras, desfavoráveis. Ao lado de cada uma, existe uma escala na qual você deverá assinalar com um X a alternativa que melhor expressa sua opinião sobre a mesma. O código é o seguinte:

CP	CONCORDO PLENAMENTE
C	CONCORDO
NO	NÃO TENHO OPINIÃO OU INDECISO
D	DISCORDO
DT	DISCORDO TOTALMENTE
SEMPRE QUE POSSÍVEL, EVITE A ALTERNATIVA **NO**.	

Caso tiver algum comentário adicional, utilize o verso da folha de respostas.

Leia com atenção cada afirmativa antes de expressar a sua opinião.

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO:

Questões Pessoais	
Idade:	Sexo:

Quanto à disciplina de Matemática					
1- É uma disciplina de fácil compreensão.	CP	C	NO	D	DT
2- Exige muito raciocínio.	CP	C	NO	D	DT
3- Dedico esforço para acompanhá-la.	CP	C	NO	D	DT
4- Participo com interesse das aulas.	CP	C	NO	D	DT
5- É uma disciplina que contribui significativamente para a minha vida e para a sociedade.	CP	C	NO	D	DT

Quanto às Aulas Práticas					
6- Facilita a compreensão dos conceitos trabalhados nas teorias de matemática, facilitando o meu aprendizado.	CP	C	NO	D	DT
7- Estão de acordo com as minhas expectativas	CP	C	NO	D	DT
8- Sinto dificuldades em compreender as atividades práticas.	CP	C	NO	D	DT
9- Dedico total atenção ao desenvolvê-las.	CP	C	NO	D	DT
10- As aulas práticas estimulam soluções para os problemas teóricos propostos.	CP	C	NO	D	DT
11- Tenho a impressão que pouco contribui para a construção do conhecimento matemático.	CP	C	NO	D	DT
12- Gosto muito das aulas práticas.	CP	C	NO	D	DT
13- Sinto dificuldades em relacionar as práticas com as teorias.	CP	C	NO	D	DT
14- As aulas práticas facilitam a compreensão da matemática envolvida no meu cotidiano.	CP	C	NO	D	DT
15 – Gostaria que houvesse mais aulas práticas.	CP	C	NO	D	DT
Obs.:					

Quanto aos Relatórios das aulas práticas de Matemática					
16- Auxiliam na compreensão do que foi realizado.	CP	C	NO	D	DT
17- Tenho dificuldades na elaboração dos relatórios.	CP	C	NO	D	DT
18- Acho desnecessária a realização de relatórios após cada atividade prática.	CP	C	NO	D	DT
19- Os relatórios permitem uma melhor reelaboração dos conhecimentos apreendidos.	CP	C	NO	D	DT
Obs.:					

Auto avaliação					
20 - Considero-me um bom estudante, assumindo com responsabilidade as atividades práticas trabalhadas.	CP	C	NO	D	DT
21- Acredito que eu poderia ter dedicado mais tempo e atenção à disciplina.	CP	C	NO	D	DT
22- Tenho a impressão de que a cada aula aprendo novos conhecimentos.	CP	C	NO	D	DT

Quanto à Geometria Fractal					
23 – Estuda formas cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos e repetem-se infinitamente.	CP	C	NO	D	DT
24- Pode ser associado a diversas áreas do conhecimento.	CP	C	NO	D	DT
25- Conheço softwares que oportunizam a criação de Fractais	CP	C	NO	D	DT
26 – Está intimamente relacionado com diversos conteúdos matemáticos.	CP	C	NO	D	DT
27 – Visualizo a relação do conteúdo com outras áreas do conhecimento.	CP	C	NO	D	DT
Obs.:					

Desde já agradeço a sua colaboração: Jeruza Petrarca

APÊNDICE B – Questionário Final

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS AULAS PRÁTICAS DE MATEMÁTICA USANDO A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É importante que você não assine o questionário e expresse a sua opinião livremente. Em hipótese alguma os resultados do questionário terão influência na avaliação e nas notas desta disciplina.O questionário está dividido em duas partes, uma delas você assinalará conforme os critérios abaixo e a segunda descreverá sua opinião conforme as questões que seguem.

Nas folhas que seguem você, encontrará várias afirmativas que, de um modo geral, refletem algumas questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Algumas destas alternativas são favoráveis e outras, desfavoráveis. Ao lado de cada uma, existe uma escala na qual você deverá assinalar com um X a alternativa que melhor expressa sua opinião sobre a mesma. O código é o seguinte:

CP	CONCORDO PLENAMENTE
C	CONCORDO
NO	NÃO TENHO OPINIÃO OU INDECISO
D	DISCORDO
DT	DISCORDO TOTALMENTE
SEMPRE QUE POSSÍVEL, EVITE A ALTERNATIVA NO.	

Caso tiver algum comentário adicional, utilize o verso da folha de respostas.

Leia com atenção cada afirmativa antes de expressar a sua opinião.

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO:

Questões pessoais	
Idade:	Sexo:

Quanto aos problemas sugeridos:					
Foram de fácil compreensão.	CP	C	NO	D	DT
Os dados para a resolução dos problemas não necessitaram de pesquisas.	CP	C	NO	D	DT
A linguagem utilizada foi de difícil compreensão.	CP	C	NO	D	DT
Pesquisei muito para chegar em estratégias adequadas.	CP	C	NO	D	DT
O grupo compreendeu o problema, sem grandes dificuldades.	CP	C	NO	D	DT
Os problemas exigiram pouco raciocínio.	CP	C	NO	D	DT

Quanto às estratégias adotadas pelo grupo					
Foram eficazes na resolução do problema.	CP	C	NO	D	DT
Pouco contribuíram nas atividades experimentais.	CP	C	NO	D	DT
Quanto maior o número de estratégias adotadas, maiores as chances de obter sucesso na resolução do problema.	CP	C	NO	D	DT
Apenas uma estratégia é eficaz para a resolução do problema.	CP	C	NO	D	DT

As estratégias não ajudam em nada para resolução dos problemas.	CP	C	NO	D	DT

Quanto aos relatórios orais e escritos					
Auxiliaram na compreensão dos problemas sugeridos.	CP	C	NO	D	DT
Senti dificuldades em expor o meu pensamento para o grupo.	CP	C	NO	D	DT
Acho desnecessário a realização de relatórios orais após cada resolução de problemas	CP	C	NO	D	DT
Acho importante os relatórios descritivos, pois ajudam na compreensão do problema.	CP	C	NO	D	DT
Tenho dificuldades em descrever as estratégias adotadas para a resolução dos problemas.	CP	C	NO	D	DT
Os relatórios seguem o mesmo esquema que adotávamos antes desse trabalho.	CP	C	NO	D	DT

Quanto ao trabalho através da resolução de problemas					
Foi um trabalho de difícil compreensão.	CP	C	NO	D	DT
A resolução de problema não diferiu em nada ao trabalho que já estávamos realizando nesse ano letivo.	CP	C	NO	D	DT
Parece que pouco contribui para a minha aprendizagem.	CP	C	NO	D	DT
Senti muitas dificuldades em compreender o trabalho através de problemas experimentais.	CP	C	NO	D	DT
O tempo foi suficiente para realizarmos as atividades.	CP	C	NO	D	DT
Esse trabalho foi muito diferente do que estávamos habituados a realizar	CP	C	NO	D	DT
Percebi que esse trabalho pode ser significativo para uma melhor compreensão das aulas práticas	CP	C	NO	D	DT

Quanto à Geometria Fractal					
Estuda formas cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos e repetem-se infinitamente.	CP	C	NO	D	DT
Pode ser associado a diversas áreas do conhecimento.	CP	C	NO	D	DT
Conheço softwares que oportunizam a criação de Fractais	CP	C	NO	D	DT
Está intimamente relacionado com diversos conteúdos matemáticos.	CP	C	NO	D	DT
Visualizo a relação do conteúdo com outras áreas do conhecimento.	CP	C	NO	D	DT

Auto avaliação					
As atividades motivaram-me para a resolução dos problemas.	CP	C	NO	D	DT
Acredito que desperdicei o tempo dedicado ao trabalho sobre resolução de problemas.	CP	C	NO	D	DT
Tenho a impressão que a cada aula aprendi novos conhecimentos.	CP	C	NO	D	DT
Colaborei com o grupo, assumindo de forma responsável cada problemas proposto.	CP	C	NO	D	DT

Escreva as respostas de forma clara e objetiva:

1- Durante algumas aulas adotamos o trabalho de resolução de problemas para trabalhar conteúdos de Matemática. Essa metodologia foi significativa para o seu aprendizado? Comente.

____
____
____
____
____

2- As aulas práticas através de resolução de problemas tiveram algumas falhas? Descreva-as e comente:

____
____
____
____
____

3- Cite aspectos positivos desse trabalho comparando-o as atividades que já estavam habituados.

____
____
____
____
____