

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA - CAMPUS ITAQUI
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

JOSÉ LUCIAN BRITES PINTO

**ESTUDO DO MODELO DE
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE
BLACK SCHOLES**

**Itaqui
2022**

JOSÉ LUCIAN BRITES PINTO

**ESTUDO DO MODELO DE
PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE
BLACK SCHOLES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes

**Itaqui
2022**

— Pinto, José Lucian Brites

ESTUDO DO MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE
OPÇÕES DE BLACK SCHOLES / José Lucian Brites
Pinto. – setembro, 2022.

54 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Uni-
versidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemá-
tica, 2022.

“Orientação: Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes”.

I. Título.

JOSÉ LUCIAN BRITES PINTO

**ESTUDO DO MODELO DE PRECIFICA-
ÇÃO DE OPÇÕES DE BLACK SCHOLES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura em Matemática como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 17 de setembro de
2022.

Banca examinadora:



Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes
Orientador



Profa. Dra. Elisa Regina Cara
Universidade Federal do Pampa



Prof. Dr. Alex Sandro Gomes Leão
Universidade Federal do Pampa

Dedico este trabalho a minha amada esposa, Ariéli Lima Brites, por todo seu apoio e paciência durante o período que estive na graduação, pelos momentos que me ausentei para atender as minhas atribuições enquanto acadêmico. Ao meu querido filho José Henrique pelos momentos que deixei de me fazer presente. Ter vocês ao meu lado tornou as conquistas mais especiais e os momentos difíceis mais leves. Também dedico este trabalho ao meu amigo Delamar Nunes (in memoriam), pela nossa amizade que se iniciou na universidade e se estendeu para a vida.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo trazer uma abordagem sobre o mercado financeiro, com destaque para investimentos, já que atualmente no mercado existe uma série de instrumentos diversificados para se aplicar o capital desejado. No intuito de otimizar seus lucros e evitar prejuízos, o investidor pode utilizar de ferramentas para auxiliar em suas tomadas de decisão. Neste trabalho vamos analisar o modelo de precificação de derivativos Black Scholes, o qual define o preço dos contratos de opções a partir da solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Para este estudo faremos uma revisão bibliográfica a fim de descrever a obtenção da solução analítica para as equações do modelo Black Scholes, analisando as hipóteses que são utilizadas para a construção do modelo e suas implicações. Após, construímos uma ferramenta no software Excel para analisar o comportamento do modelo. Para esta análise utilizamos dados da B3 (Bolsa de Valores oficial do Brasil) para obtermos o preço de opções de compra e de venda de ativos. Diante dos resultados obtidos, foi possível entender essa ferramenta de precificação, bem como a sua importância, pois através de seu uso correto o investidor poderá proteger ou potencializar seus investimentos feitos no mercado.

Palavras-chave: Investimentos. Mercado de derivativos. Modelo de Precificação.

ABSTRACT

The present work aims to bring an approach to the financial market, with emphasis on investments, given that currently on the market there are a series of diversified instruments to apply the desired capital. In order to optimize their profits and avoid losses, the investor can use analytical tools to assist in their decision making. In this work we will analyze the model of pricing Black Scholes derivatives, it sets the price of options contracts from the solution of a second order partial differential equation. For this study, we will review the literature in order to describe how to obtain the solution. Afterwards, we built a tool in Excel software to analyze model behavior, for this analysis we use data from B3 (Oficial Stock Exchange of Brasil) to obtain the price of options puts and calls. In view of the results obtained, it was possible to understand this tool of pricing, as well as its importance, because through its correct use the investor can protect or improve your investments made in the market.

Keywords: Investments. Derivatives Market. Pricing Model.

SUMÁRIO

1 Introdução	8
2 Conceitos básicos	13
2.1 Conceitos Financeiros.....	13
2.2 Conceitos Matemáticos.....	16
2.2.1 Processos estocásticos.....	16
2.2.2 Processo Browniano.....	17
2.3 Modelo de Black e Scholes.....	19
2.3.1 Gregas	25
2.3.2 Volatilidade implícita	25
2.3.3 Considerações sobre distribuições de probabilidade	26
3 Metodologia	28
4 Resultados	29
4.1 Solução da Equação Diferencial Parcial de Black Scholes	29
4.2 Análise da influência hipóteses na solução obtida pelo modelo Black Scholes.....	38
4.3 Resultados e Discussões	39
5 Considerações Finais	51
Referências Bibliográficas	53

1 INTRODUÇÃO

O número de brasileiros que investem na bolsa de valores tem aumentado nos últimos cinco anos. Segundo o site da Bolsa de Valores de São Paulo (B3, novembro, 2021), o número de investidores pessoas físicas ativos na Bolsa cresceu 21,4% em 2017, atingindo 2,4 milhões. Esse número representava um recorde na história da Bolsa brasileira. Em 2018, o número de investidores pessoas físicas ativos na Bolsa aumentou ainda mais, chegando a 2,8 milhões, um aumento de 16,7% em relação a 2017. Entre os anos de 2019 e 2020 houve um crescimento de 70% no número de pessoas físicas que investiram através da bolsa e, em 2021, o número de investidores atingiu os 4 milhões. Atualmente, estima-se que o número total de investidores em renda fixa, renda variável e tesouro direto ultrapasse os 5 milhões ao longo do ano de 2022.

Mesmo com o crescimento nos últimos anos a população brasileira que investe através da bolsa de valores é pequena considerando um país de mais de 200 milhões de habitantes. Cita-se como comparação que nos Estados Unidos aproximadamente 55% dos habitantes invistem na bolsa, o que significa algo em torno de 160 milhões de pessoas, segundo dados da Organização Mundial de Valores Mobiliários (OMV).

O Banco Central do Brasil divulgou que em 2020 o saldo das aplicações na poupança somava R\$1,035 trilhão¹ mesmo com uma rentabilidade considerada baixa. Isso mostra que mesmo aqueles brasileiros que conseguem guardar algum dinheiro não estão atentos às diversas possibilidades de investimentos disponíveis no mercado, sejam elas dentro ou fora da bolsa de valores.

Existem diversas modalidades de investimento no mercado financeiro, o que é ótimo para investidores que desejam ampliar sua reserva financeira ou apenas guardar seus recursos mantendo seu poder de compra. Porém, diante de diversas alternativas é importante analisar cuidadosamente cada tipo de investimento e os riscos associados para que não surjam surpresas negativas em relação ao retorno esperado.

Realizar um investimento financeiro é aplicar recursos financeiros, ou seja dinheiro, em algum tipo de ativo com objetivo de obter um retorno. Podemos dizer que um ativo financeiro é tudo que tem valor e pode entrar em negociação no mercado financeiro, por exemplo, o direito que uma pessoa física ou jurídica possui sobre um patrimônio. Esse direito gera valor que pode ser ofertado como produto no mercado financeiro,

¹Conforme dados do Banco Central do Brasil divulgados pela revista Valor Investe. Disponível em: <<https://valorinveste.globo.com/produtos/renda-fixa/noticia/2021/01/07/brasileirosdeixam-r-1663-bilhoes-na-poupanca-em-2020-maior-volume-da-historia.ghtml>>. Acesso em: 21 jun. 2021

podendo ser negociado com outros agentes no mercado. Todo ativo financeiro possui, ligadas a ele, algumas características como liquidez, risco e rentabilidade esperada. Assim, é importante conhecer cada uma dessas características antes de realizar a aquisição de um ativo financeiro para que seja possível estimar quão atrativo este investimento é.

O que chamamos de Mercado Financeiro é o local onde são negociados diversos tipos de ativos financeiros. Talvez os ativos mais conhecidos da população geral sejam as ações, que fazem parte do que chamamos de “Mercado à vista”. Mas também existe o chamado “Mercado de Derivativos” o qual, apesar de um pouco mais desconhecido da população geral, é o que concentra os maiores volumes financeiros. Os derivativos surgiram da necessidade de negociar mercadorias com prazo de entrega e de pagamento futuros, mas hoje eles são utilizados para especulação, proteção de capital e para prover liquidez a alguns ativos reais como commodities (MOLERO; MELLO, 2021).

Existem diversos exemplos do uso cotidiano de derivativos como quando alguém assina um contrato de compra e venda de um imóvel. Neste contrato são definidas as formas de pagamento, as condições de entrega do imóvel e os prazos pertinentes ao negócio. Este é um exemplo de contrato de derivativo.

Quando uma indústria importa ou exporta produtos ela fica exposta à variação cambial entre o dólar e o real. A variação da cotação dessas moedas pode gerar benefícios ou prejuízos para a empresa. Então, é comum que seja feito contato com uma instituição financeira que possibilite “travar” a cotação da moeda para evitar grandes flutuações. Esse tipo de operação é feita através de contratos de derivativos que definem o valor e a quantidade de moeda estrangeira que a indústria terá direito em uma data futura, sendo assim outro exemplo de derivativo.

Por sua vez, alguns produtores rurais costumam vender parte de sua produção antes mesmo de realizarem a sua colheita para terem condições de financiar suas atividades. Esta venda é, na verdade, um contrato de derivativo onde o produtor se compromete a entregar uma certa quantidade de produto, a um preço previamente definido e em uma data futura.

A grande vantagem do uso de derivativos é a redução das incertezas com relação ao preço dos ativos. Assim, o derivativo é um tipo de contrato onde as partes pactuam a compra e a venda do chamado "ativo-objeto" ou "ativo-base" a um determinado valor, com entrega em determinada data. Outra vantagem importante dos derivativos é que o investimento realizado no momento da "assinatura" do contrato é, em geral, uma fração muito pequena do valor do ativo-objeto.

Conforme Molero e Mello (2021) o mercado de derivativos se divide em quatro tipos de contratos: termos, futuros, swaps e opções. Neste trabalho trabalhamos com o mercado de opções com objetivo de analisar o principal modelo de precificação de opções conhecido como Modelo de Black-Scholes. As opções podem ser utilizadas tanto por quem busca um ganho de capital quanto para proteção de investimentos, o que torna este tema bastante atrativo. Adicionalmente, a teoria matemática utilizada na precificação de opções está bastante estruturada e é pouco discutida ao longo de um curso de licenciatura, o que nos motiva a buscar um maior aprofundamento. A seguir fazemos uma breve revisão bibliográfica sobre o tema de precificação de opções antes de seguir no desenvolvimento do nosso trabalho.

O primeiro modelo matemático para apreçamento, ou precificação, de opções foi desenvolvido por Fischer Black e Myron Scholes ao longo da década de 1960. O artigo "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" foi publicado em 1973 e, após as contribuições de Robert C. Merton, o trabalho recebeu o prêmio Nobel de Economia em 1997. Desde então, muitos autores tem trabalhado em aprimorar o modelo Black Scholes ou em buscar modelos melhores.

Bertucci (1999), por exemplo, apresenta em seu trabalho a avaliação de modelos de volatilidade condicionada operados em conjunto ao modelo Black Scholes para precificações de opções. Esta avaliação é feita comparativamente aos procedimentos numéricos de volatilidades implícitas.

Seguindo esta linha Freitas (2001) mostra em seu estudo que o modelo de precificação de ativos Black Scholes tem apresentado falhas ao determinar o preço dos ativos. No trabalho é proposto pelo autor uma comparação entre o modelo Black Scholes e o modelo de Redes Neurais. Foram usados os dados de um período de 4 anos de uma ação brasileira, para verificar qual modelo representa melhor o valor de mercado da ação escolhida. O autor conclui, após a análise, que o modelo de Redes Neurais superou o modelo de Black Scholes ao retratar um preço mais próximo ao preço real de mercado.

Ainda, Silva (2012) faz um estudo do modelo de precificação de ativos, Black Scholes, nele é realizada uma análise do modelo e seu comportamento diante da volatilidade do mercado. Para a análise foram utilizados dados de ações de empresas brasileiras. Ao final de seu trabalho o autor conclui que o modelo, embora tenha ganhado o prêmio Nobel, é alvo de críticas, com suas falhas sendo apontadas por vários autores.

Já Toni e Coelho (2012) apresentam em seu trabalho uma análise da precificação de opções de compra sobre contratos futuros de determinado ativo com os seguintes mo-

delos: fórmula de Black (1976), Barone-Adesi e Whaley (1987), Bjerkstrand e Stensland (1993), binomial e trinomial. Também é realizada a construção de uma série do primeiro vencimento em aberto que reflita o maior volume de contratos negociados para o cálculo da volatilidade histórica.

Carvalho (2011) por exemplo, desenvolveu em seu trabalho um ajuste na fórmula de Black Scholes usando metodologia de análise assintótica e de homogeneização. Com o objetivo de avaliar os resultados encontrados comparando entre os valores de mercado e os preços encontrados após o ajuste do modelo.

Goto (2016), realizou em seu trabalho um estudo de robustez estruturada do modelo Black Scholes onde são questionadas algumas hipóteses assumidas na derivação do modelo. Nele o autor formula a equação de Black Scholes como uma EDO abstrata e transpõe para o contexto de operadores lineares.

Borges (2017) traz em seu trabalho um estudo sobre o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (IDI). Nele o autor diz que no mercado brasileiro estas opções são avaliadas através do modelo de Black (1976), porém a teoria que fundamenta esse modelo não está adequada ao apreçamento de derivativos de taxas de juros, por conta, sobretudo, da não observação de normalidade dos retornos do ativo objeto.

Por outro lado, Silva (2012) em seu trabalho traz uma análise de dois métodos para a precificação de ativos, o método de mínimos de Longstaff e Schwartz e o método de Monte Carlo com Cobertura de Risco De Bouchaud, Potters e Sestovic aplicados a opções americanas. Ao final da análise dos dados constatou-se que o método de Monte Carlo com Cobertura de Risco se mostrou mais atraente.

Da mesma forma, Beltrami, Loch e Silva (2010) tratam em seu trabalho da importância de modelos matemáticos para a estimar se o valor dado a determinado ativo está correto, ou seja, se não está havendo uma supervalorização ou subvalorização. Buscando determinar um modelo mais preciso, os autores usam de duas técnicas para estabelecer o novo modelo, a técnica de *Support Vector Regression* (SVR) e de rede neural (RN). Foram utilizados dados de 6 meses referentes às ações da Petrobras para determinar qual dos dois modelos demonstra valores mais próximos do valor do ativo no mercado. Ao final de seu trabalho o autor conclui que a técnica (SVR) superou a de Rede Neural representando um preço mais condizente com o mercado.

Porém, Ferreira (2013) ressalta a importância do uso de técnicas adequadas para comparar e avaliar esses modelos. Para isso em seu trabalho o autor utiliza dos *backtests*, ferramenta essa que consiste em comparar modelos de precificação de ativos e determinar

o modelo que melhor reflete o futuro cenário de um ativo, para assim prever futuras perdas em carteiras de ativos. Após essa comparação o autor constatou a baixa precisão dos modelos estudados quando o período a ser analisado é inferior ao de dois anos.

Leal (2016) considerando a importância de uma correta precificação de ativos, apresenta em seu trabalho um estudo sobre a influência da liquidez na precificação dos ativos e se a liquidez explica alguma parcela da variação do retorno dos ativos. Ao final de seu trabalho constatou-se que a liquidez explica a variação no retorno de ativo.

Como podemos verificar, embora o modelo Black Scholes tenha quase meio século, ainda temos muitos estudos sendo realizados sobre esse tema. Neste contexto apresentamos abaixo a justificativa e os objetivos de nosso trabalho

A relevância do trabalho proposto reside na importância do mercado de derivativos tanto no que diz respeito a sua utilização como instrumentos de investimentos financeiros quanto à sua utilização como proteção para investimentos prévios. Além disso, do ponto de vista teórico, este estudo permite a abordagem de conceitos relacionados à Matemática e à Estatística que, em geral, são pouco aprofundados ao longo de um curso de graduação. Logo, estamos tratando de um tema que possui uma base teórica bem desenvolvida e uma aplicação prática extremamente interessante.

Os objetivos do nosso trabalho são: Analisar e entender as hipóteses que derivam o modelo de Black Scholes. Deduzir a solução analítica do modelo do modelo de Black Scholes fazendo uso da fórmula Integral de Itô. Desenvolver um mecanismo computacional que permita calcular o valor das opções. Aplicar o modelo Black Scholes em dados reais para conhecer suas limitações.

Para atingir os objetivos propostos este trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2 iremos apresentar as definições e conceitos básicos da área de finanças e faremos a dedução do modelo de Black Scholes conforme proposto pelos próprios autores em 1973. No capítulo seguinte apresentaremos a metodologia utilizada ao longo do trabalho. O capítulo de resultados foi dividido em seções onde, inicialmente, apresentamos a solução analítica para o modelo Black Scholes, na segunda seção analisamos as implicações matemáticas e financeiras das hipóteses utilizadas para a construção modelo. Na última seção, apresentamos os resultados obtidos através dos dados reais da empresa Petrobras utilizando nossa implementação computacional do modelo. O penúltimo capítulo contém nossas considerações finais e encerramos o texto com as referências bibliográficas utilizadas ao longo do trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Conceitos Financeiros

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos da área financeira que serão pertinentes para entender as definições que serão abordadas ao longo do texto. Os conceitos são listados em ordem alfabética para facilitar a consulta e seu conteúdo foi baseado no que está disponível no site Infomoney (2022), o qual é uma das referências sobre a temática financeira.

Ações: São títulos emitidos por empresas, sociedades anônimas, e representam parcelas do capital social da empresa. Esses papéis são emitidos para levantar recursos, aumentar o capital social e para investimentos na empresa.

Arbitragem: São operações onde busca-se obter vantagem através da diferença de preços de um produto, que esteja sendo negociado em mercados diferentes, obtendo-se lucro pela compra de um ativo em um mercado onde o preço é menor e venda em um mercado onde este mesmo ativo encontra-se valorizado.

Ativo: São denominados ativos, os bens e toda propriedade de uma empresa ou pessoa. Todo patrimônio que possa gerar algum tipo de rentabilidade. Possuir dinheiro no banco, possuir um imóvel ou o estoque de uma empresa são exemplos de ativos.

Ativo Objeto: Ativo base em um contrato de opção, no caso de uma opção da Petrobras, o ativo que referencia essa opção é a ação da Petrobras.

Bolsa de Valores: Lugar onde são negociados títulos e valores mobiliários, também chamados de "papéis" emitidos por empresas. Nesse ambiente, os investidores têm o intuito de comprar ou vender esses ativos. No Brasil existe uma única empresa que atua como Bolsa a qual usa a sigla B3 (Brasil, Bolsa, Balcão). Esta empresa é, portanto, a Bolsa de Valores oficial do Brasil.

Carteira de Investimentos: Esse termo é usado para descrever o conjunto de investimentos dos quais um investidor é detentor. Uma carteira de investimento pode ser composta de vários instrumentos financeiros como ações, títulos de renda fixa entre outros tipos de investimentos.

Commodities: Termo utilizado para designar mercadoria padronizada e sem qualquer, ou com pouco, beneficiamento industrial. Para ser enquadrado como commodity o produto precisa atender os requisitos de ser uma matéria-prima produzida em larga escala, ser um produto negociado mundialmente, estar no estado bruto, pouco (ou nada) industri-

alizado e poder ser estocada em grande quantidade sem perder a qualidade. Sua cotação dentro do mercado se dá pela oferta e demanda internacional da mercadoria.

Data de Exercício: É a data de vencimento estipulada pelas partes ao firmar o contrato. Nesta data deve (ou pode) ser exercido pelo comprador o direito de comprar no caso de opções de compra ou vender no caso de opções de venda.

Derivativo: É um acordo firmado entre duas partes sobre um determinado bem ou direito chamado de Ativo-objeto. Neste contrato de compra ou de venda são estipulados, o preço, a data de exercício/liquidação do contrato, bem como demais condições definidas pelas partes.

Especulação: É o ato de negociar um ativo na expectativa de obter lucro no curto prazo, apostando na variação de preços no mercado. Assim, aquele que especula na posição comprada presume que o ativo deve valorizar, comprar uma ação e vender a um preço superior após alguns dias é um exemplo de especulação.

Liquidez: Este termo é usado para determinar a capacidade que um título tem de ser convertido em dinheiro sem a perda significativa de seu valor. No mercado financeiro pode-se considerar ainda que a liquidez de um ativo corresponde ao volume financeiro médio diário desse ativo negociado na bolsa. Quanto maior for o número de investidores atuando sobre esse ativo maior será a liquidez do mesmo.

Mercado a Termo: Neste tipo de negociação as partes firmam um acordo de compra ou venda de um produto sem desembolso imediato, nele é acertado o prazo, quantidade e qualidade desse ativo (mercadoria). Os prazos normalmente utilizados são de 30, 60, 90 ou 180 dias.

Mercado à vista: No mercado à vista o preço do ativo é determinado através da oferta e demanda do momento, ao negociar um ativo no mercado à vista o comprador realiza o pagamento e o vendedor entrega o ativo no próximo dia útil após a ordem ser executada.

Mercado Financeiro: É o local onde investidores se encontram para negociar produtos financeiros como ações, fundos de investimentos e títulos públicos. O mercado financeiro possui em sua estrutura órgãos do governo, bancos, corretoras, instituições de pagamento, empresas e investidores individuais.

Mercado Futuro: O mercado futuro é similar ao mercado a termo, a diferença é que no mercado futuro o comprador pode cumprir o contrato ou optar por vendê-lo. Este instrumento é utilizado como ferramenta de proteção, diante de cenários de grande volatilidade.

Modelo de Black Scholes: é um modelo utilizado para precificar opções do tipo europeia, esse modelo ajuda os investidores a estimar o preço de uma opção, auxiliando na tomada de decisão se vale a pena fazer o seu investimento em determinada opção.

Opção: É um contrato que dá ao comprador o direito sobre determinado ativo-objeto, o detentor pode comprar ou vender um ativo em uma data determinada e a um preço definido chamado de preço de exercício (ou *strike*). Assim, existem dois tipos de opções: Opções de compra que dão o direito de comprar o ativo-base e as opções de venda que dão o direito de vender o ativo-base.

Opção Americana: Neste tipo de contrato é permitido o exercício, a qualquer momento, do direito de compra ou venda do ativo em questão, da data de efetivação do acordo até a data de exercício.

Opção de Compra (call): Este contrato permite ao seu detentor o direito de comprar determinado ativo em uma data estipulada, por um preço definido no presente.

Opção de Venda (put): Este contrato permite ao seu detentor o direito de vender determinado ativo em uma data estipulada, por um preço definido no presente.

Opção Europeia: Neste tipo de contrato é permitido o exercício do direito de compra ou de venda do ativo em questão, somente na data de vencimento.

Preço de Exercício: É o preço da negociação que é definido no momento que se firma um contrato. No caso de opções, o detentor da opção na data de vencimento do contrato exerce o seu direito de negociar o ativo-objeto no preço de exercício (comprar no caso de opções de compra e vender no caso de opções de venda).

Precificação de Opções: É o processo de estimar o preço (prêmio) de uma opção através de modelos matemáticos, um exemplo de ferramenta utilizada para essa prática é o Modelo de Black Scholes.

Prêmio da Opção: É o preço de uma opção, que deve ser pago pelo comprador a quem está vendendo uma opção, após a compra da opção o detentor adquire o direito de compra ou venda do ativo-objeto. Podemos entender o prêmio como sendo o valor gasto para firmar o contrato com a outra parte.

Renda Fixa: Estão englobados como renda fixa os investimentos que possuem rendimentos já definidos no ato da aplicação. Nessa modalidade de investimento o investidor fica conhecendo o prazo e taxas que irão incidir sobre o valor aplicado.

Renda Variável: Estão englobados como renda variável os investimentos cujos rendimentos não podem ser determinados no momento da aplicação. Nessa modalidade de investimento o retorno é imprevisível com a sua rentabilidade oscilando junto com as

condições de mercado.

Tesouro Direto: Plataforma do Governo Federal onde são negociados títulos públicos federais. Nesse tipo de investimento o investidor é responsável pela negociação. Nessa modalidade de investimento, ao comprar um título o investidor está emprestando dinheiro ao governo.

Volatilidade: Volatilidade é resultado da intensidade e frequência com que acontecem as movimentações, variação de preço de um ativo, dentro de um determinado período de tempo. Quanto mais variar o preço de um ativo, o risco de ganhar ou perder dinheiro tende a aumentar.

Volatilidade Histórica: É a volatilidade que já se conhece, calculada através da análise das variações de preço de um ativo-objeto em um determinado intervalo de tempo, usada para estimar a volatilidade futura.

Volatilidade Implícita: Pode ser concebida como a estimativa da volatilidade futura, pode ser obtida através do cálculo da volatilidade histórica e outras variáveis, preço adotado no mercado para o ativo analisado.

2.2 Conceitos Matemáticos

As definições, proposições e teoremas citados nessa seção foram extraídos, em sua maioria de Aiube (2013). Quando for necessário trazer conceitos tratados em outras bibliografias faremos um destaque especial.

Para chegar à dedução do modelo Black Scholes para precificação de opções precisamos inicialmente definir o que são processos estocásticos.

2.2.1 Processos estocásticos

Definição 2.2.1 (Série temporal) *Série temporal é qualquer conjunto de observações ordenado no tempo. A abordagem da análise pode ser no domínio do tempo com modelos paramétricos ou no domínio da frequência com modelos não paramétricos.*

As séries temporais podem ser classificadas em:

- discretas - quando o conjunto de observações for finito ou infinito enumerável;
- contínuas - quando o conjunto for infinito não enumerável;

- estocásticas - quando houver um componente aleatório;
- determinística - quando não houver componente aleatório e o modelo puder ser definido por funções determinísticas;
- multivariadas - quando a série temporal é representada por um vetor;
- multidimensional - quando t assume dimensão superior a 1.

Definição 2.2.2 (Processo estocástico) *Um processo estocástico X é uma coleção de variáveis aleatórias $(X_t)_{t \in T}$ definidas em algum espaço Ω e indexadas por um subconjunto T de \mathbb{R} .*

Se o conjunto ao qual está indexada é um conjunto enumerável, dizemos que X é um processo estocástico do tipo discreto e escrevemos $T(X_n)_{n=1}^{\infty}$. Sendo $T \in \mathbb{R}$, é útil a consideração de que T é o conjunto $[0, \infty)$ para a representação do caso em que o indexador é o tempo. O valor de X está indexado ao instante de tempo t e as possíveis realizações Ω .

Estas realizações representam os estados da natureza. Assim, para um instante de tempo t fixo a variável aleatória é

$$X_t = X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (1)$$

Para um determinado estado da natureza, $\omega \in \Omega$, a variável aleatória é uma função do tempo

$$X_t = X_t(\omega), \quad t \in [0, \infty). \quad (2)$$

A função $X_t(\omega)$ é denominada realização, trajetória ou caminho do processo de X . Adotaremos a notação simplificada X .

2.2.2 Processo Browniano

Agora que já vimos a definição de processo estocástico vamos à definição de processo Browniano. Mas, antes precisamos definir o que são processos de incrementos estacionários e processos independentes.

Definição 2.2.3 *Seja $X_t, t \in [0, T]$ um processo estocástico. X_t é dito ser um processo com incrementos estacionários se*

$$X_t - X_s \stackrel{\circ}{=} X_{t+h} - X_{s+h}, \quad (3)$$

para todo $t, s \in [0, T]$ e $t + h, s + h \in [0, T]$.

A igualdade $\stackrel{\circ}{=}$ significa igualdade em distribuição, ou seja, os processos distribuídos em ambos os lados dessa igualdade possuem a mesma distribuição.

Definição 2.2.4 *Seja $X_t \in [0, T]$ um processo estocástico X_t . Este é dito de incrementos independentes se para todo $t_1 < t_2 \dots < t_n$, com $n > 1$, os valores*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad (4)$$

forem variáveis aleatórias independentes.

O processo Browniano padrão, também chamado de processo padrão de Wiener, é um importante conceito para o desenvolvimento da teoria de processos estocásticos e conseqüentemente para a construção da teoria de finanças em tempo contínuo. Dadas as definições anteriores podemos seguir com a definição de processo Browniano, conforme Aiube (2013).

Definição 2.2.5 *(Processo Browniano Padrão) Um processo estocástico B_t , $t \in [0, \infty)$ é dito Browniano padrão ou processo padrão de Wiener se:*

- (i) *inicia em zero, com $B_0 = 0$;*
- (ii) *tem incrementos estacionários e independentes;*
- (iii) *para todo $t > 0$, $B_t \sim N(0, t)$;*
- (iv) *as realizações são contínuas, sem saltos.*

As variáveis aleatórias $B_t - B_s$ e B_{t-s} possuem distribuição $N(0, t - s)$ para $s < t$. Este fato decorre da estacionariedade dos incrementos. Isto é, $B_t - B_s$ tem a mesma distribuição que $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$ que é normal com média zero e variância $t - s$. Conforme destaca Aiube (2013), a identidade em distribuição $B_t - B_s \stackrel{\circ}{=} B_{t-s}$ não significa que os valores sejam iguais. Em geral $B_t - B_s \neq B_{t-s}$. Isto significa que não podemos substituir $\stackrel{\circ}{=}$ por $=$.

Definição 2.2.6 *O processo aritmético Browniano, ou processo aritmético Browniano com drift, é definido por $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ para $t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, $X_0 = x$ e $\mu \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.2.7 *O processo geométrico Browniano é definido por $X_t = x \exp(\mu + \sigma B_t)$ para $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ e $X_0 = x$.*

Nas definições 2.2.6 e 2.2.7, os parâmetros μ e σ definem a tendência (drift) e a volatilidade do processo, respectivamente.

2.3 Modelo de Black e Scholes

Neste trabalho, vamos analisar o modelo de precificação de opções, do tipo Europeia¹, desenvolvido por Black e Scholes em 1973. Vamos derivar esse modelo seguindo a metodologia clássica proposta por estes autores. Assim, o modelo define o preço dos contratos de opções a partir da solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Existem outras formas de chegar ao mesmo resultado usando conceitos mais sofisticados os quais não serão estudados pois fogem ao escopo deste trabalho.

Definição 2.3.1 (Opção europeia) *Um contrato de uma opção financeira do tipo europeia fornece ao seu proprietário o direito, mas não a obrigação, de comprar/vender um ativo (ativo objeto ou ativo base ou subjacente) por um preço K (preço de exercício) em uma data especificada T (data do vencimento).*

O proprietário do contrato de opção adquire este direito em um instante t pagando um prêmio que é preço da opção de compra c_t ou da opção de venda v_t . Em $t = T$ (data de exercício ou vencimento do contrato) ele irá decidir se adquire ou vende a ação pelo preço K definido no contrato (preço de exercício).

Denominaremos o valor deste contrato no vencimento pela função Λ_T . A opção de compra será vantajosa para o seu proprietário se no vencimento $X_T > K$. A opção de venda será vantajosa se ocorrer o inverso, $K > X_T$. Existem várias formas de escrever o valor de uma opção no vencimento. Para uma opção de compra é usual depararmos-nos com a seguinte notação

$$\Lambda_T = \max(X_T - K, 0) = (X_T - K)^+ = (X_T - K)_{X_T > K}^1. \quad (5)$$

Ao longo do texto usaremos, preferencialmente, a notação $(X_T - K)^+$. No vencimento ($t = T$) as opções de compra e venda valem $\Lambda_T = (X_T - K)^+$ e $\Lambda_T = (K - X_T)^+$, respectivamente.

A questão natural que surge é saber qual o valor de uma opção (compra ou venda) em um instante $t < T$, ou seja, precisamos apreçar o contrato de opção definindo o seu preço $c = f(X_t, t)$. Em outras palavras qual o preço justo de um contrato deste tipo? Existe algum modelo que permita definir este preço justo?

Estas questões estavam na mente dos pesquisadores que se dedicavam muito a

¹É comum as opções serem classificadas em dois tipos: Opções Americanas que podem ser exercidas a qualquer momento até seu vencimento e Europeias que podem ser exercidas apenas na data do vencimento.

encontrar a resposta para o problema. Por outro lado, os mercados de opções estavam sendo organizados, e apesar das negociações destes contratos serem incipientes havia um grande interesse em modelos que pudessem expressar o preço justo. Black e Scholes (1973) e Merton (1973) foram os responsáveis diretos pelas fórmulas de apreçamento que se tornaram famosas a partir da publicação de seus artigos.

Considere que o preço à vista de uma ação seja X_t . O preço de uma opção de compra sobre esta ação é $c = f(X, t)$, o contrato tem maturidade T e o preço de exercício é K . Considere também as seguintes hipóteses:

- (i) a taxa livre de risco r é constante durante todo período de maturação;
- (ii) a opção de compra é do tipo europeia;
- (iii) o ativo subjacente não paga dividendos durante a maturidade da operação;
- (iv) o ativo subjacente segue um processo geométrico Browniano, isto é, a distribuição dos preços é lognormal²
- (v) não há custos de transação nem impostos, os ativos são infinitamente divisíveis e as transações ocorrem continuamente com liquidez ao longo da vida da opção;
- (vi) a volatilidade é constante durante todo o período de maturação;
- (vii) o mercado não admite a possibilidade de arbitragem³.

Muitas destas considerações podem ser relaxadas e ainda pode-se obter uma solução analítica para o modelo. Outras, tais como o tipo do processo estocástico seguido pelo ativo subjacente quando alterado, podem ter um custo adicional implicando, em geral, em soluções numéricas para o modelo. Por esse motivo que um dos objetivos deste trabalho é analisar a influência de cada uma dessas hipóteses na solução obtida por este modelo.

Paridade entre opções de compra e venda: Consideremos as hipóteses (i), (ii) e (iii), também que em t ($0 \leq t \leq T$) o preço à vista do ativo subjacente seja X_t e as opções européias de compra e venda, com preço de exercício K e vencimento em T , valham c_t e v_t , respectivamente. Então será válida a relação

$$X_t + v_t = c_t + Ke^{-r(T-t)}. \quad (6)$$

A equação (6) estabelece que o valor de uma ação mais uma opção de venda equivale a uma opção de compra mais o valor presente do preço de exercício. Isto é, caso em

²De maneira resumida é possível dizer que uma variável aleatória X tem a distribuição lognormal quando o seu logaritmo $Y = \log(X)$ tem distribuição normal. Uma explicação mais detalhada sobre esta hipótese será dada na seção 2.3.3.

³Em termos econômico-financeiros, a arbitragem traduz-se na compra de uma determinada moeda, mercadoria ou outro valor num determinado mercado, combinada com a sua venda simultânea num outro mercado a um preço superior, fato que conduz a um lucro para quem a realiza.

um mercado, haja somente negociação de opções de compra, pode-se construir sinteticamente uma opção de venda de mesmo preço de exercício e maturidade. Da mesma forma o inverso é verdadeiro para opções de venda, podendo-se obter sinteticamente opções de compra.

Considerando um processo estocástico geométrico Browniano para o preço do ativo subjacente X_t é:

$$X_t = X_u e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-u) + \sigma B_t - u}, \quad t \geq u \quad (7)$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ e $B = B_t, (t \geq 0)$ é o Browniano.

A equação (7) equivale à seguinte forma diferencial, ou mais apropriadamente é a solução da seguinte EDE (equação diferencial estocástica):

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t \quad 0 \leq u \leq t < T. \quad (8)$$

O valor da opção de compra europeia é função do preço do ativo $X_t = x$ e do tempo corrente, isto é, $c = f(x, t)$. No vencimento, quando $t = T$, o valor da opção é o máximo entre o valor da ação e o preço de exercício K : $c(X_T, T) = (X_T - K)^+$ ou equivalentemente $c(X_T, T) = \max(X_T - K, 0)$. Na derivação que se segue iremos omitir o subscrito "tempo" das variáveis.

Portanto, temos $c = f(x, t)$, e usando a fórmula de Itô para calcular dc , temos

$$dc = \frac{\partial c}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} d[X, X](t). \quad (9)$$

A equação acima significa que a variação do preço da opção de compra dc em um pequeno intervalo de tempo dt é dada pelo segundo membro. Substituindo dX da equação (8), nesta última equação, obtemos

$$\begin{aligned} dc &= \frac{\partial c}{\partial x} (\mu X dt + \sigma X dB) + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dt \\ &= \left(\mu X \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) dt + \sigma X \frac{\partial c}{\partial x} dB. \end{aligned} \quad (10)$$

Esta equação representa a dinâmica de evolução do valor da opção de compra. Considere a formação de um portfólio com a compra de Δ ações ao preço X e a venda de uma opção ao preço c . O valor Π deste portfólio será

$$\Pi = \Delta X - c. \quad (11)$$

O diferencial do valor do portfólio Π é dado por

$$d\Pi = \Delta dX - dc. \quad (12)$$

Substituindo na equação (11) os valores de dX e dc das equações (8) e (9), respectivamente, obteremos

$$d\Pi = \Delta\mu X dt + \Delta X \sigma dB - \left(\mu X \frac{\partial c}{\partial X} + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) dt - \sigma X \frac{\partial c}{\partial x} dB. \quad (13)$$

Agrupando os termos temos

$$d\Pi = \left(\Delta\mu X - \mu X \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) dt + \left(\Delta\sigma X - \sigma X \frac{\partial c}{\partial x} \right) dB. \quad (14)$$

A equação acima representa a dinâmica de evolução do valor do portfólio. Observe no segundo membro a presença da tendência (coeficiente de dt) e a presença do termo estocástico (coeficiente de dB) que confere a aleatoriedade a $d\Pi$.

Para eliminar esta aleatoriedade do valor do portfólio deve-se fazer o coeficiente de dB nulo na equação (13), isto é,

$$\Delta X \sigma - \sigma X \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Levando o resultado de Δ , encontrado acima, na equação (14), temos

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\mu X \frac{\partial c}{\partial x} - \mu X \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) dt \\ &= \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Ajustando a quantidade de ações Δ do portfólio neste valor $\Delta = \frac{\partial c}{\partial x}$, vimos acima que o portfólio torna-se sem risco. Por outro lado, um ativo livre de risco deve retornar a taxa livre de risco para que não haja possibilidade de arbitragem, como foi suposto acima. Então o retorno deste portfólio sem risco $\frac{d\Pi}{\Pi}$ deve ser igual rdt , onde r é a taxa de retorno do ativo livre de risco, logo:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt \Rightarrow d\Pi = r\Pi dt. \quad (17)$$

Substituindo as equações (16) e (11) na equação (17), obteremos

$$\left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) dt = r(\Delta X - c)dt. \quad (18)$$

Resultando na seguinte equação diferencial parcial (EDP)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rX \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = rc. \quad (19)$$

Esta é a equação diferencial parcial do modelo de Black e Scholes (1973). Podemos ainda escrevê-la na forma abreviada onde os subscritos indicam as derivadas parciais

$$c_t(x, t) + rX c_x(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 c_{xx}(x, t) = rc(x, t). \quad (20)$$

Ainda é comum escrevê-la da forma do operador diferencial de Black e Scholes como $\mathcal{L}_{BS}(c) = 0$ onde

$$\mathcal{L}_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + r \left(X \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (21)$$

As condições de contorno necessitam ser estabelecidas para que se proceda a sua solução. Note que, se o preço da ação X_t atinge zero, a equação (6) mostra que o valor permanecerá em zero e conseqüentemente a opção nada valerá. Para sermos consistentes com a transformação logarítmica que será utilizada na solução, usaremos apenas o fato de que $X_t \rightarrow 0$. Temos então que

$$\lim_{x \rightarrow 0} c(x, t) = 0. \quad (22)$$

Se o preço da ação X_t atingir um valor muito elevado, o preço da opção será pouco afetado pelo preço de exercício (que se tornará pequeno em relação ao preço do ativo) e naturalmente o valor da opção tenderá ao preço da ação, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x, t) = X. \quad (23)$$

No vencimento, quando $t = T$, tem-se a condição terminal, $c(X_T, T) = (X_T - K)^+$. Mais rigorosamente escrevemos

$$\lim_{t \rightarrow T} c(x, t) = (X_T - K)^+, \quad (24)$$

pois em $t = T$ o termo d_1 que aparecerá logo abaixo não estará definido.

A EDP (20) é do tipo parabólica, para $x > 0$, e é redutível à forma clássica da equação de difusão do calor. A sua solução fornece o preço da opção de compra, temos pois

$$c(X_t, t) = X_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad 0 \leq t < T \quad X_t > 0, \quad (25)$$

$$\text{onde} \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad e \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

sendo $N(\cdot)$ a distribuição normal acumulada.

Adotando as mesmas etapas anteriores pode-se deduzir a EDP para uma opção de venda obtendo-se

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rX \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rv. \quad (26)$$

A equação que fornece o apreamento de uma opção de venda pode ser obtida pela substituição da equação (25) na equação (6), que estabelece a paridade entre opções de compra e venda. Resolvida esta equação obtém-se

$$v(X_t, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - X_t N(d_1). \quad (27)$$

2.3.1 Gregas

Após apresentarmos a dedução do modelo Black Scholes para precificação de opções é comum definir as “**gregas**”. Essa nomenclatura está associada aos termos da equação do modelo que proporcionam importantes informações acerca dos riscos relativos a operações com derivativos.

Aiube (2013) denomina de gregas as sensibilidades de c_t e v_t (isto é, o valor da opção de compra e da opção de venda, respectivamente) em relação às variáveis do modelo.

A sensibilidade mais relevante é chamada de **delta** e trata da variação do preço da opção em relação ao preço do ativo subjacente: $\Delta = \frac{\partial c}{\partial X} = N(d_1)$. Ela mede o quanto varia o preço da opção para \$1 (uma unidade monetária) de variação no ativo subjacente. Como o comportamento do preço de uma opção não é linear com o preço do ativo subjacente, o Δ também varia com o preço X .

Assim, a sensibilidade da variação de Δ com o preço do ativo é denominado de **gama**: $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial X} = \frac{\partial^2 c}{\partial X^2}$. O gama representa a variação do delta para alterações de \$1 no preço do ativo.

Seguindo essa lógica, a sensibilidade do preço da opção em relação à volatilidade é denominada **vega**: $v = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$. O vega representa a variação do preço da opção para alteração de 0.01 (1%) na volatilidade.

Em geral o preço da opção de compra decresce à medida que se aproxima o vencimento. A sensibilidade do preço da opção em relação ao tempo é denominado de **theta**: $\Theta = \frac{\partial c}{\partial t}$.

Por fim, a sensibilidade em relação à taxa livre de risco r é denominada de **rho**: $\rho = \frac{\partial c}{\partial r}$.

Pode-se derivar analiticamente as expressões para cada uma das gregas a exemplo do que foi feito para o delta Δ da opção de compra. No capítulo de resultados iremos analisar o comportamento desses termos durante certo período de tempo para dados de opções da empresa Petrobras.

2.3.2 Volatilidade implícita

Para o cálculo do preço de uma opção vamos usar de dados históricos, e através desses dados calculamos a volatilidade histórica (ou simplesmente volatilidade) do ativo.

Porém, o valor da volatilidade que o mercado atribui para o preço de uma opção não é conhecido. Posto isto, o conceito de **volatilidade implícita** é usado para descobrir que volatilidade o mercado atribuiu a uma opção em determinado momento. Segundo Molero e Mello (2021), podemos entender a volatilidade implícita como uma expectativa da volatilidade do ativo—objeto refletida nos preços das opções negociadas.

Aiube (2013) retrata em seu trabalho que o cálculo do preço de uma opção europeia em um instante t é função do valor da ação em t , do preço de exercício K , do tempo remanescente para o vencimento $\tau = T - t$, da taxa livre de risco r e da volatilidade σ . Todas estas variáveis são facilmente observadas, exceto a volatilidade⁴ que não é observada diretamente. Portanto, a volatilidade precisa ser estimada e seu valor acaba influenciando o resultado final do modelo. No capítulo de resultados iremos fazer simulações com diferentes estimativas para a volatilidade de um ativo real (no caso as opções da empresa Petrobras) para analisar sua influência no preço de suas opções.

2.3.3 Considerações sobre distribuições de probabilidade

Um dos principais resultados da teoria das probabilidades, para o caso de variáveis aleatórias independentes, é o Teorema Central do Limite cujo enunciado diz o seguinte (BUSSAB; MORETTIN, 2002):

Teorema 2.3.1 (Teorema Central do Limite) *Seja uma amostra aleatória simples (X_1, X_2, \dots, X_n) de tamanho n dada a partir de uma população com média μ e variância σ^2 finita. A medida que n cresce, a distribuição amostral da média,*

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (28)$$

aproxima-se de uma distribuição normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

No caso da distribuição lognormal existe um resultado análogo ao Teorema Central do Limite, porém é necessária uma adaptação. A distribuição normal surge quando são somadas várias variáveis aleatórias independentes, como ocorre na equação (28). Por outro lado a distribuição lognormal surge a partir do produto de várias variáveis aleatórias independentes, desde que sejam sempre positivas.

⁴Volatilidade, na área financeira, é uma medida de dispersão dos retornos de um título ou índice de mercado. Quanto mais o preço de uma ação varia em um período curto de tempo, maior o risco de se ganhar ou perder dinheiro negociando esta ação - portanto, a volatilidade é uma medida de risco.

No caso financeiro, supõe-se que o preço futuro de um ativo decorre do efeito de vários pequenos ajustes independentes, ou seja, o preço no instante n é obtido a partir do preço em um instante inicial por meio de um produto, como descrito abaixo:

$$P_n = P_0 \cdot (1 \pm \varepsilon_1) \cdots (1 \pm \varepsilon_n), \quad (29)$$

sendo P_n o preço do ativo no instante n , P_0 o preço inicial do ativo e os valores $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ são pequenos incrementos que podem ser positivos ou negativos, mas sempre obedecendo a seguinte restrição $\varepsilon_i \in (-1, 1) \forall i \in \mathbb{N}$.

Aplicando o logaritmo à equação (29), vemos que $\log(P_n)$ é a soma de variáveis aleatórias independentes, o que implica que pode ser aproximada por uma distribuição normal e, conseqüentemente, P_n pode ser aproximado por uma distribuição lognormal.

Essas considerações são importantes para que possamos entender melhor as hipóteses que foram utilizadas na dedução da equação do modelo Black Scholes. Neste ponto, consideramos que todos os conceitos matemáticos e financeiros necessários para atingir nossos objetivos já foram citados. Assim, no próximo capítulo iremos detalhar a metodologia que foi utilizada no trabalho para que possamos, na sequência, apresentar os resultados.

3 METODOLOGIA

A pesquisa realizada neste trabalho foi do tipo exploratória, bibliográfica e qualitativa. Conforme, Gil (2017) pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Seu planejamento tende a ser bastante flexível, pois interessa considerar os mais variados aspectos relativos ao fato ou fenômeno estudado. Portanto, utilizamos a linha exploratória como forma de buscar um aprofundamento teórico sobre a temática do trabalho.

Considerando que já existe alguma teoria desenvolvida sobre o tema nossa pesquisa exploratória também pode ser caracterizada como de caráter bibliográfico visto que dedicamos boa parte do trabalho à revisão bibliográfica, que é elaborada com o propósito de fornecer fundamentação teórica ao trabalho, bem como a identificação do estágio atual do conhecimento referente ao tema (GIL, 2017).

Ainda, podemos caracterizar nossa pesquisa como qualitativa uma vez que buscamos analisar o modelo Black Scholes quanto à sua aplicabilidade mas sem definir métricas de comparação com outros modelos. Desta forma, analisamos o que o modelo pode ou não fazer mas sem a preocupação de quantificar seus resultados.

Posto isto, adotamos a seguinte metodologia ao longo do trabalho. A partir da nossa revisão bibliográfica descrevemos a obtenção da solução analítica para as equações do modelo Black Scholes. A seguir, analisamos as hipóteses que são utilizadas para a construção do modelo, do ponto de vista financeiro e matemático/numérico. Essa análise nos permite entender melhor as limitações do modelo que foi proposto.

Por fim, construímos um conjunto de planilhas eletrônicas utilizando o software Excel para analisar o comportamento do modelo com cotações reais de ações e opções relacionadas à empresa Petrobras. A construção das planilhas nos permitiu interpretar o conceito de sensibilidade relacionado às Gregas que citamos na seção 2.3.1.

4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos ao longo do trabalho. Iniciaremos apresentando a dedução da solução analítica das Equações Diferenciais Parciais do modelo Black Scholes. A seguir, apresentamos nossa análise sobre as hipóteses utilizadas na construção do modelo e suas implicações. Por fim, apresentamos os gráficos e tabelas que obtivemos através das planilhas eletrônicas construídas no software Excel que implementam as soluções das equações de Black Scholes para opções de compra e de venda.

4.1 Solução da Equação Diferencial Parcial de Black Scholes

Para a dedução da solução do modelo de Black Scholes usaremos como aporte a bibliografia de Aiube, que em seu trabalho apresenta a resolução desta Equação Diferencial Parcial (EDP).

A EDP de Black Scholes é uma equação diferencial parcial do tipo parabólica. O preço da opção é função do preço do ativo subjacente, do tempo e dos demais parâmetros, escrevemos então $c(S_t, t; \sigma, K, r)$. Para tornar clara a notação iremos usar que $S_t = s$ destacando a diferença entre a variável aleatória S_s , e o valor que esta variável assume s . Então escreveremos $c(s, t)$. Esta função $c(s, t)$ é a solução da seguinte EDP com condição final e de contorno dadas por

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = rc \quad (30)$$

ou de maneira mais resumida

$$c_t(s, t) + rSc_s(s, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 c_{ss}(s, t) = rc(s, t) \quad (31)$$

onde $S > 0$ e $0 < t < T$. As condições de contorno são definidas abaixo.

Quando o preço atinge $S_t = 0$, os preços subsequentes do ativo serão zero, pois trata-se de uma barreira de absorção do processo geométrico Browniano. Entretanto, para sermos consistentes com a transformação utilizada abaixo, usaremos a condição $S_t \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} c(s, t) = 0 \quad t \in [0, T]. \quad (32)$$

Quando o preço da ação cresce indefinidamente, o mesmo ocorre com o preço da opção

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c(s, t) = s \quad t \in [0, T]. \quad (33)$$

A condição terminal, quando $t \rightarrow T$, é dada por

$$\lim_{t \rightarrow T} c(s, t) = (S_T - K)^+. \quad (34)$$

Vamos fazer a primeira mudança de variáveis e transformar o problema escrito em termos de $c(s, t)$ para $f(x, T)$. A primeira variável preço será assim transformada

$$s = Ke^x, \quad (35)$$

onde $-\infty < x < \infty$. A razão para tal transformação é simples. Na equação (30) a potência da variável S é da mesma ordem do respectivo diferencial. O fator de escala K considerado será eliminado em breve. E tomando a derivada temos:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = Ke^x \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{K}e^{-x}. \quad (36)$$

Adotamos a definição de que a variável τ representa o tempo remanescente para o vencimento. Exclusivamente aqui vamos fazer uma ligeira mudança nesta definição. Assim definiremos τ

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad (37)$$

onde $0 \leq t < T$ e conseqüentemente $0 < \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$. A razão para esta transformação é a seguinte, desejamos transformar a condição terminal em condição inicial. Em segundo lugar, usando o fator de escala ele poderá ser eliminado da equação (30).

Tomando a derivada temos

$$\frac{d_r}{d_t} = \frac{1}{2}\sigma^2. \quad (38)$$

A função $f(x, r)$ mapeará a função $c(s, t)$ da seguinte forma

$$c(s, t) = Kf(x, r). \quad (39)$$

Usando o fator de escala K poderemos eliminá-lo do problema, pois foi igualmente incluído na equação (35). Agora necessitamos das derivadas $\frac{\partial c}{\partial t}$, $\frac{\partial c}{\partial s}$ e $\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}$ para introduzi-las

na EDP (30), então

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = K \frac{\partial f}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) = -\frac{1}{2} \sigma^2 K \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial c}{\partial s} = K \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = K \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{K} e^{-x} \right) = e^{-x} \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (41)$$

Iremos usar o resultado da equação acima para o cálculo da segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-x} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= -e^{-x} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= -e^{-x} \frac{e^{-x}}{K} \frac{\partial f}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} \\ &= -\frac{e^{-2x}}{K} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e^{-2x}}{K} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (42)$$

Levando os resultados das equações (40), (41) e (42) na equação (30) e fazendo as simplificações, teremos

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial r} - rf = 0. \quad (43)$$

Se fizermos $r = K \frac{\sigma^2}{2}$, então a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial r} - kf = 0 \quad (44)$$

Ou ainda podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial f}{\partial x} - kf \quad (45)$$

Agora que transformamos a EDP original em outra EDP em termos de x e τ precisamos também modificar as condições de contorno originais de acordo com a transformação acima.

Assim escrevemos que em $t = T \Rightarrow \tau = 0$ e então a definição (39) $c(s, t) = Kf(x, \tau)$ tornar-se-á $c(s, T) = Kf(x, 0)$. Um pouco mais além, temos que

$$\begin{aligned} c(s, T) &= Kf(x, 0) = \max(S - K, 0) \\ &= Kf(x, 0) = \max(Ke^x - K, 0) = K\max(e^x - 1, 0) \\ f(x, 0) &= (e^x - 1)^+ \end{aligned} \quad (46)$$

Esta última equação é a condição inicial do problema em termos de $f(\cdot)$. O que fizemos foi transformar uma equação diferencial do tipo *backward* em outra do tipo *forward*. Neste caso, estabelecemos a condição inicial em $\tau = 0$ e procedemos a solução para valores maiores que zero.

Vamos fazer uma nova transformação na EDP (45). Escreveremos a EDP, que está escrita em termos de $f(x, \tau)$, em termos de $u(x, \tau)$, obedecendo o seguinte mapeamento de uma função em outra

$$f(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (47)$$

onde α e β serão definidos posteriormente. Vejamos primeiramente a condição inicial em termos de $u(x, \tau)$,

$$f(x, 0) = e^{\alpha x} u(x, 0) \Rightarrow u(x, 0) = e^{-\alpha x} f(x, 0). \quad (48)$$

Novamente necessitamos das derivadas $\frac{\partial f}{\partial \tau}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ para obtermos a EDP em termos de $u(x, \tau)$. Trabalhando algebricamente, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau} e^{\alpha x + \beta \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \quad (49)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

Inserindo estas derivadas na equação (45), cancelando os termos exponenciais e agru-

pando os termos semelhantes, obtemos a seguinte EDP

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\alpha + k - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + [(\alpha + k)(\alpha - 1) - \beta]u \quad (52)$$

Impondo a condição de que os coeficientes dos dois últimos termos do segundo membro são nulos, obtemos

$$(\alpha + k)(\alpha - 1) - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha^2 + \alpha(k - 1) - k \quad (53)$$

$$2\alpha + k - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(k - 1) \quad (54)$$

ou ainda

$$1 - \alpha = 1 + \frac{1}{2}(k - 1) = \frac{1}{2}(k + 1). \quad (55)$$

Inserindo (54) em (53) teremos β

$$\beta = \frac{1}{4}(k - 1)^2 - \frac{1}{2}(k - 1)^2 - k \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4}(k + 1)^2 \quad (56)$$

Agora temos as definições de α e β em termos de k nas equações (54) e (56). Incluindo estes resultados na relação entre as funções $f(\cdot)$ e $u(\cdot)$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty \text{ e } \tau > 0 \quad (57)$$

De volta à condição inicial na equação (46), temos que

$$u(x, 0) = e^{-\alpha x} f(x, 0). \quad (58)$$

Usando a equação (46) nesta última, temos que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-\alpha x} \max(e^x - 1, 0) \\ &= \max(e^{(1-\alpha)x} - e^{-\alpha x}, 0) \end{aligned} \quad (59)$$

Usando as equações (55) e (54) nesta última equação, ficamos com

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0). \quad (60)$$

Podemos então reescrever o problema da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad \tau > 0, \\ u(x, 0) &= \phi(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0). \end{aligned} \quad (61)$$

O problema descrito em (61) é a equação de difusão do calor. Desta forma concluímos a primeira parte de nosso problema onde conseguimos reduzir a EDP de Black Scholes na forma da equação do calor. Agora iremos aplicar a solução desta última ao nosso problema de finanças.

A solução da equação (61) é dada por

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy. \quad (62)$$

Considerando que a solução da equação (61) seja conhecida, o restante do trabalho é o cálculo da integral acima, o qual depende somente de esforço algébrico. Depois de resolvida a integral e encontrarmos $u(\cdot)$, voltaremos à função $f(\cdot)$ e em seguida à $c(s, t)$, completando assim o trabalho. Observe a função $\phi(y)$ acima

$$\phi(y) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y}, 0). \quad (63)$$

Note que $\phi(y) = e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y}$ se $e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y} \geq 0$. Assim podemos escrever

$$e^{\frac{1}{2}(k+1)y} - e^{\frac{1}{2}(k-1)y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k+1)y \geq \frac{1}{2}(k-1)y. \quad (64)$$

Em consequência $k+1 \geq k-1$ desde que tenhamos $y > 0$. Assim, tomando a integral acima para valores positivos de y , escrevemos

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy. \quad (65)$$

Para resolver esta integral vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$w = \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow y = \sqrt{2\tau}w + x \Rightarrow dy = \sqrt{2\tau}dw. \quad (66)$$

Introduzindo estas definições na integral acima obtemos sucessivamente a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \phi(\sqrt{2\tau}w + x) e^{-\frac{w^2}{2}} \sqrt{2\tau} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \phi(\sqrt{2\tau}w + x) e^{-\frac{w^2}{2}} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(\sqrt{2\tau}w+x)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(\sqrt{2\tau}w+x)} \right) e^{-\frac{w^2}{2}} dw.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Vamos separar esta última integral em duas, denominadas de I_1 e I_2 , ou seja,

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(\sqrt{2\tau}w+x)} e^{-\frac{w^2}{2}} dw - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(\sqrt{2\tau}w+x)} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \\
 &= I_1 - I_2
 \end{aligned} \tag{68}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}w - \frac{w^2}{2}} dw \\
 I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}w - \frac{w^2}{2}} dw.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Vamos resolver a integral I_1 . Somando e subtraindo $\frac{1}{4}(k+1)^2 2\tau$ ao expoente do integrando, temos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(-(k+1)\sqrt{2\tau}w + w^2 + \frac{1}{4}(k+1)^2 2\tau - \frac{1}{4}(k+1)^2 2\tau)} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(w - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} dw \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(w - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2} dw.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Vamos fazer mais uma mudança de variável, na qual

$$z = w - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2} \Rightarrow dz = dw \tag{71}$$

Denominando o limite inferior de integração $w = \frac{x}{\sqrt{2\tau}}$ por $-d_1$, teremos

$$-d_1 = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}. \tag{72}$$

Podemos escrever

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \right) dz. \quad (73)$$

O termo entre parênteses representa a área sob a distribuição normal padrão onde, pela simetria da distribuição normal, esta área é a mesma que aquela entre d_1 e ∞ , que chamaremos de $N(d_1)$, onde $N(\cdot)$ é a função distribuição cumulativa da normal padronizada.

Em resumo temos que

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1), \quad (74)$$

onde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}. \quad (75)$$

O cálculo de I_2 é feito de maneira similar

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}w - \frac{w^2}{2}} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - (k-1)\sqrt{2\tau}w)} dw. \quad (76)$$

Completando o quadrado perfeito no exponencial do integrando, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - (k-1)\sqrt{2\tau}w + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau)} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(w - \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2} dw. \end{aligned} \quad (77)$$

Como anteriormente, faremos a seguinte mudança de variável $z = w - \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}$ no limite inferior de integração que será $-d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \right) dz. \end{aligned} \quad (78)$$

O termo entre parênteses é a área sob a distribuição normal padronizada entre $-d_2$ e ∞ . Pela simetria da distribuição normal esta área é a mesma que aquela entre ∞ e $-d_2$. Então temos

$$\begin{aligned} I_2 &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2), \\ d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Havíamos estabelecido anteriormente que $u(x, T) = I_1 - I_2$. Usando os resultados obtidos, chegamos a

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2). \quad (80)$$

Agora devemos proceder o caminho de volta encontrando as funções $f(\cdot)$ e $c(\cdot)$. Já havíamos definido a relação entre $f(\cdot)$ e $u(\cdot)$. Usando o resultado acima de $u(\cdot)$ obtemos sucessivamente os seguintes resultados para $f(\cdot)$:

$$\begin{aligned} f(x, \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \right) \\ &= e^x N(d_1) - e^{-\tau k} N(d_2). \end{aligned} \quad (81)$$

De acordo com a nossa definição prévia em (35) $s = Ke^x$, então $x = \ln\left(\frac{s}{K}\right)$. Da mesma forma, de (37) podemos escrever que $-\tau k = -(T-t)\frac{1}{2}\sigma^2 k = -\tau(T-t)$. Usando a definição em (39) em que $c(s, t) = Kf(x, t)$, a equação (80) pode ser escrita por

$$\begin{aligned} c(s, t) &= K \left(e^{\ln\frac{s}{K}(k+1)N(d_1)} - e^{-\tau(T-t)} N(d_2) \right) \\ &= s N(d_1) - Ke^{-\tau(T-t)} N(d_2). \end{aligned} \quad (82)$$

Para d_1 temos sucessivamente que

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \quad (83)$$

Para d_2 temos sucessivamente que

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2} \\ &= \frac{x + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned} \quad (84)$$

Lembrando que a variável s representa o preço da ação S_t , temos finalmente que

$$c(S_t, t) = S_t N(d_1) - ke^{-\tau(T-t)} N(d_2) \quad S_t > 0 \quad 0 \leq t < T, \quad (85)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\tau + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (86)$$

Note que a equação (85) não é definida em $t = T$ (ou $\tau = 0$), pois este termo aparece no denominador de d_1 . Podemos dizer o mesmo com relação à validade de (85) em $S_t = 0$, que é um argumento da função \log . Entretanto $c(S_t, t)$ está definida tal que $\lim_{t \rightarrow T} c(S_t, t) = (S_t - K)^+$ e $\lim_{S_t \rightarrow 0} c(S_t, t) = 0$.

4.2 Análise da influência hipóteses na solução obtida pelo modelo Black Scholes.

O modelo de Black Scholes parte das seguintes premissas, as quais foram citadas na seção 2.3.

(i) **A taxa livre de risco r é constante durante todo período de maturação:** O período de maturação é o período compreendido entre a data da compra da opção até a data de vencimento do contrato de opção. Assim, assume-se que a taxa livre de risco (taxa SELIC no caso brasileiro) não deve variar durante esse intervalo da compra até a data de exercício. Esta hipótese é necessária pois se o valor da taxa variar, os agentes do mercado podem entender que o mercado de renda variável ficou mais ou menos atrativo implicando em uma grande entrada ou saída de capital o que refletirá na oferta e na procura pelas opções. Ou seja, a variação da taxa livre de risco insere um comportamento que não pode ser modelado pelas equações propostas. Considerar a taxa livre de risco como uma variável, ou invés de uma constante, dificulta a obtenção de uma solução analítica para o modelo mas traz pouca vantagem pois normalmente essa taxa varia poucas vezes ao ano.

(ii) **A opção de compra é do tipo europeia:** a característica da opção europeia é o direito de compra ou venda só poder ser exercido na data de vencimento, diferente da opção americana, onde o direito de compra ou venda pode ser exercido a qualquer momento. Muitos investidores adquirem esse tipo de opção por serem influenciados por algum acontecimento, que os leva a crer que o preço do ativo base deve variar em um período de tempo curto, assim podendo obter algum retorno sobre essa variação. Assim, para que fosse possível fixar um tempo de duração desse contrato de opção, as opções

devem ser do tipo europeia.

(iii) **O ativo subjacente não paga dividendos durante a maturidade da opção:** Considera-se que o ativo objeto não deve pagar dividendos durante sua vigência, para que os valores resultantes do modelo durante o período de maturação sejam válidos, pois, caso ocorra pagamento de dividendos, o valor do ativo deve mudar, acarretando uma mudança nos valores estimados inicialmente.

(iv) **O ativo subjacente segue um processo geométrico Browniano, isto é, a distribuição dos preços é lognormal:** Sabe-se que os investidores que atuam no mercado de opções estão comprando em diferentes momentos do dia, eles aumentam a oferta e procura por ativos, o que gera o aumento e queda dos preços, não se podendo prever em que momento do pregão essa ação terá seu valor elevado, devido a um número maior de investidores comprando. Dessa forma, considera-se que o número de pessoas atuando no mercado na compra de um ativo se distribui de maneira normal, o que reflete nos preços que tendem a se equilibrar num valor intermediário aos inicialmente estabelecidos.

(v) **Não há custos de transação nem impostos:** Todos os custos que incidem sobre uma operação de compra devem ser desconsiderados, pois essas taxas podem variar de uma corretora para outra, não sendo possível fixar uma taxa para tal operação, desta forma, deve ser usado o valor da ação para precificar a opção. **Os ativos são infinitamente divisíveis e as transações ocorrem continuamente com liquidez ao longo da vida da opção:** Essa hipótese permite que o preço do ativo seja modelado como uma função contínua.

(vi) **A volatilidade é constante durante todo o período de maturação:** Devido ao período até a maturação da opção ser longo, a volatilidade naturalmente oscila durante esse período. Porém, a volatilidade deve ser fixada supostamente como uma constante, para facilitar a dedução das equações.

(vii) **O mercado não admite a possibilidade de arbitragem:** O mercado não admite arbitragem, pois para o cálculo do prêmio da opção, o valor que deve ser assumido para a ação deve ser único no mercado. No Brasil essa hipótese se consolida, pois existe apenas uma bolsa de valores.

4.3 Resultados e Discussões

Nesta sessão será discutido, qual o valor ideal a ser pago por uma opção de compra ou venda, do tipo europeia. Para isso, faremos uso da ferramenta criada no software

Excel, usando as equações (25) e (27), obteremos o cálculo do preço da opção de compra e venda.

Tomaremos como referência o ativo PETR4 da Petrobras, os dados da ação foram extraídos do site (OPÇÕES.NET), onde o preço da ação registrado foi R\$ 26,96. O preço de exercício da opção R\$ 27,19. A volatilidade da ação no mercado de 62,90% a. a. A taxa de juros livre de risco, taxa Selic, de 13,25% a. a. E o tempo de maturação da opção de 0,16 ano (Aproximadamente 2 meses). Assim, temos

$$S = 26,96 \quad E = 27,19 \quad \sigma = 62,90 \quad r = 13,25 \quad T - t = 0,16$$

Pelo modelo Black Scholes, cada um desses parâmetros influencia no prêmio da opção. Vamos analisar o comportamento do preço da opção, para isso vamos estimar valores para cima e para baixo, tendo como base os valores previstos para cada um desses parâmetros dados pelo mercado, assim, vamos variar R\$1,00 para mais e menos no preço do ativo base.

Observe a planilha, dada na figura 1, com os valores obtidos para as opções de compra e venda, a partir das equações (25) e (27).

<i>S</i>	<i>E</i>	σ	<i>r</i>	$(T - t)$	<i>C</i>	<i>Call</i>	<i>V</i>	<i>Put</i>
R\$ 22,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,07	-	R\$ 4,73	-
R\$ 23,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,42	-	R\$ 4,08	-
R\$ 24,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,84	-	R\$ 3,50	-
R\$ 25,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 2,32	-	R\$ 2,97	-
R\$ 26,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 2,86	-	R\$ 2,52	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,45	R\$ 2,50	R\$ 2,11	R\$ 1,24
R\$ 28,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 4,11	-	R\$ 1,77	-
R\$ 29,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 4,81	-	R\$ 1,47	-
R\$ 30,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 5,55	-	R\$ 1,21	-
R\$ 31,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 6,34	-	R\$ 1,00	-
R\$ 32,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 7,16	-	R\$ 0,82	-

Figura 1 – Variação do prêmio das opções de compra e de venda em relação à variação do preço do ativo base.

Observe a seguir, o gráfico plotado considerando a variação da opção de compra em função da variação do valor do ativo.

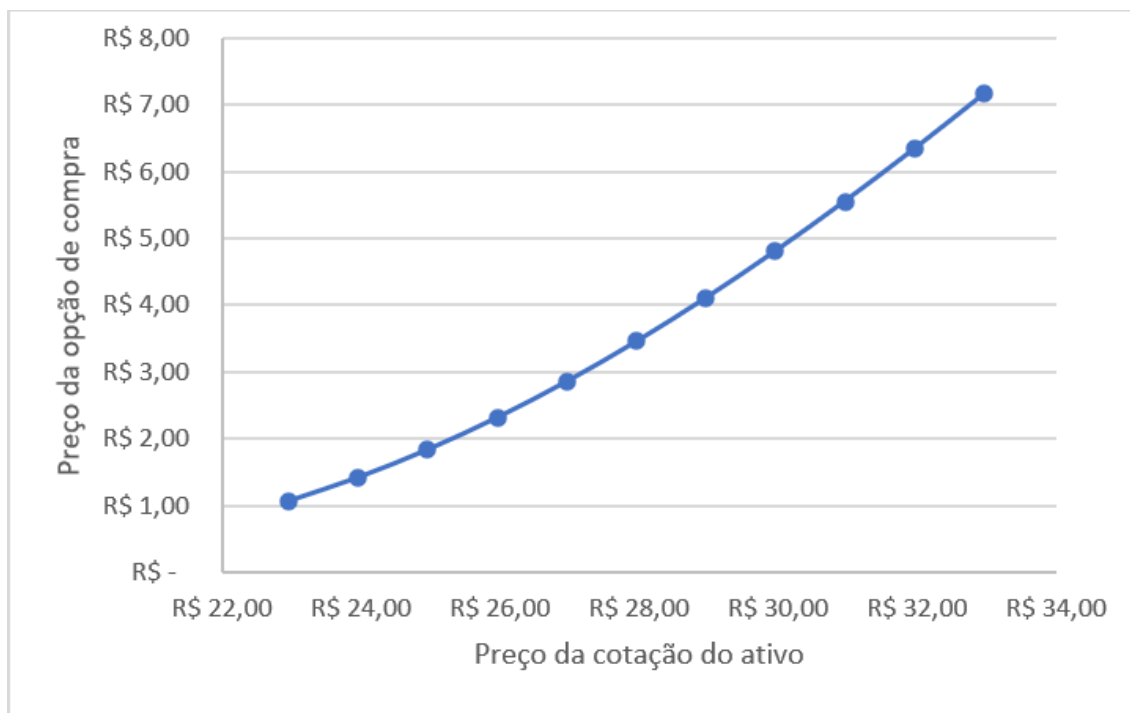


Figura 2 – Variação do prêmio de uma opção de compra (call) em função do preço do ativo-base, considerando strike fixo de R\$27,19 e tempo de exercício de 0,16 ano.

Ao observar o comportamento do gráfico da opção de compra percebemos que conforme o preço do ativo-base sobe, o preço da opção de compra tende a aumentar, também é possível perceber, com relação ao ativo base, que quanto mais próximo de zero o seu valor, menor será o preço da opção. Observe a seguir o gráfico plotado, considerando a variação do prêmio da opção de venda em função da variação do valor do ativo-base.

Analisando o comportamento do gráfico da opção de venda percebemos que conforme o preço do ativo-base aumenta, o prêmio da opção de venda tende a diminuir,

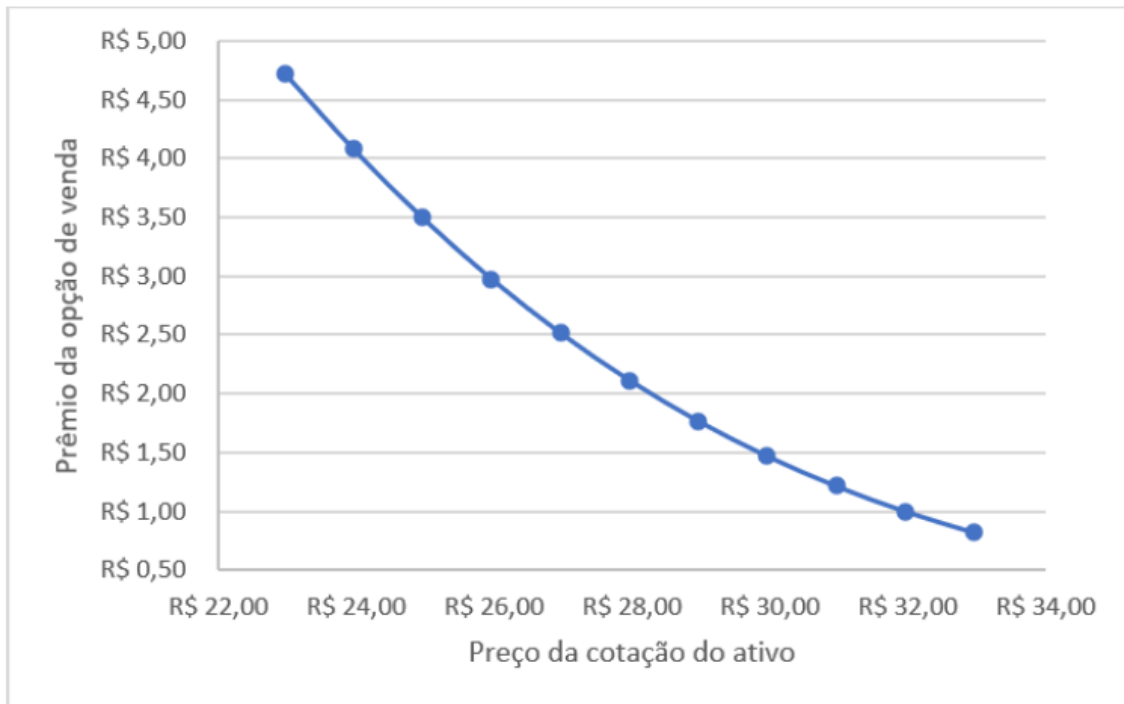


Figura 3 – Variação do preço de uma opção de venda (put) em função do preço do ativo-base, considerando strike fixo de R\$27,19 e tempo de exercício de 0,16 ano.

quanto maior for o preço do ativo-base o prêmio da opção tende a valores próximos de zero, o que torna a compra dessa opção inviável pois, será difícil vender a mesma no mercado.

Adicionalmente, destacamos que no momento em que os dados das variáveis são iguais aos extraídos no mercado, é possível comparar o preço da opção de compra ou de venda, estimado pelo cálculo realizado pelo modelo, com o valor do prêmio da opção dado pelo mercado. Assim, na linha central da tabela da Figura 1 percebe-se que o modelo prevê um valor de R\$3,45 para o prêmio de uma opção de compra enquanto que, no mercado, essa opção estava sendo negociada a R\$2,50. Da mesma forma, o modelo prevê um prêmio de R\$2,11 para a opção de venda mas essa opção estava sendo negociada a R\$1,24 no momento da coleta desses dados. Essa diferença entre o preço previsto pelo modelo e pelo praticado pelo mercado é associada à volatilidade implícita do ativo-base.

Vamos agora analisar o comportamento dos prêmios das opções para diferentes preços de exercício (*strike*), para isso iremos variar R\$1,00 para mais e para menos o parâmetro preço de exercício. Observe a planilha da Figura 4 com os valores obtidos para as opções de compra e de venda, calculados a partir das equações (25) e (27).

Na sequência, na Figura 5 apresentamos o gráfico que considera a variação do prêmio da opção de compra em função da variação do preço de exercício.

S	E	σ	r	$(T-t)$	C	$Call$	V	PUT
R\$ 27,96	R\$ 22,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 6,75	-	R\$ 0,51	-
R\$ 27,96	R\$ 23,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 5,98	-	R\$ 0,72	-
R\$ 27,96	R\$ 24,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 5,26	-	R\$ 0,99	-
R\$ 27,96	R\$ 25,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 4,60	-	R\$ 1,30	-
R\$ 27,96	R\$ 26,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 4,00	-	R\$ 1,68	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,45	R\$ 2,50	R\$ 2,11	R\$ 1,24
R\$ 27,96	R\$ 28,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 2,97	R\$ 2,01	R\$ 2,60	R\$ 1,58
R\$ 27,96	R\$ 29,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 2,53	R\$ 1,54	R\$ 3,15	R\$ 2,20
R\$ 27,96	R\$ 30,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 2,15	-	R\$ 3,75	-
R\$ 27,96	R\$ 31,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,82	-	R\$ 4,39	-
R\$ 27,96	R\$ 32,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,53	-	R\$ 5,08	-
R\$ 27,96	R\$ 33,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,28	-	R\$ 5,81	-
R\$ 27,96	R\$ 34,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,07	-	R\$ 6,58	-

Figura 4 – Variação do prêmio das opções considerando a variação do preço de exercício (*strike*).

Na análise do gráfico da opção de compra Figura 5, observa-se que quanto maior o valor do preço de exercício menor será o valor da opção, e que para valores do preço de exercício muito pequenos o valor da opção tende a ser muito elevado, pode-se perceber que o preço de exercício influencia sobre o prêmio da opção de forma inversa.

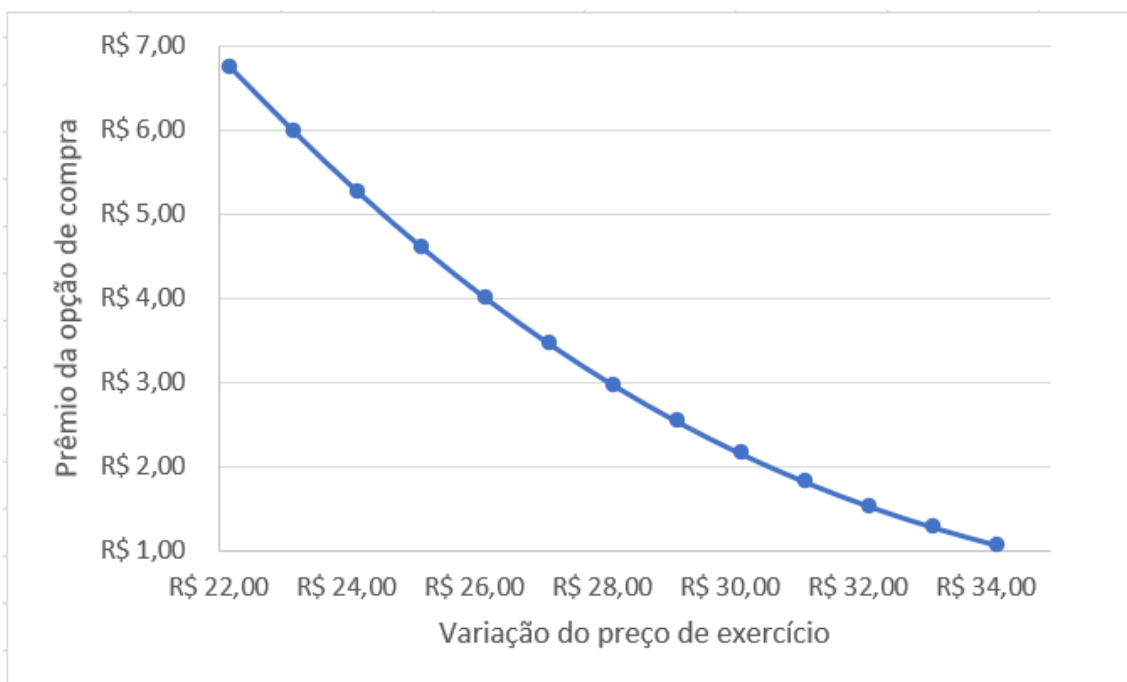


Figura 5 – Variação do preço de uma opção em função do preço de exercício, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e tempo de exercício de 0,16 ano.

Observe a seguir o gráfico da Figura 6 o qual considera a variação do prêmio da opção de venda em função da variação do valor de exercício. Analisando o gráfico podemos observar que, quanto maior o valor do preço de exercício, maior será o valor da opção de venda. Conforme o valor do preço de exercício diminua o prêmio da opção se

aproxima de zero, o que reduz a possibilidade dessa ser exercida.

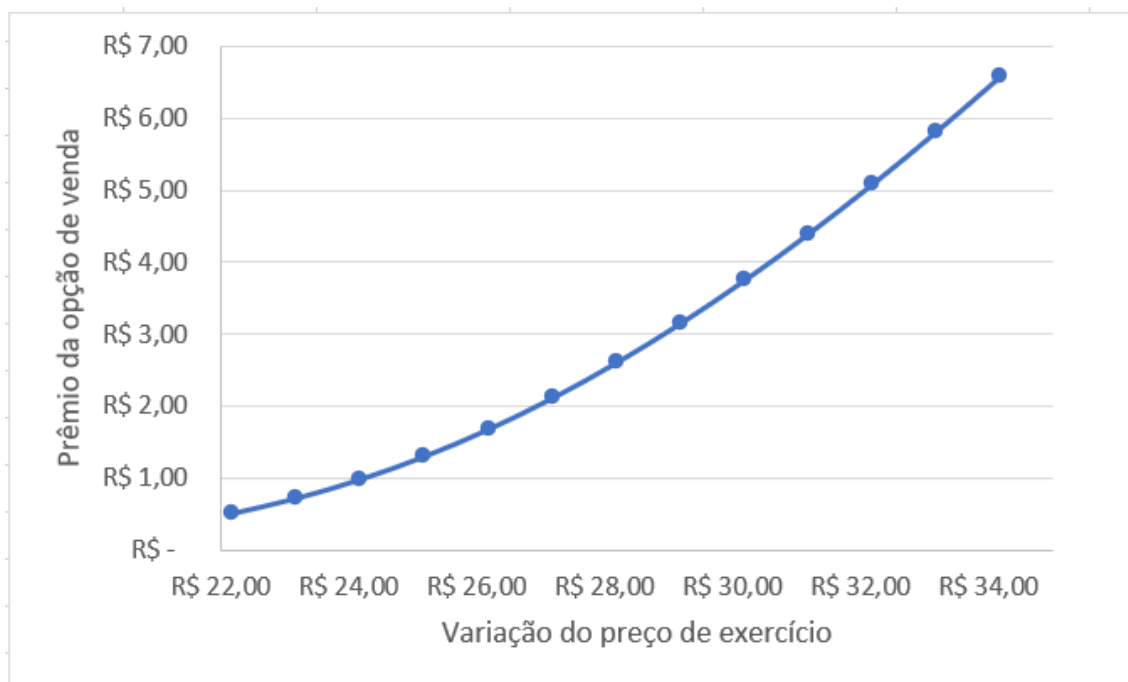


Figura 6 – Variação do prêmio de uma opção de venda em função do preço de exercício, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e tempo de exercício de 0,16 ano.

Vamos analisar agora a influência da variável tempo, que pode ser entendido como o período desde a assinatura do contrato (compra da opção) até a data de exercício da opção. Para isso vamos variar o tempo em intervalos de 0,1 ano para facilitar cada cálculo. Partiremos de 0,16 anos, pois esse valor corresponde a aproximadamente 60 dias, período extraído junto dos dados usados como parâmetros.

<i>S</i>	<i>E</i>	σ	<i>r</i>	$(T - t)$	<i>C</i>	<i>Call</i>	<i>V</i>	<i>PUT</i>
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,1	R\$ 1,05		R\$ 2,63	
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 1,57	R\$ 2,50	R\$ 2,92	R\$ 1,24
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,2	R\$ 1,87	-	R\$ 3,08	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,3	R\$ 2,56	-	R\$ 3,39	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,4	R\$ 3,16	-	R\$ 3,63	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,5	R\$ 3,72	-	R\$ 3,82	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,6	R\$ 4,23	-	R\$ 3,98	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,7	R\$ 4,72	-	R\$ 4,11	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,8	R\$ 5,18	-	R\$ 4,21	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,9	R\$ 5,62	-	R\$ 4,31	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	1	R\$ 6,04	-	R\$ 4,38	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	1,1	R\$ 6,44	-	R\$ 4,45	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	1,2	R\$ 6,84	-	R\$ 4,51	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	1,3	R\$ 7,22	-	R\$ 4,55	-

Figura 7 – Variação do prêmio das opções considerando a variação do tempo.

Observe a planilha da Figura 7 com os valores obtidos para as opções de compra

e venda, a partir das equações (25) e (27). A seguir, o gráfico da Figura 8 apresenta a variação do prêmio da opção de compra em função da variação do tempo.

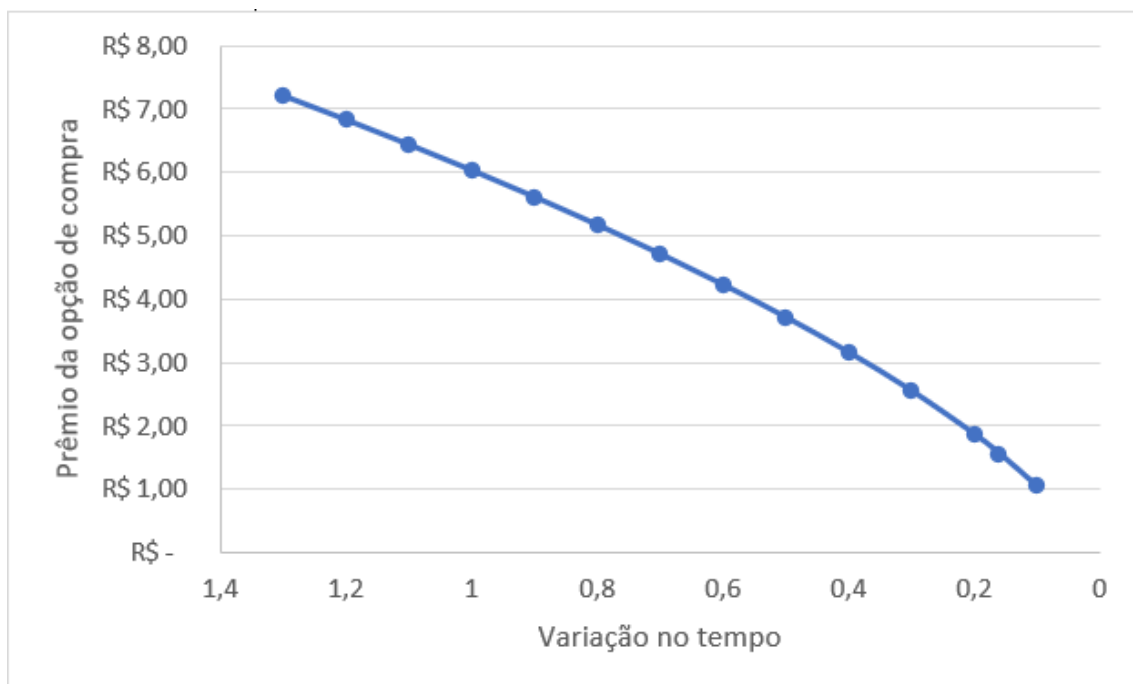


Figura 8 – Variação do preço de uma opção de compra em função do tempo, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e strike de R\$27,19.

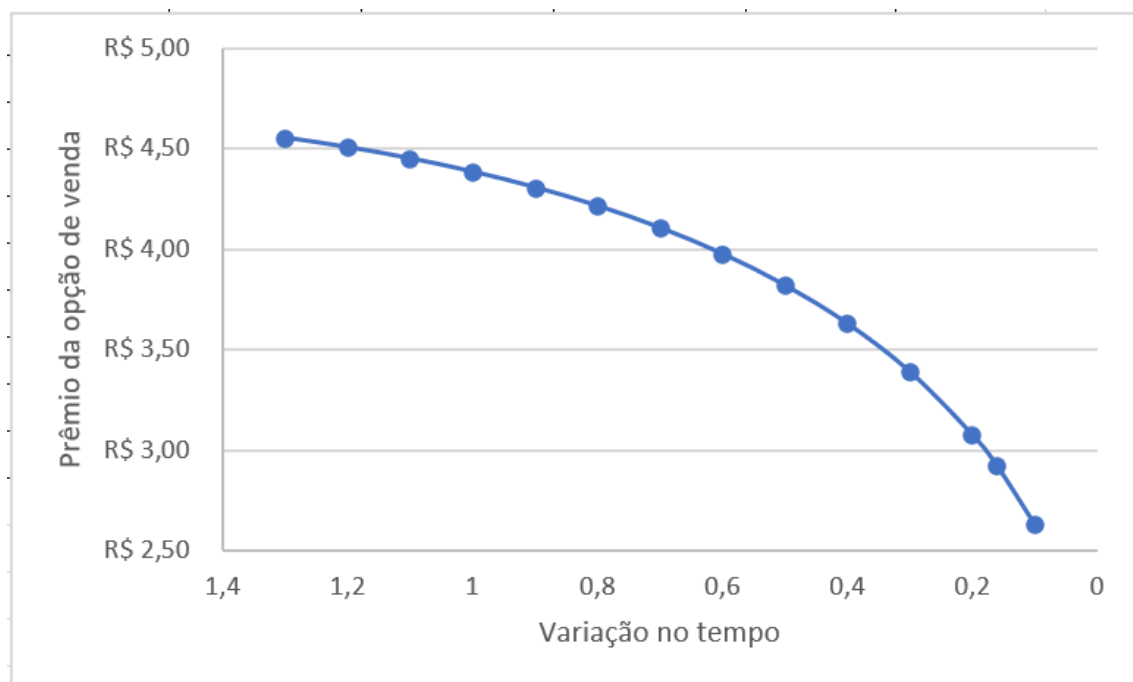


Figura 9 – Variação do preço de uma opção de venda em função do tempo, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e strike de R\$27,19.

Ao analisar o gráfico da Figura 8 é possível perceber que conforme o tempo au-

menta o valor da opção de compra tende a aumentar e ao se aproximar da data de exercício o valor da opção se aproxima de zero.

Ao analisar o gráfico da opção de venda, Figura 9, observa-se o mesmo comportamento anterior, ou seja, quando o tempo para o exercício da opção está distante o valor da opção tende a ser mais alto e ao se aproximar da data de exercício o valor da opção de venda tende a diminuir. Esse comportamento está diretamente relacionado com a incerteza. Quando mais tempo falta para a opção ser exercida maior a dificuldade de prever o preço do ativo-objeto, logo o prêmio da opção é maior.

Neste trecho, vamos analisar a influência da volatilidade do ativo no prêmio das opções. Esta variável indica o quanto o valor o ativo pode variar para cima ou para baixo, onde para o cálculo deste parametro é tomado como base em um ano, sendo este com um total de 252 dias úteis. Para isso, vamos variar 1% para cima e para baixo o valor da volatilidade tomando como referência a volatilidade anualizada de 62,9%, valor extraído junto dos dados usados como parâmetros. Na planilha da Figura 10 são apresentados os valores obtidos para os prêmios das opções de compra e de venda, a partir das equações (25) e (27).

<i>S</i>	<i>E</i>	σ	<i>r</i>	$(T-t)$	<i>C</i>	<i>Call</i>	<i>V</i>	<i>PUT</i>
R\$ 27,96	R\$ 27,19	53,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,07	-	R\$ 1,73	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	54,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,12	-	R\$ 1,78	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	55,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,16	-	R\$ 1,82	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	56,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,20	-	R\$ 1,86	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	57,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,24	-	R\$ 1,90	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,45	R\$ 2,50	R\$ 2,11	R\$ 1,24
R\$ 27,96	R\$ 27,19	63,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,50	-	R\$ 2,16	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	64,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,54	-	R\$ 2,20	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	65,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,58	-	R\$ 2,24	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	66,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,62	-	R\$ 2,28	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	67,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,67	-	R\$ 2,33	-

Figura 10 – Variação do prêmio das opções considerando a variação da volatilidade.

A seguir, apresentamos o gráfico da Figura 11 que considera a variação do prêmio de uma opção de compra em função da variação da volatilidade. Ao analisarmos o gráfico da Figura 11 é possível perceber que a medida que a volatilidade cresce o preço da opção de compra aumenta, observando as variáveis percebe-se que a sua relação é praticamente linear.

Da mesma forma, ao observarmos o gráfico da Figura 12 para a opção de venda percebemos que o seu comportamento é similar ao da opção de compra. Como a volatilidade descreve, implicitamente, a incerteza, este comportamento indica que quanto maior a incerteza maior será o prêmio das opções.

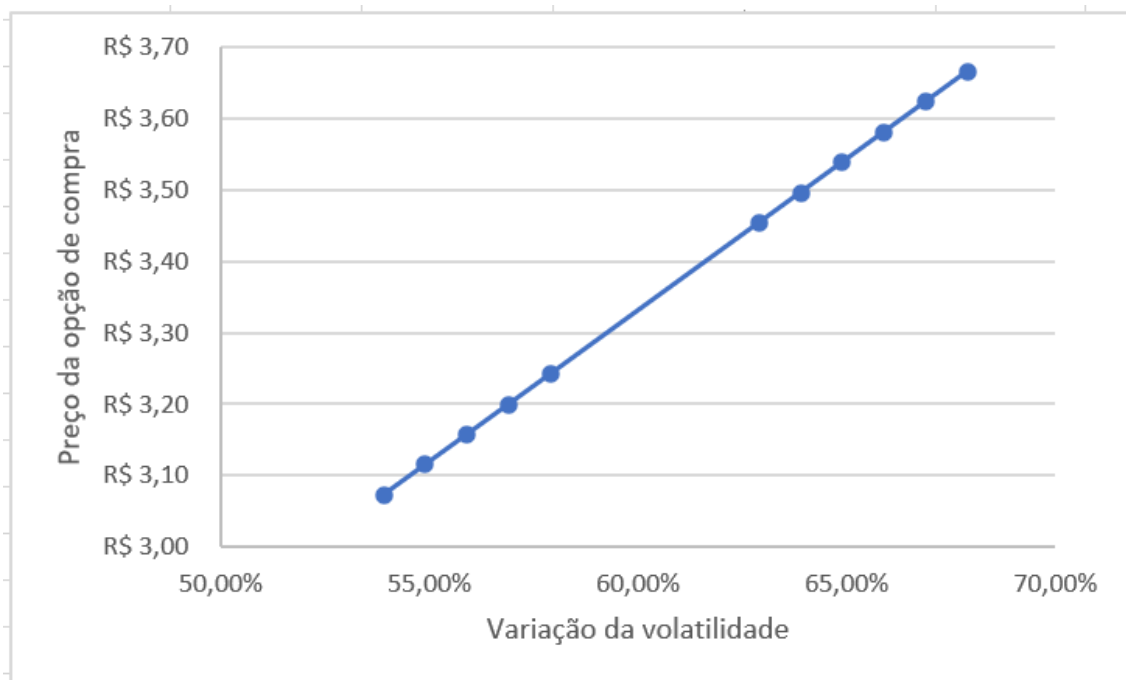


Figura 11 – Variação do prêmio de uma opção de compra em função da volatilidade, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e strike de R\$27,19.

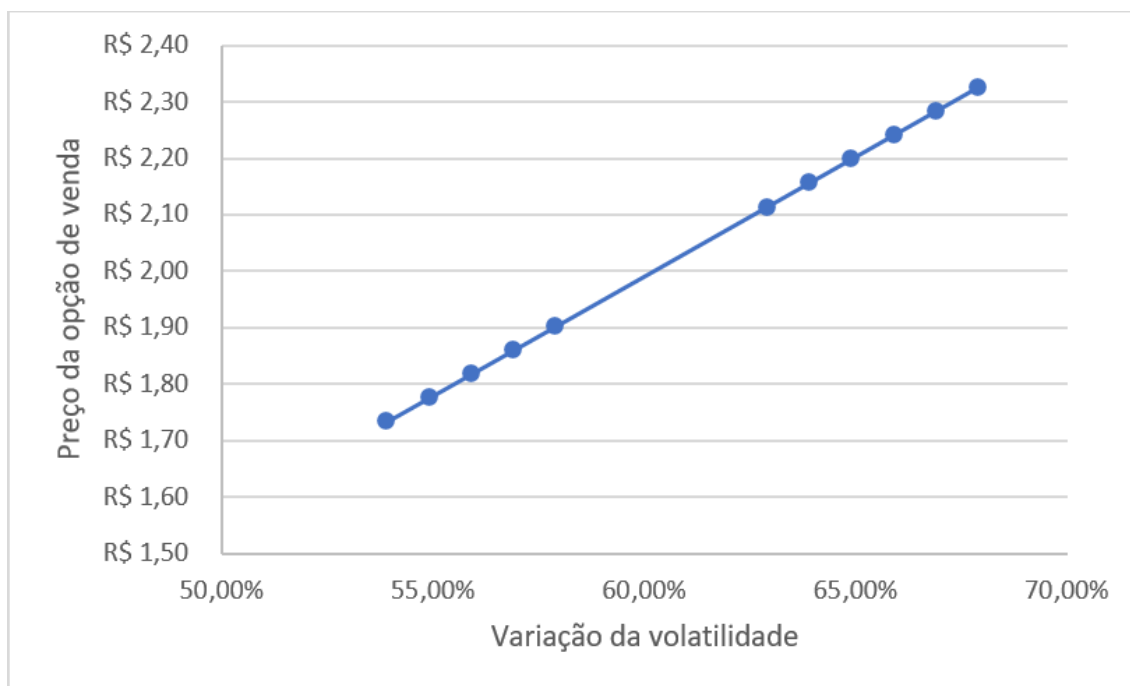


Figura 12 – Variação do prêmio de uma opção de venda em função da volatilidade, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e strike de R\$27,19.

Por fim, vamos analisar a influência da taxa de juros sobre o prêmio das opções. A sua atuação sobre o preço de um ativo acontece de maneira proporcional, o que implica que quando a taxa de juros sobe, o preço do ativo-base tende a aumentar. Da mesma forma quando a taxa de juros é reduzida, o preço do ativo-base tende a diminuir.

Para esta análise vamos variar a taxa de juros 1% para mais e para menos, tomaremos como base a taxa SELIC atual de 13,25% da época que os dados deste trabalho foram extraídos. Assim, na planilha da Figura 13 apresentamos os valores obtidos pelo modelo para o prêmio das opções de compra e de venda, a partir das equações (25) e (27).

S	E	σ	r	$(T-t)$	C	$Call$	V	PUT
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	8,25%	0,16	R\$ 3,34	-	R\$ 2,22	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	9,25%	0,16	R\$ 3,36	-	R\$ 2,20	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	10,25%	0,16	R\$ 3,39	-	R\$ 2,17	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	11,25%	0,16	R\$ 3,41	-	R\$ 2,15	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	12,25%	0,16	R\$ 3,43	-	R\$ 2,13	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	13,25%	0,16	R\$ 3,45	R\$ 2,50	R\$ 2,11	R\$ 1,24
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	14,25%	0,16	R\$ 3,48	-	R\$ 2,09	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	15,25%	0,16	R\$ 3,50	-	R\$ 2,07	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	16,25%	0,16	R\$ 3,52	-	R\$ 2,05	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	17,25%	0,16	R\$ 3,54	-	R\$ 2,03	-
R\$ 27,96	R\$ 27,19	62,90%	18,25%	0,16	R\$ 3,57	-	R\$ 2,01	-

Figura 13 – Variação do prêmio das opções considerando a variação da taxa de juros livre de risco (Taxa SELIC).

O gráfico da Figura 14 apresenta a variação do prêmio de uma opção de compra em função da variação da taxa de juros. Ao analisar o gráfico da opção de compra é possível perceber a atuação da taxa de juros sobre o prêmio da opção, da mesma forma que exerce influência no preço do ativo-base, conforme a taxa de juros sobre o prêmio da opção de compra aumenta de maneira direta.

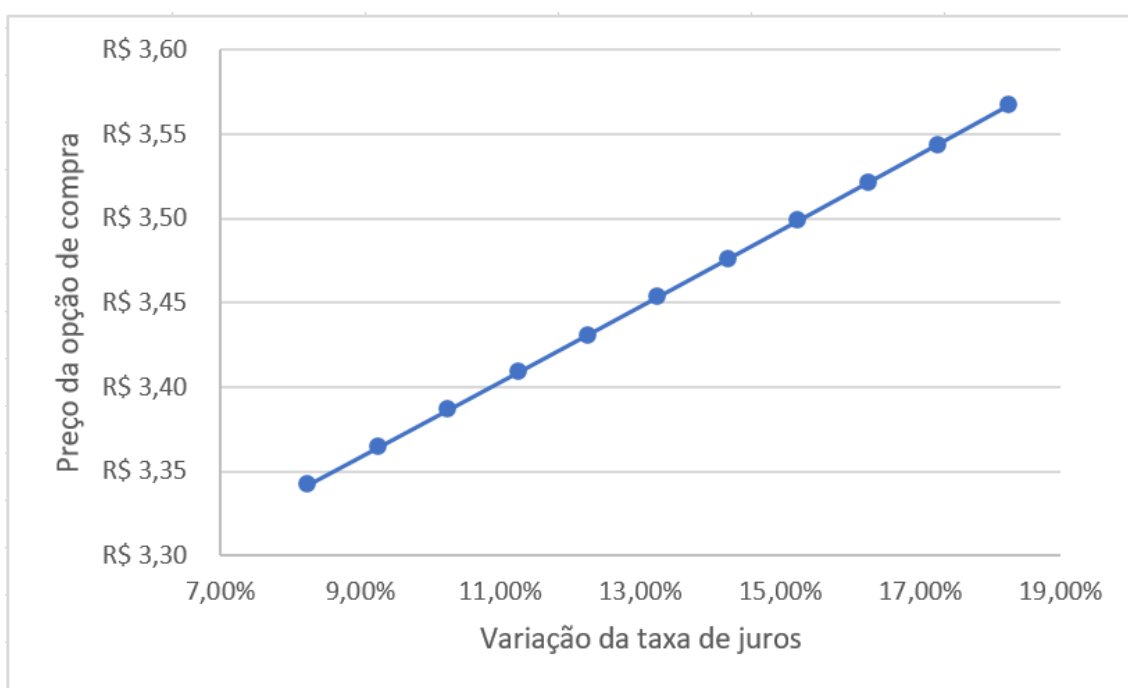


Figura 14 – Variação do preço de uma opção em função da taxa de juros, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e strike de R\$27,19.

Ao observar o gráfico da opção de venda, Figura 15, percebemos o oposto do que constatou-se para opção de compra, é possível verificar que conforme a taxa de juros aumenta o prêmio da opção de venda tende a diminuir. Isso ocorre devido a incidência da taxa de juros no valor do ativo-base, que acarreta uma elevação no preço do ativo objeto, o que implica na redução do valor da opção de venda.

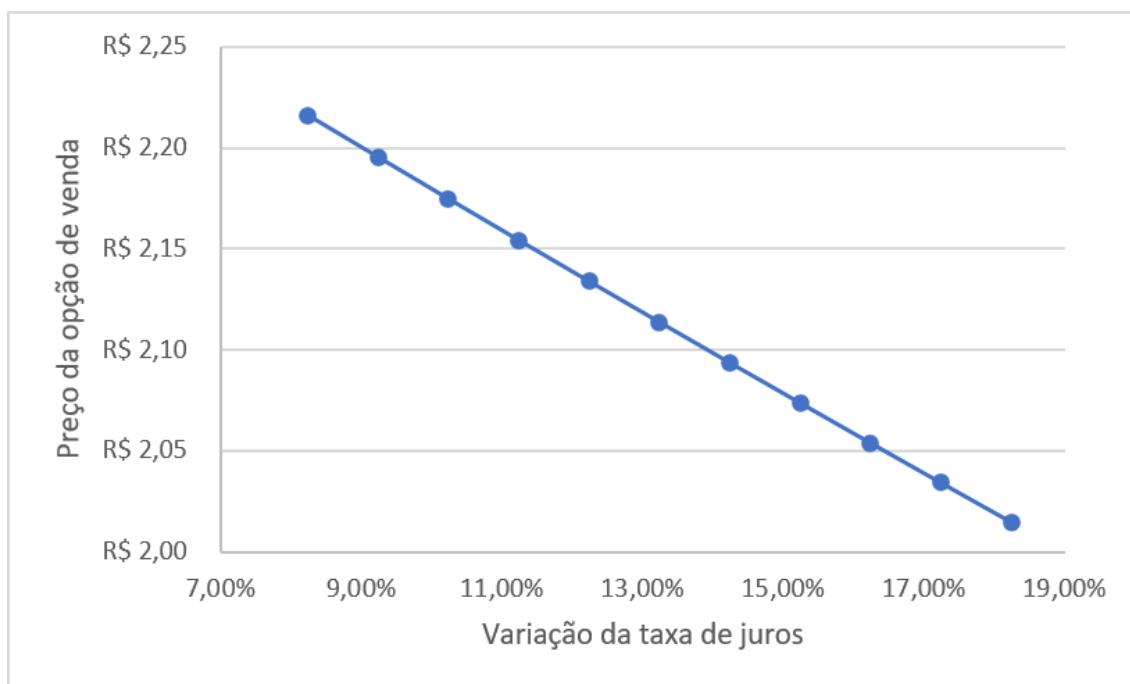


Figura 15 – Variação do preço de uma opção de venda em função da taxa de juros, considerando o preço do ativo-base fixo de R\$27,96 e strike de R\$27,19.

Na análise dos gráficos constatamos que cada parâmetro impacta de maneira particular o prêmio da opção de compra e prêmio da opção de venda. Observando as figuras 1 e 2, temos que o preço de cotação do ativo base influenciará de maneira inversa os valores para as opções de compra e opções de venda, respectivamente quando o preço do ativo objeto aumenta o preço de exercício subirá, para a opção de venda temos uma queda no preço de exercício da opção, dessa forma fica exposto que o preço do ativo base influencia diretamente no valor do prêmio da opção.

Nas figuras 8 e 9 o parâmetro tempo incide sobre o prêmio da opção de compra e opção de venda de maneira semelhante, onde com a aproximação da data de exercício o valor do prêmio da opção diminui tanto para opção de compra como para opção de venda assim, para valores de tempo muito grandes, temos que o valor do prêmio de opção de compra e prêmio de opção de venda tendem a crescer, condição que se dá devido as incertezas do mercado.

Nas figuras 11 e 12 percebemos que o parâmetro volatilidade influenciará no prê-

mio da opção de compra e da opção de venda de maneira similar, nos quais o valor do preço de exercício da opção sobe quando a volatilidade aumenta, esse evento evidencia que quando o ativo objeto tem sua volatilidade alta o valor do preço de exercício tende a valores muito grandes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo trazer uma análise do modelo de precificação Black Scholes, tendo em vista o crescimento do número de investidores com interesse no mercado de renda variável, o entendimento dessa ferramenta de precificação se faz importante, pois através de seu uso correto o investidor poderá proteger seus investimentos feitos no mercado à vista, através da compra e venda de opções.

Durante a pesquisa observou-se que a maioria dos autores propunham a aplicação da equação de Black Scholes, utilizando de dados reais do mercado financeiro, para fazer simulações, dado isso buscou-se retratar em nosso trabalho a solução da EDP de Black Scholes, segundo Aiube (2013). No desenvolvimento da equação de Black Scholes, seus criadores adoram algumas hipóteses, que com a evolução do mercado financeiro deixaram de ser eficazes, tornando o modelo de Black Scholes limitado em seus resultados. Por exemplo, o ativo objeto não deve distribuir dividendos durante o período de maturação, a volatilidade também é dada como constante sendo fixada para facilitar a dedução da equação, tais premissas divergem da realidade ao considerarmos o atual mercado de ações.

Ao aplicarmos dados reais na planilha elaborada e variar os parâmetros foi possível um melhor entendimento acerca das “gregas” e de como cada “letra” impacta no prêmio da opção.

Observou-se a influência do Delta ao alterarmos o preço do ativo objeto. Quando o preço do ativo objeto variar o Delta irá mensurar quanto o prêmio da opção deve subir ou cair.

Na variação do parâmetro tempo, teremos a influencia do Theta sobre o prêmio das opções. Com a aproximação da data de exercício da opção o valor do prêmio da opção diminui. Ou seja, o Theta influenciará negativamente sobre o prêmio da opção.

Ao variar a volatilidade pode-se observar a influência do Vega no prêmio das opções, a relação entre o prêmio da opção e a volatilidade é proporcional e linear, ou seja, se a volatilidade aumenta o valor do prêmio também aumenta.

Quanto a variação da Taxa de Juros verificamos a influência do Rho no prêmio das opções, ao passo que a taxa de juros sobe, o valor do prêmio da opção irá acompanhar esse aumento de forma linear.

Na análise das tabelas e gráficos pode-se perceber a influência de cada parâmetro no valor dos prêmios das opções de compra e de venda. Um melhor entendimento de como cada parâmetro impacta no preço da opção, direciona o investidor na decisão de

comprar ou vender uma opção em determinado momento. Isso evidencia que o modelo de precificação de Black Scholes é uma ferramenta bastante útil para estimar o preço de opções.

Ao adaptarmos sua fórmula ao software excel foi possível fazer os cálculos de maneira prática, uma vez que pode-se usar para qualquer ativo, para se obter estimativas de prêmios para opções européias, bastando apenas editar os seus parâmetros, ativo objeto, preço de exercício, volatilidade, tempo e taxa de juros, adequando-so ao ativo base desejado.

Para trabalhos futuros, acreditamos que seja possível avaliar outros modelos de precificação e compará-los de maneira quantitativa com os dados gerados pelo modelo Black Scholes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIUBE, F. A. L. **Modelo Quantitativos em Finanças com enfoque em commodities.** [S.1.]: São Paulo, 2013.

B3. Uma análise da evolução dos investidores na B3. [S.1.]: Relatório trimestral, novembro, 2021.

BELTRAMI, M.; LOCH, G. V.; SILVA, A. C. L. **Comparação das técnicas de support vector regression redes neurais na precificação de opções.** 42º Simpósio Brasileiro e Pesquisa Operacional Saúde Humana, Saúde Animal e Ecossistema, Bento Gonçalves-RS, 2010.

BORGES, R. J. da C. S. **Precificação de opções sobre IDI com preço de mercado de risco variável.** (Dissertação de Mestrado) Fundação Getulio Vargas, Escola de Pós-Graduação em Economia, 2017.

BUSSAB, W. d. O. **Estatística Básica.** São Paulo: Saraiva, 1997.

CARVALHO, M. S. S. **Processos de Volatilidade Estocástica e uma Avaliação sobre a Análise Assintótica.** (Dissertação de Mestrado) Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

FERREIRA, C. **Avaliação de Modelos de Risco através de Backtesting.** (Dissertação de Mestrado) Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

FREITAS, S. O. **Utilização de um modelo baseado em redes neurais para a precificação de opções.** (Dissertação de Mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Ciências Administrativa, Centro de pós-graduação e pesquisa em administração, 2001.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.,** 6ª edição, São Paulo: Grupo GEN, 2017.

GOTO, R. M. M. **Variação temporal da volatilidade e precificação de derivativos.** (Dissertação de Mestrado) Escola de Economia de São Paulo, 2016.

INFOMONEY. **Glossário financeiro.** 2022. Available from Internet: <<https://www.infomoney.com.br/glossario/>>.

LEAL, M. E. **A influência da liquidez na precificação dos ativos no mercado brasileiro.** (Dissertação de Mestrado) Escola Brasileira de Administração Pública e de Empresas, 2016.

MOLERO, L.; MELLO, L. **Derivativos - Negociação e precificação.**, 2ª edição. [S.l.]: Grupo A, 2021.

SILVA, B. E. **Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo.** (Dissertação de Mestrado) Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

TONI, J. M.; COELHO, A. B. **Testando modelos de precificação de opções: análise das opções de compra sobre contratos futuros de café arábica na BM-FBOVESPA.** Foz do Iguaçu-PR, 2012.