

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**JOÃO PEDRO SARASOL NEUFELD**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À  
FLAMBAGEM ELASTO-PLÁSTICA BIAxIAL DE PLACAS RETANGULARES  
COM PERFURAÇÃO ELÍPTICA**

**Alegrete**

**2021/1**

**JOÃO PEDRO SARASOL NEUFELD**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À  
FLAMBAGEM ELASTO-PLÁSTICA BIAXIAL DE PLACAS RETANGULARES  
COM PERFURAÇÃO ELÍPTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Thiago da Silveira

**Alegrete**

**2021/1**

**JOAO PEDRO SARASOL NEUFELD**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À  
FLAMBAGEM ELASTO-PLÁSTICA BIAIXIAL DE PLACAS RETANGULARES COM  
PERFURAÇÃO ELÍPTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Dissertação defendida e aprovada em: 05, Outubro de 2021.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Thiago da Silveira

Orientador

Unipampa

---

Prof. Me. Leandro Ferreira Friedrich

Unipampa

---

Prof. Dr. Tonilson de Souza Rosendo

## Unipampa



Assinado eletronicamente por **THIAGO DA SILVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/10/2021, às 10:36, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **TONILSON DE SOUZA ROSENDO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/10/2021, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/10/2021, às 10:55, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0633811** e o código CRC **BC369299**.

## **AGRADECIMENTO**

Ao Prof. Dr. Thiago da Silveira, por me orientar, auxiliar e apoiar na produção do trabalho.

Aos meus pais por sempre me apoiarem nos meus objetivos.

A todos amigos que me ajudaram a chegar até aqui.

“Quem não luta pelo futuro que quer, terá que aceitar o futuro que vier”.

Thiago Nigro

## RESUMO

Estruturas de placas são elementos mecânicos com grande aplicação na engenharia, pois são utilizados nos mais diversos ramos da indústria, como na indústria naval, aeroespacial, setor de óleo e gás, indústria automobilística entre outras. Por serem elementos que possuem espessura muito menor que suas outras dimensões, são denominados elementos esbeltos, dessa forma, quando submetidos a carregamentos axiais, estão sujeitos ao fenômeno de instabilidade estrutural indesejado denominado flambagem. Porém, como se sabe, estruturas de placas apresentam comportamento diferenciado quando submetidas à flambagem, pois estas não sofrem colapso pela flambagem elástica. Ao entrarem em modo de flambagem elástica, esses elementos sofrem uma reorganização em suas tensões, de modo que a placa ainda sofre um incremento de carga até o colapso, esse fenômeno é denominado flambagem elasto-plástica. Ainda pelos mais diversos motivos, essas placas podem conter perfurações, como passagem de tubulações, acesso para manutenção, alívio de peso, entre outros. Nessas situações é necessária uma análise da influência dessas perfurações nesses elementos. Com base nisso, esse trabalho se propõe a analisar a influência de perfurações elípticas em placas finas de aço, submetidas a flambagem biaxial elasto-plástica. A placa adotada possui uma relação  $b/a = 0,5$ ; entre sua largura  $b$  e seu comprimento  $a$ . Com relação às perfurações elípticas, serão analisadas placas com as seguintes frações volumétricas  $\phi = 0,10; 0,15; 0,20$ ; em que  $\phi$  é a relação entre o volume da placa sem perfuração e o volume do furo. Para determinação da carga última de flambagem elasto-plástica, foi utilizado o software comercial ANSYS®, utilizando o elemento de casca SHELL281, em conjunto com o método Design Construtal e a Busca Exaustiva, visando a otimização geométrica da placa. O modelo computacional utilizado foi verificado e validado quanto a sua acurácia e apresentou resultados satisfatórios para os problemas analisados. Os resultados deste trabalho proporcionaram um melhor entendimento sobre o comportamento elasto-plástico das placas sob compressão biaxial. Notou-se que geometrias de perfuração mais alongadas no eixo Y, proporcionaram os melhores resultados e que dentro das configurações analisadas a capacidade de suportar carregamento diminuía com o aumento do grau de liberdade  $b_0/a_0$ . Também foi possível constatar que o aumento do tamanho da perfuração causa redução da capacidade da placa de suportar carga biaxial.

Palavras-Chave: Design Construtal, Flambagem de placas, Método dos Elementos Finitos.

## ABSTRACT

Plate structures are mechanical elements with great application in engineering, because they are used in the most diverse branches of the industry, such as in the naval, aerospace, oil and gas sector, automobile industry, among others. Because they are elements that are much smaller in thickness than their other dimensions, they are called slender elements, so when they occur with axial loads, they are subject to the phenomenon of unwanted structural instability called buckling. However, as is known, the plate structures are differentiated when subjected to buckling, as they do not collapse by elastic buckling. When entering into elastic buckling mode, the reorganization of stresses occurs in to this element, so that a plate still undergoes an increase in load until collapse, this phenomenon is called elasto-plastic buckling. Even for the most diverse reasons, these plates may contain perforations, such as passage of pipes, access for maintenance, weight reducing, among others. In this situation, an analysis of the influence of these perforations is necessary. Based on this, this work examines the influence of elliptical perforations in thin steel plates, subjected to biaxial elasto-plastic buckling. The adopted plate has a ratio  $b/a = 0,5$ , between its width  $b$  and its length  $a$ . Regarding elliptical perforations, plates with the following volumetric fractions  $\phi = 0.10; 0.15; 0.20$ ; will be analyzed, where  $\phi$  is the relationship between the volume of the plate without perforation and the volume of the hole. To determine the ultimate elasto-plastic buckling load, the commercial software ANSYS® will be used, with the element SHELL281, associated with the Constructal Design Method and the Exhaustive Search Technique, in search of geometric optimization of the plate. The computational model used was verified and validated for its accuracy and satisfactory results were presented for the problem problems. The results of this work which improved the understanding of the elasto-plastic behavior of the plates under biaxial compression. It was noticed that more elongated perforations geometries in the Y axis, provided the best results and that, in the analyzed plate configurations, the loading capacity decreased with the increase of the degree of freedom  $b_0/a_0$ . It was also possible to verify that the increase in the size of the perforation causes a reduction in the capacity of the biaxial load plate.

Keywords: Construtal Design, Plate Buckling, Finite Element Method.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do casco de um navio.....	13
Figura 2 – Analogia aos estados de equilíbrio .....	22
Figura 3 – Representação de uma placa discretizada .....	24
Figura 4 – Tipos de elementos de malha mais utilizados .....	26
Figura 5 – Representação da placa no plano médio .....	27
Figura 6 – Exemplos práticos da aplicação da Lei Construtal .....	28
Figura 7 – Representação da geometria do elemento SHELL281 .....	34
Figura 8 – Representação da placa retangular de referência .....	35
Figura 9 – Representação da placa retangular perfurada .....	36
Figura 10 – Modelo de placa quadrada usada na verificação .....	39
Figura 11 – Distribuição de tensões na placa sem perfuração .....	42
Figura 12 – Fator NUS X Grau de liberdade $b_0/a_0$ (Placa $\phi = 0,10$ ).....	42
Figura 13 – Distribuição das tensões na superfície da placa 01 e 09 .....	43
Figura 14 – Fator NUS X Grau de liberdade $b_0/a_0$ (Placa $\phi = 0,15$ ).....	44
Figura 15 – Distribuição das tensões na superfície da placa 01 e 11 .....	45
Figura 16 – Fator NUS X Grau de liberdade $b_0/a_0$ (Placa $\phi = 0,20$ ).....	46
Figura 17 – Distribuição das tensões na superfície da placa 01 e 11.....	47
Figura 18 – Comparativo entre os resultados das placas analisadas.....	48

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de resultados da convergência de malha .....	38
Tabela 2 – Comparação das placas que obtiveram maior NUS ( $\phi = 0,10$ ).....	43
Tabela 3 – Comparação das placas que obtiveram maior NUS ( $\phi = 0,15$ ).....	45

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$a$  - Comprimento da Placa na direção X

$a_0$  - Comprimento do furo na direção X

$b$  - Largura da placa na direção Y

$b_0$  - Largura do furo na direção Y

BE - Busca exaustiva

DC - Design Construtal

det - Função Determinante

$\Delta u$  - Diferencial do Vetor de Incremento de Deslocamento

$E$  - Módulo de Elasticidade

$F$  - Vetor Carga

$F_{NL}$  - Vetor de Forças Nodais Não Lineares

$\phi$  - Fração Volumétrica

$K$  - Matriz de Rigidez

$K_E$  - Matriz de Rigidez Convencional Para Pequenas Deformações

$K_G$  - Matriz de Rigidez Geométrica

$K_t$  - Matriz de Rigidez Tangente

$\lambda$  - Escalar para Matriz de Rigidez

MEF - Método dos Elementos Finitos

$\nu$  - Coeficiente de Poisson

$N_{cr}$  - Carga Crítica de Flambagem

$\psi$  - Vetor de Cargas em Desequilíbrio

$N$  - Carregamento

$N_0$  - Carregamento Inicial

$N_i$  - Carga Interna em Desequilíbrio

$N_{i+1}$  - Carga Interna em Desequilíbrio Sucessiva

NUS - Normalized Ultimate Stress

NMD - Normalized Maximum Deflection

$\sigma_y$  - Tensão de escoamento do material

$t$  - Espessura da Placa

$u$  - Vetor de Deslocamento Total

$u_i$  - Vetor de Incremento do Deslocamento

$u_{i+1}$  - Vetor de Incremento do Deslocamento Sucessivo

$V$  - Volume Total da Placa

$V_0$  - Volume da Perfuração

$w_0$  - Imperfeição Inicial

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>1.1. Estado da Arte.....</b>	<b>15</b>
<b>1.2. Objetivos Gerais e Específicos .....</b>	<b>18</b>
<b>1.3. Justificativa .....</b>	<b>19</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1. Estudo de Placas.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2. Estudo da Flambagem Elástica .....</b>	<b>22</b>
<b>2.3. Estudo da Flambagem Elasto-plástica .....</b>	<b>23</b>
<b>2.4. Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>24</b>
<b>2.5. Método Design Construtal .....</b>	<b>28</b>
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>30</b>
<b>3.1. Flambagem Elástica e Elasto-plástica no ANSYS® .....</b>	<b>30</b>
<b>3.1.1. Flambagem Elástica .....</b>	<b>31</b>
<b>3.1.2. Flambagem Elasto-plástica.....</b>	<b>32</b>
<b>3.2. Modelo Computacional.....</b>	<b>34</b>
<b>3.3. Design Construtal aplicado à flambagem de placas .....</b>	<b>35</b>
<b>3.4. Teste de convergência de malha .....</b>	<b>37</b>
<b>3.4.1. Verificação do modelo para flambagem elasto-plástica biaxial.....</b>	<b>38</b>
<b>3.4.2. Validação do modelo para flambagem elasto-plástica biaxial.....</b>	<b>39</b>
<b>3.5. Problema estudado.....</b>	<b>39</b>
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>40</b>
<b>4.1. Placa fração volumétrica <math>\phi=0,10</math> .....</b>	<b>41</b>
<b>4.2. Placa fração volumétrica <math>\phi=0,15</math> .....</b>	<b>43</b>
<b>4.3. Placa fração volumétrica <math>\phi=0,20</math> .....</b>	<b>45</b>
<b>4.4. Análise geral das placas .....</b>	<b>47</b>
<b>5. CONCLUSÕES .....</b>	<b>49</b>

<b>6. TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>50</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>51</b>

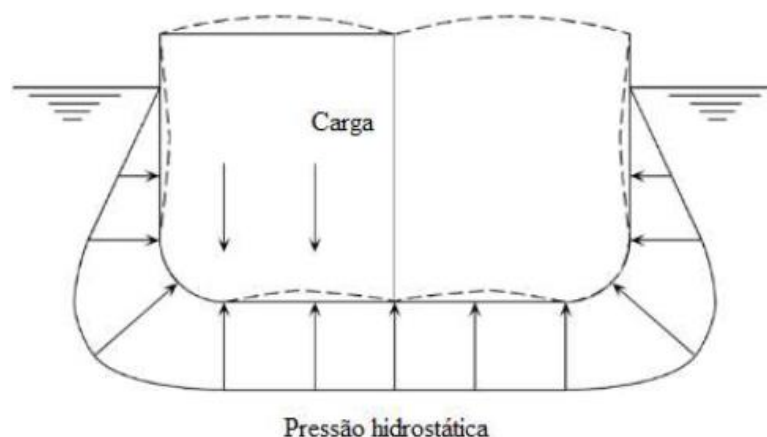
## 1. INTRODUÇÃO

Com a crescente evolução tecnológica mundial, e a grande utilização do aço nas mais variadas aplicações, tal como a grande demanda de energia envolvida nos processos de beneficiamento do material, faz-se cada vez mais necessária a otimização do uso deste material na indústria. Um bom exemplo da aplicação do aço são as placas finas que atuam, geralmente, como elementos estruturais.

Placas finas são elementos estruturais que possuem grande aplicação na indústria aeronáutica, como em fuselagem de aviões, e na indústria naval, como em cascos de navios e em plataformas de petróleo, justamente por terem um baixo peso em relação as suas dimensões, por terem as dimensões de área ( $a$  e  $b$ ) muito maiores que a sua espessura ( $t$ ), sendo assim considerados elementos esbeltos. Dessa forma, esses elementos estruturais merecem atenção especial devido ao seu comportamento quando submetidos à esforços axiais de compressão, visto que, podem apresentar um fenômeno de instabilidade denominado flambagem. Uma estrutura pode entrar em flambagem quando é submetida à um carregamento axial compressivo, no qual essa estrutura salta repentinamente para fora do seu plano original, causando instabilidade da estrutura e até mesmo o colapso da mesma e de componentes estruturais adjacentes.

Um dos casos já citados em que placas são submetidas a carregamentos axiais, é em cascos de embarcações, que inclusive segundo Shanmugan e Narayanan (1998), podem estar sujeitas a carregamentos biaxiais. Dessa forma, pode-se fazer presente o fenômeno de flambagem biaxial.

Figura 1: Representação simplificada dos esforços atuantes em cascos de embarcações.



Fonte: Adaptado de Okumoto *et al.* (2009).

Como exposto na Fig. 1, as placas do casco do navio são submetidas a tensões transversais causadas pela própria curvatura do casco sob a ação da pressão hidrostática e tensões longitudinais que são consequência do próprio entalhe longitudinal do navio (Shanmugan; Narayanan, 1998).

O fenômeno de flambagem pode ser dividido em flambagem elástica, que ocorre quando a estrutura ultrapassa sua carga crítica de flambagem, onde não ocorrem deformações permanentes na estrutura. Em outras palavras, quando é cessado o carregamento a placa volta a seu estado original sem qualquer alteração estrutural. Se a carga for incrementada a ponto de provocar deformações permanentes, o material entra em regime elasto-plástico, no qual as deformações ocorrem no regime plástico do material, de modo que a placa não mais retorna ao seu estado original, até que a estrutura atinja a carga última da flambagem elasto-plástica, sendo essa a que provoca o colapso global da estrutura.

Para a utilização dessas placas como elementos mecânicos, pode ser necessário realizar perfurações em sua estrutura por vários motivos, como passagem de tubulações e eletrodutos, acesso para manutenção, montagem, ou simplesmente por questões de alívio de peso.

Porém, a inclusão de perfurações em uma placa ocasiona uma redistribuição das suas tensões, alterando seu comportamento mecânico assim como a resposta da estrutura ao fenômeno denominado flambagem (Cheng & Zhao, 2010). Outras características que devem ser levadas em consideração em um projeto que envolve placas perfuradas são, a geometria, a dimensão e a posição das perfurações, pois estas têm influência direta no comportamento mecânico da placa. Também deve-se atentar para outra característica das placas, que é sua espessura, pois, segundo El-Sawy et al. (2004), placas finas colapsam pela ação da flambagem elástica. No entanto, placas espessas entram em deformação plástica antes mesmo de alcançarem sua carga crítica de flambagem, ou seja, incorrem em flambagem elasto-plástica (El-Sawy; Martini, 2010).

Helbig et al. (2013), analisando placas quadradas e retangulares, com perfurações elípticas, confirmaram que conforme a espessura aumenta, a placa tende a sofrer com um esmagamento do material antes mesmo de ocorrer o fenômeno da flambagem elástica decorrente de carregamento compressivo uniaxial, tornando necessária uma análise do regime elasto-plástico da placa.



Segundo El-Sawy, Nazmy, Martini (2004), os métodos mais utilizados para analisar placas submetidas à carregamentos de flambagem e determinar a carga de flambagem, ou a tensão consequente do fenômeno, quando estas estão sujeitas a cargas uniaxiais, biaxiais e de cisalhamento, são: o método dos elementos finitos (MEF) e o método de carga/deslocamento conjugado.

Com base nas informações apresentadas, o presente trabalho será focado na análise de placas finas perfuradas submetidas ao fenômeno de flambagem elasto-plástica com carregamento biaxial, onde será analisada uma placa retangular com uma perfuração elíptica. Serão mantidas fixas as dimensões da placa e a razão volumétrica do furo em relação a placa e serão variados a razão entre os eixos do furo elíptico,  $b_0 / a_0$ .

### **1.1. Estado da Arte**

No geral há uma variedade de trabalhos relacionados a flambagem elástica de placas finas perfuradas de aço, porém no que se refere a flambagem elasto-plástica, o assunto é pouco explorado, e quando se fala em carregamento biaxial há um número menor ainda de estudos. Portanto, far-se-á uma breve descrição dos estudos relacionados ao tema.

Shanmugam et al(1999), estudaram o comportamento de placas perfuradas com diferentes tipos de esbeltezes, perfurações, carregamentos e condições de contorno. E assim desenvolveram uma fórmula para determinação da carga última de flambagem dessas placas por meio de MEF, comparando com resultados experimentais.

Durban e Zuckerman (1999) analisaram a flambagem elasto-plástica de placas retangulares sob compressão biaxial com várias condições de contorno, onde a análise foi baseada nas equações da flambagem linear padrão e o comportamento do material foi modelado pela teoria de plasticidade do fluxo de pequenas deformações e a teoria da deformação plástica. Dessa forma, concluíram que para placas finas as teorias apresentaram os resultados elásticos clássicos, porém para placas espessas, notou-se uma diferença considerável nos resultados de flambagem previstos por essas teorias e por meio disso constataram que a discrepância entre os resultados apresentados, fornece uma nova perspectiva do paradoxo da flambagem elasto-plástica.

El Sawy et al. (2004) realizaram uma análise da flambagem elasto-plástica de placas com perfuração circular sob compressão uniaxial, onde variaram o índice de esbeltez da placa, a localização do furo e seu tamanho. Concluíram que a tensão de flambagem em placas perfuradas sempre diminui conforme aumenta o índice de esbeltez da placa e que esse decréscimo é mais acentuado para grandes valores de esbeltez, principalmente para furos de menor diâmetro.

Paik (2007) utilizou o MEF para analisar o comportamento elasto-plástico de placas perfuradas sob carregamento biaxial compressivo combinado com cisalhamento de borda, por ser um carregamento típico em cascos de embarcações, e a partir disso analisaram os resultados de resistência máxima das placas de aço com perfuração central sob compressão biaxial combinada à cargas de cisalhamento de borda por meio da derivação de fórmulas empíricas das relações entre as placas perfuradas e cargas combinadas. Por meio de uma análise não linear utilizando elementos finitos (MEF) compararam esses resultados com os resultados analíticos.

El-Sawy e Martini (2009) utilizaram MEF para analisar a estabilidade de uma placa quadrada perfurada submetida a carregamento biaxial, onde concluíram que a medida que aumenta o diâmetro da perfuração, menor a resistência e estabilidade da placa. Também identificaram o índice de esbeltez em que o fenômeno de flambagem muda de elástica para elasto-plástica.

Correia et al. (2012) aplicaram o Design Construtal a placas perfuradas submetidas à flambagem elástica para obter otimizações geométricas em relação a perfuração, onde analisaram placas com furos elípticos, retangulares e losangulares submetidas a compressão uniaxial. Concluíram que, para uma relação de volume entre o furo e a placa menor que 0,20 o furo losangular era a melhor geometria, com uma carga crítica 80% maior que a placa sólida.

Correia et al. (2013) utilizaram Design Construtal para otimizar geometricamente placas finas perfuradas, submetidas à compressão uniaxial, tendo como objetivo obter a geometria ótima do furo que maximizasse a carga crítica de flambagem. Com base nos resultados observaram que placa que apresentou melhor desempenho quando comprimida axialmente foi a que possuía relação  $b/a = 1$ .

Folzke et al. (2014) avaliaram a influência da geometria de quatro diferentes tipos de furos na flambagem elástica de placas de aço perfuradas. Uma comparação entre os tipos de furo foi realizada, considerando as geometrias ótimas entre os casos estudados. Observaram que o furo elíptico possui um comportamento mecânico sob flambagem elástica 1,49%, 3,03% e 5,43% superior se comparado aos furos oblongo transversal, retangular e oblongo longitudinal, respectivamente.

Baptista (2014) utilizou a simulação numérica para analisar o comportamento pós-flambagem de placas finas de aço sob compressão uniaxial em estruturas navais e offshore, onde foi analisado um grupo de 150 placas com perfuração cilíndrica, em que manteve-se constante o comprimento e variando a largura e espessura, assim como o diâmetro do furo. Foi constatado que a carga máxima é consideravelmente reduzida devido à inserção do furo, que quanto mais espessa a placa maior sua resistência e também foi possível concluir que a capacidade de carga é raramente afetada pela variação do comprimento da placa.

Helbig (2016) utilizou o MEF, associados ao método Design Construtal e À Busca Exaustiva, para analisar a influência do tipo, da forma e do tamanho da perfuração, no comportamento mecânico de placas finas submetidas às flambagens elástica e elasto-plástica.

Da Silveira (2016) utilizou a simulação numérica, a técnica da Busca Exaustiva e o método Design Construtal para a otimização estrutural de placas de material compósito submetidas à carregamento biaxial compressivo. Analisou placas com e sem perfurações e concluiu que para placas de material compósito quanto maior sua relação entre volume do furo e o volume da placa, menor será a carga crítica de flambagem.

Barbosa (2018) analisou o comportamento em flambagem e pós-flambagem de painéis aeronáuticos reforçados com laminado de camada fina em comparação ao laminado de camada grossa. Constatou que o laminado de camada fina possui maior capacidade de suportar as cargas impostas.

Silveira et al. (2021a) evidenciaram a aplicação do Design Construtal em problemas de mecânica dos sólidos, por meio de um estudo onde realizaram a análise de tensões em placas quadradas, de aço, perfuradas e carregadas biaxialmente, quando submetidas ao fenômeno de flambagem elasto-plástica, utilizando o MEF associado ao Design Construtal e à técnica da Busca Exaustiva.

Silveira et al. (2021b) realizaram uma análise numérica da flambagem biaxial elasto-plástica em placas perfuradas retangulares, usando MEF associado ao Design Construtal, com o objetivo de obter a geometria da perfuração elíptica com melhor desempenho em flambagem. Concluíram que a variação de geometria das perfurações elípticas proporcionou uma diferença de desempenho de até 42% entre a geometria ótima e a pior.

## 1.2. Objetivos Gerais e Específicos

O objetivo geral do presente trabalho consiste na análise e no estudo do comportamento mecânico de placas finas de aço submetidas a carregamento biaxial de compressão que possibilite a observação da ocorrência do fenômeno de flambagem elasto-plástica, por meio de uma análise numérica através do Método dos Elementos Finitos (MEF) em associação ao método do Design Construtal (DC) e a técnica da Busca Exaustiva (BE).

Os objetivos específicos consistem em:

- I. Obter inicialmente a tensão última de flambagem elasto-plástica biaxial de uma placa plana sem perfurações utilizando MEF através do software ANSYS®;
- II. Avaliar a influência da inclusão de uma perfuração elíptica centralizada na placa por meio da variação da fração volumétrica ( $\phi$ ), dada pela relação entre o volume da perfuração em relação ao volume da placa;
- III. Avaliar a influência da geometria da perfuração elíptica na tensão última de flambagem, variando do grau de liberdade  $b_0 / a_0$ , em que  $a_0$  é o comprimento do furo na direção X e  $b_0$  a largura do furo na direção Y;
- IV. Aplicação do método Design Construtal (DC) e Busca Exaustiva (BE), como ferramentas de otimização, buscando definir as geometrias ótimas dentre as configurações analisadas.

### **1.3. Justificativa**

Levando em consideração que as placas finas tem uma grande variedade de aplicações na engenharia, como nas indústrias naval e aeroespacial, setor de óleo e gás, até mesmo no setor automobilístico há grande aplicabilidade desses elementos. Em determinadas situações, onde essas placas atuam como elemento estrutural, podem estar submetidas a carregamentos que levam à flambagem.

Nesse contexto, tendo em vista a necessidade de mais estudos relacionados a esse fenômeno em placas, o presente trabalho abordará a análise do comportamento de placas finas perfuradas, quando estas são submetidas a carregamentos biaxiais que ocasionam o fenômeno de flambagem elasto-plástica no elemento. Ainda serão analisados os efeitos da inserção de uma perfuração elíptica na placa, aplicando o método Design Construtal (DC) com o Método dos Elementos Finitos (MEF) associados com a técnica da Busca Exaustiva (BE).

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

A título de embasamento teórico desse trabalho, a revisão de literatura abordará os seguintes tópicos: O estudo de placas, o estudo da flambagem elástica e elasto-plástica, o método dos elementos finitos (MEF) e a aplicação do método Design Construtal.

## 2.1. Estudo de Placas

A primeira abordagem matemática no estudo de placas finas foi realizada por Euler em 1766, quando o matemático resolveu problemas de vibrações livres de membranas elásticas retangulares, circulares e triangulares utilizando a analogia de dois sistemas de cordas esticadas perpendiculares umas às outras. Em continuação, o seu aluno Jaques Bernuolli deu seguimento aos estudos, utilizando grelhas de vigas em substituição as cordas, onde conseguiu descobrir sua rigidez a flexão. (SZILARD, 2004).

Em 1809 foi desenvolvida uma solução considerada realista pelo físico alemão Chladini que, em seus estudos de acústica, desenvolveu diversos experimentos com placas vibratórias, onde encontrou vários modos de vibrações e suas respectivas frequências utilizando uma camada de pó fino sobre a placa, camada esta que quando exposta a uma vibração se concentrava em determinadas regiões onde o deslocamento era zero, e estas receberam o nome de linhas nodais.

Muito impressionado com os resultados, o imperador Napoleão propôs um prêmio para quem desenvolvesse a teoria de placas comparando com os resultados de Chladini (1809). Houve apenas um artigo que foi recebido em 1811, da matemática francesa Sophie Germain que desenvolveu a primeira equação diferencial da teoria de placas, usando a energia de deformação. Porém no desenvolvimento da equação diferencial Germain cometeu um erro pois faltava um termo na equação. Lagrange (1816) revisando o trabalho, corrigiu a equação adicionando o termo faltante, assim sendo a primeira pessoa a apresentar a equação geral da placa (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001; SZILARD, 2004).

Em 1814 Cauchy e Poisson foram os primeiros a formular um problema de placas baseado nas equações gerais da teoria da elasticidade, onde utilizaram a abordagem de uma superfície média da placa que seria composta por partículas que eram expostas a forças moleculares. E com essa abordagem, chegaram na mesma equação diferencial de Germain-Lagrange, porém ao considerarem uma superfície média da placa, a rigidez da placa foi definida como um termo constante.

A primeira teoria de placas satisfatória é associada a Navier (1823), que considerou a espessura da placa na equação geral de placas, como uma função da rigidez e introduziu um método que transformou a equação diferencial em expressões algébricas usando series de Fourier (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).

Gustav R. Kirchhoff (1850) desenvolveu a primeira teoria completa da flexão de placas baseando-se nas hipóteses de vigas de Bernoulli, derivando as mesmas equações diferenciais para flexão de placas que Navier, porém utilizando uma abordagem diferente de energia. Sua importante contribuição para a teoria de placas foi a introdução de forças de borda suplementares. Analisando grandes deflexões de placas, descobriu que os termos não lineares não poderiam mais ser desconsiderados. Outra grande contribuição de Kirchhoff foi o desenvolvimento de uma equação de frequência para placas e a introdução de deslocamentos virtuais envolvendo placas. (SZILARD, 2004).

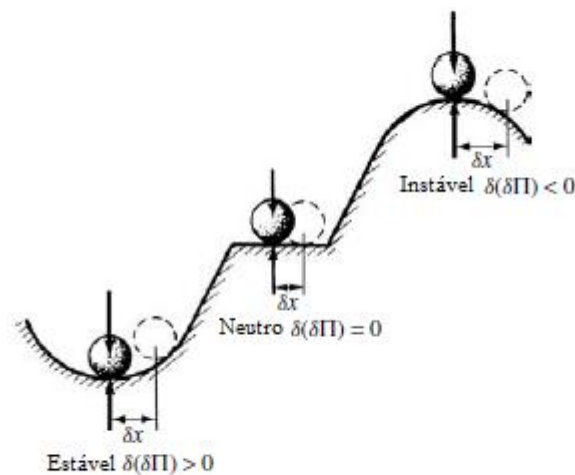
Entre o fim do século XIX e início do século XX os construtores de navios mudaram seus métodos de construção, substituindo madeira por aço estrutural, essa mudança surtiu vários benefícios no desenvolvimento das teorias de placas. Os cientistas russos fizeram uma grande contribuição para a engenharia naval, em especial Krylov and Bubnov. Bubnov foi o primeiro a introduzir uma classificação moderna de placas, propondo um novo método de integração das equações diferenciais da elasticidade e desenvolveu tabelas de deflexões máximas e momentos fletores máximos para placas com várias propriedades (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).

Föppl, em seu livro de engenharia mecânica tratou da teoria não linear de placas, no entanto, a forma final da equação diferencial da teoria de grandes deflexões foi desenvolvida pelo húngaro von Kármán, que posteriormente em seus trabalhos também investigou o problema da largura efetiva e o comportamento pós-flambagem das placas. (SZILARD, 2004).

## 2.2. Estudo da Flambagem Elástica

Dependendo principalmente dos valores de carga aplicados no plano, a configuração de equilíbrio da placa pode ser estável ou instável. A configuração inicial de equilíbrio elástico é estável se, quando a placa é deslocada desse estado de equilíbrio por uma perturbação infinitesimal, quando cessada a carga a placa tende a voltar ao seu estado original. A configuração inicial que se entende por instável, é quando a placa é deslocada da posição de equilíbrio por uma pequena força, quando a carga é cessada a placa não mais retorna ao seu plano original. (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001). A Fig. 2 demonstra uma analogia aos três estados de equilíbrio.

Figura 2: Analogia aos estados de equilíbrio.



Fonte: Adaptado de Szilard (2004).

A transição da placa do estado de equilíbrio estável para instável é conhecida como flambagem ou instabilidade estrutural e o valor do carregamento que produz esse fenômeno é chamado de carga crítica ou carga de flambagem (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).

O primeiro estudo significativo da flambagem de placas é associado a Navier (1823) que considerando os estudos de Kirchhoff, derivou a equação da estabilidade de placas submetidas a carregamento lateral. Em 1883 Saint-Venant modificou a equação adicionando condições de carregamento axial e de cisalhamento nas bordas da placa, o que possibilitou embasamento teórico para a utilização em estudos de estabilidade de placas submetidas a diversos tipos de carregamento. (HELBIG, 2016).



Ainda segundo o Helbig (2016), Bryan foi o primeiro a obter os valores da carga crítica utilizando método da energia, assumindo que a flambagem da superfície poderia ser representada por uma série dupla de Fourier. Em 1925 Timoshenko resolveu o mesmo problema por meio de outra abordagem, quando considerou que a flexão da placa formava semiondas senoidais na direção comprimida.

### **2.3. Estudo da Flambagem Elasto-plástica**

Em certas situações é interessante analisar o estado de deformações em flambagem, dessa forma é introduzida a flambagem elasto-plástica. Placas submetidas à pós-flambagem apresentam um comportamento diferente de outras estruturas como barras que, no momento que estas são expostas à um carregamento maior que o valor crítico, entram em colapso imediatamente, o que não pode ser presenciado em placas, pois apresentam cargas últimas bem mais elevadas que a carga crítica no estado de flambagem linear. (HELBIG, 2016).

As primeiras abordagens com foco no estado de deformação no comportamento em flambagem, denominado flambagem inicial, foram realizadas por Engesser em 1895 e Von Karman em 1910. Os estudos iniciais baseavam-se no estado de deformação elasto-plástico, quando o equacionamento se resumia a um problema de autovalor, o qual resultava nos modos de flambagem e na carga de flambagem (HELBIG, 2016).

El-Ghazaly e Sherbourne em 1986 realizaram uma análise comparativa da flambagem elasto-plástica entre a teoria da deformação e experimentos práticos, onde por meio da aplicação de carga, descarga e recarga analisaram a flambagem elasto-plástica de placas sob tensões e carregamentos desproporcionais e concluíram que a teoria da deformação se mostrava efetiva para a solução desses problemas (YU, 2003).

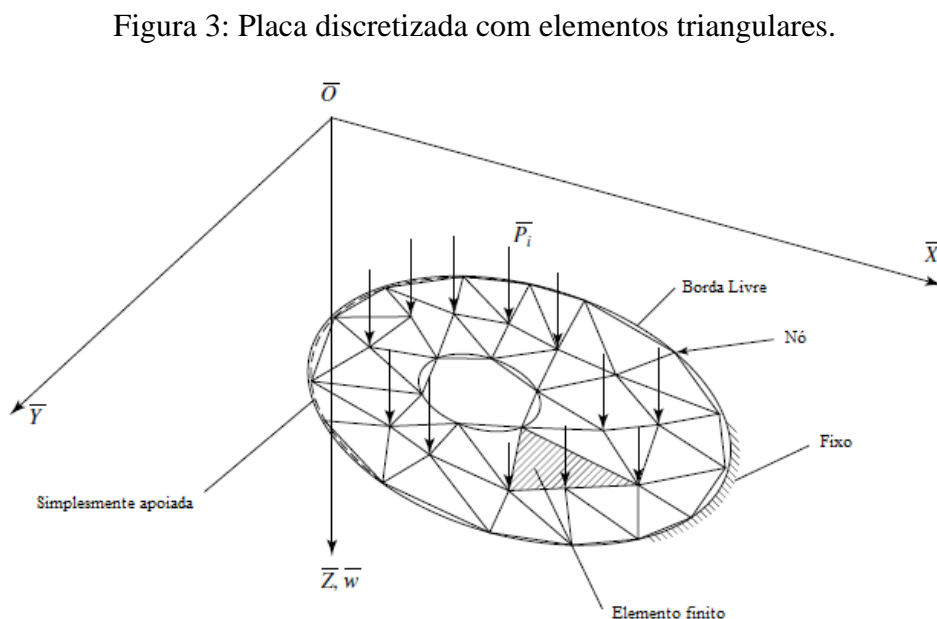
Segundo Ákesson (2007), a capacidade das placas de suportarem uma carga maior que a crítica em flambagem se dá pela formação de uma membrana que estabiliza o deslocamento através de uma tensão transversal, ou seja, a placa deformada sofre reorganização das suas tensões, que segundo o autor se dá pelo efeito dos grandes deslocamentos presentes na estrutura durante esse fenômeno.

Esse efeito segundo Ventsel e Krauthammer (2001) se dá também pelas condições de contorno da placa que evitam o acréscimo de deslocamentos laterais em cargas inferiores à carga última da flambagem elasto-plástica assim possibilitando o aumento do valor dessas cargas.

## 2.4. Método dos Elementos Finitos

O objetivo geral dos métodos numéricos é fornecer dados computacionais para a obtenção de soluções numéricas aproximadas para problemas difíceis de resolver analiticamente (SZILARD, 2004). Dessa forma, poupam muito tempo na resolução desses problemas, visto que, determinados problemas podem levar muito tempo para serem resolvidos analiticamente e em muitas situações pode-se dizer que é impossível resolve-los sem o auxílio computacional. Alguns problemas simplesmente não possuem uma solução analítica.

Dessa forma, o método dos elementos finitos (MEF) se baseia no conceito de que qualquer domínio contínuo pode ser substituído por um conjunto de elementos de formato simples com forças, deslocamentos e relações materiais bem definidas. Derivar uma solução de uma forma fechada para um domínio contínuo é muitas vezes inviável, enquanto pode-se derivar uma solução aproximada com relativa facilidade para um determinado conjunto de elementos que o substitui (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001). A Figura 3 ilustra o exemplo de uma placa discretizada com elementos triangulares:



Fonte: Adaptado de Szilard (2004).

Segundo Liue Quek (2003), o método dos elementos finitos é utilizado para a resolução de vários problemas de engenharia, entre eles podem ser citados os principais tipos:

- Problemas de mecânica estrutural e mecânica dos sólidos;
- Transferência de calor;
- Mecânica dos fluidos;
- Problemas de acústica e vibrações .

O comportamento de um fenômeno em um determinado sistema depende da geometria ou domínio do sistema, das propriedades do material ou do meio e das condições de contorno iniciais e do carregamento. E para um problema de engenharia essas variáveis podem se tornar bem complexas de resolver analiticamente, dessa forma entram os métodos numéricos e a modelagem computacional.

Segundo Szilard (2004) o procedimento de modelagem utilizando o MEF pode ser descrito nos seguintes passos:





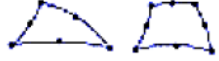


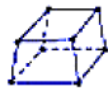


- Discretização do domínio;
- Formulação da matriz de rigidez do elemento;
- Montagem dos elementos em uma estrutura de placa (Aplicação da malha);
- Especificações das condições de contorno iniciais e de carregamentos;
- Solução das equações da matriz de deslocamentos resultante;
- Avaliação dos resultados.

Estruturas, componentes e domínios reais, geralmente são complexos demais para serem representados, dessa forma procura-se simplificar ou reduzir alguns aspectos do domínio de forma a tornar a análise mais simples, visto que alguns aspectos de uma geometria ou domínio não são necessariamente relevantes para uma determinada análise, apenas aumentando o esforço computacional e conseqüentemente o tempo de cálculo (LIU e QUEK, 2003).

Segundo Szilard (2004), na discretização da placa, idealiza-se seu domínio utilizando linhas imaginárias para dividi-lo em vários elementos finitos bidimensionais. Esses elementos são considerados interconectados em seus pontos nodais. Os deslocamentos destes pontos nodais são as incógnitas básicas, semelhantes à análise de deslocamento da matriz de estruturas emolduradas.

A geração da malha de elementos finitos é uma das etapas mais importantes do pré-processamento, de modo que o sucesso de uma simulação depende de uma boa malha e da escolha correta do elemento, visto que dependendo do domínio a ser analisado há um ou mais tipos de elementos que se adequam melhor (LIU e QUEK, 2003). A figura 4 apresenta os tipos de elementos de malha mais usados e suas principais aplicações.

Figura 4: Tipos de elementos finitos usados em simulação numérica.

Dimension	Degree	Element Shape	Element Type
<b>1D (Line)</b>	Linear		Beam, Truss
	Quadratic		Beam
	Cubic		Beam
<b>2D (Area)</b>	Linear		Plane stress Plane strain Plate, Shell
	Quadratic		
	Cubic		
<b>3D (Volume)</b>	Linear		
	Quadratic		

Fonte: Adaptado de ANSYS® (2003).

Segundo Liu e Quek (2003), muitos sistemas de engenharia podem ser constituídos por vários materiais diferentes, portanto com propriedades diferentes. Essas propriedades podem ser inseridas no modelo como um todo ou podem ser inseridas individualmente em cada elemento se necessário. Porém muitas propriedades podem não ser relevantes, sendo assim desnecessárias dependendo do tipo de problema e da análise a ser feita.

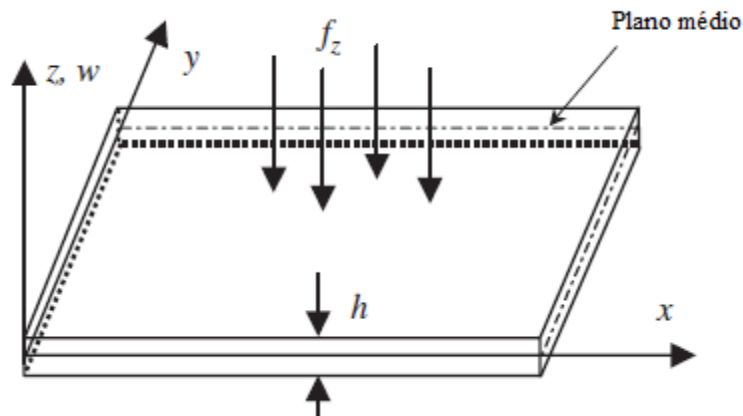
As condições de contorno iniciais e de carregamento são de papel determinante para a solução de um problema de engenharia. E o modo como se adicionam essas condições afetam diretamente na precisão da simulação, visto que essas condições basicamente definem os

fenômenos atuantes no sistema e como ele vai se comportar ao ser exposto a esses fenômenos (LIU e QUEK, 2003).

Para um elemento de placa (ou casca), há uma relação entre os deslocamentos nos pontos nodais e as forças e momentos aplicados nos nós. Essa relação é dada por uma matriz chamada de Matriz de rigidez (VENTSEL e KRAUTHAMMER, 2001). A solução dessa matriz possibilita a resolução de um problema de placa.

Uma estrutura de placa é geometricamente semelhante à uma estrutura de tensões no plano 2D, porém geralmente sofre apenas carregamentos transversais, que ocasionam deformação de flexão na placa. Uma estrutura de placa pode ser representada pelo seu plano médio ( $xy$ ) e as deformações causadas pelo carregamento transversal na placa são representadas pela deflexão e rotação (LIU e QUEK, 2003). A Figura 5 mostra a representação de uma estrutura de placa e seus respectivos eixos coordenados.

Figura 5: Representação da placa em seu plano médio.



Fonte: Adaptado de Liu e Quek (2003).

## 2.5. Método Design Construtal

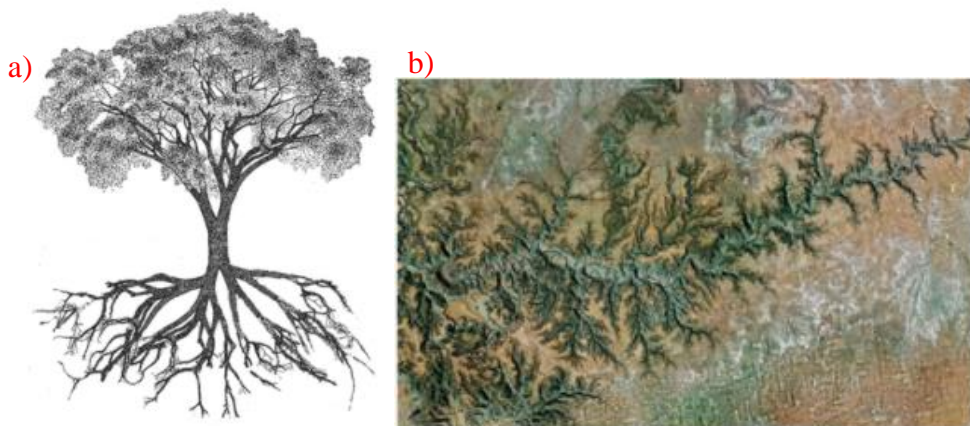
A Lei Construtal, que foi proposta por Adrian Bejan em 1997, consiste em um método de análise construtiva baseada nos fluxos naturais. O método Design Construtal, forma pela qual a Lei Construtal é aplicada na engenharia, é regido por três pensamentos fundamentais que descrevem como os aspectos geométricos são determinados (Bejan e Lorente, 2008):

- A vida é um fluxo, onde qualquer sistema de fluxo é um sistema vivo, sendo ele animado ou inanimado;
- Tanto a geração de design quanto a sua evolução são fenômenos físicos, sendo assim baseados em um princípio físico fundamental;
- Todos os sistemas tendem a evoluir em um determinado sentido no tempo.

A Teoria Construtal é a visão de que a geração de estruturas de fluxo que vemos em toda parte da natureza (bacias hidrográficas, pulmões, circulação atmosférica, tecidos vascularizados, etc.) podem ser fundamentadas com base em um princípio evolutivo de aumento do acesso ao fluxo no tempo, este princípio é chamado de Lei Construtal (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008).

Segundo Bejan e Zane (2012), para um sistema de fluxo de tamanho finito persistir no tempo (para viver), ele deve evoluir de forma a proporcionar um acesso cada vez maior às correntes que o atravessam. Esse princípio é aplicável em qualquer escala, à sistemas vivos ou não, ou seja, para qualquer sistema de fluxo. A Fig. 6 mostra exemplos práticos da aplicação do DC em sistemas vivos e não vivos.

Figura 6: Exemplos práticos da aplicação da Lei Construtal para sistemas naturais de fluxo.  
a) Copa e raízes de uma árvore. b) Leito de um rio.



Fonte: Adaptado de (<http://www.kogainon.com/K/Pages/Bejan/Title.html>).

Segundo Bejan (2000) e Bejan e Lorente (2008) o Design Construtal define que os projetos devem evoluir ao longo do tempo de modo a encontrar as configurações cada vez melhores que possibilitem a otimização das correntes que fluem através dele.

Lorente et al. (2010) afirma que o Design Construtal mostra que a geração das formas e a evolução física são fenômenos macroscópicos que surgem naturalmente para fornecer condições cada vez melhores de fluxo. Essa evolução ocorre em todas as escalas, desde estruturas de bacias hidrográficas, florestas e ruas, onde sistemas menores se fundem em sistemas cada vez maiores de modo que possibilitem um fluxo cada vez mais fácil, até sistemas de redes neurais, sistemas circulatórios e pulmonares.

Segundo Bejan e Lorente (2008), um sistema de fluxo visto pela Teoria Construtal, está destinado a permanecer imperfeito, de modo que a sua direção no sentido evolutivo irá sempre ao encontro da melhor distribuição dessas imperfeições, possibilitando que um corpo fluido escoie sempre de maneira mais fácil, mas sempre permitindo a evolução constante.

A aplicação da Teoria Construtal na engenharia se dá por meio do método Design Construtal, que relaciona os graus de liberdade, restrições globais e parâmetros de performance, em busca de obter a geometria que desempenhe os melhores resultados quando exposta a algum tipo de fluxo e/ou escoamento, sendo este necessariamente maleável (Bejan e Zane, 2012).

Porém, configurações de sistemas de fluxo não se apresentam sozinhas. Essas configurações são limitadas e suportadas por estruturas sólidas que dão força e rigidez. Dessa forma essas estruturas se modificam para se adequarem à estrutura de fluxo (Bejan e Lorente, 2006).

Segundo Bejan e Lorente (2008), a utilização do DC na mecânica dos sólidos deve seguir a mesma abordagem que estruturas de fluxo, onde deve-se visualizar uma estrutura mecânica como uma rede pela qual os fluxos de tensões passam de componente para componente. Da mesma maneira que em estruturas de fluxo deve-se evitar estrangulamentos, pois a melhor configuração é uma distribuição uniforme de estrangulações do fluxo. Esse conceito é também utilizado na mecânica dos sólidos, onde concentrações de tensões máximas não são benéficas para o desempenho da estrutura, uma vez que o melhor desempenho é obtido quando o fluxo máximo de tensões é distribuído uniformemente ao longo do material.

Essa abordagem de fluxo de tensões não é algo comum, porém é muito efetiva quando deseja-se descobrir a melhor distribuição de tensões em uma estrutura. Em cada mecanismo de falha, pode-se obter uma forma mais adequada de permitir o fluxo de tensões, de forma a

maximizar as cargas quando o volume se mantém constante, ou otimizar o volume de material quando se tem um carregamento constante (Lorente et al., 2010).

Da Silveira et al. (2021a) realizaram um estudo no qual conseguiram comprovar que o Design Construtal pode ser aplicado na resolução de problemas de engenharia estrutural, como método eficaz para avaliação geométrica. Obtiveram resultados que comprovam a eficácia da aplicação do Design Construtal, com o MEF e a Busca Exaustiva na resolução de problemas de mecânica dos sólidos.

O método da Busca exaustiva é considerado um método funcional e útil quando se deseja realizar processos de otimizações em que não se possui um grande conhecimento sobre o comportamento do sistema. O método se baseia em uma análise sistêmica de possíveis soluções geradas sucessivamente, até que se obtenha a solução aceitável ou se esgote o número de tentativas estipuladas. Por se tratar de uma técnica de baixa complexidade, se tem a vantagem de que se pode pesquisar funções com os demais comportamentos, em que não se faz necessário nenhum tipo de suposição sobre a característica da função, apenas deve-se estipular um intervalo de análise (Khoury e Harder, 2016).

### **3. METODOLOGIA**

A metodologia utilizada neste trabalho tem como objetivo a análise do comportamento de placas finas perfuradas sob ação de carregamento biaxial e a determinação da geometria ótima para desempenho em flambagem elasto-plástica utilizando modelos computacionais aplicados simultaneamente com o design construtal e a busca exaustiva. A ferramenta utilizada para o estudo do comportamento das placas foi o software ANSYS 2020 R1 que é baseado no MEF. Esse software é utilizado para a resolução de diversos problemas de engenharia, e possibilita a obtenção de resultados confiáveis em um curto período de tempo.

#### **3.1.Flambagem Elástica e Elasto-plástica de placas no ANSYS®**

Para a análise da flambagem elasto-plástica de placas, primeiramente, faz-se necessária a análise da flambagem elástica para a mesma placa (Wang et al., 2004). Essa necessidade se faz presente, pois, a configuração inicial do primeiro modo de flambagem elástica, é tomada como base para definir a configuração deformada para a flambagem elasto-plástica. O ANSYS® é um software comercial frequentemente empregado na análise numérica de



problemas de engenharia. O mesmo é baseado no MEF que já foi brevemente apresentado anteriormente.

### 3.1.1. Flambagem Elástica

A resolução de problemas de flambagem elástica utilizando o software ANSYS, se dá pela solução de problemas de autovalores. Na análise pelo método dos elementos finitos, as equações de equilíbrio são analisadas através de equações algébricas homogêneas, em que o autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor associado representa o primeiro modo de flambagem (Madenci e Guven, 2015).

O sistema de equações para uma malha de elementos finitos é descrito de forma matricial (Madenci e Guven, 2015):

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (1)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez do sistema,  $\{U\}$  é o vetor de incógnitas e  $\{F\}$  é o vetor força, ainda dependendo da natureza do problema, a matriz  $[K]$  pode ser dependente de  $\{U\}$ , ou seja,  $\{K\}=[K(U)]$  e  $\{F\}$  pode ser dependente do tempo, ficando  $\{F\}=\{F(t)\}$ .

Na formulação de problemas de flambagem de placas, devem ser considerados os termos lineares e não-lineares. Dessa forma obtém-se a matriz de rigidez  $[K]$ , por meio da soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações,  $[K_E]$ , com a matriz de rigidez geométrica  $[K_G]$ , onde a matriz  $[K_G]$  depende da geometria e do esforço normal de compressão  $\{\bar{N}_0\}$ , que atua no início do carregamento. Portanto, a matriz rigidez total para um determinado carregamento pode ser descrita como:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (2)$$

Então, no momento em que a carga atinge o nível  $\{\bar{N}\} = \lambda\{\bar{N}_0\}$ , a matriz pode ser descrita como:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \quad (3)$$

onde  $\lambda$  é um escalar.

As equações, governantes, de equilíbrio para uma placa, podem ser definidas como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{\bar{N}_0\} \quad (4)$$

em que  $\{U\}$  é um vetor deslocamento total.

Na análise de flambagem de placas, pode ocorrer crescimento nos deslocamentos mesmo que não ocorra incremento de carga. Por definição matemática, pode-se determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos  $\{U\}$  tendem ao infinito quando (PRZEMIENIECKI, 2009):

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \quad (5)$$

Dessa forma, resolvendo essa função determinante, segundo ANSYS® *User's Manual* (2009) obtém-se o menor autovalor  $\lambda_1$ , que é equivalente ao valor da carga crítica de flambagem, que pode ser expressa como:

$$\{N_{cr}\} = \lambda_1 \{\bar{N}_0\} \quad (6)$$

esta é a carga limite em que se inicia o fenômeno de instabilidade da flambagem elástica e o vetor deslocamento  $\{U\}$  define a forma do modo de flambagem.

### 3.1.2. Flambagem Elasto-plástica

Já na flambagem elasto-plástica, a análise se torna mais complexa devido ao comportamento da relação tensão-deformação do material quando este ultrapassa o regime elástico (Szilard, 2004). Portanto, faz-se necessária uma abordagem por métodos numéricos, que são amplamente utilizados em problemas de pós-flambagem.

Para se realizar uma análise de flambagem não linear, é necessária uma condição inicial de um pequeno valor de imperfeição a partir do primeiro modo da flambagem elástica, visto que, um problema de pós-flambagem possui problemas de descontinuidades de respostas no ponto de equilíbrio neutro (ponto de bifurcação), não possibilitando a uma análise exata diretamente (Da Silveira, 2021).

El-Sawy et al. (2004) realizaram vários testes para a obtenção da tensão última de flambagem com valores pequenos de imperfeições e obtiveram os melhores resultados da tensão para:

$$w_0 = \frac{b}{2000} \quad (7)$$

onde  $w_0$  é o valor da imperfeição inicial e  $b$  é a largura da placa.

Então, para a obtenção da carga última de flambagem utiliza-se como base que  $P_y = \sigma_y t$ , em que  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material. Pelo método Newton-Raphson obtém-se os incrementos individualmente, e determina-se o deslocamento correspondente à configuração de equilíbrio da placa por meio das equações (Helbig, 2016):

- Na etapa inicial de carregamento  $i + 1$ , há um vetor de cargas em desequilíbrio  $\{\psi\}$ , igual ao incremento de carga  $\{\Delta\bar{N}\}$ , entre o vetor de carregamentos externos,  $\{\bar{N}\}_{i+1}$ , e o vetor forças internas não lineares  $\{F_{NL}\}$ , o qual é igual ao vetor de carregamentos externos precedente,  $\{\bar{N}\}_i$ , como pode ser visto na Eq. (8);
- Então, o método Newton-Raphson é aplicado iterativamente para reduzir o vetor de cargas em desequilíbrio,  $\{\psi\}$ , à um valor abaixo da tolerância prescrita, aplicando as Eqs. 9 a 11 (Lima et al.,2020).

$$\{\psi\} = \{\Delta\bar{N}\} = \{\bar{N}\}_{i+1} - \{\bar{N}\}_i = \{\bar{N}\}_{i+1} - \{F_{NL}\}_i \quad (8)$$

$$\{\psi\}_{r+1} = \{\bar{N}\}_{i+1} + \{F_{NL}\}_r \quad (9)$$

$$\{\psi\}_{r+1} = [K_t]_r + \{\Delta U\}_{r+1} \quad (10)$$

$$\{U\}_{r+1} = \{U\}_r + \{\Delta U\}_{r+1} \quad (11)$$

onde  $[K_t]_r$  é a matriz de rigidez tangente calculada a partir do deslocamento  $\{U\}_r$ ,  $\{\Delta U\}_{r+1}$  é o vetor de incrementos de deslocamentos, atualizado,  $\{F_{NL}\}_r$  é o vetor de forças internas nodais não lineares da iteração  $r$ ,  $\{\psi\}_r$  é o vetor de cargas em desequilíbrio atualizado e  $\{U\}_{i+1}$  corresponde ao vetor de deslocamentos, atualizado.

Se em uma determinada carga não se atingir a convergência, ou seja, um valor finito de incremento no vetor de deslocamentos não puder ser determinado de maneira que o vetor de cargas em desequilíbrio seja nulo, então a carga última de flambagem foi obtida. Isso acontece porque, não importa o tamanho dos deslocamentos e deformações atingidas, se as tensões e esforços internos correspondentes não obtiverem a magnitude necessária para equilibrar os esforços externos, o material atingiu seu limite de resistência e irá colapsar (HELBIG, 2016).

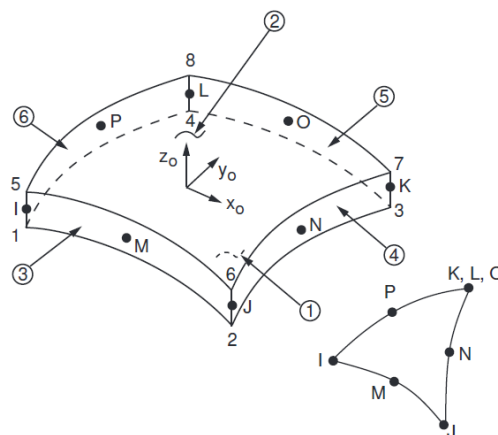
### 3.2. Modelo Computacional

Segundo Helbig (2016), na análise de estruturas complexas é muito comum utilizar-se de soluções aproximadas, em função da dificuldade de resolução das equações diferenciais e/ou pela impossibilidade de resolução analítica em alguns casos. Dentre essas soluções podem ser destacados os métodos semi-analíticos e os métodos numéricos. Os métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin, são caracterizados como semi-analíticos, enquanto o método das diferenças finitas, dos elementos finitos, dos elementos de contorno e dos sem malha (*meshless*), estão entre os métodos numéricos.

Segundo Liu e Quek (2003), elementos de casca tem a capacidade de suportar esforços em todas as direções, estando então sujeitos a esforços de flexão e torção, bem como deformações no plano. Tanques cilíndricos e fuselagens de aviões são exemplos de estruturas que devem ser modeladas utilizando elementos de casca.

Como no processo de simulação numérica de problemas de placas no ANSYS® se faz necessário o uso de um elemento de casca, o elemento de análise utilizado neste trabalho é o elemento SHELL 281 conforme a ilustração da Fig. 7, que pode ser utilizado na análise de estruturas finas até moderadamente espessas de acordo com ANSYS® *User's Manual* (2009). A geometria da Fig. 7, detalha o posicionamento dos nós no elemento e o seu respectivo sistema de coordenadas. Também pode ser usado um elemento triangular com a mesma quantidade de nós, de forma que três nós compartilham a mesma posição.

Figura 7: Geometria do elemento SHELL 281.



Fonte: Adaptado de ANSYS® (2009).

O elemento SHELL 281 caracteriza-se por possuir oito nós com seis graus de liberdade cada um, sendo esses três de rotação e três de translação, ou seja, cada eixo possui liberdade de rotação e translação. É um dos elementos de casca mais utilizados, pois apresenta bons resultados na análise de estruturas finas, como placas e cascas, à moderadamente espessas (ANSYS, 2009; DA SILVEIRA, 2020).

### 3.3. Design Construtal aplicado à flambagem de placas

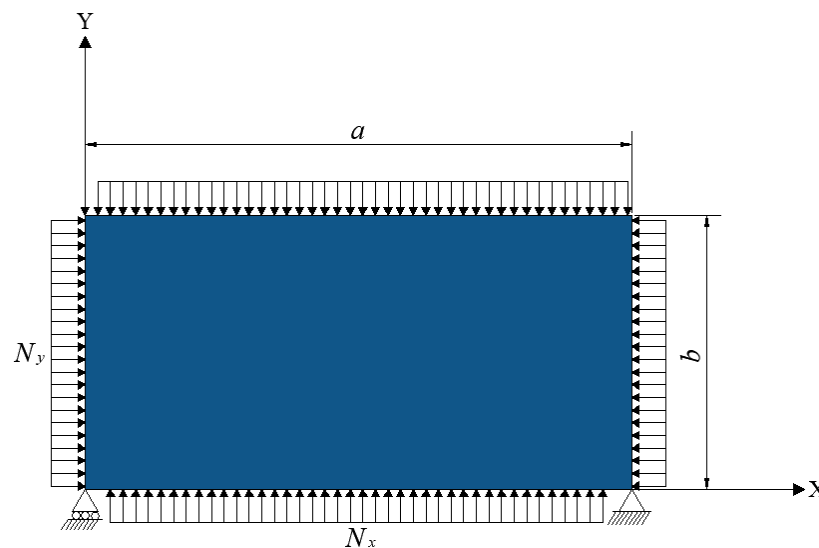
Segundo Helbig (2006), o método Design Construtal tem por condição para sua aplicação, a existência de um ou mais graus de liberdade e restrições, de modo que a função objetivo possa ser satisfeita.

Com base nessa condição, no presente trabalho, será considerado um grau de liberdade,  $b_0 / a_0$ , referente à razão de aspecto da perfuração elíptica inserida em uma placa retangular  $b/a = 0,5$  sendo esta razão de aspecto da placa uma das restrições do problema.

Como parâmetro de performance é utilizada a Tensão Última Normalizada, o fator NUS (*Normalized Ultimate Stress*), pelo qual deve-se buscar a maximização das tensões na placa. Ainda para casos em que se obtenha o NUS igual para diferentes geometrias, utiliza-se um segundo fator de performance NMD (*Normalized Maximum Deflection*), o qual busca-se o menor deslocamento possível.

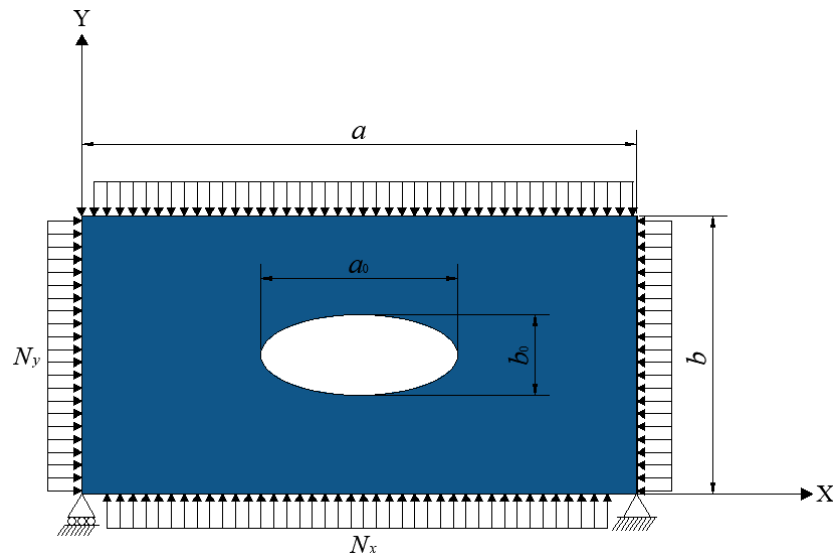
As Fig. 8 e Fig. 9 apresentam as placas de referência e perfurada, respectivamente.

Figura 8 :Modelo de placa retangular de referência.



Fonte: Adaptado de Da Silveira (2021).

Figura 9: Modelo de placa perfurada.



Fonte: Adaptado de Da Silveira (2021).

Outra restrição imposta pelo método do Design Construtal será a espessura da placa ( $t$ ). A variação geométrica dos furos testados é governada pela fração volumétrica do furo ( $\phi$ ), sendo este parâmetro uma terceira restrição do problema, que é dada pela relação entre o volume do furo ( $V_0$ ) e o volume total da placa sem perfuração ( $V$ ), ficando assim mantida a quantidade de material removida pela perfuração, variando a geometria do furo elíptico apenas com base na relação  $b_0/a_0$ .

A fração volumétrica para uma placa retangular, com perfuração elíptica é definida como:

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{\left[ \frac{(\pi a_0 b_0 t)}{4} \right]}{(abt)} = \frac{(\pi a_0 b_0)}{(4ab)} \quad (12)$$

onde,  $\phi$  é a fração volumétrica,  $a$  é o comprimento da placa,  $b$  é a largura da placa,  $t$  é a espessura da placa,  $a_0$  é o comprimento do furo,  $b_0$  é a largura do furo.

Para a aplicação do Design Construtal, mantém-se constante o valor da fração volumétrica e razão  $b/a$  e variando-se o grau de liberdade  $b_0/a_0$ . Essa variação se dá da seguinte maneira: Para  $a_0$ , mantém-se valores inteiros pré-determinados, e para  $b_0$  usam-se valores que satisfaçam a condição de igualdade imposta pela fração volumétrica ( $\phi$ ). De forma a se obter em uma relação  $b_0/a_0 = 1$ , quando o furo assume formato circular, deve-se calcular um valor de  $a_0$  que satisfaz essa relação.

De acordo com Da Silveira (2021), deve-se evitar resultados que sejam afetados pelos efeitos de borda na placa. Dessa forma, adotou-se um valor limite para a distância da borda do furo e a borda da placa de 10% do comprimento total da placa na direção em questão. Outra restrição adotada para que as perfurações respeitem as relações máximas e mínimas do grau de liberdade  $b_0/a_0$ , de modo a evitar geometrias muito alongadas, foi a relação de 5:1, para que  $0,2 \leq b_0/a_0 \leq 5$ .

### **3.4. Teste de convergência de malha**

Quando se deseja resolver problemas de flambagem de placas utilizando MEF, se faz necessário que o tamanho do elemento finito que será utilizado nas simulações, seja definido. Dito isso o teste de convergência de malha é um passo importante para se analisar a resposta obtida pelo refino da malha, assim possibilitando a melhor escolha do tamanho do elemento que possibilite uma boa acurácia conjuntamente com um esforço computacional mínimo possível (Da Silveira, 2021).

O teste foi realizado para placas retangulares, com furo circular centralizado de diâmetro igual a 500 mm. A placa analisada possui dimensões:  $a = 2000$  mm,  $b = 1000$  mm e  $t = 12$  mm. Foi gerada uma malha ao longo de toda placa, com elementos quadriculares de tamanhos iguais. A Tabela 1 apresenta os valores obtidos de tensão última respectiva a cada tamanho de elemento.

Tabela 1: Tabela de convergência de malha.

Elemento (mm)	$(\sigma_u)$	Diferença (%)
100	35,5000	0
50	35,5000	0
40	35,5000	0
30	35,5000	0
25	34,6125	2,56
15	34,6125	0

Fonte: Autor.

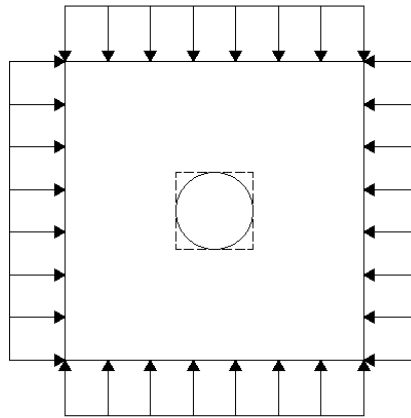
Com base nos dados obtidos, constata-se que os elementos de tamanho  $100\text{mm}$  à  $30\text{ mm}$ , apresentam estabilidade no resultado da tensão última, portanto, deve-se escolher um tamanho de elemento que esteja dentro desse intervalo. Com base na acurácia e custo computacional aceitáveis, decidiu-se optar por um elemento de tamanho  $50\text{ mm}$  para o caso estudado.

### 3.4.1. Verificação do modelo computacional para flambagem elasto-plástica biaxial

O modelo computacional foi verificado para análise da flambagem elasto-plástica biaxial de uma placa quadrada simplesmente apoiada (ver Fig. 10), tendo como base o estudo executado por Shanmugan et al. (1999), onde desenvolveu equações analíticas para determinação da tensão última de flambagem ( $\sigma_u$ ). A placa analisada possui dimensões  $a = b = 125\text{ mm}$ ,  $t = 6,25\text{ mm}$  e furo circular centralizado de  $25\text{ mm}$  de diâmetro. Para o material utilizado tem-se que sua tensão de escoamento  $\sigma_y = 355\text{MPa}$ . Utilizando o elemento SHELL281 de tamanho  $2\text{mm}$  para manter-se a proporcionalidade em relação ao tamanho da placa, foram comparados os dados apresentados das equações propostas por Shanmugan, onde obteve-se uma tensão última de aproximadamente  $\sigma_u = 282\text{MPa}$ , enquanto no modelo computacional obteve-se uma tensão última aproximadamente de  $\sigma_u = 301\text{MPa}$ , causando uma diferença entre os resultados de  $6,87\%$ .



Figura 10: Modelo de placa quadrada e suas condições de carregamento.



Fonte: Adaptado de Shanmugan et al. (1999).

### 3.4.2. Validação do modelo computacional para flambagem elasto-plástica biaxial

O modelo computacional foi validado para análise da flambagem elasto-plástica biaxial de uma placa quadrada simplesmente apoiada, tendo como base o estudo experimental executado por Narayanan e Chow (1984). As dimensões da placa foram de  $a = b = 125$  mm,  $t = 1,625$  mm e furo circular centralizado no diâmetro de 25 mm. O material utilizado no experimento possuía tensão de escoamento  $\sigma_y = 323,3$  MPa. O resultado obtido no experimento foi uma tensão última  $\sigma_u = 73,8$  MPa, enquanto o modelo proposto utilizando o elemento SHELL281 com tamanho 2mm, apresentou um resultado de  $\sigma_u = 80,8$  MPa, com uma diferença entre os resultados de 9,52%.

### 3.5. Problema estudado

O problema estudado no presente trabalho consiste em aplicar a Modelagem Computacional às placas finas de aço, com o objetivo de obter o fator de desempenho  $NUS$  da flambagem elasto-plástica. Por meio de modelos computacionais previamente validados e verificados, utilizando o software ANSYS®, serão submetidas a carregamentos biaxiais, placas com furos elípticos e placas sem perfurações (placa de referência).

As placas serão submetidas à carregamentos compressivos biaxiais ( $\bar{N}_x$  e  $\bar{N}_y$ ), de mesma amplitude, distribuídos ao longo das bordas da placa (ver Fig. 8 e Fig. 9). As placas analisadas serão retangulares ( $b/a = 0,5$ ), com perfuração elíptica centralizada, no qual serão analisadas as frações volumétricas  $\phi = 0,10; 0,15; 0,20$ . Dessa forma as placas estudadas possuem  $a=2000$  mm,  $b = 1000$  mm e  $t = 12$  mm. Com relação aos furos, serão centralizados na placa orientados paralelamente ( $\alpha = 0^\circ$ ) em relação ao eixo horizontal (eixo X) . Como proposto por El-Sawy et al. (2004) a imperfeição inicial da flambagem elasto-plástica atende a Eq. (7).

Quanto ao material a ser utilizado, admite-se um material isotrópico e que assume comportamento elasto-plástico perfeito. Foi escolhido o aço estrutural AH-36, também conhecido como aço naval, com módulo de elasticidade (módulo de Young)  $E = 210$ GPa, coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,3$  e tensão de escoamento igual à  $\sigma_y = 355$  MPa (Bebon, 2011; Adak e Soares, 2014; Enwergy, 2014). Com relação às condições de contorno, será uma placa na condição de apoio simples nas quatro bordas da placa de modo a restringir o deslocamento em Z ( $U_z = 0$ ) e de modo a impedir a translação da placa em X e Y ( $U_x = U_y = 0$ ), aplica-se dois pontos de fixação conforme apresenta a Fig. 9.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos e discussões para cada configuração de placa estudada.

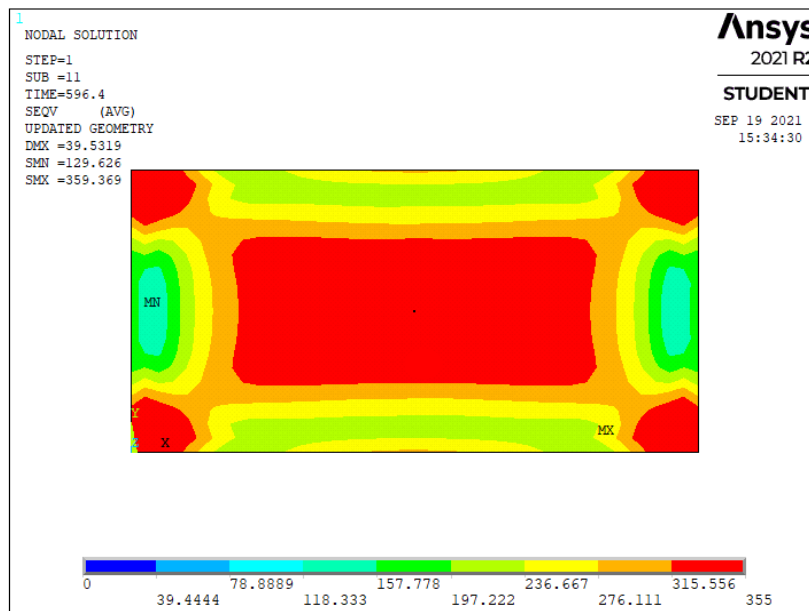
Foram realizadas simulações para placas retangulares com razão de aspecto  $b/a = 0,5$ , onde  $b = 1000$  mm e  $a = 2000$  mm, com sua espessura  $t = 12$  mm, onde o objetivo era de identificar os comportamentos ótimos. As frações volumétricas analisadas foram  $\phi = 0,10; 0,15; 0,20$ , em que para cada fração volumétrica, foi realizada a variação de aspecto do furo mantendo-se sempre o volume da perfuração constante, de modo a garantir sua fração volumétrica. Como forma de evitar o efeito das bordas e das condições de contorno do problema, no resultado final, estipulou-se  $0,2 \leq b_0/a_0 \leq 5$  como forma de não possibilitar furos muito alongados. Ainda, uma distância entre o furo e a borda da placa deve ser mantida de pelo menos 10% do comprimento da placa na mesma direção.

As simulações para cada geometria foram executadas e o fator NUS foi calculado para cada fração volumétrica e para cada grau de liberdade  $b_0/a_0$ . Para o cálculo do fator NUS,

utilizou-se como referência o valor de tensão última obtido com a placa de referência sem perfuração conforme o exposto na Fig. 11, onde obteve-se uma tensão  $\sigma_{ur} = 49,7$  MPa.

Para os casos em que mais de uma geometria obtiveram fator NUS máximo, utilizou-se como segundo fator de performance o fator NMD, que foi baseado na deflexão máxima da placa de referência sem perfuração  $U_{zr} = 39,4$  mm.

Figura 11: Distribuição de tensões na placa sem perfuração.

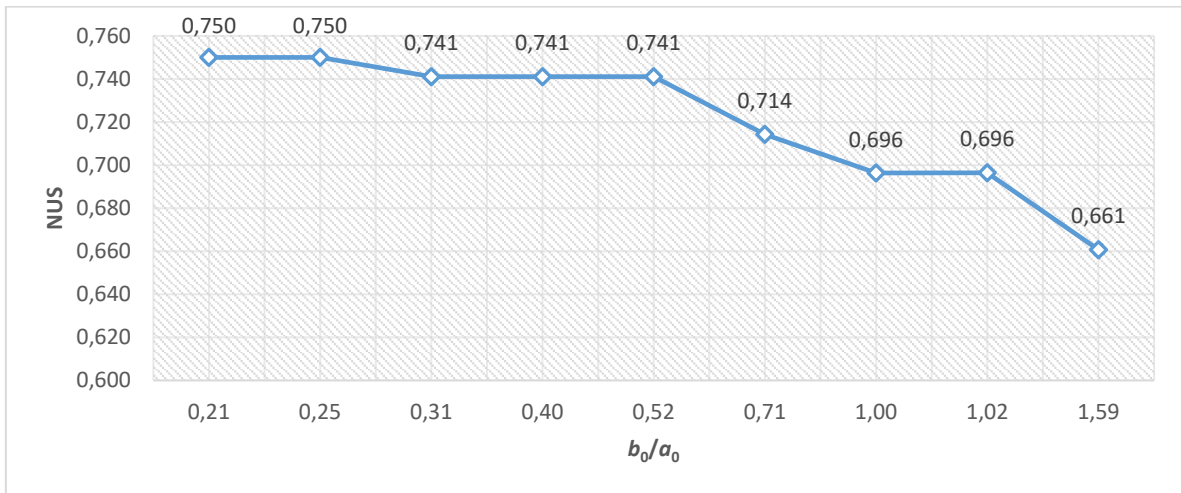


Fonte: Autor (2021).

#### 4.1. Placa com fração volumétrica $\phi=0,10$

Nas placas com fração volumétrica de  $\phi = 0,10$ , obteve-se os resultados apresentados na Fig. 12, onde a escala vertical representa o fator NUS e a escala horizontal representa o grau de liberdade  $b_0/a_0$  do furo.

Figura 12: Fator NUS x Grau de liberdade  $b_0/a_0$  do furo (Placa  $\phi = 0,10$ ).



Fonte: Autor (2021).

A Fig. 12 apresenta os resultados obtidos para a placa com fração volumétrica  $\phi = 0,10$  onde os valores de NUS são apresentados em função da variação do grau de liberdade  $b_0/a_0$ , e pode-se notar que os valores de NUS diminuem com o aumento do grau de liberdade. Também, com base nos resultados apresentados identificou-se que as placas com razão de aspecto  $b_0/a_0 = 0,210$  e  $0,255$  obtiveram o maior valor de  $NUS = 0,75$ .

Dessa forma, seguindo a metodologia descrita no Capítulo 3, utilizou-se um segundo fator de performance baseado nas deflexões. Ao utilizar-se o NMD busca-se o menor deslocamento transversal da placa ( $U_z$ ). Aplicando o fator NMD obteve-se os resultados de deflexão das duas placas conforme a Tabela 2.

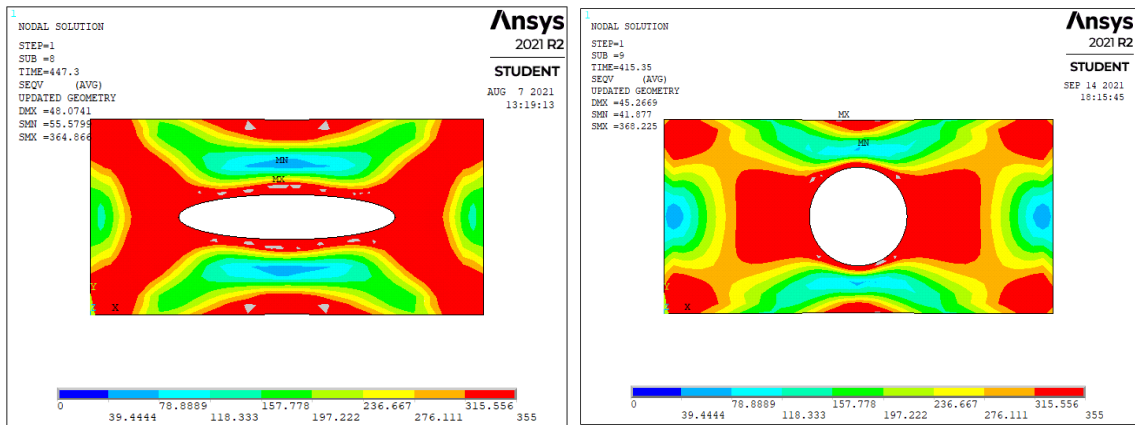
Tabela 2: Comparação das placas que obtiveram maior NUS ( $\phi = 0,10$ ).

Placa	$b_0/a_0$	NUS	NMD
01	0,210	0,75	1,219
02	0,255	0,75	1,234

Fonte: Autor (2021).

Analisando os resultados expostos na Tabela 2, com base no fator de performance NMD pode-se determinar que a placa que possui melhor desempenho é a placa 01, com  $NUS = 0,75$  e  $NMD = 1,219$ . Ainda como parâmetro qualitativo, pode-se observar na Fig. 13 a comparação da distribuição das tensões de von Mises na placa 01 que obteve o melhor desempenho e na placa 09 que obteve o pior desempenho.

Figura 13: a) Distribuição das tensões na superfície da placa 01. b) Distribuição das tensões na superfície da placa 09.



Fonte: Autor (2021).

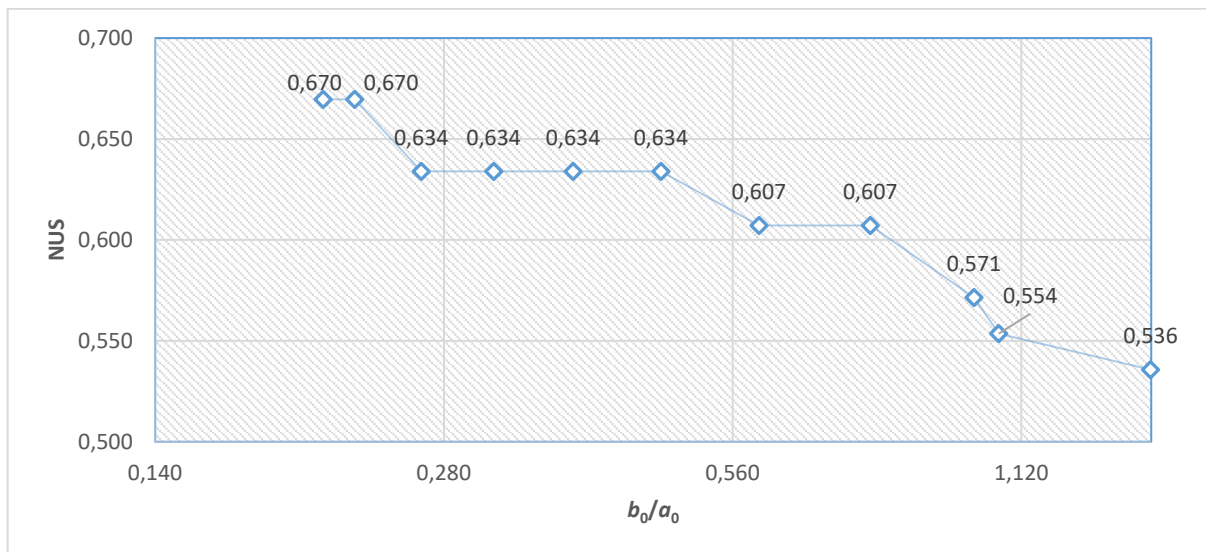
Observando a Fig. 13a pode-se notar que as tensões máximas (representadas na cor vermelha) estão melhor distribuídas na superfície da placa o que possibilita que a mesma, suporte o acréscimo de carga em relação a placa 09 representada na Fig. 13b, onde as tensões máximas ficam mais concentradas na borda do furo.

Analisando o comportamento mostrado na Fig. 12, percebe-se que um grau de liberdade  $b_0/a_0$  menor possibilita uma maximização na distribuição das tensões.

#### 4.2. Placa com fração volumétrica $\phi=0,15$

Nas placas com fração volumétrica de  $\phi = 0,15$ , obteve-se os resultados apresentados na Fig. 14, onde a escala vertical representa o fator NUS e a escala horizontal representando a Grau de liberdade  $b_0/a_0$ .

Figura 14: Fator NUS x Grau de liberdade  $b_0/a_0$  (Placa  $\phi = 0,15$ ).



Fonte: Autor (2021).

Com base nos resultados apresentados identificou-se que as placas com razão de aspecto  $b_0/a_0 = 0,210$  e  $0,226$  obtiveram o maior valor de  $NUS = 0,67$ .

Conforme descrito na metodologia descrita no Capítulo 3, utilizou-se um segundo fator de performance baseado nas deflexões, ao utilizar-se o NMD busca-se o menor deslocamento transversal da placa ( $U_z$ ). Aplicando o fator NMD obteve-se os resultados de deflexão das duas placas conforme a Tabela 3.

Tabela 3: Comparação das placas que obtiveram maior fator NUS ( $\phi = 0,15$ ).

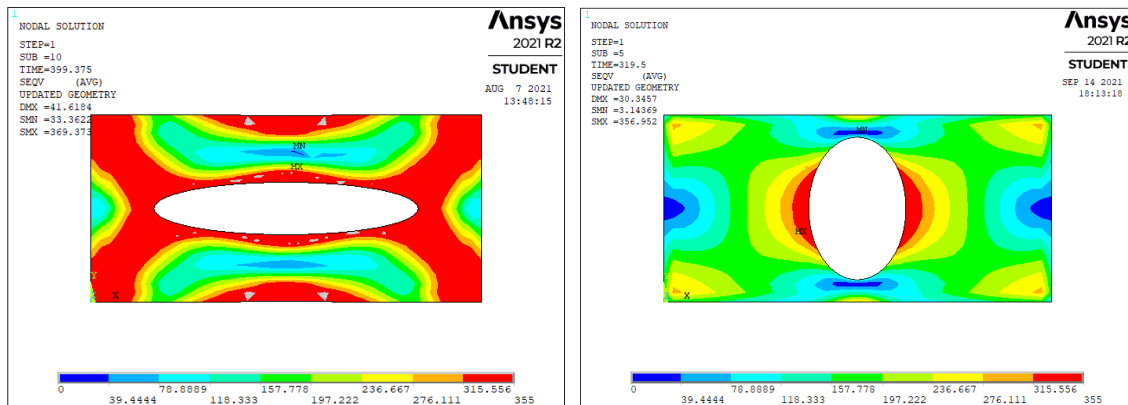
Placa	$b_0/a_0$	NUS	NMD
01	0,210	0,67	1,054
02	0,226	0,67	1,134

Fonte: Autor (2021).

Analisando os resultados expostos na Tabela 3, com base no fator de performance NMD pode-se determinar que a placa que possui melhor desempenho é a placa 01, com  $NUS = 0,67$  e  $NMD = 1,054$ .

Ainda como parâmetro qualitativo, pode-se observar na Fig. 15 a comparação da distribuição das tensões de von Mises na placa 01 que obteve o melhor desempenho e na placa 11 que obteve o pior desempenho.

Figura 15: a) Distribuição das tensões na superfície da placa 01. b) Distribuição das tensões na superfície da placa 11.



Fonte: Autor (2021).

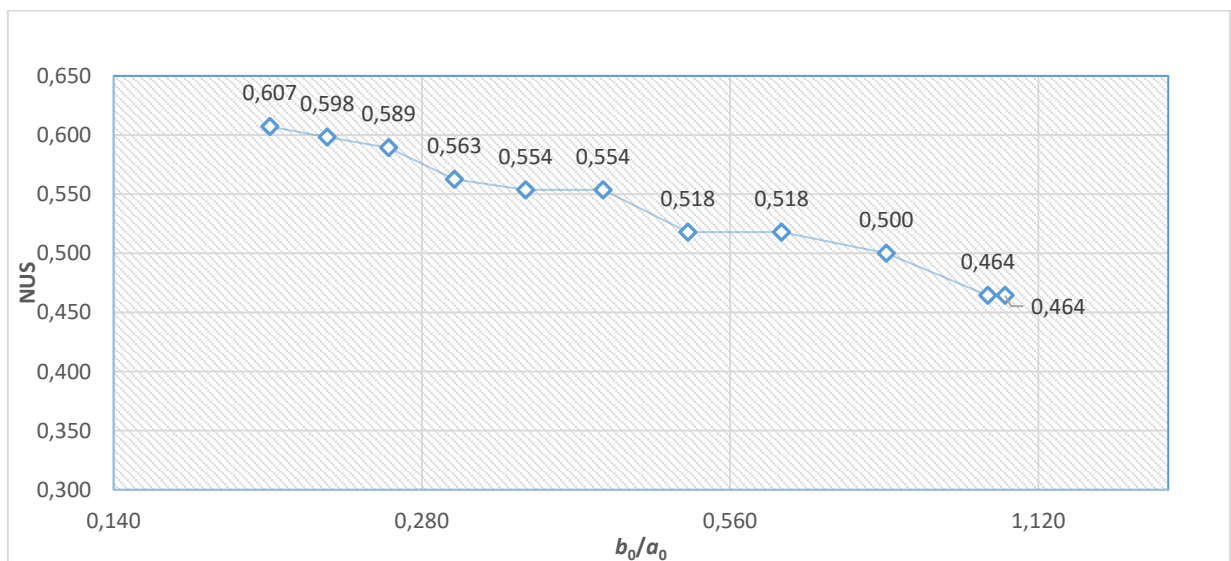
Observando a Fig. 15a pode-se notar que as tensões máximas, entendidas como as imperfeições do problema e que estão representadas pela cor vermelha, se distribuem de forma muito mais otimizada na superfície da placa 01 que possibilita que a placa suporte o acréscimo de carga em relação a placa 11 representada na Fig. 15b, onde as tensões máximas ficam mais concentradas na borda do furo e o restante da placa está, em sua maioria, submetido apenas à baixas tensões.

Analisando os dados da Fig. 14, nota-se que conforme o grau de liberdade  $bo/a0$  aumenta, o fator NUS diminui. Esse comportamento mostra que uma razão de aspecto menor possibilita uma maximização do fator NUS à medida que as imperfeições do sistema (máximas tensões de von Mises) são melhor distribuídas ao longo da placa.

### 4.3. Placa com fração volumétrica $\phi=0,20$

Nas placas com fração volumétrica  $\phi = 0,20$ ; obteve-se os resultados apresentados na Fig. 16, onde a escala vertical representa o fator NUS e a escala horizontal representando o grau de liberdade  $b_0/a_0$  do furo. Com base nos resultados apresentados identificou-se que apenas a placa com razão de aspecto  $b_0/a_0 = 0,2$  obteve o maior valor de NUS = 0,607.

Figura 16: Fator NUS x Grau de liberdade  $b_0/a_0$  (Placa  $\phi = 0,20$ ).

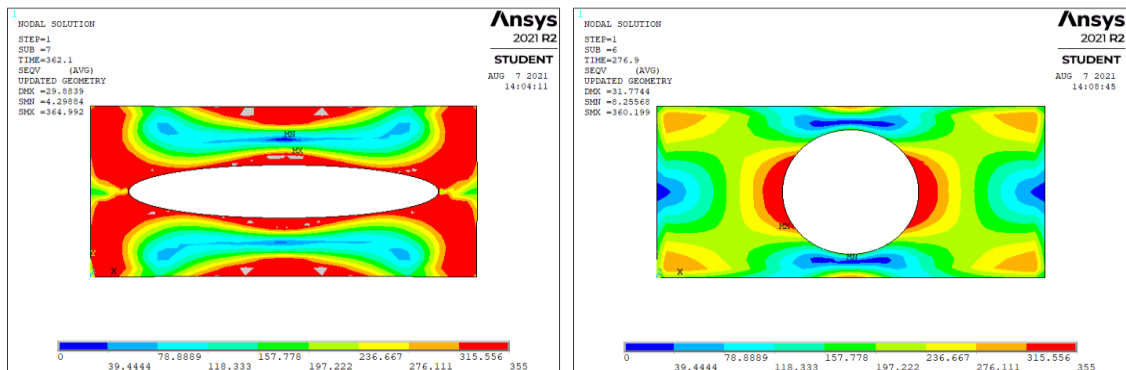


Fonte: Autor (2021).

A Fig. 16, mostra que o fator NUS da placa apresenta um comportamento decrescente em relação ao aumento do grau de liberdade  $b_0/a_0$ . Ainda, na Fig. 17 são apresentadas as distribuições de tensões de von Mises para as placas 01 e 11.



Figura 17: a) Distribuição das tensões na placa 01. b) Distribuição das tensões na placa 11.



Fonte: Autor (2021).

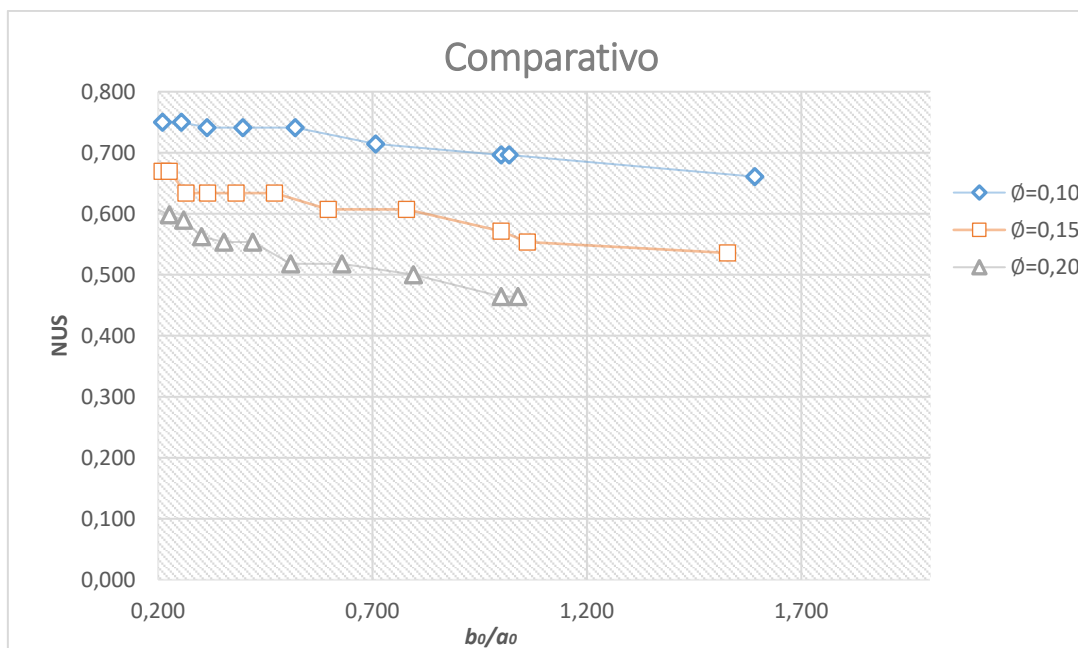
Observando a Fig. 17a pode-se notar que as máximas tensões de von Mises (representadas pela cor vermelha) estão melhor distribuídas na superfície da placa o que possibilita que haja o acréscimo da carga que leva a estrutura ao colapso global, quando comparada à placa 11 representada na Fig. 17b, onde as tensões máximas de von Mises ficam mais concentradas na borda do furo. Também nota-se que o desempenho da placa decai conforme o aumento do grau de liberdade  $b_0/a_0$ .

#### 4.4. Análise geral das placas

Após a análise individual de cada placa, foi feita uma comparação geral entre as placas, para identificar a geometria que apresentava os melhores resultados dentro o intervalo analisado conforme mostra a Fig. 18.

Na Fig. 18 são apresentados os resultados comparativos entre todas as placas analisadas ( $\phi = 0,10; 0,15; 0,20$ ), em que se pode ter uma noção de ordem de grandeza de quanto a melhor placa desempenha em relação a pior.

Figura 18: Comparativo entre os resultados das placas analisadas.



Fonte: Autor (2021).

Com base nos resultados expostos na Fig. 18, do comparativo entre as frações volumétricas dos furos, pode-se obter algumas informações importantes.

Percebe-se que as placas com maior fator NUS são as que possuem menor fração volumétrica. Também pode-se ver que para as três frações volumétricas analisadas, as curvas obtidas (ver Fig. 18) apresentam comportamento semelhante com relação à variação do grau de liberdade  $b_0/a_0$ , em que o valor da tensão última da placa diminui com o aumento de  $b_0/a_0$ .

Dentre as placas analisadas a placa que apresentou o melhor resultado foi a placa com fração volumétrica  $\phi = 0,10$ , para um grau de liberdade  $b_0/a_0 = 0,21$ ; a qual obteve um fator NUS = 0,75 e um fator NMD = 1,49; sendo este um desempenho 62% superior ao da placa que obteve menor fator NUS para  $\phi = 0,20$ .

Pode-se também ressaltar que apesar de haver apenas uma geometria ótima, os resultados mostram que para as placas analisadas há uma faixa em que a geometria possibilita um bom desempenho. Isso é um ponto positivo quando se fala de aplicações práticas (visto que todo processo de fabricação tem imperfeições e variações), de modo que permite-se uma certa variabilidade na geometria da perfuração para obter-se resultados de resistência satisfatórios.

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho estudou a flambagem elasto-plástica biaxial de placas finas de aço com perfurações elípticas através da associação do método dos elementos finitos (MEF), do método Design Construtal (DC) e da técnica da Busca Exaustiva (BE). Foi possível constatar que a união desses três métodos é efetiva na otimização geométrica de placas perfuradas, assim como foi comprovado em Da Silveira et al (2021a). Sendo assim, pôde-se obter algumas conclusões sobre o desempenho das placas analisadas e definir uma geometria ótima segundo os parâmetros de análise já estabelecidos.

Analisando as placas com fração volumétrica  $\phi = 0,10$ , constatou-se que a placa com geometria ótima com  $b_0/a_0 = 0,151$ , obteve um desempenho 14% superior à placa com pior desempenho,  $b_0/a_0 = 1,592$ . Na fração volumétrica de  $\phi = 0,15$ , a placa que obteve melhor resultado com  $b_0/a_0 = 0,149$ , obteve um incremento de 25% em relação a pior geometria com  $b_0/a_0 = 1,528$ . Já para a fração volumétrica  $\phi = 0,20$ , a placa de melhor desempenho foi  $b_0/a_0 = 0,157$ ; a qual obteve um acréscimo de carga de 31% em relação a placa de pior resultado  $b_0/a_0 = 1,039$ .

Na análise geral entre todas as placas estudadas, constatou-se que a placa que obteve melhor desempenho com  $\phi = 0,10$  e  $b_0/a_0 = 0,151$ , proporcionou uma performance 62% superior à placa que obteve o pior resultado com  $\phi = 0,20$  e  $b_0/a_0 = 1,039$ . Por meio dessa análise comparativa dos resultados, percebeu-se que o fator NUS diminui à medida que a fração volumétrica ( $\phi$ ) aumenta e/ou quando há o aumento do grau de liberdade  $b_0/a_0$ .

## 6. TRABALHOS FUTUROS

Analisando os resultados do trabalho foi possível retirar várias observações importantes sobre o estudo de placas. Também o presente estudo associado à análise de trabalhos relacionados, trouxe vários questionamentos sobre o comportamento de placas finas, o que é um ponto positivo, pois é dos questionamentos que surgem as descobertas. Dessa forma o presente trabalho abre caminho para a continuação do estudo de forma mais aprofundada, para que possa ser possível mapear o comportamento das placas conforme mudam-se as suas características geométricas.

## REFERÊNCIAS

- ADAK, M.; SOARES, C. G. **Effects of different restraints on the weld-induced residual deformations and stresses in a steel plate**. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 71, p. 699-710, 2014.
- ÅKESSON, B. **Plate Buckling in Bridges and Other Structures**. London, UK: Taylor & Francis, 2007. ISBN 978-0-415-43195-8.
- ANSYS. **User's Manual: Analysis Systems**. ANSYS Inc., 2009.
- ANSYS. **Fundamental FEA Concepts and Applications**. ANSYS Inc., 2003.
- ANSYS MECHANICAL APDL. **Version 15.0 –User's Guide**, ANSYS Inc. 2015.
- BEBON, Henan. **AH36 Shipbuilding steel plate**. Manufacturer's catalogue of materials, 2011.
- BARBOSA, T. **Comportamento em flambagem e pós-flambagem de painel aeronáutico reforçado com laminado de camada fina versus camada grossa**, 2018. Trabalho de conclusão de curso. Belo Horizonte, MG, Brasil: Universidade Federal de Minas Gerais – Escola de Engenharia.
- BAPTISTA, L.G. **Simulação numérica não-linear do comportamento pós flambagem de placas finas de aço sob compressão uniaxial em estruturas navais e offshore**, 2014. Dissertação de Mestrado. Rio Grande, RS, Brasil: Universidade Federal do Rio Grande –FURG.
- BEJAN, A. **Constructal Law**. Kogainon.com. Disponível em: <<http://www.kogainon.com/K/Pages/Bejan/Two.html>>. Acesso em: 27 Apr. 2021.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with Constructal Theory**. Int. J. Engng, Britain, v. 22, p. 140-147, 2006. Disponível em: <https://www.ijee.ie/articles/Vol22-1/IJEE1726.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2021.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **Design with constructal theory**. New Jersey: John Wiley Sons, 2008.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **The constructal law of design and evolution in nature**. Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci., [s. l.], p. 1335–1347, 2010. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2871904/>. Acesso em: 15 fev. 2021.
- BEJAN, A.; LORENTE, S. **The constructal law and the evolution of design in nature**. Physics of life reviews, [s. l.], p. 209-240, 2011. Disponível em: [https://www.academia.edu/15482630/The\\_constructal\\_law\\_and\\_the\\_evolution\\_of\\_design\\_in\\_nature](https://www.academia.edu/15482630/The_constructal_law_and_the_evolution_of_design_in_nature). Acesso em: 15 fev. 2021.
- BEJAN, A.; ZANE, J.P. **Design in Nature: How the Constructal Law Governs Evolution in**

**Biology, Physics, Technology, and Social Organization.** 1. ed. [S. l.: s. n.], 2012. 309 p. ISBN 9780385534628. *E-book* (309p.).

CHENG, B.; Zhao, J. **Strengthening of Perforated Plates under Uniaxial Compression: Buckling Analysis.** *Thin-Walled Structures*, v. 48, n. 12, p. 905-914, 2010. ISSN 0263-8231.

CORREIA, A. L. G.; DA SILVEIRA, T.; DA SILVA, C. C. C.; ROCHA, L. A. O.; REAL, M. de V.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. **Construtal Design Aplicado a placas perfuradas submetidas à flambagem.** XXI Mostra da produção universitária, Rio Grande, RS, 2012.

CORREIA, A. L. G.; DA SILVEIRA, T.; DA SILVA, C. C. C.; ROCHA, L. A. O.; REAL, M. de V.; DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. **Construtal Design Aplicado a placas perfuradas submetidas à flambagem.** *Vetor*, Rio Grande, RS, 2013.

DA SILVEIRA, T. **Simulação numérica e Design Construtal aplicados à flambagem biaxial elasto-plástica de placas perfuradas.** 2020. Tese (Qualificação Doutorado em Modelagem Computacional) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2021.

DA SILVEIRA, T. et al., **Applicability Evidence of Constructal Design in Structural Engineering: Case Study of Biaxial Elasto-Plastic Buckling of Square Steel Plates with Elliptical Cutout,** *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021a, 1–13. <https://doi.org/10.22055/JACM.2021.35385.2647>

DA SILVEIRA, T; NEUFELD, J P S; ROCHA, L A O; *et al.* **Numerical analysis of biaxial elasto-plastic buckling of perforated rectangular steel plates applying the Constructal Design method.** *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, v. 1048, n. 1, p. 012017, 2021b. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1048/1/012017/meta>>. Acesso em: 27 Apr. 2021.

DA SILVEIRA, T. **Simulação numérica e Design Construtal aplicados à flambagem biaxial de placas de material compósito utilizadas em estruturas navais,** 2016. Dissertação de Mestrado. Rio Grande, RS, Brasil: Universidade Federal do Rio Grande –FURG.

DA SILVEIRA, T.; FOLZKE, E.G. G.; LIMA, J. P. S.; ROCHA, L. A. O.; DOS SANTOS, E. D.; REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. **Numerical Simulation and Constructal Design Applied to the Study of Elastic Buckling in Thins Steel Plates with Transversal Oblong and Longitudinal Oblong Perforations.** VII Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica, Rio Grande, RS, 2016.

DURBAN, D.; ZUCKERMAN, Z. Elastoplastic buckling of rectangular plates in biaxial compression/ tension. **International Journal of Mechanical Sciences**, Faculty of Aerospace

Engineering, Technion, Haifa 32000, Israel, p. 751-765, 1999. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020740398000551>. Acesso em: 15 fev. 2021.

EL-SAWY, K. M.; NAZMY, A. S.; MARTINI, M. I. **Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression**. *Thin-Walled Structures*, [s. l.], ed. 42, p. 1083-1101, 2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0263823104000497>. Acesso em: 15 fev. 2021.

EL-SAWY, K. M.; MARTINI, M. I. **Stability of biaxially loaded square plates with single central holes**. *Ships and Offshore Structures*, [s. l.], p. 283-293, 2010.

ENWEGY, H. M. **Modeling repair patches of ship hull and studying the effect of their orientation on stresses**, 2014. Masters Thesis. Florida, USA: University of Central Florida.

FOLZKE, E.; CORREIA, A.; DA SILVEIRA, T.; ROCHA, L.; SANTOS, E.; REAL, M. ISOLDI, L. **Simulação numérica e Construtal Design aplicados à flambagem elástica de placas finas de aço**. VI Seminário e workshop em engenharia oceânica. 2014.

HELBIG, D.; Real, M. D. V.; Correia, A. L. G.; Santos, E. D. D.; Isoldi, L. A. **Constructal Design of Perforated Steel Plates subject to Linear Elastic and Nonlinear Elastoplastic Buckling**. XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013. Pirenópolis - GO. November 10-13.

HELBIG, D. **Estudo numérico de placas finas de aço com perfuração, submetidas à flambagem elástica e elasto-plástica, aplicando-se o método design construtal**, 2016. (Doutorado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

KHOURY, R.; HARDER, D. W. **Numerical Methods and Modelling for Engineering**. Springer International Publishing, 2016.

LIMA, J. P. S.; CUNHA, M. L.; DOS SANTOS, E. D.; ROCHA, L. A. O.; REAL, M. V.; ISOLDI, L. A. **Constructal Design for the ultimate buckling stress improvement of stiffened plates submitted to uniaxial compressive load**. *Engineering Structures*, v. 203, n. 109883, 2020.

LIU, G.R.; QUEK, S.S. **Finite Element Method: A Practical Course**. Burlington: Butterworth Heinemann, 2003. 342 p. ISBN 0750658665. *E-book* (342p.).

LORENTE, S.; LEE, J.; LEE, A. The “flow of stresses” concept: **The analogy between mechanical strength and heat convection**. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, [s. l.], ed. 53, p. 2963-2968, 2010. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0017931010001791>. Acesso em: 15 fev. 2021.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®**. [S. l.]: Springer, 2015. 663 p. ISBN 9781489975492.

NARAYANAN, R.; CHOW, F.Y. **Strength of Biaxially Compressed Perforated Plates**. International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures. [s. l.], ed. 1, 1984. Disponível em: <https://scholarsmine.mst.edu/isccss/7iccfss/7iccfss-session2/2>. Acesso em: 15 fev. 2021.

PAIK, J.K. **Ultimate strength of perforated steel plates under combined biaxial compression and edge shear loads**. Thin- Walled Structures, [s. l.], ed. 46, p. 207-213, 2007.

PRZEMIENIECKI, J. S. **Finite Element Structural Analysis: New Concepts**. Reston, USA: American Institute of Aeronautics & Astronautics, 2009.

SHANMUGAM, N.E.; NARAYANAM, R. **Ultimate Strength of Biaxially Loaded Plates. Stability and Ductility of Steel Structures**, [s. l.], p. 211-223, 1998. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080433202500204>. Acesso em: 15 fev. 2021.

SHANMUGAN, N.E.; THEVENDRAN, V.; TAN, Y.H. **Design formula for axially compressed perforated plates**. Thin- Walled Structures, [s. l.], ed. 34, p. 1-20, 1999.

SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2004. 1039 p. ISBN 0471429899. *E-book* (1039p.).

TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. McGrawhill, New York, 1959. ISBN 0070858209.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Shells: Theory Analysis, & Applications**. Marcel Dekker Inc., New York, 2001. 655 p. ISBN 08244105750. *E-book* (655p.).

WANG, C. M.; WANG, C. Y.; REDDY, J. N. **Exact Solutions for Buckling of Structural Members**. Boca Raton, USA: CRC press, 2004. ISBN 0203483537.

YU, W.-W. **Cold-Formed Steel Design**. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0471348090.