

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

MAUREN RODRIGUES PRADE

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À FLAM-
BAGEM ELÁSTICA BIAXIAL DE PLACAS RETANGULARES COM FURO ELÍPTICO**

Alegrete

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À FLAMBAGEM ELÁSTICA BIAXIAL DE PLACAS RETANGULARES COM FURO ELÍPTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Thiago da Silveira

**Alegrete
2022**

MAUREN RODRIGUES PRADE

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
FLAMBAGEM ELÁSTICA BIAXIAL DE PLACAS RETANGULARES COM FURO ELÍPTICO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Dissertação defendida e aprovada em: 15, Agosto d 2022.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago da Silveira

Orientador

Unipampa

Prof. Msc. Leandro Ferreira Friedrich

Unipampa

Prof. Dr. Vicente Bergamini Puglia

Unipampa



Assinado eletronicamente por **THIAGO DA SILVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 16/08/2022, às 14:51, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH, PROFESSOR DO MAGISTERIOSUPERIOR**, em 16/08/2022, às 15:10, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **VICENTE BERGAMINI PUGLIA, PROFESSOR DO MAGISTERIOSUPERIOR**, em 16/08/2022, às 17:57, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0898258** eo código CRC **C13DB2F2**.

AGRADECIMENTO

Ao meu orientador Prof. Dr. Thiago da Silveira, que auxiliou e orientou de maneira incrível no desenvolvimento deste trabalho dando todo o suporte necessário. Muito obrigada pela compreensão, incentivo e principalmente, tempo dedicado no decorrer de todos os dias

Aos meus pais, Marcolina e Marcílio (*in memorian*), por darem o suporte necessário para que este sonho se torne realidade, obrigada pelo suporte.

Ao meu namorado, companheiro e amigo Érique, que compartilhou todos os momentos de dúvida, angústia e desespero assim como alegrias e satisfações. Obrigada por dividir comigo esta jornada, ajudando a superar todos os obstáculos e dando todo o suporte necessário.

Aos meus sogros Carla e Emilio que auxiliaram e estiveram ao meu lado e se tornando uma segunda família. Muito obrigada pelo apoio.

Aos meus amigos, pelo apoio e de todos os momentos de risadas e brincadeiras vivenciados.

Aos meus professores, que de alguma maneira fizeram parte da minha formação, sendo responsáveis pelo meu crescimento intelectual e pessoal.

RESUMO

Placas finas de aço são elementos muito importantes e usados em várias áreas da engenharia. Placas finas podem ser consideradas um elemento estrutural esbelto, dessa maneira quando este elemento é submetido a um carregamento de compressão biaxial pode ocorrer o fenômeno de flambagem elástica. Uma aplicação de uso de uma placa fina é quando existe uma perfuração, o que provoca uma redistribuição de tensões na placa, gerando alterações em sua resistência e nas características de flambagem. Logo, este trabalho propõe um estudo do fenômeno de flambagem por compressão biaxial em placas de aço com perfuração elíptica centralizada, simplesmente apoiada. Para isso, foi utilizada a simulação numérica, com o auxílio de software ANSYS®, para a determinação da carga crítica de flambagem. O método do Design Construtal foi aplicado, possibilitando avaliar qualitativamente o efeito gerado pela perfuração elíptica, bem como a influência da variação da relação entre as dimensões características da perfuração no comportamento mecânico das placas, averiguando a melhor distribuição das imperfeições que conduz a placa ao seu melhor desempenho. As placas foram analisadas para frações volumétricas (Φ) pré-determinadas, sendo esta a razão entre o volume de material removido e o volume de matéria da placa sem perfuração. As análises mostraram que para cada fração volumétrica foi obtido um valor de carga crítica maximizado, o qual conduz à geometria ótima. Comparando os valores de carga crítica obtidos para um mesmo Φ , houve uma melhoria de até 68,32% para a geometria ótima ($\Phi = 0,10$). Comparando entre os diferentes Φ , o melhor desempenho, para $\Phi = 0,10$; representa uma melhoria de 104,37% no comportamento mecânico quando comparado com a pior geometria de $\Phi = 0,20$.

Palavras-chaves: Placa fina, flambagem elástica biaxial, Método dos Elementos Finitos, Design Construtal, fração volumétrica

ABSTRACT

Thin steel plates are very important elements and are used in many areas of engineering. Thin plates can be considered a slender structural element, so when this element is subjected to a biaxial compression load, the phenomenon of elastic buckling can occur. One application of using a thin plate is when there is a perforation, which causes a redistribution of stresses in the plate, generating changes in its resistance and in the buckling characteristics. Therefore, this work proposes a study of the phenomenon of buckling by biaxial compression in steel plates with centralized elliptical perforation, simply supported. For this, numerical simulation was used, with the aid of ANSYS® software, to determine the critical buckling load. The Constructal Design method was applied, making it possible to qualitatively evaluate the effect generated by the elliptical perforation, as well as the influence of the variation of the relationship between the characteristic dimensions of the perforation on the mechanical behavior of the plates, verifying the best distribution of imperfections that leads the plate to its better performance. The plates were analyzed for predetermined volumetric fractions (Φ), this being the ratio between the volume of material removed and the volume of material on the plate without perforation. The analyzes showed that for each volumetric fraction a maximized critical load value was obtained, which leads to the optimal geometry. Comparing the critical load values obtained for the same Φ , there was an improvement of 68.32% for the optimal geometry ($\Phi = 0.10$). Comparing between the different Φ , the best performance, for $\Phi = 0.10$; represents a 104.37% improvement in mechanical behavior when compared to the worst geometry of $\Phi = 0.20$.

Keywords: Thin plates, biaxial elastic buckling, Finite Element Method, Constructal Design, volumetric fraction

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Fluxograma geral.	16
Figura 2. Placa fina submetida a uma carga axial de compressão.	19
Figura 3. Geometria do elemento SHELL 281.	23
Figura 4. Placa sem perfuração e simplesmente apoiada nas atestas, submetidas à compressão biaxial.	25
Figura 5. Placa com furo elíptico centrado.	26
Figura 6. Placa retangular sólida.	27
Figura 7. Análise Modal.	28
Figura 8. Carga crítica para $\Phi = 0,10$	30
Figura 9. Geometrias (a) óima e (b) pior para $\Phi = 0,10$	31
Figura 10. Carga crítica para $\Phi = 0,15$	32
Figura 11. Melhor e pior geometrias para $\Phi = 0,15$	33
Figura 12. Carga crítica para $\Phi = 0,20$	34
Figura 13. Melhor e pior geometrias para $\Phi = 0,20$	35
Figura 14. Comparativo dos Φ em relação ao comportamento.	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Valores analisados para $\Phi = 0,10$	29
Tabela 2. Valores analisados para $\Phi = 0,15$	32
Tabela 3. Valores analisados para $\Phi = 0,20$	34

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- a – Comprimento
- b – Largura
- β – Proporção da Placa
- BE – Busca Exaustiva
- det – Função Determinante
- δ_0 – Excentricidade inicial
- E – Módulo de Young
- ϕ – Fração Volumétrica
- k – Coeficiente Adimensional de Flambagem
- K – Matriz de Rigidez
- KE – Matriz de Rigidez Convencional para Pequenas Deformações
- KG – Matriz de Rigidez Geométrica
- λ – Escalar para Matriz de Rigidez
- m – Número de Meia-Onda na Direção X
- MEF – Método de Elementos Finitos
- n – Número de Meia-Onda na Direção Y
- N – Esforço Normal
- ν – Coeficiente de Poisson
- \bar{N}_{cr} – Carga Crítica de Flambagem
- \bar{N}_x – Carga Crítica de Flambagem Direção X
- \bar{N}_y – Carga Crítica de Flambagem Direção Y
- P – Carregamento
- P_0 – Carregamento Inicial
- σ_x – Tensão Compressiva na Direção X
- σ_y – Tensão Compressiva na Direção Y
- $\sigma_{x,cr}$ – Tensão Crítica na Direção X
- t – Espessura
- U – Vetor de Deslocamento Total
- ξ – Taxa de Tensão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 ESTADO DA ARTE	13
1.2 JUSTIFICATIVA	15
1.3 OBJETIVO	15
1.3.1 Objetivo Geral	15
1.3.2 Objetivos Específicos	15
1.3.3 Estrutura do Trabalho	16
2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA	17
2.1 ESTUDOS DE PLACAS	17
2.2 ESTUDO DA FLAMBAGEM ELÁSTICA	19
2.4 MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL	20
3 METODOLOGIA	21
3.1 FLAMBAGEM ELÁSTICA DE PLACAS	21
3.2 MODELO COMPUTACIONAL	22
3.2.1 Elemento de Casca SHELL 281	22
3.3 DESIGN CONSTRUTAL APLICADO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS	24
4 RESULTADOS OBTIDOS	27
4.1 VERIFICAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL	27
4.2 FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	28
4.2.1 Fração Volumétrica $\Phi = 0,10$	29
4.2.2 Fração Volumétrica $\Phi = 0,15$	31
4.2.3 Fração Volumétrica $\Phi = 0,20$	33
4.2.4 Discussão	35
5 CONCLUSÃO	37
REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

A placa fina de aço é uma estrutura com a espessura muito menor que as demais dimensões, e é muito utilizada em várias áreas da engenharia, como em fuselagem de avião, navios, entre outros (Helbig, 2016).

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), a placa é definida como fina quando a deformação possui uma relação entre a espessura e o menor comprimento da placa deve ser menor do que $1/20$, e os deslocamentos verticais devem ser menores do que $1/5$ da espessura da placa.

De acordo com Bellei (2008), quando a placa fina é submetida à um grande esforço, esta tem uma alta resistência a um estado de tensão de tração ou compressão, além de ser uma estrutura leve. Quanto ao material desta placa, o aço por ser um material homogêneo tem seu limite de escoamento, de ruptura e módulo de elasticidade conhecidos.

Para Megson (2005), quando elementos estruturais esbeltos sofrem uma compressão axial estes possuem uma probabilidade de falha devido ao fenômeno de instabilidade conhecido como flambagem.

Quando as forças internas e as deformações dos objetos esbeltos são determinadas pelas equações de equilíbrio, e condições de compatibilidade, permitem uma análise do comportamento mecânico dos componentes dos elementos. Para casos simples, utilizamos as tensões máximas geradas no elemento para verificação da segurança estrutural que devem ser menores que as tensões permitidas do material do qual foi fabricado. Esta é uma condição necessária, porém não suficiente, se os elementos estruturais puderem sofrer o efeito da flambagem (Silva, 2006).

Para a realização de projetos navais e *offshore* é necessário ter um cuidado maior em relação a parte estrutural. Isso devido ao elemento que foi considerado para o casco e as outras partes da composição da embarcação, a fim de que estes elementos aguentem a atuação de cargas internas e externas em sua ação do seu uso, isso para diferentes solicitações mecânicas por causa de seu uso [Okumoto et al., 2009].

Alguns fatores devem ser analisados com extremo cuidado no projeto de estruturas navais e *offshore*. Destaca-se o dimensionamento da estrutura, que deve levar em consideração elementos como o casco e as demais partes integrantes da embarcação, de forma que estes elementos possam resistir à ação de cargas internas e externas, para diferentes solicitações mecânicas, em função do tipo de sua utilização [Okumoto et al., 2009].

Para Ventsel e Krauthammer, (2001), uma placa quando é submetida a esforços transversais ou axiais poderá sofrer com tensões de cisalhamento, flexão e de torção.

Sob a mesma afirmação, Okumoto et al. (2009) diz que é comum uma placa sofrer com as tensões de cisalhamento axiais de tração devido a compressão axial que é submetida por conta dos esforços compressivos exercidos ao mesmo tempo que os esforços compressivos ocasionam em deformações por torção ou flexão. Quando no caso das estruturas navais e oceânicas, elas sofrem com carregamentos axiais maiores que as solicitações admissíveis podem ocorrer a ruptura dos cascos que compõem esta estrutura por meio de cisalhamento ou flexão dessas placas que constituem parte dos cascos.

Uma observação muito importante em um projeto é com a existência de perfurações em placas. Estas placas podem possuir algumas finalidades como estética, diminuição do peso total da estrutura ou para facilitar o acesso de pessoas para alguns setores ou serviços. Contudo, estas alterações devido à perfuração da placa resultam em uma redistribuição de tensões atuantes na placa, estimulando uma alteração mecânica e por consequência na flambagem (Cheng e Zhao, 2010). Outros fatores devem ser ponderados devido as perfurações, como a geometria, a dimensão e o posicionamento da perfuração, porque estas características alteram diretamente o comportamento mecânico de uma placa submetida a uma compressão biaxial (Chow e Narayanan, 1984).

Outra consideração importante no estudo de placas é relacionada à sua espessura. Em função disso, existem as seguintes classificações: placas finas ou placas espessas. Conforme Helbig et al. (2013), o comportamento mecânico devido a flambagem altera-se mediante a espessura da placa. A partir dos seus estudos, em placas de aço, quadradas e retangulares e com perfuração elíptica, concluiu-se que em placas espessas existe o rompimento do membro estrutural via esmagamento do material antes destas atingirem a tensão crítica, ou seja, o elemento está sob o regime elasto-plástico. Para as pequenas relações de altura e comprimento da perfuração, em uma placa fina, existe a predominância da flambagem elástica, enquanto que para as grandes relações a flambagem é elasto-plástica. A partir disso, percebe-se que para a flambagem a espessura da placa é de suma importância no estudo do comportamento mecânico.

Há numerosos estudos científicos que abordam a temática de flambagem elástica uniaxial, entretanto não tem muitos sobre cargas biaxiais. Este trabalho propõe estudar o comportamento mecânico de placas finas de aço com perfuração elíptica, centralizada, submetida a uma flambagem biaxial elástica. O trabalho utilizará modelos computacionais, a partir do uso do método dos Elementos Finitos (MEF), simultaneamente à aplicação do método Design

Construtal (DC) e da técnica da Busca Exaustiva (BE) para a obtenção das curvas das cargas críticas de flambagem.

1.1 ESTADO DA ARTE

Existe um amplo estudo relacionado à flambagem elástica em placas finas perfuradas de aço com carregamento uniaxial, entretanto pouco se encontra com carregamento biaxial. Neste sentido, far-se-á uma breve descrição sobre alguns estudos, com objetivo de mostrar que estão de alguma maneira relacionada a cargas uniaxiais ou biaxiais e também relacionando esse efeito com a alteração da dimensão da placa.

Timoshenko (1961), desenvolveu uma solução analítica, baseada na teoria da elasticidade em placas, de acordo com cada solicitação encontrando uma equação que pode ser usada pela equação (1).

$$\sigma_{x,cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (1)$$

Onde temos que t é a espessura, b a largura, k é a dimensão do coeficiente de flambagem adimensional da placa ou da tensão $\xi = \sigma_y/\sigma_x$, e a proporção da placa $\beta = b/a$, enquanto E e ν são, respectivamente, o Módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material da Placa. É dado que k é obtido pela equação (2).

$$k = \left(\frac{m^2}{\beta} + n^2\right)^2 \left(\frac{m^2}{\beta^2} + \xi n^2\right)^{-1} \quad (2)$$

Estas equações podem ser utilizadas para uma verificação de flambagem em uma placa com esforços biaxiais.

El-Sawy e Martini (2007), estudou a estabilidade elástica de placas retangulares carregadas biaxialmente com um único furo circular. O estudo mostra que na maioria dos casos, o furo com maior dimensão era o que gerava menor estabilidade da placa e com menores tensões de flambagem. Assim também, com as proporções da placa, b/a , que ficam entre 0,6 e 1,2 é recomendado evitar valores fora desse intervalo por conta da grande redução nas tensões de flambagem. A localização é outro fator importante por conta de que quanto mais longe ficar da borda carregada, no eixo x , assim como na direção y , para aumentar as tensões de flambagem e melhorar a estabilidade.

Silva et al. (2015), teve intuito de mostrar em seu trabalho uma simulação numérica do estudo de flambagem de placas de aço baseado no método do Design Construtal. Contendo o estudo do fenômeno de flambagem em placas de aço, quadradas e retangulares com perfurações

centralizadas. Utilizaram o software ANSYS® para determinação da carga crítica de flambagem e ruptura da placa. O método do Design Construtal foi empregado para investigar o efeito dos tipos de perfurações realizadas (elípticas, retangulares, losangulares e hexagonais), assim como a variação da relação entre as dimensões características de cada perfuração, no comportamento mecânico das placas averiguando, a partir da geometria, a sua melhor distribuição para um melhor desempenho. O resultado indicou influência direta sobre a relação b_0/a_0 no tipo de flambagem. Ademais, o método Design Construtal permitiu apontar a sua geometria ótima para cada tipo de perfuração afim de que se conduza a melhor performance.

Lorenzini et al. (2016), realizou um estudo sobre flambagem, uniaxial, elástica e elasto-plástica em placas finas de aço com a intenção de investigar a influência do tipo e forma de uma perfuração na placa. Para isso, utilizaram do MEF para simulação da flambagem elástica e elasto-plástica. Analisaram placas finas de aço quadradas e retangulares, simplesmente apoiadas em todas as arestas, com recorte centralizado, com a função de maximizar o esforço limite de flambagem, com a intenção de minimizar a ocorrência de flambagem. Concluíram que a variação da perfuração é de suma importância no comportamento da flambagem da placa, indicando se a flambagem é elástica ou elasto-plástica, proporcionando a definição da curva limite de tensão de flambagem de cada perfuração analisada. Além do mais, notou-se que o método do Design Construtal direciona a geometrias ótimas, alcançado melhorias no limite de tensão de flambagem de aproximadamente 100%.

Da Silveira et al. (2016), fez uma verificação de um modelo computacional baseado no método de elementos finitos aplicado à flambagem biaxial de placas delgadas laminadas. Com o objetivo de avaliar a comprovação da eficiência do MEF através do software ANSYS® utilizando o elemento de casca SHELL 281 para duas placas, uma com perfuração circular central e outra sem perfuração. Percebeu-se que o elemento SHELL 281 teve uma eficiência para a análise da carga crítica de flambagem elástica de material compósito, para a placa com e sem furos. Também, quando se trata de uma placa com furo, percebeu-se que a carga crítica de flambagem reduz à medida que a espessura da placa diminui.

Helbig (2016), realizou um estudo numérico de placas finas de aço com perfuração submetidas à flambagem, uniaxial, elástica e elasto-plástica aplicando o método Design Construtal. Foi analisado o comportamento mecânico das placas finas perfuradas de aço com suas bordas simplesmente apoiadas e submetidas à compressão, analisando dois graus de liberdade o b/a e b_0/a_0 , sendo b_0 a largura do furo e a_0 o comprimento do furo. Quanto às perfurações, foram do tipo oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal. Com auxílio do software ANSYS®, que é baseado no MEF,

obtiveram as cargas críticas e última de flambagem. O método do Design Construtal permitiu a melhor determinação das geometrias para todos os tipos de perfurações, assim os resultados obtidos mostraram a influência do tipo, forma e tamanho da perfuração na definição das curvas limites à flambagem e as curvas à flambagem.

Em estudo recente de Da Silveira et al. (2021), já possui a comprovação da efetividade do Design Construtal aplicado a mecânica dos sólidos. Este apresenta resultados específicos em mecânica dos sólidos voltados a flambagem elasto-plástica biaxial em placas quadradas com perfuração elíptica baseado no método do Design Construtal juntamente com a abordagem da busca exaustiva a fim de encontrar a geometria ótima respeitando as restrições do problema.

1.2 JUSTIFICATIVA

O presente trabalho propõe apresentar o conhecimento obtido ao longo do curso de graduação de engenharia mecânica da Universidade Federal do Pampa, Campus Alegrete.

Este trabalho irá abordar o efeito da flambagem em placas finas perfuradas, visando a melhoria estrutural através do aumento da sua resistência, rigidez e estabilidade. Ainda, a exigência da presença de perfurações nas placas, em determinados projetos, exigindo o conhecimento sobre como inserir as perfurações e como as variações geométricas afetam o comportamento mecânico da placa. Para tal, será aplicado o método Design Construtal aliado com a Busca Exaustiva a fim de analisar o comportamento mecânico a partir da variação geométrica da perfuração.

1.3 OBJETIVO

1.3.1 Objetivo Geral

O principal objetivo deste trabalho consiste em obter o melhor comportamento mecânico da perfuração baseado no método do Design Construtal aliado a Busca Exaustiva.

1.3.2 Objetivos Específicos

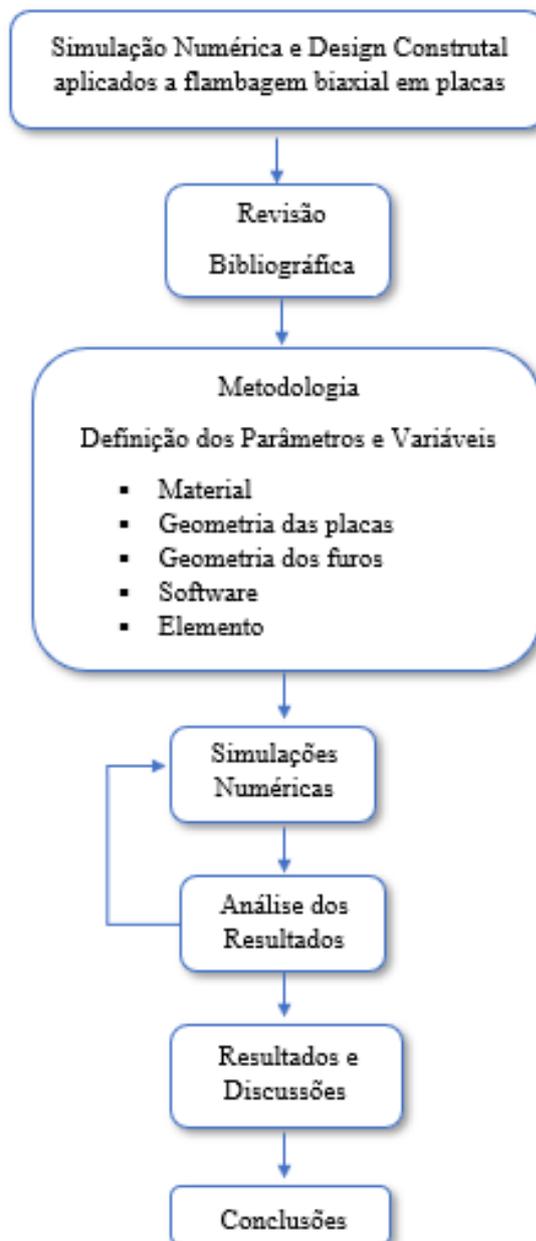
Para atingir o objetivo principal deste trabalho é necessário inicialmente analisar o comportamento mecânico de placas finas retangulares, de aço, com a presença de furos elípticos centrados, quando submetidas à carregamentos compressivos biaxiais.

Posteriormente será encontrada a melhor geometria para cada fração volumétrica do furo elíptico, quando analisada a estabilidade da placa quanto a flambagem elástica.

1.3.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho possui o objetivo principal de avaliar a influência da flambagem elástica em placas finas com perfuração elíptica central quando submetidas a carregamento compressivo biaxial. A Figura 1 expõe o fluxograma geral do presente trabalho.

Figura 1 – Fluxograma geral



2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

Quando se desenvolve um projeto baseado em um elemento estrutural é necessária uma análise que satisfaz alguns pré-requisitos como resistência, deflexão e estabilidade. Entretanto, quando os elementos estruturais sofrem uma compressão, se for comprido e esbelto, ocorre uma deflexão ou oscilação em um plano paralelo sem se romper e atingir o regime de deformações permanentes (plástico) chama-se flambagem elástica (Hibbeler, 2010).

2.1 ESTUDOS DE PLACAS

Civilizações egípcias, gregas e romanas usavam nas construções placas no formato de lajes de pedra ou lápides. A grande diferença do propósito da utilização das placas pelos povos antigos em relação a era moderna é referente ao uso das regras experimentais para determinar o tamanho e a capacidade das placas. Atualmente, utilizam de métodos científicos para qualificar o comportamento mecânico e dimensionamento de placas (Szilard, 2004).

Bryan, no final século XIX, equacionou e resolveu com êxito a questão de flambagem de uma placa comprimida uniaxial e com elasticidade linear. Alguns anos depois, Bleich realizou estudos com a intenção de estender a teoria da linear de flambagem elástica de placas para obter os resultados dos problemas de flambagem de placas acima do limite proporcional. Ele mostrou que utilizando da teoria elástica linear com o módulo de Young, E , obtém-se as tensões críticas das placas de flambagem entre o limite proporcional e a tensão de escoamento. Timoshenko consentiu com a observação e concluiu que a tensão de escoamento não pode ser ultrapassada pelas tensões de flambagem da placa.

Conforme Lisbôa, 2009, a primeira estimativa de teoria sobre placas foi com Euler, em 1766, com a teoria de membrana para placas finas. Solucionando a questão de vibrações livres em membranas elásticas retangulares, triangulares e circulares usando como comparação sistemas perpendiculares de molas estiradas. Jacques Bernoulli, em 1789, realizou um estudo mais aprofundado de Euler, adicionando em sua comparação vigas no lugar das molas, dessa maneira, obteve o valor de sua rigidez no comportamento à flexão. Em suas pesquisas, percebeu uma similaridade nas teorias existentes e os dados experimentais. Uma maneira de resolver a vibração de placas foi definida pelo físico alemão Chladni, em 1809. Ele trabalhava com acústica, produziu vários experimentos relacionados com a vibração das placas. Em um deles, ele aplicou uma fina camada de areia sobre a superfície da placa, e assim, determinando as linhas nodais para os diversos modos e correspondentes frequências.

Napoleão Bonaparte propôs à Academia Francesa que esta oferecesse um prêmio, incitado pelos resultados experimentais obtidos por Chladni, ao pesquisador que desenvolvesse a teoria de placas e que comparasse seus resultados teóricos com os obtidos por Chladni. Apenas uma pessoa se inscreveu, a matemática francesa Marie-Sophie Germain. Ela seguiu de forma similar à de Euler em relação às curvas elástica, isto é, usou o cálculo variacional para resolver as equações diferenciais proveniente da integral que representava a energia de deformação de flexão. Estabeleceu que a energia de deformação da placa era função das curvaturas principais da placa deformada. Germain simplesmente não conseguiu obter a forma certa da equação diferencial. Lagrange, seu mentor e um dos jurados da competição examinou seu trabalho e detectou o erro, após algumas correções, obteve-se a primeira equação geral de placas, dita como equação geral de placas de Germain-Lagrange [Lisbôa, 2009].

A falta de conceituação física para a formulação usada por Germain-Lagrange para o cálculo de energia de deformação em função das curvaturas principais gerou novas pesquisas. Entre elas, a desenvolvida por Poisson, em 1814, resolvendo a problemática sugerindo que a superfície média da placa seja composta por partículas sobre as quais estariam atuando forças moleculares. Poisson utilizando o equilíbrio do sistema de partículas chegou ao mesmo equacionamento proposta por Germain-Lagrange. Entretanto, ao considerar todas as partículas pertenciam a superfície média da placa, a constante de rigidez de flexão de placa alcançada por Poisson era proporcional ao quadrado da espessura da placa e não ao cubo, como deveria ser. Em sequência dos estudos de Poisson, Navier considerou que a placa seria composta por partículas as quais estariam distribuídas também em direção da espessura, assim, em 1823, obteve e publicou o estudo sobre a equação diferencial para qualquer carregamento transversal. Além disto, obteve a rigidez de flexão de placa correta, ou seja, cubicamente proporcional à espessura da placa. Poisson, em 1828, ampliou seus estudos em relação às equações encontradas por Navier, mas estes eram válidos somente para o caso de placas espessas (Lisbôa, 2009).

Navier, em 1822, baseado nos estudos de Kirchhoff trabalhou a equação da estabilidade de placas submetidas a carregamento transversal. E esta mesma equação foi alterado por Saint-Venant, em 1883, acrescentando nas bordas da placa forças axiais e de cisalhamento. Baseado nisso, pode-se ter um embasamento teórico para a geração de estudos envolvendo a estabilidade de placas submetidas a vários carregamento e condições de contorno. A problemática mais simples de flambagem é quando a placa está simplesmente apoiada submetida a carregamento de compressão uniaxial. O primeiro a obter os valores das cargas críticas de flambagem por meio do método da energia foi Bryan, em 1891, considerando que a flambagem da superfície curva da placa poderia ser escrita por uma série dupla de Fourier. Por sua vez, Timoshenko, em 1925,

usou outro método pra solucionar a mesma equação, considerando que a flexão da placa formava ondas senoidais no eixo comprimido (Helbig, 2016).

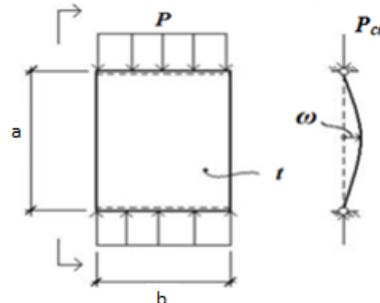
O seu estado natural de equilíbrio, estado crítico ou estado de flambagem inicial surgiram na teoria da elasticidade, por volta do século XX, com a caracterização das equações que definiam o estado de deformação onde surgiu a flambagem., como por exemplo Von Karman, em 1910 (Helbig, 2016).

2.2 ESTUDO DA FLAMBAGEM ELÁSTICA

Um dos pioneiros no estudo do fenômeno de flambagem em componente estrutural é o engenheiro britânico George H. Bryan, sendo o primeiro a realizar um estudo sobre flambagem linear por meio da análise de uma placa simplesmente apoiada, com esforços uniformes de compressão longitudinal. Após Bryan, o engenheiro Friedrich Bleich resolveu ampliar o estudo da flambagem elástica, propondo uma solução para os problemas de flambagem não linear em placas (Ventsel e Krauthammer, 2001).

Como mostra a Figura 2, quando uma placa fina (largura b , comprimento a e espessura t) é posta em um pequeno carregamento de compressão P , a deflexão lateral resultante é tênue e a capacidade de carga do elemento não se altera (Wang et al., 2005). No momento em que acontece um aumento gradativo do carregamento P , certo valor de carga que gera uma alteração no padrão de deformação da placa é atingido, sendo denominado carga crítica P_{cr} . Assim, esta ação gera um deslocamento lateral w , ocasionando o comportamento de flambagem elástica ou linear (Szilard, 2004).

Figura 2. Placa fina submetida a uma carga axial de compressão



Fonte: Åkesson, modificado (2007)

2.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO ESTUDO DE PLACAS

No final do século XIX, Bryan formulou e resolveu com sucesso o problema da flambagem de uma placa comprimida uniaxial e com elasticidade linear. Aproximadamente 33 anos depois, Bleich fez esforços para estender a teoria linear de flambagem elástica de placas à solução de problemas de flambagem de placas acima do limite proporcional. Ele demonstrou que as tensões críticas das placas de flambagem entre o limite proporcional e a tensão de escoamento poderiam ser aproximadas usando a teoria elástica linear com o módulo de Young, E , substituído por um valor reduzido igual a, onde E_t é o módulo tangente. Timoshenko concordou com essa observação e concluiu ainda que as tensões de flambagem de placas não podem exceder a tensão de escoamento (Dawe et al., 1985).

2.4 MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

A Teoria Construtal começou a ser estudada e desenvolvida, em 1997, com o professor romeno Adrian Bejan. Inicialmente ele utilizou para uma nova solução geométrica para resfriamento de um condutivo elétrico (Bejan, 1997). Esses estudos foram de suma importância por terem desempenhado um papel básico de ponto de partida para a extensão e aplicação da teoria construtal para os problemas de engenharia e em outros ramos da ciência (Bejan e Lorente, 2008) e (Ghodoossi, 2004).

A Teoria Construtal é vista como uma geração das configurações geométricas de sistemas de fluxo, animados ou inanimados. É um fenômeno físico o qual é baseado em um princípio físico, a Lei Construtal (Bejan e Zane, 2012). A Lei Construtal fala que: sua configuração deve evoluir no tempo de modo a facilitar o acesso das correntes através do sistema para que este sistema de fluxo, de dimensões finitas, persista no tempo. (Bejan e Zane, 2012).

A aplicação do método da Lei Construtal é chamada de Design Construtal. O Design Construtal é um método que relaciona graus de liberdade, restrições e função objetivo, pela geometria ótima que entrega o melhor desempenho. O método vem sendo empregado em várias áreas da engenharia, especialmente nas áreas de mecânica dos fluidos e de transferência. Atualmente, o método vem sendo aplicado em estudos de mecânica dos sólidos (Da Silveira et al, 2012).

3 METODOLOGIA

Esta seção tem por finalidade apresentar a metodologia aplicada para atingir os objetivos da análise de flambagem em placas finas de aço com perfuração central, quando submetidas a compressão biaxial.

Dessa maneira, este estudo foi dividido em tópicos para melhor compreensão das características sobre o estudo realizado, sendo esse sobre o efeito da flambagem elástica de placas pelo software ANSYS® que é baseado pelo método de discretização costumeiramente utilizado em análises numéricas de estruturas que é o MEF. Aliando por meio da predisposição espontânea do trajeto em busca de uma melhor configuração ótima, a Lei Construtal através do método DC associado à técnica de otimização da BE.

Esta seção especifica cada método de maneira individualizada a fim de maior esclarecimento para os procedimentos escolhidos para melhor desenvolvimento deste estudo.

3.1 FLAMBAGEM ELÁSTICA DE PLACAS

Utilizou-se de um software comercial para aplicação em problemas estruturais ou em outras áreas da engenharia. Neste trabalho, o aplicativo realizará uma análise da flambagem elástica em placas com perfuração, simplesmente apoiadas em suas bordas, e submetidas à compressão biaxial este sendo em apenas um módulo.

Segundo Helbig (2016), o sistema operacional usa dos MEF de deslocamento fundamentado no embasamento em Lagrange, isto é, cada ponto do elemento é averiguado, sendo uma função do tempo e de suas coordenadas, e também as equações de equilíbrio são obtidas por meio do princípio dos trabalhos virtuais. Estes princípios são bem catalogados em (Zienkiewicz, 1971). Os resultados iniciais para as soluções são: primeiro, os deslocamentos nodais, após são geradas as derivadas desses valores, isto é, as tensões, deformações, entre outras, formando a solução dos elementos.

O software opera com o método padrão para a resposta de todas as equações simultâneas, sendo o método de solução direta das equações esparsas (*Sparse Direct method*).

3.2 MODELO COMPUTACIONAL

Quando ocorre o fenômeno de flambagem elástica em uma placa isotrópica, este torna-se um problema de alta complexidade. Por conta disso, o problema em questão é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais, por meio de um método de discretização, que será resolvido numericamente. Entre alguns disponíveis, um método de discretização muito empregado em análises numéricas de estruturas é o MEF (Blaauwendraad, 2010).

Segundo Moen e Schafer (2009), adota-se um modelo numérico de análise do autovalor para o fenômeno de flambagem. A solução do sistema de análise de equações algébricas homogêneas envolve as equações de equilíbrio dos elementos finitos, onde o valor próprio mais baixo à carga crítica de flambagem e o próprio vetor relacionado representa o primeiro modo de flambagem da placa.

3.2.1 Elemento de Casca SHELL 281

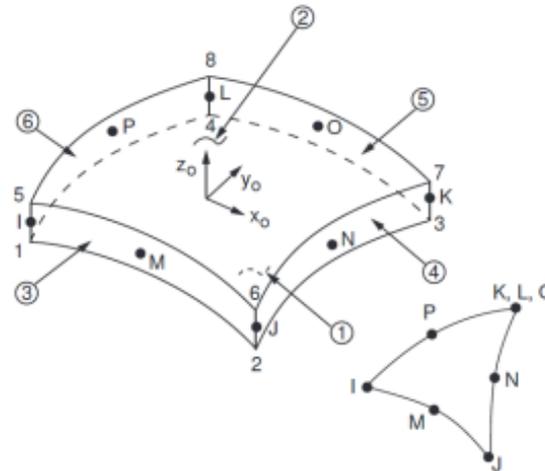
De acordo com Real e Isoldi (2010), em questão dos deslocamentos dos nós é usado um conjunto de funções de interpolação para definição dos estados de deslocamento dentro de cada elemento finito. O estado de deformação das relações deformação-deslocamento é dentro de seu elemento. Portanto, a lei de tensão-deformação do material é definida pelo estado de tensão ao longo do elemento.

Ainda sobre Real e Isoldi (2010), temos que através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) as forças nodais similares ao campo de deslocamento no elemento são determinadas. Relacionando as forças nodais com os deslocamentos a partir dos deslocamentos nos nós. Logo, sendo atendidas as condições de equilíbrio global dentro do elemento. Em suma, para resolver os deslocamentos nodais usa-se um sistema de equações de equilíbrio da estrutura.

Foi utilizado o elemento de casca SHELL281 do software. Para análise de estruturas de placas de aço com espessura fina até moderada é recomendado o SHELL 281. Este elemento possui oito nós e seis graus de liberdade para cada nó, tendo: rotações em torno dos eixos x , y e z , e translações ao longo dos eixos x , y e z (ANSYS, 2009).

Segundo o software, o SHELL 281 emprega uma precisão na modelagem para as placas, ordenada pela primeira ordem de deformação de cisalhamento. O elemento SHELL281 é mostrado na Figura 3.

Figura 3. Geometria do elemento SHELL281



Fonte: ANSYS, 2009.

Para análise numérica do fenômeno de flambagem por meio do método computacional, emprega-se análise elástica de autovalores. Segundo Madeci e Guven (2006), as equações de equilíbrio por meio de elementos finitos para este tipo de estudo envolvem a solução das equações de equilíbrio algébricas homogêneas, das quais o autovalor mais baixo equivale a uma carga crítica de flambagem e autovetor relacionado representa o modo inicial de flambagem. Tal qual, Przemieniecki (1985), a elaboração usada para a metodologia da análise engloba tanto os termos lineares como os termos não lineares. Por conseguinte, a matriz rigidez $[K]$ é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações, $[K_E]$, com a matriz de rigidez $[K_G]$. Esta última, $[K_G]$, não depende apenas da geometria a fim de que o esforço interno $\{P_0\}$, que se tem no início do carregamento, deve ser contado. Assim, a matriz de rigidez total da placa para a carga $\{P_0\}$ é descrito como:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (3)$$

onde $[K]$ é matriz de rigidez total $[K_E]$ é a matriz de rigidez convencional para deformações pequenas e $[K_G]$ é a matriz de rigidez geométrica

No caso de o carregamento atingir um nível de $\{P\} = \lambda\{P_0\}$, onde λ é um escalar, a matriz de rigidez passa a ser escrita como:

$$[K] = [K_E] + \lambda [K_G] \quad (4)$$

sendo λ um escalar.

As equações, governantes, de equilíbrio para uma placa, podem ser escritas como:

$$[[K] = [K_E] + \lambda [K_G]] \{U\} = \lambda\{P_0\} \quad (5)$$

onde $\{U\}$ é o vetor de deslocamento total e $\{P_0\}$ é o esforço interno existente no início do carregamento.

O vetor de deslocamento total pode ser determinado por:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{P_0\} \quad (6)$$

Em se tratando de flambagem de placas, o elemento estrutural em análise apresenta um grande crescimento nos deslocamentos sem que haja crescimento da carga. Por definição matemática é possível obter a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos $\{U\}$ tendem a infinito quando:

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \quad (7)$$

sendo *det* o determinante da matriz.

De acordo com ANSYS (2005), esta equação representa um problema de autovalores que, uma vez resolvido, gera o menor autovalor, λ_1 , que corresponde à carga crítica de flambagem dada por $\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\}$. Esta é a carga limite onde se inicia o fenômeno de instabilidade da flambagem. Ainda, o vetor de deslocamento associado $\{U\}$ define a forma do modo de flambagem. O problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos. As análises foram realizadas apenas em um modo de flambagem.

3.3 DESIGN CONSTRUTAL APLICADO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Sabe-se que um dos principais objetivos da engenharia é otimizar o sistema, para que melhore seu desempenho, ou seja, utilizar a Lei Construtal é importante para a evolução do sistema, e sua aplicação permite o Design Construtal. Anteriormente, o conhecimento técnico e científico era guiado com a prática e a intuição dos engenheiros para os projetos específicos. Com o avanço da tecnologia, é possível simular e viabilizar várias arquiteturas de fluxo de engenharia formadas por um grande número de graus de liberdade. Entretanto, enquanto analisavam o desempenho do sistema o seu design permaneceu um status de arte. (Bejan e Lorente, 2006).

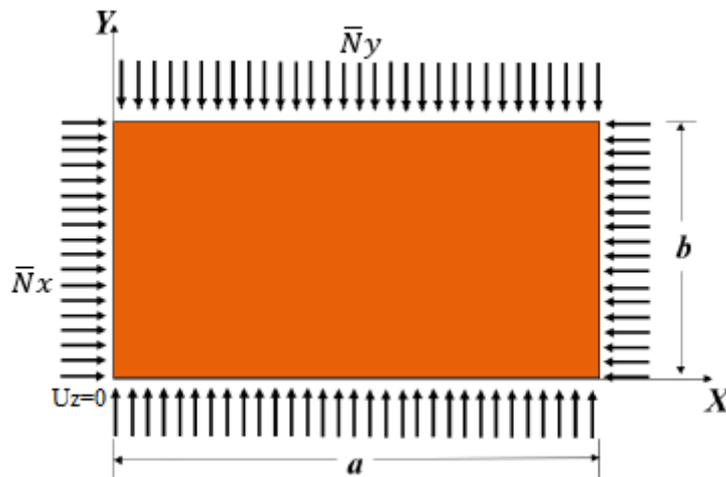
Segundo Bejan e Lorente (2008), o método do Design Construtal sugere ao projetista um direcionamento da arquitetura de fluxo, o qual apresenta um desempenho global maior para as condições de acesso ao fluxo especificados (fluxo de fluido, fluxo de calor, fluxo de tensões), em outros termos, o método do Design Construtal trata da distribuição ideal da imperfeição. Partindo da tendência natural de percurso com a configuração cada vez melhor, essa é a síntese da Lei Construtal.

Sendo assim, aplica-se a Lei Construtal (Bejan, 2000; Bejan e Lorente, 2008), através do uso do método do Design Construtal. Este método é fundamentado em restrições e objetivos. Desta maneira, identificar a influência das geometrias e os tipos de furos é possível. Neste

trabalho, a perfuração elíptica será centralizada e, posteriormente, será analisada quanto à sua variação geométrica, definida pelo método do Design Construtal.

Consideraremos uma placa retangular com carregamento biaxial compressiva com as dimensões b de largura, a de comprimento e t de espessura. Com as condições de contorno de todas as bordas de placa simplesmente apoiadas, isto é, as quatro bordas estão restritas a deflexão ao longo do eixo z , como mostra a Figura 4. A placa do presente trabalho considera a placa simplesmente apoiada com carregamento compressivo biaxial possuindo as dimensões de 2000 mm x 1000 mm x 12 mm (a , b e t respectivamente) considerando o Módulo de Young de $E = 210$ GPa e o Coeficiente de Poisson de $\nu = 0,35$, a placa é simplesmente apoiada nas arestas.

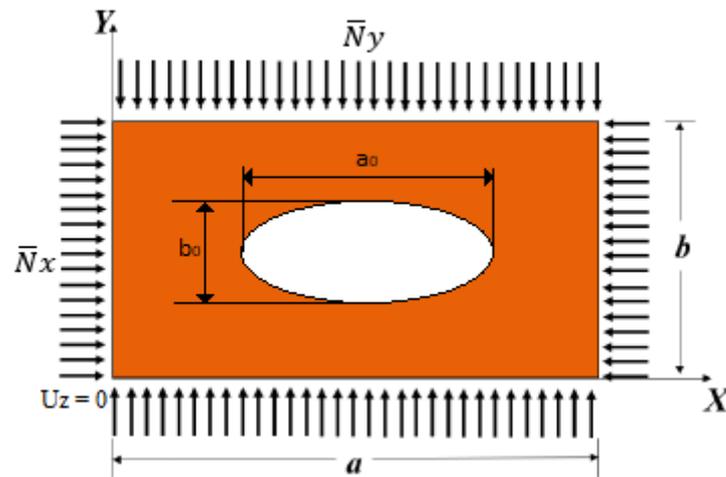
Figura 4. Placa sem perfurações e simplesmente apoiada nas arestas, submetida à compressão biaxial.



Fonte: Da Silveira, modificado. (2021).

Adotando a Busca Exaustiva juntamente com o Design Construtal conforme as restrições definidas temos a fração volumétrica (Φ) e a espessura da placa (t) em paralelo com os graus de liberdade determinados, sendo a placa simplesmente apoiada no eixo X . Neste estudo, considerou-se dois graus de liberdade sendo a relação b_0/a_0 e a fração volumétrica Φ do furo elíptico, como pode ser visto na Figura 5, o modelo de referência da placa com perfuração elíptica que será adimensionalizada nos parâmetros já definidos.

Figura 5. Placa com furo elíptico centrado



Fonte: Da Silveira, modificado. (2021).

A variação volumétrica é mantida constante para a aplicação do *Design Construtal*, no presente trabalho, foram executadas perfurações de variadas relações de a_0 e b_0 tendo a fração volumétrica Φ constante para que se possa verificar como os comportamentos mecânicos reagem a essa ação, compressiva e biaxial, e assim relacionar os resultados obtidos com a performance, e a geometria-ótimas. Para essas perfurações utilizou da equação (8) a fim de determinar as dimensões.

$$\Phi_{\text{elíptico}} = \frac{\pi a_0 b_0}{4ab} \quad (8)$$

Na Figura 6, apresenta como é o comportamento de uma placa fina de aço e sem perfurações, simplesmente apoiada nas bordas ($U_z = 0$), com aplicação de cargas compressivas uniformemente em todas as bordas sofrendo a fenômeno da flambagem biaxial, por meio do elemento SHELL 281.

4 RESULTADOS OBTIDOS

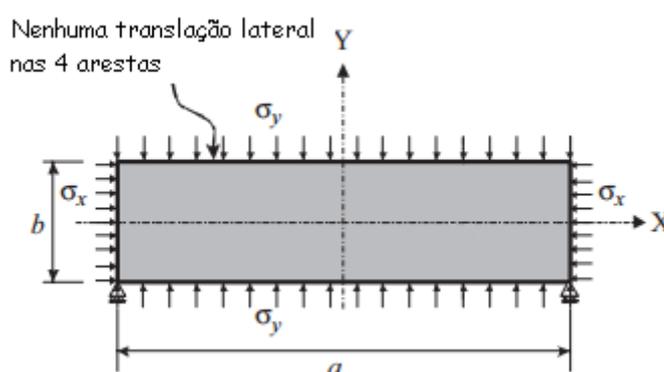
Este capítulo exhibe os resultados obtidos por meio das simulações numéricas realizadas baseado na variação da fração volumétrica da placa retangular com furo elíptico.

4.1 VERIFICAÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL

Por meio da utilização de um modelo computacional, para a realização das simulações numéricas de flambagem elástica de estruturas, é necessária uma verificação ou uma validação que apresente os resultados obtidos e comprove a eficácia e a confiabilidade do modelo utilizado.

Para obtenção da verificação do modelo computacional obtido através da aplicação do software foi analisada, analiticamente, uma placa sólida com carregamento compressivo biaxial, obtendo o valor para a carga crítica com intuito de verificar, através de comparação dos resultados, o modelo computacional desenvolvido no ANSYS®. A Figura 6 apresenta a placa sólida retangular sólida, com as condições de contorno aplicadas. Neste trabalho, consideramos que a convergência da malha não altera significativamente os resultados.

Figura 6. Placa retangular sólida.

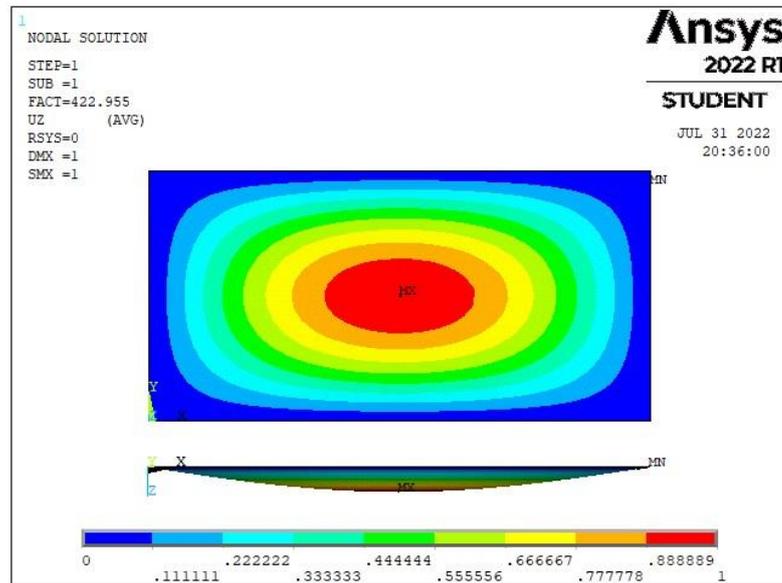


Fonte: Adaptado de El Sawy e Martini, 2007.

Foi realizado um estudo de uma flambagem elástica de placa fina carregada biaxialmente obtendo um resultado analítico, obtido através das Equações 1 e 2, uma tensão de 141,717 MPa decorrente de uma carga crítica de 1700,61 N/mm. Utilizando o modelo numérico encontrou uma carga crítica obtida foi de 1681 N/mm, este cálculo teve um erro de 1,16% como o valor foi mínimo considerou-se um resultado confiável.

A Figura 7 mostra a configuração flambada da placa analisada, onde é possível ver o gradiente de deslocamento decorrente da flambagem da placa.

Figura 7. Análise modal



Fonte: Autor

Nota-se, a partir da Figura 7, que para a placa sem perfuração os maiores deslocamentos (representados pela cor vermelha) estão exatamente no centro da placa, enquanto que na região próxima das bordas o deslocamento é zero ou próximo disso (representado pela cor azul). A escala é adimensional variando de 0 a 1, sendo zero o menor deslocamento e 1 o maior deslocamento.

A execução de cargas axiais de baixo valor, menores que a carga crítica, não origina a ocorrência de flambagem, isto é, a placa volta ao seu estado inicial se o carregamento for retirado (ÅKESSON, 2007). Quando os valores ultrapassarem o valor da carga crítica, a placa logo apresentará demasiado aumento dos deslocamentos laterais, podendo provocar ruptura da mesma, uma condição que deve ser evitada (SZILARD, 2004).

4.2 FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

As frações volumétricas avaliadas foram de $\Phi = 0,10$; $0,15$ e $0,20$; fazendo com que o formato do furo elíptico fosse modificado proporcionalmente a fim de manter o volume de material retirado pela perfuração, alterando somente a relação b_0/a_0 .

4.2.1 Fração Volumétrica $\Phi = 0,10$

Para a avaliação do furo, considerou-se a fração volumétrica constante alterando a relação b_0/a_0 [Ver equação (8)]. A relação atende à $0,2 \leq b_0/a_0 \leq 5$ para que não haja uma geometria muito alongada da elipse e, ainda, os comprimentos a_0 e b_0 não devem exceder 80% do comprimento da placa na mesma direção, delimitando para que o furo não se aproxime das bordas. Com estas precauções, concentradores de tensão e condições de contorno não afetam de forma significativa nos resultados obtidos.

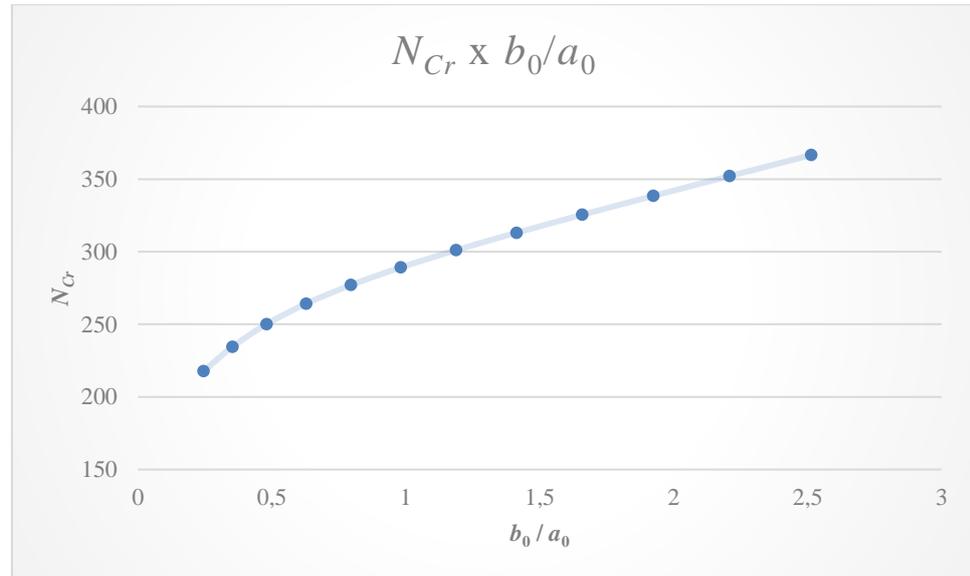
As informações apresentadas pela Tabela 1 apresentam os resultados obtidos da simulação realizada através do software ANSYS®, baseado na variação da relação b_0/a_0 . Com os valores obtidos para a carga crítica podemos identificar qual faixa de variação geométrica é a mais adequada de acordo a fim de melhorar o comportamento mecânico da placa, que é o objetivo do presente trabalho.

Tabela 1 – Valores analisados para $\Phi = 0,10$.

a_0 (mm)	b_0 (mm)	b_0/a_0	\overline{N}_{cr} (N/mm)
318,31	800	2,51	366,56
339,53	750	2,21	352,11
363,78	700	1,92	338,45
391,76	650	1,66	325,45
424,41	600	1,41	313,05
462,99	550	1,19	301,06
509,29	500	0,98	289,18
565,88	450	0,79	277,04
636,62	400	0,63	264,21
727,56	350	0,48	250,19
848,83	300	0,35	234,56
1018,59	250	0,24	217,78

Fonte – Próprio autor

Os resultados da Tabela 1 mostram que à medida em que a relação b_0/a_0 é aumentada, a carga crítica obtida também aumenta, ou seja, conforme a dimensão vertical do furo elíptico aumenta, melhor é o comportamento mecânico da placa. A partir das informações apresentadas pela Tabela 1, obteve-se o gráfico que está representado na Figura 8.

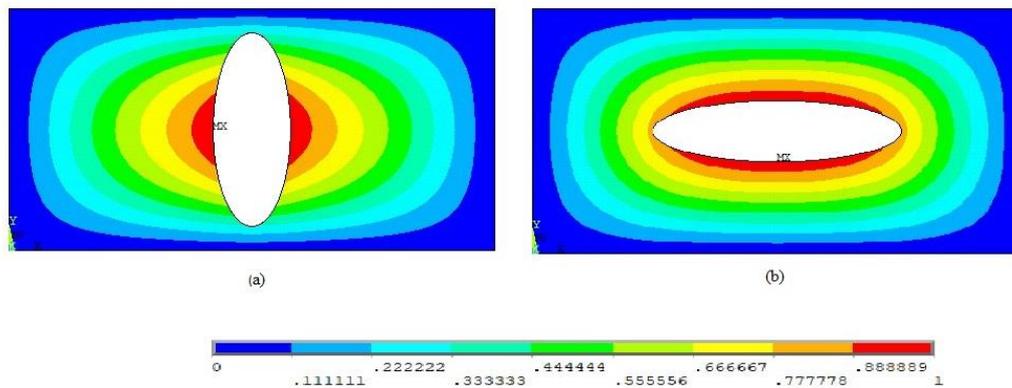
Figura 8– Carga crítica para $\Phi = 0,10$.

Fonte – Autor

Na Figura 8, assim como visto na Tabela 1, os valores para a carga crítica aumentam à medida em que b_0/a_0 aumenta. Esta observação vai ao encontro do que a Lei Construtal afirma, que a geometria ótima, ou seja, a geometria que conduz à melhor performance, será aquela que possibilita a melhor distribuição das imperfeições. Se analisarmos a carga aplicada à placa, e as dimensões a e b , veremos que a força resultante mais expressiva, e por consequência as tensões mais significativas, estão na vertical. Entendendo que as imperfeições, deste estudo de caso, sejam as máximas tensões críticas causadas pelo carregamento compressivo, e que as tensões mais significativas estão na direção Y , a geometria ótima será a mais alongada na direção Y (maior b_0) pois esta é a que menos afeta o fluxo das tensões mais significativas da placa. A carga crítica mínima teve o valor de 217,78 N/mm com a relação de b_0/a_0 de 0,24 e a máxima de 366,56 N/mm com a relação de b_0/a_0 de 2,51. Analisando estes resultados, percebe-se que a simples variação geométrica pode melhorar em 68,32% o comportamento mecânico da placa para uma fração volumétrica de 0,10.

O comportamento do gráfico representado na Figura 9, está de acordo com o esperado. Segundo Da Silveira (2021), a tendência da relação b_0/a_0 e da carga crítica de flambagem é ambas aumentarem o que ocorre nesta fração volumétrica. Para uma geometria ótima, baseado nas informações obtidas na Tabela 1 e Figura 8, optou-se pelo valor máximo de carga crítica para a placa $b_0/a_0 = 2,51$ apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Geometrias (a) ótima e (b) pior para $\Phi = 0,10$.



Fonte: Autor

A Figura 9 (a) e (b) evidencia que as semi-ondas formadas pelas flambagens em cada placa se concentram em torno das perfurações, tendo os seus maiores deslocamentos (representados pela cor vermelha) ao redor da borda do furo. Na Figura 9 (a) temos a geometria ótima para a fração volumétrica de $\Phi = 0,10$ com a relação de $b_0/a_0 = 2,51$. Nota-se que para esta geometria a área representativa das maiores deflexões é menor, e mais centralizada, do que a área observada na Figura 9 (b), onde esta região de máximos deslocamentos se estende por uma maior faixa da placa. Isso evidencia o Princípio da Ótima Distribuição das Imperfeições, da qual trata a Lei Construtal, onde diz que a geometria ótima é a que melhor distribui as imperfeições do sistema.

4.2.2 Fração Volumétrica $\Phi = 0,15$

Como vimos anteriormente (Ver seção 4.2.1), usou-se o mesmo modo de obtenção da tabela com mesmos parâmetros para esta fração volumétrica. Também foi respeitado o intervalo de b_0/a_0 para que a geometria não seja tão alongada, a fim de evitar os concentradores de tensão nas bordas e as condições de contorno.

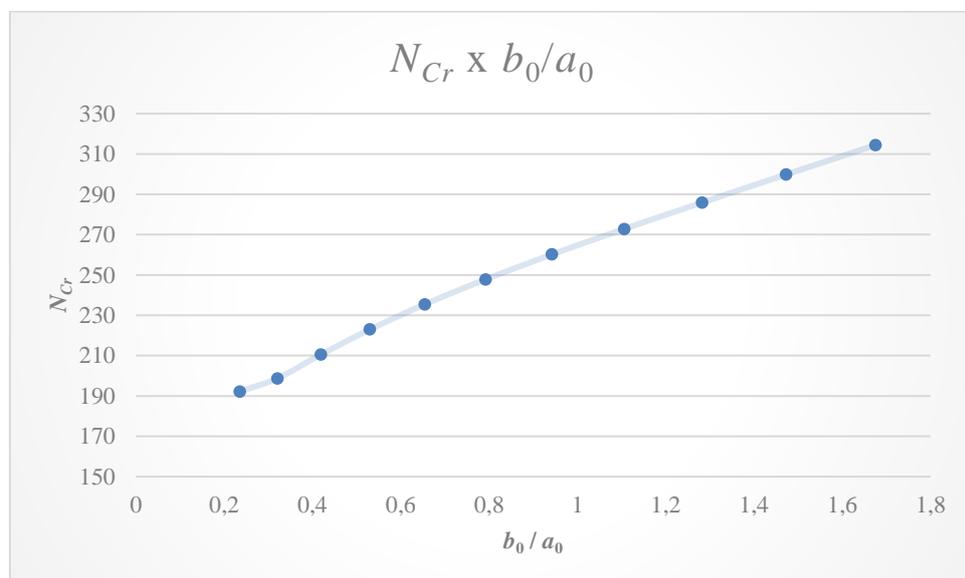
Os resultados obtidos, pelas simulações, para as cargas críticas de cada placa estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores analisados para $\Phi = 0,15$

a_0 (mm)	b_0 (mm)	b_0/a_0	\overline{N}_{Cr} (N/mm)
477,46	800	1,675	314,38
509,29	750	1,47	299,79
545,67	700	1,28	285,91
587,65	650	1,11	272,81
636,62	600	0,94	260,17
694,49	550	0,79	247,78
763,94	500	0,65	235,46
848,83	450	0,53	222,99
954,93	400	0,42	210,49
1091,35	350	0,32	198,74
1273,24	300	0,23	192,25

Fonte – Autor

A Tabela 2 apresenta os resultados da relação b_0/a_0 decorrentes da fração volumétrica de $\Phi = 0,15$. Comparando com $\Phi = 0,10$ observou-se que ocorreu uma diminuição dos valores da carga crítica e da sua relação b_0/a_0 .

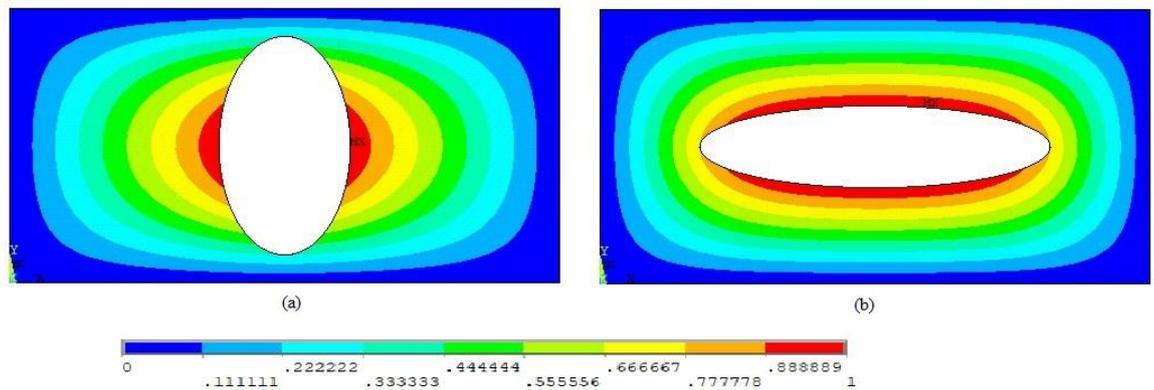
Figura 10 - Carga crítica para $\Phi = 0,15$.

Fonte – Autor

Na Figura 10, tal como observado na Tabela 2, o comportamento da relação b_0/a_0 foi similar à fração volumétrica anterior ($\Phi=0,10$) que foi de aumentar a carga crítica em função do aumento de b_0/a_0 , alterando somente os valores do intervalo. Sabendo que as imperfeições, como já mencionadas anteriormente, são as tensões críticas que causam os deslocamentos na

placa e considerando a geometria ótima, como a que melhor distribui estas imperfeições, foi obtido o valor da carga crítica de 314,38 N/mm para a relação de $b_0/a_0 = 1,67$. Para esta fração volumétrica observa-se uma melhora de até 63,53% em relação ao pior comportamento mecânico da placa, obtido para $b_0/a_0 = 0,23$. A geometria ótima ($b_0/a_0 = 1,67$) e a pior ($b_0/a_0 = 0,235$) estão apresentadas na Figura 11.

Figura 11 – Geometrias (a) ótima e (b) pior para $\Phi = 0,15$.



Fonte: Autor.

Observando a Figura 11 (a), para a geometria ótima $b_0/a_0 = 1,67$, percebe-se que a região dos máximos deslocamentos se concentra mais ao centro da placa, como foi visto para a fração volumétrica $\Phi = 0,10$; assim como para a pior geometria [Ver Figura 11 (b)], quando $b_0/a_0 = 0,235$; os máximos deslocamentos estão distribuídos em uma região maior da placa submetendo uma área maior às maiores deflexões laterais. Tendo em vista que a geometria ótima, Figura 11 (a), para a fração volumétrica de $\Phi = 0,15$ possui o valor da carga crítica de 314,38 N/mm, e uma relação de $b_0/a_0 = 1,67$; esta é a geometria que melhor distribuiu as imperfeições do sistema possibilitando uma melhor performance da placa.

4.2.3 Fração Volumétrica $\Phi = 0,20$

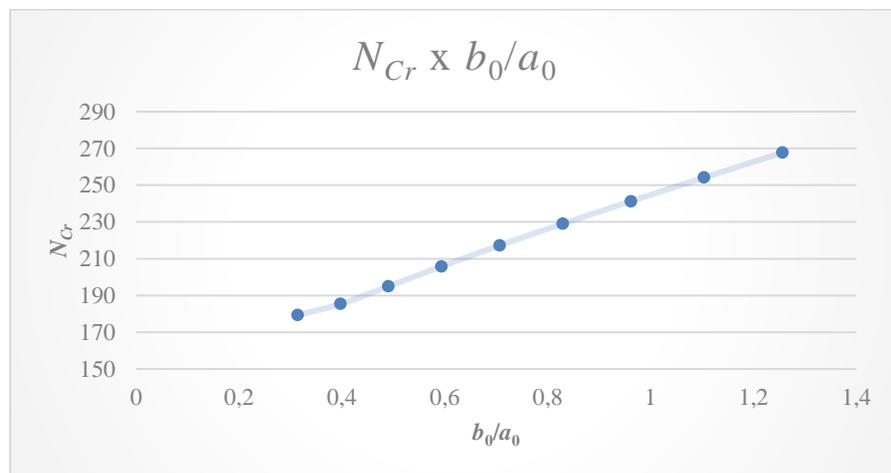
Da mesma maneira que para as demais frações volumétricas, foram analisadas as placas com a variação do grau de liberdade b_0/a_0 respeitando os limites descritos anteriormente, com a finalidade de evitar efeitos de borda e de diminuir os concentradores de tensões. A Tabela 3 expõe os valores da fração volumétrica $\Phi = 0,20$ obtidos através do software.

Tabela 3 – Valores analisados para $\Phi = 0,20$.

a_0 (mm)	b_0 (mm)	b_0/a_0	\overline{N}_{Cr} (N/mm)
636,62	800	1,26	267,75
679,06	750	1,10	254,21
727,56	700	0,96	241,27
783,53	650	0,83	229,00
848,83	600	0,71	217,23
925,99	550	0,59	205,84
1018,59	500	0,49	195,01
1131,77	450	0,40	185,37
1273,24	400	0,31	179,36

Fonte: Autor

A Tabela 3 exibe os resultados da relação b_0/a_0 em função da fração volumétrica de $\Phi=0,20$. Comparando os valores obtidos com os das frações de $\Phi = 0,10$ e de $\Phi = 0,15$ percebe-se que de todas as frações volumétricas a de $\Phi = 0,20$ é a que atingiu a menor relação b_0/a_0 e o menor valor para a carga crítica ótima.

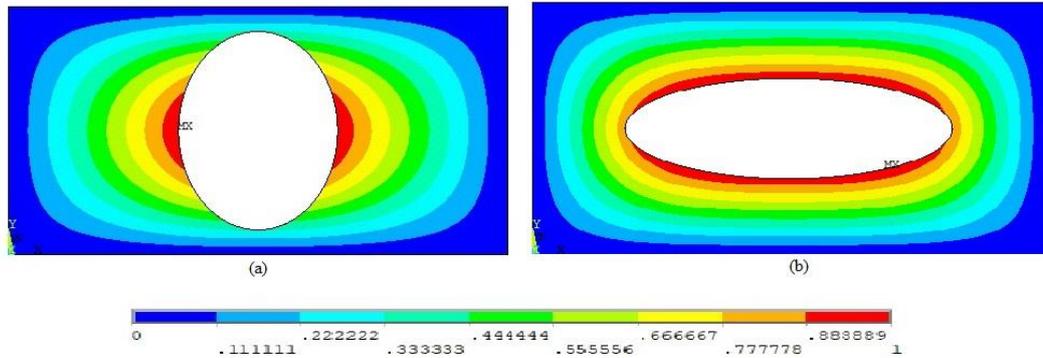
Figura 12 - Carga crítica para $\Phi = 0,20$.

Fonte – Autor

A Figura 12, de acordo com a Tabela 3, apresentou o mesmo desempenho que nas demais frações volumétricas ($\Phi = 0,10$ e $\Phi = 0,15$), ou seja, quanto maior o grau de liberdade b_0/a_0 maior a carga crítica obtida. Para a fração volumétrica de $\Phi = 0,20$ obteve-se a carga crítica de 267,75 N/mm para o grau de liberdade $b_0/a_0 = 1,26$. À vista disso, temos que a variação geométrica da perfuração possibilitou uma melhoria de até 49,28% em relação à pior geometria

para a fração volumétrica de $\Phi = 0,20$. A Figura 13 apresenta as geometrias ótima ($b_0/a_0 = 1,26$) e pior ($b_0/a_0 = 0,31$) como Figura 13 (a) e Figura 13 (b), respectivamente.

Figura 13 – Geometrias (a) ótima e (b) pior para $\Phi = 0,20$.



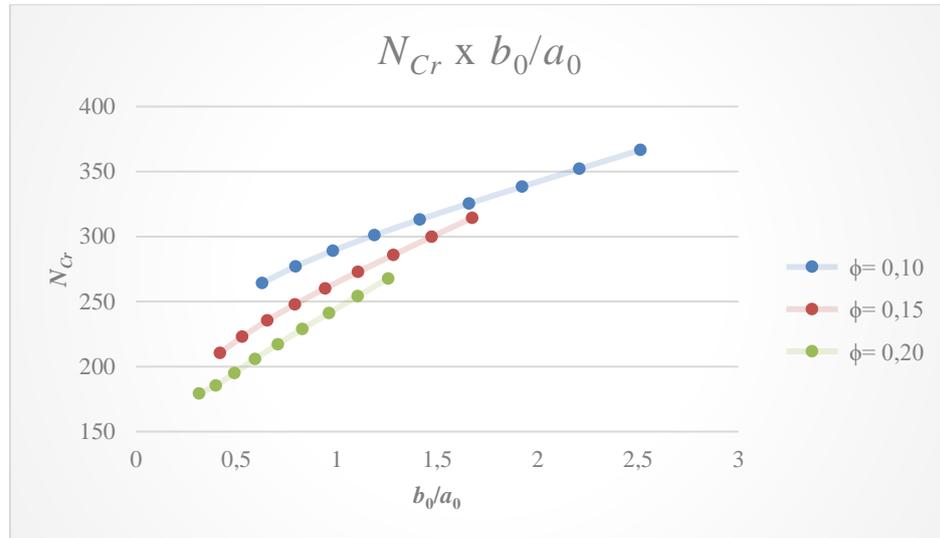
Fonte: Autor

Possuindo a carga crítica de 267,75 N/mm a geometria ótima está para a relação de $b_0/a_0 = 1,26$ enquanto que a pior tem a carga crítica de 179,36 N/mm para uma relação de $b_0/a_0 = 0,31$. Como já explicado para as outras frações volumétricas, e novamente observado para $\Phi = 0,20$; quanto mais os maiores deslocamentos da semi-onda estiverem o longo do eixo Y, e próximos ao centro da placa, melhor é a performance proporcionada pela perfuração.

4.2.4 Discussão

Relacionando as informações obtidas nas seções (4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3.), e baseado nos valores das frações volumétricas retiradas temos a Figura 14.

Figura 14 – Comparativo dos Φ em relação ao comportamento.



Fonte: Autor

Como podemos observar na Figura 14, o gráfico demonstra o comparativo das frações volumétricas relacionando com a carga crítica e com a relação b_0/a_0 . Todas as frações volumétricas tiveram o mesmo padrão do comportamento mecânico no que se refere à ascensão dos valores de carga crítica à medida que foi aumentado o grau de liberdade b_0/a_0 , o que está em de acordo com as referências estudadas.

Outro ponto que vale ser ressaltado, é que quanto maior a fração volumétrica da perfuração, menor é o valor da carga crítica e menor a faixa de valores possíveis de serem analisados para o grau de liberdade b_0/a_0 .

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho realizou um estudo utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), associado ao Design Construtal e à técnica da Busca Exaustiva, para a análise de placas retangulares com perfuração elíptica centralizada sob o efeito de compressão biaxial. Foi feito uso da abordagem numérica para uma análise mais satisfatória e ágil para obtenção das informações.

Para a fração volumétrica de $\Phi = 0,10$ a sua geometria ótima foi para a relação $b_0/a_0 = 2,51$; conduzindo à carga crítica de 366,55 N/mm e possibilitando uma melhora de 68,32% do comportamento mecânico da placa apenas através da variação geométrica.

A análise da fração volumétrica de $\Phi = 0,15$ conduziu à uma carga crítica máxima de 314,38 N/mm obtida a partir da relação $b_0/a_0 = 1,67$. Quando comparado a placa de pior performance, obteve-se uma melhora de 63,53% no comportamento mecânico.

A carga maximizada para a fração volumétrica de $\Phi = 0,20$ é de 267,75 N/mm com a relação de $b_0/a_0 = 1,26$; o que representa uma melhora de 49,28 % em relação à pior geometria para a mesma fração volumétrica.

Constatou-se que a quantidade de material retirado influencia diretamente na carga crítica de flambagem, piorando a performance da placa à medida que a quantidade de material removida, pela perfuração, aumenta.

Notou-se também que o melhor desempenho, para todas as frações volumétricas, foi dos furos que se estenderam ao longo do eixo Y possuindo melhor desempenho mecânico ao longo das análises.

Em concordância com estudos e análises realizadas, pode se afirmar que o método Design Construtal associado à técnica da Busca Exaustiva e ao Método dos Elementos Finitos são válidos para a análise estrutural de placas finas e perfuradas quando submetidas à flambagem biaxial, possibilitando a obtenção de geometria ótima para melhor desempenho mecânico da estrutura analisada. As geometrias ótimas para cada fração volumétrica estão apresentadas acima.

REFERÊNCIAS

- ÅKESSON, Björn. **Plate buckling in bridges and other structures**. CRC Press, 2007.
- ANSYS Element Reference Manual (version 12.1). Technology Drive, Canonsburg. 2009.
- ANSYS User's Manual (version 10.0). Swanson Analysis System Inc, Houston. 2005.
- BEJAN, A., "Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume," **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 40, 799–816, 1997.
- BEJAN, Adrian. **Shape and structure, from engineering to nature**. Cambridge university press, 2000.
- BEJAN, Adrian; LORENTE, Sylvie. **Design with constructal theory**. 2008.
- BEJAN, A.; Zane, J. P. **Design in Nature. How the Constructal Law Governs Evolution in Biology, Physics, and Social Organization**. New York, Doubleday, 2012.
- Bellei, I. H., **Edifícios Industriais em Aço: Projeto e Cálculo**. Pini, São Paulo, 2008. ISBN 8572661565
- Blaauwendraad, J., 2010. **Plates and FEM – Surprises and Pitfalls**. Springer, New York.
- Cheng, and Zhao, J., "Strengthening of perforated plates under uniaxial compression: Buckling analysis," **Thin-Walled Structures**, 2010. Vol. 48, pp. 905-914.
- CHOW, Fong-Yen; NARAYANAN, Rangachari. **Buckling of plates containing openings**. 1984.
- DA SILVA, Vitor Dias. **Mechanics and strength of materials**. Springer Science & Business Media, 2006.
- Da Silveira, T., Correia, A.L.G., Da Silva, C.C.C., Rocha, L.A.O., Real, M.V., Dos Santos, E.D., Isoldi, L.A. **Otimização Geométrica de Placas com Enrijecedores Submetidas à Flexão**. 2012.
- DA SILVEIRA, Thiago et al. Applicability Evidence of Constructal Design in Structural Engineering: Case Study of Biaxial Elasto-Plastic Buckling of Square Steel Plates with Elliptical Cutout. **Journal of Applied and Computational Mechanics**, v. 7, n. 2, p. 922-934, 2021.
- DA SILVEIRA, Thiago. **Simulação numérica e Design Construtal aplicados à flambagem biaxial elasto-plástica de placas perfuradas**. 2021. 151 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Oceânica, Programa de Pós - Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, 2021.
- DAWE, John L.; GRONDIN, Gilbert Y. Inelastic buckling of steel plates. **Journal of Structural Engineering**, v. 111, n. 1, p. 95-107, 1985.

GHODOOSI, Lotfollah; EĞRICAN, Nilüfer. Conductive cooling of triangular shaped electronics using constructal theory. **Energy conversion and management**, v. 45, n. 6, p. 811-828, 2004.

Hibbeler, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. Tradução Arlete Simille Marques; revisão técnica Sebastião Simões da Cunha Jr. - 7. ed. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Helbig, D. **Estudo numérico de placas finas de aço com perfuração, submetidas à flambagem elástica e elasto-plástica, aplicando-se o método design construtal**, 2016. (Doutorado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Lisbôa, T. D. V. **Uma Metodologia para a Obtenção de Respostas Semi-Analíticas para Flexão Linear e Não-Linear de Placas Semi-Espessas**. 2009. (Mestrado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MADENCI, Erdogan; GUVEN, Ibrahim. **The finite element method and applications in engineering using ANSYS®**. Springer, 2006.

Megson, T. H. G. **Structural and Stress Analysis**. Ed. Else, 2005

Moen, C. D.; Schafer, B. W. **Elastic Buckling of Thin Plates with Holes in Compression or Bending. Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 12, p. 1597-1607, 2009. ISSN 0263-8231.

OKUMOTO, Yasuhisa et al. **Design of ship hull structures: a practical guide for engineers**. Springer Science & Business Media, 2009.

Przemieniecki, J. S., 1985. **Theory of Matrix Structural Analysis**. Dover Publications.

REAL, M. de V.; ISOLDI, L. A. Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes. In: **Southern Conference on Computational Modeling**. 2010. p. 69-73.

REIS, A. Heitor. **The Constructal Law (La Loi Constructale)**, A. Bejan, S. Lorente, L'Harmatan, Paris (2005), pp. 109, ISBN: 2-7475-8417-8. 2006.

Silva, C. C. C. D., Troian, S. P., Rocha, L. A. O., Santos, E. D. D., Real, M. D. V., & Isoldi, L. A. **Simulação numérica e método constructal design aplicados ao estudo de placas perfuradas de material compósito submetidas à flexão**. Revista de Engenharia e Tecnologia [recurso eletrônico]. Ponta Grossa, PR. Vol. 7, n. 2, ed. esp.(jun. 2015), p. 47-55, 2015.

SZILARD, Rudolph. **Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods**. John Wiley & Sons, 2004.

Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**. McGrawhill, New York, 1959. ISBN 0070858209.

Ventsel, E.; Krauthammer, T. **Thin Shells: Theory Analysis, & Applications**. Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

Zienkiewicz, O. C. **The finite element in engineering science**. McGraw-Hill, London, 1971.

WANG, Chien Ming; WANG, Chang Yi. **Exact solutions for buckling of structural members**. CRC press, 2004.