

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA - CAMPUS ITAQUI  
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

**MARILIANE MACHADO DALCIN**

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE  
MARKOWITZ PARA ALOCAÇÃO DE  
ATIVOS FINANCEIROS**

**Itaqui  
2021**

**MARILIANE MACHADO DALCIN**

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE  
MARKOWITZ PARA ALOCAÇÃO DE  
ATIVOS FINANCEIROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes

**Itaqui  
2021**

— Dalcin, Mariliane Machado

APLICAÇÃO DA TEORIA DE MARKOWITZ  
PARA ALOCAÇÃO DE ATIVOS FINANCEIROS / Ma-  
riliane Machado Dalcin. – outubro, 2021.

28 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Uni-  
versidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemá-  
tica, 2021.

“Orientação: Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes”.

1. Gestão de riscos financeiros. 2. Teoria de portfó-  
lios. 3. Educação financeira. I. Título.

MARILIANE MACHADO DALCIN

**APLICAÇÃO DA TEORIA DE MARKOWITZ PARA ALOCAÇÃO DE ATIVOS FINANCEIROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 02 de outubro de 2021.

Banca examinadora:

CHARLES QUEVEDO  Assinado de forma digital por  
CHARLES QUEVEDO  
CARPES:01034333097  
Dados: 2021.10.27 10:15:16 -03'00'

---

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes  
Orientador

  
Prof. Dra. Elisa Regina Cara  
Universidade Federal do Pampa

Documento assinado digitalmente



ALEX SANDRO GOMES LEAO  
Data: 27/10/2021 14:47:52-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

---

Prof. Dr. Alex Sandro Gomes Leão  
Universidade Federal do Pampa

## RESUMO

Poupar não é fácil para a maioria das pessoas e saber onde investir o dinheiro poupado, muitas vezes, se torna uma incógnita, pois o investimento é tão importante quanto a poupança, senão todo o esforço de cortar gastos pode ser perdido em um investimento ruim. Ao realizar uma aplicação financeira, surgem várias incertezas referentes a remuneração do capital aplicado, isto é, sempre estamos correndo riscos. Uma das premissas básicas do investimento financeiro é que riscos e retornos são variáveis proporcionais, ou seja, ativos que geram muito retorno apresentam maior risco. Aplicar metodologias de cálculo e controle do risco possibilita diminuir os prejuízos dos investimentos em razão das instabilidades nos mercados financeiros. Usando a Estatística podemos mensurar tais riscos, o que possibilita uma análise mais precisa das possibilidades e permite uma tomada de decisões mais embasada. No mercado financeiro uma maneira comum de estimar o retorno de um ativo é através da média dos retornos deste em relação a períodos anteriores, enquanto que o risco associado costuma ser estimado pelo desvio padrão dos retornos. A diversificação como forma de redução do risco de uma carteira foi amplamente discutida e comprovada por meio de estudos sobre a correlação entre os ativos. A Teoria do Portfólio Markowitz é usada, neste trabalho, para construir portfólios que otimizem o retorno esperado de acordo com determinado nível de risco. Assim, podemos comparar a performance de algumas carteiras montadas com diferentes combinações de ativos destacando aquela com a melhor relação risco-retorno. Neste trabalho, temos como objetivo analisar como as ferramentas estatísticas podem ser utilizadas para o planejamento de estratégias de investimentos. Assim, analisamos a influência da correlação entre diversos ativos na performance de uma carteira. Os ativos escolhidos para análise foram o Índice Bovespa, o ouro, o dólar, o Tesouro Selic(LFT) e o Bitcoin. Esses ativos foram escolhidos por possibilitarem a criação de portfólios com diferentes perfis de risco. Foram calculados os retornos e riscos de cada ativo com dados reais do ano de 2019 para seleção de um portfólio ótimo e o desempenho dessa carteira foi calculado para o ano de 2020. Verificamos que a carteira com a melhor relação risco-retorno, deveria conter 10% de LFT, 30% de IBOV, 40% de ouro, 10% de dólar e 10% de bitcoin. Adotando-se essa carteira ao final de 2019 obteríamos um retorno ao final de 2020 de 32,95%. Essa análise possibilitou verificar que uma carteira bem diversificada pode gerar retornos mesmo em épocas de muitas incertezas no mercado como ocorreu em 2020.

**Palavras-chave:** Gestão de riscos financeiros. Teoria de portfólios. Educação financeira.

## ABSTRACT

Saving money isn't easy for the most of people, and knowing how to invest this money saved, a lot of times, becomes an enigma, because the investment is so important as the saving, if no, all of the effort to cut spending could be lost in a bad investment. When you makes a financial application, a lot of insecurities emegers about the invested capital's remuneration, in other words, we're always taking risks. Applying calculation and risk control methodologies makes it possible to decrease investment losses because of the financial market instability. Using the Statistic, we can measure these risks, which enables a more accurate analysis of the possibilities, and makes it possible a decision making more grounded. In the financial market, an ordinary way to stimulate the comeback of an active is through the average of returns of this in relation to previous periods, while the associated risk usually is estimated by the detour of returns pattern. The diversification as a way to a wallet's risks reduction was amply discussed and proven through studies about the correlation between actives. The Markowitz Portfolio Theory is used, in this work, to build portfolios that optimize the expected return in sync with the risk level determined. So, we can compare the performances of some mounted wallets with differents combina-tions of actives, highlighting that with the best relation risk-return. In this work, we have as a goal analyze how the statistic tools could be utilized for the strategy's planning of investment. So, we analyze the influence of the correlation between a lot of actives in the performance of a wallet. The chosen actives for the analysis were the Índice Bovespa, the gold, the dollar, the Tesouro Selic (LFT) and the Bitcoin. These actives were chosen to enable the portfolios creation with differents risk profiles. It was calculated the returns and risks of each active with real datas of the year of 2019 to select a great portfolio, and the performance of this wallet was calculated for the year of 2020. We verificated that the wallet with the better relation risk-return should contain 10% of LFT, 30% of IBOV, 40% of gold, 10% of dollar and 10% of bitcoin. Adopting this wallet to the final of 2019 we would get a return of 32,95% at the final of 2020. This analysis makes it possible to verify that a diverse wallet could generate returns even at the periods of insecurities in the market as it happened in 2020.

**Keywords:** Financial risk management. Portfolio Theory, Financial Education.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de ativos com correlação positiva.....	22
Figura 2	Exemplo de ativos com correlação negativa.....	23
Figura 3	Exemplo de ativos não correlacionados.....	23
Figura 4	Retorno semanal para 4 ativos hipotéticos .....	24
Figura 5	Montagem de diferentes carteiras para os cinco ativos reais.....	25

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 Retornos hipotéticos para 4 ativos financeiros .....	22
---	----

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1 Medidas Estatísticas</b> .....	<b>11</b>
2.1.1 Medidas de Tendência Central.....	11
2.1.2 Medidas de Dispersão .....	12
2.1.3 Medidas de Associação de Variáveis .....	13
2.1.4 A importância da correlação na alocação de ativos .....	14
<b>2.2 Fatores de Risco Financeiro</b> .....	<b>14</b>
2.2.1 Risco e retorno de uma carteira de ativos .....	17
2.2.2 Risco e retorno para múltiplos ativos.....	18
2.2.2.1 Ativos digitais .....	19
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	<b>21</b>
<b>4 RESULTADOS</b> .....	<b>22</b>
<b>4.1 Resultados Preliminares</b> .....	<b>22</b>
<b>4.2 Resultados Com Dados Reais</b> .....	<b>24</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>26</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>28</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O ato de poupar dinheiro, para muitas pessoas, não é uma tarefa fácil. Assim, investir o dinheiro poupado de forma eficiente é a maneira mais inteligente de recompensar o esforço de optar pela poupança ao invés do consumo.

A construção de uma Educação Financeira auxilia o indivíduo na organização dos gastos, diminuindo despesas e economizando, permitindo entender as melhores ações e investimentos para seu futuro. Além disso, tem um papel importante no crescimento e no desenvolvimento de cidadãos críticos na tomada de decisões que desenvolvam a consciência de riscos e oportunidades financeiras em sua vida cotidiana.

Desenvolver estratégias de consumo consciente é um dos objetivos do estímulo ao estudo da Educação Financeira. A mesma não é um conjunto fechado de teorias e informações, mas a capacidade de relacionar conhecimentos de diversas áreas em prol de uma tomada de decisão que seja menos intuitiva e com maior nível de racionalidade (MULLER, 2018).

Citando Ben Bernanke, em tradução livre<sup>1</sup>:

Consumidores bem informados, os quais possam servir como seus próprios defensores, são a melhor defesa contra a proliferação de produtos e serviços financeiros inadequados, excessivamente caros ou abusivos.

A caderneta de poupança ainda é o veículo mais comum utilizado pelos brasileiros para investir seus recursos. Conforme dados do Banco Central do Brasil divulgados pela revista Valor Investe<sup>2</sup> o saldo das aplicações na caderneta de poupança ao final de 2020 somavam R\$1,035 trilhão. Entretanto, o contexto de juros baixos dos últimos anos tem levado cada vez mais pessoas a buscarem investimentos com maior potencial de rentabilidade.

Outra informação interessante vem da pesquisa "A DESCOBERTA DA BOLSA PELO INVESTIDOR BRASILEIRO", realizada pela B3<sup>3</sup>. Esta pesquisa mostra que houve um salto de aproximadamente 70% no número de pessoas físicas que começaram a investir na bolsa de valores entre os anos de 2019 e 2020, superando a marca de 3 milhões investidos em renda variável.

Isso mostra que o comportamento financeiro dos brasileiros está mudando aos poucos, mas ainda existe um longo caminho a ser percorrido e são necessárias diversas

<sup>1</sup>BERNANKE, Ben. Entrevista . [mar. 2020]. Entrevista: concedida à CNBC TV.New Jersey, 2020.

<sup>2</sup>Disponível em: <<https://valorinveste.globo.com/produtos/renda-fixa/noticia/2021/01/07/brasileiros-deixam-r-1663-bilhoes-na-poupanca-em-2020-maior-volume-da-historia.ghtml>>. Acesso em: 21 jun. 2021

<sup>3</sup>B3 é a bolsa de valores oficial do Brasil.

ferramentas para enfrentar essa nova jornada.

A estatística está presente em diversas áreas do conhecimento auxiliando no desenvolvimento de técnicas e a tomada de decisões no cotidiano, desde as mais simples, até as mais complexas. É um dos ramos de grande importância da matemática, pois proporciona coleta, interpretação e análise de dados de pesquisas. Dessa forma, aumentando o nível de confiança de informações divulgadas, favorecendo assim, a tomada de decisões.

A Estatística pode ser entendida como parte da área de estudo de pesquisa operacional, pois oferece ferramentas para identificar problemas através de seus sintomas e procura solucioná-los para tomar a decisão correta (ANDRADE, 2009). Atualmente, o estudo da Estatística é aplicado não somente com o intuito de constatar fatos, mas também de percepção de tendências. Agindo assim, as pessoas estimulam a concorrência e fazem do seu consumo um ato pensado e calculado (SOUZA, 2010).

Assim, considerando a importância do conhecimento estatístico e da educação financeira para o desenvolvimento de competências críticas para o cidadão e das contribuições nas tomadas de decisões, devido ao fato de estarmos inseridos em um mundo de consumidores, podemos usar as ferramentas de estatística para fazermos as escolhas mais acertadas. Durante toda a nossa vida lidamos com situações que envolvem gastar, investir, poupar dinheiro entre outras diversas situações financeiras e econômicas (OLIVEIRA; ROSA, 2020). Dessa forma, este é um tema importante a ser tratado, já que compreender e saber expor sua opinião frente a situações financeiras faz parte da rotina de todos nós (SANTOS, 2016).

Neste trabalho, utilizamos alguns conceitos da Estatística para analisar os riscos relacionados a investimentos financeiros. Para isto, usaremos a chamada Teoria Moderna do Portfólio desenvolvida por Harry Max Markowitz e a qual proporcionou a ele o prêmio Nobel de Economia no ano de 1990 (FONSECA, 2011). Assim pretendemos analisar como as ferramentas estatísticas podem nos ajudar a definir estratégias de investimentos mais eficientes.

Iniciaremos revisando a definição de algumas medidas estatísticas. A seguir, explicaremos os diversos conceitos de risco que surgem quando falamos de ativos financeiros. Nas seções seguintes, apresentamos uma breve introdução à teoria de Markowitz, a qual permite estimar o risco e o retorno de uma carteira de dois ativos, inicialmente, e de múltiplos ativos financeiros, posteriormente. Após a revisão bibliográfica, apresentamos a metodologia utilizada neste trabalho e os resultados obtidos. Finalizamos o texto com nossas considerações finais e as referências bibliográficas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Medidas Estatísticas

A análise de risco em investimentos financeiros está intrinsecamente ligada a avaliação da probabilidade de ocorrerem variações em relação a um retorno médio esperado. Neste sentido, o estudo e a interpretação estatística de dados possibilita que sejam calculadas estimativas de risco e de retorno financeiro com base em dados históricos. Assim, são utilizadas diversas medidas que nos possibilitam uma análise mais precisa das amostras, facilitando a compreensão do problema para uma tomada de decisões mais embasada. Do ponto de vista financeiro, as medidas estatísticas mais relevantes dividem-se em três categorias (CAETANO, 2017).

- Medidas de tendência central: Buscam representar uma série de valores observados através de um equilíbrio dos dados.
- Medidas de dispersão: Determinam o grau de variabilidade dos dados observados.
- Medidas de associação de variáveis: Indicam a existência de relações estatísticas que envolvem dependência entre duas variáveis.

#### 2.1.1 Medidas de Tendência Central

Existem várias maneiras de caracterizar conjuntos de dados. Estatisticamente falando, a forma mais simples é uma medida de tendência central como, por exemplo, a moda, a média e a mediana. Vamos definir a seguir o que vem a ser cada uma delas (MONTE; CARVALHO, 2018):

**Moda:** É uma medida de tendência central e consiste nos valores mais frequentemente observados em um conjunto de dados, então para defini-lo basta observar a frequência do valor. Quando um conjunto de dados não apresenta moda, dizemos que esse conjunto é amodal. Caso exista uma moda, denominamos o conjunto de Unimodal. Existindo duas modas, denominamos o conjunto de bimodal e assim sucessivamente.

**Média:** O valor médio é calculado somando todos os valores do conjunto de dados e dividindo pelo número de elementos desse mesmo conjunto.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

Sendo  $n$  a quantidade de dados e  $x_i$  o valor de cada dado que será usado para calcular a média.

**Mediana:** A mediana representa o valor central de um conjunto de dados. Para encontrar o valor intermediário, é necessário classificar os valores em ordem crescente ou decrescente. Quando o número de elementos no conjunto é par, a mediana é derivada da média dos dois valores centrais, dada por

$$x^* = \frac{1}{2} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}+1} x_i \quad (2)$$

Dependendo da análise que deseja-se realizar cada uma dessas medidas de tendência central pode ganhar maior relevância (FREITAS; RENNO; JUNIOR, 2013). Por exemplo, ao decidir sobre qual ação comprar na bolsa de valores é comum alguns investidores procurarem a moda entre as ações recomendadas pelas diversas casas de análise. Porém, ao analisar o possível retorno desse investimento é comum que seja utilizada a média para definir o retorno esperado. Em alguns casos, ainda, podem ser sugeridos retornos muito distintos para o mesmo ativo. Neste caso, a mediana passa a ser a medida de maior relevância pois sobre menor influência de valores extremos.

### 2.1.2 Medidas de Dispersão

A medida de dispersão analisa a distância entre os números do conjunto e o valor médio do conjunto. As medidas de dispersão mais utilizadas são: a amplitude, a variância e o desvio padrão. Estes parâmetros estatísticos usados para determinar o grau de variação dos dados em um conjunto de valores. A utilização desses parâmetros torna a análise da amostra mais confiável, pois as medidas de tendência central (média, mediana, moda) costumam ocultar a homogeneidade ou heterogeneidade dos dados (VIEIRA, 2006).

**Amplitude:** Esta medida é definida como a diferença entre a maior e a menor observação de um conjunto de dados, ou seja, para encontrar a amplitude de uma lista de números, basta subtrair o menor elemento do maior.

$$Amp = x_{max} - x_{min} \quad (3)$$

**Variância:** É uma medida de dispersão que mostra quão distantes os valores estão da média, ou seja, o quão distante está cada valor do valor central. Dito isso, quanto menor

a variância, mais próximos os valores da média e portanto mais homogêneos; por outro lado, quanto maior a variância, mais distantes os valores estão da média e consequentemente os dados são mais heterogêneos. A variância amostral é calculada pela equação (4)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (4)$$

**Desvio Padrão:** Esta é uma das principais medidas para estimativa de risco financeiro e é calculada a partir da variância pela seguinte expressão:

$$\sigma = \sqrt{S^2} \quad (5)$$

### 2.1.3 Medidas de Associação de Variáveis

Muitas vezes precisamos avaliar o grau de relacionamento entre duas ou mais variáveis. Quando esse relacionamento existe, dizemos que as variáveis estão correlacionadas e se o sentido de crescimento for o mesmo para as variáveis, dizemos que existe correlação positiva. Quando o sentido de crescimento é inverso, isto é, quando o valor de uma variável aumenta sempre que outro diminui, dizemos que ocorre uma correlação negativa.

**Medida de Covariância:** A covariância também pode ser chamada de medida de dependência linear entre duas variáveis aleatórias. A covariância é um parâmetro de grande importância na determinação do valor da intensidade da correlação. É uma medida que reflete o comportamento da intensidade da relação entre as variáveis, dada por,

$$Cov(\bar{x}, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - y)}{n - 1} \quad (6)$$

**Correlação:** A partir do cálculo da covariância a correlação entre duas variáveis  $x$  e  $y$  é dada por:

$$Corr(\bar{x}, y) = \rho_{(x,y)} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (7)$$

Sendo  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  o desvio padrão das variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente.

### 2.1.4 A importância da correlação na alocação de ativos

Os coeficientes de correlação são métodos estatísticos para se medir as relações entre variáveis e o que elas representam. Como uma variável se comporta em um cenário onde outra está variando, o quanto as variáveis “andam” na mesma direção. Existem diferentes tipos de correlação, tais como, a correlação de Pearson, também chamada de correlação linear, que exprime o grau de correlação através dos valores entre -1 e 1 (SERMARINI, 2017).

Quando um coeficiente se aproxima de 1 ou -1, mais forte é a relação, já quando está próximo de 0, significa que não há relação significativa entre as variáveis. Correlação Positivamente Perfeita, próxima de 1, as variáveis andam em uma mesma direção, quando uma variável aumenta, a outra também aumenta. Correlação Negativa ou Inversa, ou seja, próximo de -1, é quando uma variável aumenta, a outra diminui. Quando estamos nos referindo a finanças se aceita a correlação positiva entre 0,3 a 1,0, assim como a correlação negativa ou inversa entre -0,3 a -1,0. Correlação Nula ou próximo de zero, as variáveis não tem correlação uma com a outra. Consideramos em finanças a correlação nula entre -0,3 a 0,3.

Veremos que quanto menor for a correlação entre variáveis ou ativos, mais diversificada será a carteira, diminuindo assim o risco. Para uma boa diversificação de uma carteira de investimentos, é essencial que se tenha ativos com correlação negativa. Ativos que caminhem em direções opostas, podem garantir menores riscos, com retornos mais significativos, em diferentes momentos econômicos.

## 2.2 Fatores de Risco Financeiro

É possível classificar os tipos de Riscos em dois grandes grupos: os Sistemáticos que envolvem todo o sistema financeiro, que não são diversificáveis; e os Riscos Não Sistemáticos, que são diversificáveis. O retorno do investimento em um ativo financeiro só pode ser conhecido com exatidão após finalizado o período de investimento. Previamente a realização do investimento e durante a rentabilização existem incertezas associadas ao possível retorno. A medida numérica dessa incerteza é chamada de risco. A seguir, apresentaremos as definições dos tipos mais comuns de riscos:

**Risco de crédito:** É a possibilidade de ocorrência de perdas associadas ao não cumprimento pelo tomador ou contraparte de suas respectivas obrigações financeiras nos

termos pactuados, à desvalorização de contrato de crédito decorrente da deterioração na classificação de risco do tomador, à redução de ganhos ou remunerações, às vantagens concedidas na renegociação e aos custos de recuperação (BRASIL, 2009).

O risco de crédito está relacionado ao não cumprimento de um compromisso financeiro em tempo hábil, ou seja, é a inadimplência de uma obrigação. Por exemplo, ao colocar seu dinheiro em um investimento financeiro de renda fixa você está indiretamente, através de uma instituição financeira, emprestando seu dinheiro para outra pessoa ou para uma empresa. Sempre existe a possibilidade de que o capital que foi tomado emprestado não seja devolvido. Este é o risco de crédito o qual está diretamente associado ao tomador do empréstimo.

Em geral, a mensuração desse risco é feita com base em um histórico de pagamentos e na capacidade financeira da pessoa ou instituição que solicita o crédito. Para grandes tomadores de crédito, como empresas multinacionais e governos, existem empresas especializadas em analisar o risco de crédito atribuindo uma classificação ou nota de crédito. Essas empresas de análise de risco de créditos são chamadas de agências de “rating”.

A forma mais comum de estimar o risco de crédito é analisar o fluxo de caixa do tomador do empréstimo, embora tenham se desenvolvido nos últimos anos técnicas estatísticas de análise de dados e de inteligência artificial. A análise desse tipo de risco, não será o escopo deste trabalho.

**Risco de liquidez:** É a ocorrência de desequilíbrios entre ativos negociáveis e passivos exigíveis —“descasamentos” entre pagamentos e recebimentos que possam afetar a capacidade de pagamento, levando-se em consideração as diferentes moedas e prazos de liquidação de seus direitos e obrigações (NACIONAL, 2012).

Podemos dizer que o risco de liquidez se refere às perdas que se dão quando o ativo é resgatado antecipadamente. É uma incapacidade para encontrar compradores a um ativo em tempo de não precisar dar concessão de desconto.

O histórico inflacionário do Brasil, sobretudo nas décadas anteriores ao lançamento do Plano Real, desenvolveu no país a cultura de investimento em imóveis, por exemplo. Esse tipo de investimento é um dos que mais sofre com o risco de liquidez. Considerando os trâmites de cartório de registro de imóveis, taxas municipais e liberação de financiamento habitacional, é incomum que a venda de um imóvel seja liquidada em período inferior a 90 dias. Isso significa que mesmo tendo confirmado a venda do seu imóvel você não terá acesso a esse dinheiro em menos de três meses.

Perceba que o risco de liquidez exige um grande planejamento financeiro. Su-

ponha que você precise de recursos para sua subsistência como compra de alimentos ou pagamento de despesas médicas de emergência. Se seu capital estiver totalmente investido em ativos de baixa liquidez você não conseguirá honrar com seus compromissos (contrairá dívidas) ou terá que oferecer um grande desconto em relação ao preço de mercado para conseguir prover liquidez ao seu ativo. Em qualquer um dos casos você estará perdendo dinheiro.

A determinação do risco de liquidez é feita no momento do investimento, no caso de ativos financeiros, ou estimada estatisticamente por agentes do setor. No caso dos imóveis, por exemplo, grandes corretores de imóveis e institutos de estatística divulgam, com frequência, o tempo médio de venda de um imóvel. A análise desse tipo de risco também não será tratada neste trabalho.

**Risco operacional:** É a possibilidade de ocorrência de perdas resultantes de falha, deficiência ou inadequação de processos internos, pessoas e sistemas ou de eventos externos (NACIONAL, 2006).

Todos os tipos de imprecisões e prejuízos dentro de uma organização, seja de pessoas ou sistemas é um risco operacional, os quais podem gerar algum tipo de dano aos investimentos. Incluem-se na definição de risco operacional as situações relacionadas às fraudes, erros do próprio investidor e eventos imprevisíveis extremamente desfavoráveis chamados de *Black Swan*<sup>1</sup> (TALEB, 2007).

Embora não seja possível eliminar esse tipo de risco, assim como também ocorre para os demais, a principal ferramenta para mitigar o risco operacional é justamente a educação financeira do investidor. Quando mais conhecimento os cidadãos possuem sobre as classes de ativos e dinâmicas operacionais e de preço, menor a chance de falhas ou fraudes implicarem em perda financeira.

Um tipo comum de fraude é a chamada Pirâmide Financeira ou Esquema de Ponzi. Neste tipo de fraude a remuneração dos investidores mais antigos depende do aporte financeiro de novos investidores. Esse é um tipo de fraude relativamente fácil de identificar, mesmo assim é comum que muitas pessoas percam dinheiro seguindo promessas de muito retorno em pouco tempo.

A análise de riscos operacionais não será feita neste trabalho, embora esse seja um dos temas de maior utilidade para ser abordado ao longo da educação básica. Sugere-se uma abordagem desse tema em trabalhos futuros.

**Risco de mercado:** É a possibilidade de ocorrência de perdas resultantes das flu-

---

<sup>1</sup>O conceito de Black Swan, no contexto de mercado financeiro, foi proposto inicialmente por Nassim Taleb em seu livro intitulado: A Lógica do Cisne Negro

tuações nos valores de mercado de posições. Esta definição inclui os riscos das operações sujeitas à variação cambial, taxa de juros, dos preços de ações e dos preços de mercadorias (commodities) (BRASIL, 2007).

O risco de mercado está associado a mudanças de parâmetros e as instabilidades de taxas de juros, câmbio, ações ao qual um negócio se enquadra que poderá afetar os ativos e passivos de qualquer investidor.

Dentre todos esses riscos, este trabalho dará enfoque no chamado risco de mercado pois esse é o tipo de risco que pode ser reduzido através de uma análise de correlação seguindo a Teoria de Portfólio de Markowitz.

### **2.2.1 Risco e retorno de uma carteira de ativos**

Nesta seção, apresentaremos de forma bastante abreviada, parte da chamada Teoria do Portfólio, pela qual Henry Markowitz foi laureado em 1990 com o prêmio Nobel. O objetivo desta teoria é organizar uma carteira de ativos financeiros que propicie o maior retorno com o menor risco possíveis.

Uma das premissas fundamentais dos investimentos financeiros é que risco e retorno são variáveis diretamente proporcionais, isto é, ativos que geram muito retorno possuem maior risco. Essa premissa decorre do comportamento natural dos investidores de escolher entre dois ativos com a mesma expectativa de retorno, aquele que tiver o menor risco.

Em geral, considera-se que ativos de renda fixa possuem menor risco ao investidor em relação a ativos de renda variável, com retornos conseqüentemente menores também. Porém, um investidor pode optar por distribuir seus recursos e, intuitivamente, espera-se que ao investir simultaneamente em diversos ativos o risco global de sua carteira será menor que o ativo mais arriscado e, adicionalmente, o retorno será maior que aquele do ativo menos arriscado.

No mercado financeiro uma maneira bastante comum de estimar o retorno de um ativo é através da média dos retornos deste ativo em relação a certa quantidade de períodos anteriores. Por exemplo, para estimar o rendimento futuro de determinada ação pode-se analisar os retornos diários no último ano e extrair desses dados um valor médio. Da mesma forma, o risco associado a este ativo costuma ser estimado pelo desvio padrão dos retornos históricos desse ativo (LIMA, 2018).

Assim, considerando uma carteira de investimentos com apenas 2 ativos o retorno

da Carteira pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$Retorno = w_a \cdot R_a + w_b \cdot R_b, \quad (8)$$

sendo  $w_a$  e  $w_b$  o peso dos ativos A e B na carteira e  $R_a$  e  $R_b$  os retornos médios dos ativos A e B, respectivamente.

Seguindo a teoria de Markowitz, para uma carteira composta por dois ativos o risco da carteira depende da correlação entre os ativos e pode ser calculado por:

$$Risco = \sqrt{w_a^2 \cdot \sigma_a^2 + w_b^2 \cdot \sigma_b^2 + 2(w_a w_b \sigma_a \sigma_b \rho_{(ab)})}, \quad (9)$$

sendo  $w_a$  e  $w_b$  o peso dos ativos A e B na carteira,  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  os desvios padrão dos retornos de A e B e  $\rho_{(ab)}$  a correlação entre os dois ativos. Analisando a equação (9) percebe-se que quanto menor a correlação entre os ativos menor será o risco da carteira. Em particular, se a correlação for negativa o risco diminui consideravelmente. Olhando a equação (9) verificamos que, se o " $\rho$ " for igual a zero, o terceiro termo desaparece, ou seja, o risco diminui. Por outro lado, se o  $\rho$  for negativo, o

Se pudermos assumir a existência de um ativo livre de risco, digamos que seja o ativo B por exemplo, podemos fazer  $\sigma_b = 0$  na equação (9) o que resulta em:

$$Risco = \sqrt{w_a^2 \cdot \sigma_a^2} \quad (10)$$

Portanto, a inclusão de um ativo livre de risco na carteira permite anular os termos associados a ele no cálculo do risco.

No Brasil, os títulos públicos são considerados os de menor risco e para fins de análise costuma-se utilizar o Tesouro Selic (LFT) para servir como ativo de risco zero. Do ponto de vista global os *Treasuries* dos Estados Unidos com vencimento para 10 anos são os ativos considerados livres de risco. Matematicamente, para um ativo ser considerado livre de risco basta que o desvio padrão dos retornos seja nulo o que na prática dificilmente ocorre para algum ativo real.

### 2.2.2 Risco e retorno para múltiplos ativos

Para que possamos estimar o retorno e o risco para uma carteira com múltiplos ativos precisamos generalizar as equações (8) e (9) para contemplar o risco, o retorno e

as correlações entre os diversos ativos. Para uma carteira composta por  $n$  ativos o retorno e o risco podem ser calculados, respectivamente, por:

$$Retorno = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot R_i) \quad (11)$$

$$Risco = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{(ij)})} \quad (12)$$

As equações (11) e (12) podem ser reescritas na forma matricial da seguinte forma:

$$Retorno = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Risco = \sqrt{\begin{bmatrix} w_1 \sigma_1 & w_2 \sigma_2 & \dots & w_n \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \dots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \sigma_1 \\ \vdots \\ w_n \sigma_n \end{bmatrix}} \quad (14)$$

Usando a equação (6) é possível simplificar a equação (14) para obter:

$$Risco = \sqrt{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & Cov(1,2) & \dots & Cov(1,n) \\ Cov(2,1) & \sigma_2^2 & \dots & Cov(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(n,1) & Cov(n,2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}} \quad (15)$$

Assim, neste trabalho utilizaremos as equações (13) e (15) para calcular o risco e o retorno de uma carteira com cinco ativos diferentes. Esses cinco ativos foram escolhidos para contemplar os diversos tipos de perfis de risco dos investidores. Para incluir na análise os investidores com perfil mais arrojado, incluiremos entre nossos ativos tradicionais um ativo digital.

### 2.2.2.1 Ativos digitais

Pode-se dizer que a era dos ativos digitais iniciou-se em 2008 com a entrada em funcionamento da rede da criptomoeda Bitcoin (ULRICH, 2014). Passada uma década a

gama de criptoativos (ou ativos digitais) já vai muito além do Bitcoin e das demais criptomoeadas e inclui produtos exóticos como os NFTs (*Non-Fungible Token*). Para fins de criação e análise de portfólio, neste trabalho, iremos utilizar apenas o Bitcoin como representante entre as diversas possibilidades de investimentos em criptoativos por ser aquele que possui o maior volume financeiro movimentado diariamente. Porém, as análises que serão realizadas podem ser reproduzidas para outros ativos digitais que tenham um histórico de negociação suficientemente grande. Atualmente, também é possível investir em índices de criptomoeadas como o NCI (*Nasdaq Crypto Index*) que possuem uma maior representatividade das diversas opções disponíveis no mercado.

Tomaremos como base dados reais do ano de 2019 para que possamos definir qual o percentual ótimo de cada um desses ativos nessa carteira. Os detalhes dessa análise serão apresentados no capítulo de resultados.

### 3 METODOLOGIA

A partir de agora iremos analisar dados históricos reais de alguns ativos financeiros considerados tradicionais e, através do uso da teoria de portfólios, iremos planejar uma carteira de investimentos que otimize a relação risco×retorno de modo a contemplar o investimento em criptoativos, ou ativos digitais.

Inicialmente iremos coletar os dados históricos dos seguintes ativos:

1. IBOV - Principal índice de ações da bolsa brasileira.
2. OZ1D - Código do padrão ouro 250 gramas negociado na B3.
3. DOLFUT - Código da série histórica da cotação do dólar americano frente ao real negociado na B3.
4. LFT - Título de renda fixa chamado de Tesouro Selic.
5. *BTC – BRL* - Histórico de cotação do Bitcoin frente ao real.

Os ativos listados acima foram selecionados por serem capazes de representar os principais produtos de investimento disponíveis no Brasil para o público em geral. O Tesouro Selic pode servir de referência para os diversos produtos de renda fixa disponíveis no mercado financeiro enquanto que o IBOV é normalmente utilizado como referência para investimentos em renda variável, particularmente em ações. A escolha do ouro e do dólar se dá pela característica desses ativos servirem como reserva de valor em situações de crise financeira em nosso país e, por fim, o Bitcoin foi escolhido por ser o principal criptoativo em volume de mercado atualmente.

Com base na análise dos retornos diários de cada um desses ativos durante os anos de 2019 e 2020 aplicaremos a teoria de Markowitz para construir uma carteira eficiente que busque otimizar a relação risco×retorno. Avaliaremos a composição de cada carteira utilizando como parâmetro o chamado Coeficiente de Variação (CV) o qual é definido como a divisão do valor calculado para o risco pelo valor estimado para o retorno, ou seja:

$$CV = \frac{Risco}{Retorno} \quad (16)$$

Assim, será possível analisar portfólios que contenham apenas investimentos em renda fixa atribuindo peso 100% ao Tesouro Selic e 0% para os demais ativos, como também outras combinação de renda fixa, variável e criptomoedas.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Resultados Preliminares

Antes de aplicar a teoria de Markowitz para os cinco ativos escolhidos iremos explicar o efeito da correlação entre ativos hipotéticos. Assim, analisamos o efeito da correlação na distribuição dos ativos de uma carteira pensando em três casos diferentes, a saber: Ativos com correlação positiva, com correlação negativa e correlação nula. Na Tabela a seguir, apresentamos um exemplo de quatro ativos hipotéticos que possuem essas características. Destacamos que os dados que aparecem na Tabela 1 foram escolhidos arbitrariamente para melhor exemplificar os conceitos de correlação entre ativos.

Período	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4
Semana 1	0,324	0,477	-0,443	0,183
Semana 2	0,851	0,923	-0,918	0,536
Semana 3	0,600	0,842	-0,840	0,360
Semana 4	0,800	0,943	-0,942	0,758
Semana 5	0,165	0,173	-0,172	0,831
Semana 6	0,507	0,628	-0,627	0,757
Semana 7	0,201	0,294	-0,292	0,134
Semana 8	0,223	0,316	-0,312	0,117
Semana 9	0,252	0,281	-0,277	0,220
Semana 10	0,338	0,425	-0,423	0,140

Tabela 1 – Retornos hipotéticos para 4 ativos financeiros

É possível verificar através da Tabela 1 e da Figura 1 que os ativos 1 e 2 apresentam correlação positiva, pois o retorno semanal deles é diretamente proporcional.

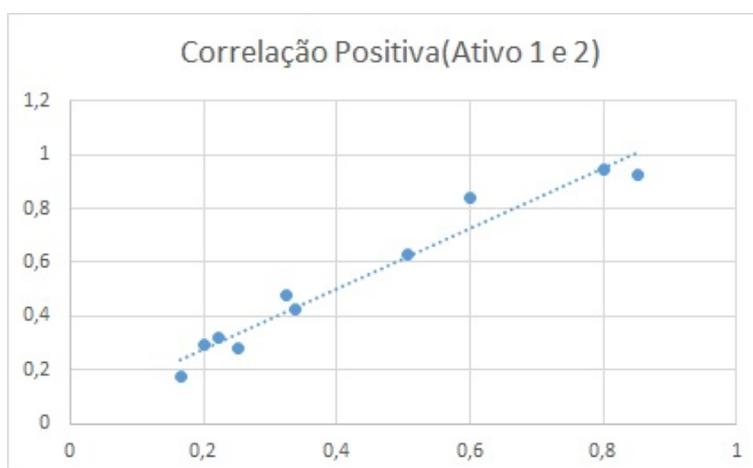


Figura 1 – Exemplo de ativos com correlação positiva

Na Figura 1 essa característica fica evidenciada pela reta que mostra a tendência dos dois ativos de apresentarem retornos similares nos mesmos períodos, ou seja, os ativos se movem para a mesma direção, se um sobe, o outro tende a subir, e se um cai, o outro também tende a cair.

No segundo caso, os ativos 2 e 3 possuem correlação negativa, ou seja, quando o ativo 2 cresce o ativo 3 decresce.

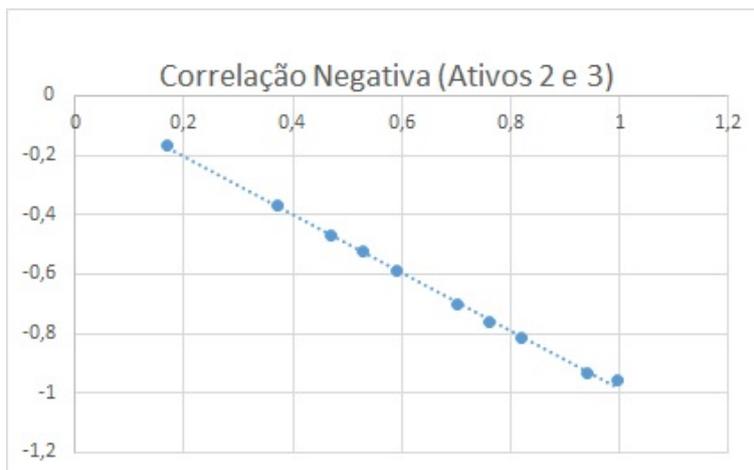


Figura 2 – Exemplo de ativos com correlação negativa

Essas variáveis são inversamente proporcionais, enquanto um ativo apresenta retorno positivo, o outro apresenta retorno negativo e vice-versa. Assim os ativos se movem em direções opostas o que graficamente fica representado por uma reta com inclinação negativa, conforme pode ser observado na Figura 2.

No terceiro caso, referindo-se aos ativos 1 e 4 nota-se que os ativos não tem uma relação entre si, isto é, eles não estão correlacionados.

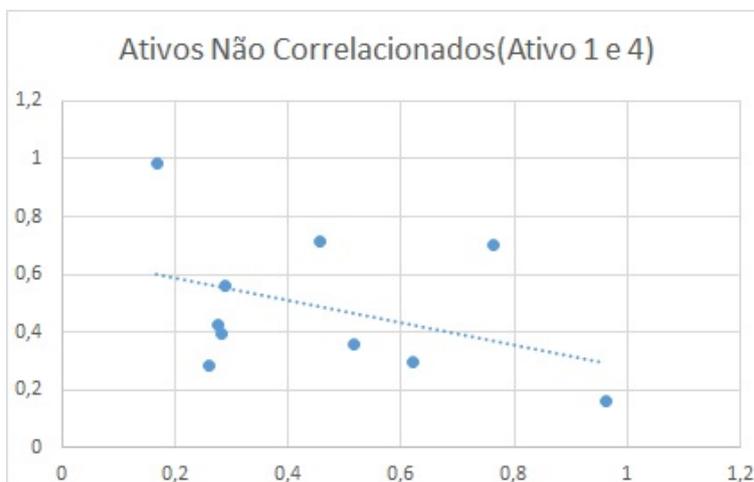


Figura 3 – Exemplo de ativos não correlacionados

Graficamente essa não correlação implica em um gráfico como o apresentado na Figura 3, onde não é possível ajustar uma reta que descreva a tendência de comportamento desses ativos.

Na Figura 4 apresentamos a evolução temporal do retorno de cada um dos 4 ativos hipotéticos. Assim, podemos refletir essas três situações, quanto ao retorno dos ativos, ao longo das semanas.

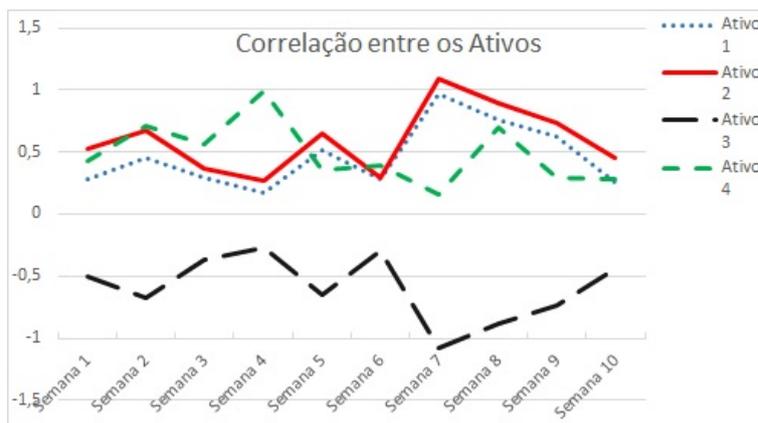


Figura 4 – Retorno semanal para 4 ativos hipotéticos

É possível perceber que ativos correlacionados, como no caso dos ativos 1 e 2, apresentam um gráfico muito parecido. Ativos com correlação negativa como no caso dos ativos 2 e 3 apresentam gráficos espelhados em relação ao eixo horizontal.

Portanto, verificando o gráfico podemos identificar que os ativos 1 e 2 estão altamente correlacionados. Por sua vez o ativo 3 em relação ao ativo 1 ou 2, apresenta uma correlação negativa, ou seja, quando um cresce o outro decresce, enquanto o ativo 4 não tem correlação em relação aos demais.

## 4.2 Resultados Com Dados Reais

Para analisar os dados reais dos ativos escolhidos, a saber: o Índice Bovespa (IBOV), o Ouro, o Dólar, o Tesouro Selic (LFT) e o Bitcoin, montamos uma tabela com o retorno semanal de cada um desses ativos ao longo do ano de 2019. A partir desses dados, foram calculadas as estimativas de risco e retorno para cada um dos ativos individualmente.

A seguir, aplicamos a teoria de Markowitz através das equações (13) e (15) para estimar o risco e o retorno de uma carteira formada com esses ativos, mas com diferentes pesos conforme apresentado na Figura 5.

	Cotação LFT	Fech. dólar	Fech. Bitcoin	Fech.IBOV	Fech.Ouro			
Retorno	0,11%	0,10%	1,45%	0,45%	0,62%			
Risco	0,04%	1,65%	8,57%	2,32%	2,84%	<i>Retornos</i>	<i>Risco</i>	<i>CV</i>
Carteira 1	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	0,005468	0,01929	3,52795
Carteira 2	10,00%	30,00%	20,00%	15,00%	25,00%	0,005538	0,02023	3,65201
Carteira 3	10,00%	10,00%	10,00%	30,00%	40,00%	0,0055	0,016	2,90804
Carteira 4	30,00%	20,00%	15,00%	25,00%	10,00%	0,00446	0,01439	3,22589
Carteira 5	15,00%	25,00%	10,00%	20,00%	30,00%	0,004631	0,01404	3,03177
Carteira 6	10,00%	25,00%	35,00%	50,00%	25,00%	0,009248	0,03323	3,59324

Figura 5 – Montagem de diferentes carteiras para os cinco ativos reais

Na figura 5 a Carteira 1, por exemplo, é composta por 20% de LFT, 20% de dólar, 20% de Bitcoin, 20% de IBOV e 20% de Ouro. Com essa combinação de ativos teríamos um retorno estimado de 0,5468% e um risco estimado de 1,929% o que resulta em um coeficiente de variação

$$CV = \frac{Risco}{Retorno} = 3,52795$$

Variando-se os pesos dos ativos vamos obtendo outras combinações de carteiras as quais apresentam diferentes relações de risco×retorno. A carteira considerada ótima é aquela que apresenta melhor relação risco×retorno, ou seja, que possui o menor Coeficiente de Variação.

No caso, da Figura 5 a melhor carteira é aquela que possui 10% de LFT, 10% de dólar, 10% de Bitcoin, 30% de IBOV e 40% de Ouro. Essa carteira apresenta um coeficiente de variação igual a 2,90804 que é o menor entre todas as combinações testadas. Portanto, é possível afirmar que essa é a carteira que apresenta a melhor combinação de risco e retorno com base nos dados de retorno semanal dos ativos analisados.

Ao verificar o rendimento dessa carteira ao longo do ano de 2020 foi possível verificar que ela apresentaria um retorno de 32,95%. Ou seja, se tivéssemos feito essa análise no final do ano de 2019, tivéssemos escolhido investir nossos recursos nestes 5 ativos seguindo a ponderação apresentada na Figura 5 para a carteira 3, ao final do ano de 2020 teríamos um ganho de capital de 32,95%.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo mostrar que através das ferramentas da Estatística podemos traçar medidas mais eficazes e montar planejamentos estratégicos com coletas, interpretação e análise de dados para melhor investirmos as nossas economias. Pois, sabemos que de nada adianta economizar e não saber como investir.

A Educação Financeira tem um papel importante no crescimento do cidadão, permitindo um desenvolvimento e estratégias de consumo consciente, estimulando a economia e entendendo melhor as ações e investimentos futuros. Quanto mais conhecimento em Educação Financeira, mais equilíbrio teremos em relação as finanças e preparo para enfrentar os imprevistos financeiros, qualificando o bom uso do dinheiro e ajudando em escolhas mais acertadas. Baseando-se em históricos de dados anteriores, podemos traçar estratégias para minimizar os riscos, diminuindo assim a chance de falhas ou fraudes implicarem em perda financeira, a única maneira de se precaver de impactos que pode afetar os nossos investimentos e economias é a informação.

Nesse trabalho, trabalhamos com os Riscos de Mercado, utilizando a Teoria de Portfólio de Markowitz, que nos permite construir portfólios que otimizem o retorno esperado de acordo com determinado nível de risco. Assim, podemos comparar a performance de algumas carteiras montadas com diferentes combinações de ativos destacando aquela com a melhor relação risco-retorno, esse é um tipo de risco que pode ser reduzido através de uma análise de correlação. O objetivo desta teoria é organizar uma carteira de ativos financeiros que propicie o maior retorno com o menor risco possíveis. Uma das premissas fundamentais dos investimentos financeiros é que risco e retorno são variáveis diretamente proporcionais, isto é, ativos que geram muito retorno possuem maior risco, assim o investidor, optando por distribuir seus recursos, montando uma carteira sólida, com ativos que se comportem em direções diferentes, podem ter a longo prazo, maiores retornos, portanto, ao escolher ativos com correlação negativa, é possível diminuir os riscos diversificáveis.

Em um primeiro momento, montamos uma carteira com ativos hipotéticos e através de gráficos podemos analisar como seria a correlação entre eles e a influência de uma boa diversificação, logo após, foi construída uma carteira com ativos reais dos anos de 2019 e 2020, e podemos verificar que diversificando nossos investimentos, podemos chegar a um bom rendimento, mesmo em tempos difíceis. Nas análises obtidas podemos verificar que as planilhas e gráficos nos possibilitaram aumentar o nível de confiança

das informações divulgadas, favorecendo a tomada de decisão, podendo assim mensurar riscos e retornos e analisar as diversas possibilidades de investimentos.

Numa perspectiva de trabalho futuro, pode-se abordar os outros tipos de riscos financeiros não-sistêmicos ou até mesmo os sistêmicos que comentamos em nosso trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, E. L. **Introdução a Pesquisa Operacional: métodos e modelos para análise de decisões**. 4<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- BRASIL, B. C. do. Resolução nº 3464. 2007.
- BRASIL, B. C. do. Resolução nº 3721. 2009.
- CAETANO, M. A. L. **Análise de Risco em Aplicações Financeiras**. 1<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Blucher, 2017.
- FONSECA, C. G. da. **Aplicação do Modelo de Markowitz na Seleção de Carteiras Eficientes: Uma análise da Relação entre risco e retorno**. Thesis (Trabalho de conclusão de Curso) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.
- FREITAS, C. da C.; RENNO, C. D.; JUNIOR, M. A. S. Estatística - curso 1. **Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais**, São José dos Campos-SP, 2013.
- LIMA, F. G. **Análise de Riscos**. São Paulo: Atlas, 2018.
- MONTE, M. J. do; CARVALHO, L. M. T. L. de. Educação estatística no ensino médio: Percepção de gestores de escolas de referência. **Revista Administração Educacional - DAEPE-CE-UFPE**, 2018.
- MULLER, T. L. **Educação Financeira e Educação Estatística: Inflação como tema de Ensino e Aprendizagem**. Thesis (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora-MG, 2018.
- NACIONAL, C. M. Resolução nº 3380. 2006.
- NACIONAL, C. M. Resolução nº 4090. 2012.
- OLIVEIRA, A. F. de; ROSA, D. E. G. A estatística no ensino médio: em busca da contextualização. **Zeteteké**, Campinas, 2020.
- SANTOS, S. R. dos. **A Matemática Financeira e a Estatística como ferramentas para uma gestão financeira consciente**. Thesis (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista-SP, 2016.
- SERMARINI, R. A. **Medidas de Associação**. Piracicaba: Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz - Universidade de São Paulo, 2017.
- SOUZA, J. **Matemática, Realidade e Tecnologia**. São Paulo: FTD, 2010.
- TALEB, N. N. **A lógica do Cisne Negro**. Rio de Janeiro: Best Business, 2007.
- ULRICH, F. **Bitcoin A moeda da Era Digital**. 1. ed. São Paulo: Mises Brasil, 2014.
- VIEIRA, S. **Análise de Variância:(anova)**. São Paulo: Atlas, 2006.