

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

RAFAEL BIASI PATA

**MODELO DE LOTKA-VOLTERRA
PARA A DINÂMICA PREDADOR-PRESA**

**Itaqui
2017**

RAFAEL BIASI PATA

**MODELO DE LOTKA-VOLTERRA
PARA A DINÂMICA PREDADOR-PRESA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Elisa Regina Cara

**Itaqui
2017**

P294m Pata, Rafael Biasi

Modelo de Lotka-Volterra Para a Dinâmica Predador-Presa / Rafael Biasi Pata. – dezembro, 2017.

52 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemática, 2017.

“Orientação: Elisa Regina Cara”.

1. Lotka-Volterra. 2. Predador-Presa. 3. Dinâmica Populacional. 4. Sistemas Autônomos. I. Título.

RAFAEL BIASI PATA

**MODELO DE LOTKA-VOLTERRA
PARA A DINÂMICA PREDADOR-PRESA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 09 de dezembro de 2017.

Banca examinadora:

Profª. Dr^a. Elisa Regina Cara
Orientadora

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes
Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui

Prof. Me. Otonio Dutra da Silva
Instituto Federal do Rio Grande do Sul - Campus Restinga

AGRADECIMENTO

Agradeço à magnífica, dadivosa, formosa, esplendorosa, digníssima, formidável, divina, deslumbrante e radiante professora orientadora Elisa Regina Cara que colaborou incansavelmente para a realização deste TCC.

Aos excepcionais, nobres e magnificentes membros da banca, Charles e Otonio pelas contribuições para o bom andamento deste trabalho.

Ao meu cachorro, Gordo.

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem como tema principal de estudo as equações de Lotka-Volterra. Dentre suas diversas aplicações, este trabalho restringe-se àquelas que modelam a dinâmica populacional de duas espécies, um predador e a sua presa. Essas equações descrevem muitas relações de predador-presa presentes na natureza. A interação é descrita por equações diferenciais ordinárias não lineares, que por consequência, formam um sistema não linear. O objetivo principal deste trabalho é analisar qualitativamente (geometricamente) as soluções do sistema de Lotka-Volterra. Para tanto, utilizou-se uma técnica de resolução de sistemas lineares e de linearização em torno dos pontos de equilíbrio do sistema e a obtenção das trajetórias que determinam suas soluções. Inicialmente, foram apresentados conceitos considerados essenciais para a compreensão de sistemas não lineares, tais como, conceitos sobre sistemas lineares com coeficientes constantes e obtenção de suas soluções; sistemas autônomos e determinação das suas trajetórias; sistemas localmente lineares, entre outros. Em seguida, realizou-se o estudo do sistema de Lotka-Volterra. Ao examiná-lo, pôde-se perceber que as equações não descrevem todas as dinâmicas populacionais existentes de predadores e presas, visto que, a análise qualitativa das soluções permitiu concluir que o comportamento das espécies tende a uma oscilação cíclica. Todavia, esse comportamento não é comum a todas as dinâmicas, é possível que uma das espécies esteja propensa à extinção, ou então, que ambas evoluam à coexistência. Por fim, diante da diversidade de interações, o presente trabalho apresenta mudanças que podem ser realizadas nas equações afim de torná-las mais realísticas, viabilizando a descrição de sistemas mais complexos.

Palavras-chave: Lotka-Volterra. Predador-Presa. Dinâmica Populacional. Sistemas Autônomos.

ABSTRACT

The present Undergraduate Thesis has as main theme of study the equations of Lotka-Volterra. Among its diverse applications, this work is restricted to those who model the populational dynamic of two species, the predator and its prey. These equations describe many predator-prey relationships present in nature. The interaction is described by non-linear ordinary differential equations, which consequently form a nonlinear system. The main objective of this work is qualitatively (geometrically) analyze the Lotka-Volterra system solutions. For that, a technique of solving linear systems and linearization around the equilibrium points of the system and obtaining the trajectories that determine its solutions were used. Initially, concepts considered essential for the understanding of nonlinear systems were presented, such as, concepts about linear systems with constant coefficients and obtaining their solutions; autonomous systems and determination of their trajectories; locally linear systems, among others. Then the Lotka-Volterra system was studied. By examining it, one can see that the equations don't describe all the existing population dynamics of predators and prey, since the qualitative analysis of the solutions allowed to conclude that the behavior of the species tends to a cyclical oscillation. However, this behavior is not common for all dynamics, it is possible that one of the species is prone to extinction, or that both evolve to coexistence. Finally, in view of the diversity of interactions, the present work presents changes that can be made in the equations to make them more realistic, allowing the description of more complex systems.

Keywords: Lotka-Volterra. Predator-prey. Populational Dynamic. Autonomous Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Nó atrator: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	17
Figura 2.2	Nó instável: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	17
Figura 2.3	Ponto de sela: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	18
Figura 2.4	(a) Centro; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	20
Figura 2.5	(a) Espiral instável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	20
Figura 2.6	(a) Espiral estável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	21
Figura 2.7	(a) Nó impróprio instável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	22
Figura 2.8	(a) Nó próprio estável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.....	23
Figura 3.1	Trajetórias do sistema (3.8).	30
Figura 4.1	Pontos de equilíbrio e campo de direções para o sistema predador-presa (4.13).....	42
Figura 4.2	(a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de presas e predadores em função do tempo.....	44
Figura 4.3	(a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de presas e predadores em função do tempo.....	47
Figura 4.4	(a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de presas e predadores em função do tempo.....	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$	25
Tabela 3.1 Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Quase Lineares.....	35

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES	13
2.1 Conceitos Iniciais	13
2.2 Autovalores Reais e Distintos	16
2.3 Autovalores Complexos	18
2.4 Autovalores Repetidos	21
2.5 Análise de Resultados	24
3 SISTEMAS AUTÔNOMOS	26
3.1 Sistemas Autônomos e Estabilidade	26
3.2 Determinação das Trajetórias do Sistema	28
3.3 Sistemas Localmente Lineares	29
3.4 Análise de Resultados	35
4 MODELO PREDADOR-PRESA DE LOTKA-VOLTERRA	37
4.1 O Modelo	37
4.2 Linearização do Modelo	38
4.3 Obtenção das Trajetórias do Modelo Lotka-Volterra	40
4.4 Mudanças no Modelo de Lotka-Volterra	45
4.5 Análise de Resultados	48
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi desenvolvido no Curso de Licenciatura em Matemática, Campus Itaqui, da Universidade Federal do Pampa. No âmbito das equações diferenciais ordinárias e da modelagem matemática, o presente trabalho foi elaborado com o intuito principal de caracterizar o sistema de equações diferenciais não lineares que modela a interação entre duas espécies, denominado predador-presa.

O primeiro modelo que buscava descrever a dinâmica populacional surgiu em 1798, desenvolvido pelo economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), ficando conhecido como Modelo Malthusiano ou Modelo de Malthus. O modelo descreve que a variação do crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante de tempo. Com isso, tem-se que a população aumentava exponencialmente com o passar do tempo. Apesar de em determinado período a população mundial ter apresentado esse tipo de crescimento, o mesmo não ocorre nos dias atuais. Além disso, o modelo não prevê um crescimento limite para a população, isto é, a população cresce ilimitadamente (ALLEN, 2007; BASSANEZI, 2011; BOYCE & DIPRIMA, 2010; RAFIKOV, 2003).

Diante desse fato, em 1838 o matemático belga Pierre François Verhulst (1804-1849) elaborou um modelo complementar ao de Malthus, conhecido como Modelo Logístico ou Modelo de Verhulst. Verhulst adequou o modelo de Malthus de modo a diminuir a taxa de crescimento populacional com o passar do tempo. Essa mudança limitou o crescimento populacional e inibiu o crescimento exponencial existente. Essa população limite ficou conhecida como capacidade suporte do meio ambiente (BOYCE & DIPRIMA, 2010; MURRAY, 1989; RAFIKOV, 2003).

Os modelos de Malthus e de Verhulst tratam da dinâmica de crescimento para uma única espécie. O primeiro modelo matemático criado para a interação entre duas espécies, conhecido como modelo predador-presa de Lotka-Volterra, é o tema principal deste trabalho. Este modelo possui grande importância em dinâmica populacional, pois serviu de base para modelos desenvolvidos posteriormente com os mesmos fins (MURRAY, 2002).

O modelo em questão é conhecido como modelo de Lotka-Volterra, devido ao fato que as mesmas equações foram desenvolvidas em 1926, pelo matemático e físico Vito Volterra (1860-1940), que propôs um modelo simples para a predação que explicava os níveis oscilatórios na captura de certos peixes no Mar Adriático. Tais equações também foram deduzidas pelo físico e químico Alfred J. Lotka (1880-1949) em 1925, para uma reação química que exibia o comportamento periódico nas concentrações de elementos

químicos (ALLEN, 2007; BOYCE & DIPRIMA, 2010; MURRAY, 2002; RAFIKOV, 2003).

Alfred Lotka, nascido na atual Ucrânia, ficou conhecido por um dos seus principais trabalhos, a autoria do primeiro livro sobre biologia matemática intitulado *Elements of Mathematical Biology* (BERRYMAN, 1992; VERÓN, 2008). Já o italiano Vito Volterra, destaca-se por seus estudos sobre a teoria da interação entre espécies (BOYCE & DIPRIMA, 2010; RAFIKOV, 2003).

O modelo predador-presa é composto por duas equações diferenciais não lineares. Além disso, diversos sistemas não lineares autônomos não possuem soluções analíticas ou suas obtenções são calculadas com um nível elevado de dificuldade. Desta forma, o problema de pesquisa que fomenta o presente trabalho é saber se através de uma técnica de resolução de sistemas lineares e um método de linearização, é possível realizar uma análise qualitativa (geométrica) das soluções do modelo predador-presa de Lotka-Volterra.

Nesse contexto, objetiva-se de maneira geral, analisar qualitativamente as soluções desse sistema através da sua linearização. Além disso, objetiva-se especificamente, apresentar um método analítico para a obtenção das soluções de sistemas lineares autônomos; abordar de maneira qualitativa (geométrica) o comportamento das soluções de sistemas não lineares autônomos; analisar no contexto biológico as soluções encontradas para o sistema de Lotka-Volterra e apresentar possíveis mudanças que tornem esse sistema mais realístico.

Os objetivos descritos acima, justificam-se pela não abordagem da teoria de sistemas não lineares autônomos na Componente Curricular de Equações Diferenciais Ordinárias do Curso de Licenciatura em Matemática. Por consequência, o estudo de um modelo aplicado à Biologia proporciona conhecimentos complementares à formação acadêmica.

Para que seja possível a análise dos sistemas desejados, é importante realizar estudos prévios sobre conceitos que estão relacionados e que os complementam. Assim, no segundo capítulo, é apresentada a teoria de obtenção de soluções de sistemas lineares com coeficientes constantes através do cálculo de seus autovalores e autovetores. Além disso, também será descrita a natureza dos autovalores e autovetores associados a cada sistema, pois a mesma reflete a natureza da solução geral do sistema.

O terceiro capítulo destina-se aos conceitos sobre sistemas autônomos. Apresentam-se os conceitos sobre estabilidade de sistemas autônomos, obtenção das trajetórias que determinam as soluções de certos sistemas autônomos, sistemas localmente lineares e sua linearização em torno dos pontos de equilíbrio.

O capítulo final destina-se ao estudo do Modelo Predador-Presa de Lotka-Volterra. Neste capítulo será definido o modelo, será feita sua linearização, obtenção das trajetórias que definem as soluções e a interpretação biológicas dos resultados. Finalmente, serão apresentadas algumas mudanças que podem ser realizadas nas equações do modelo com a finalidade de torná-las mais realísticas e assim, mais próximas do que ocorre na natureza.

2 SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Sistemas matemáticos formalizados por equações diferenciais lineares são amplamente utilizados na descrição e modelagem de problemas em diversos ramos, dentre eles, a Biologia, a Economia, as Engenharias e a Física, que pode ser considerada a área com maior presença desses sistemas (BASSANEZI, 2011; EDELSTEIN-KESHET, 1998). A presença desse tipo de equação justifica-se pelo fato delas expressarem a taxa de variação do evento em questão. Como por exemplo, em Biologia, poderá representar a taxa de variação de uma população em relação ao tempo.

Para o estudo de sistemas de equações diferenciais mais complicados, é interessante, primeiramente, abordar a teoria envolvida em sistemas mais simples. Esses sistemas são conhecidos como **sistemas lineares com coeficientes constantes**. Dessa forma, neste capítulo serão abordados conceitos sobre sistemas lineares, tais como: definição, soluções, retrato de fase e comportamento qualitativo das soluções.

2.1 Conceitos Iniciais

Um sistema de equações diferenciais lineares pode ser representado pelas equações:

$$\begin{aligned}x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde t é a variável independente e x_1, x_2, \dots, x_n as variáveis dependentes, que são funções de t . Além disso, se cada uma das funções F_1, F_2, \dots, F_n é uma função linear das variáveis dependentes diz-se que o sistema é **linear**, caso contrário, é **não linear**.

Sistemas de equações da forma (2.1) modelam vários fenômenos estudados e analisados em distintas áreas da ciência. Outrossim, a importância desses sistemas está relacionada com o fato que equações de ordem maior sempre podem ser transformadas em um sistema de primeira ordem, isto é, uma equação arbitrária de ordem n , da forma $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sempre pode ser reduzida a um sistema de n equações de primeira ordem.

O conceito principal a ser tratado acerca de uma equação ou sistema de equações é sobre a obtenção de sua solução. Assim, diz-se que o sistema (2.1) tem uma **solução** no

intervalo $I : \alpha < t < \beta$ se existe um conjunto de n funções

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \phi_n(t), \quad (2.2)$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I que satisfazem o sistema de equações (2.1) em todos os pontos desse intervalo. Além do próprio sistema, podem ser consideradas condições iniciais da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \quad (2.3)$$

em que t_0 é um valor específico de t em I e $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ são números dados. Dessa forma, as equações diferenciais (2.1) junto às condições (2.3) formam um **problema de valor inicial** (PVI).

Considere o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz constante $n \times n$ e \mathbf{x} é um vetor $n \times 1$. Supõe-se que os elementos de \mathbf{A} sejam números reais. Se $n = 1$, o sistema (2.4) se reduz à equação de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = ax$, cuja solução é $x = ce^{at}$.

É importante considerar e analisar o caso de um sistema (2.4) com a matriz \mathbf{A} do tipo 2×2 , visto que, a solução desse sistema é uma função vetorial que pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2 . O plano x_1x_2 é chamado **plano de fase**. Ao calcular $\mathbf{A}\mathbf{x}$ com um grande número de pontos e fazer o gráfico dos vetores resultantes, obtém-se um campo de direções de vetores tangentes a soluções do sistema. Um gráfico que ilustra uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado é chamado **retrato de fase**.

Para resolver o sistema (2.4) é necessário buscar soluções da forma $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{rt}$, com $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$, em que esse vetor e o expoente r devem ser determinados. Substituindo a solução no sistema (2.4), tem-se:

$$r\mathbf{v}e^{rt} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{rt}.$$

Dividindo por e^{rt} e considerando \mathbf{I} a matriz identidade $n \times n$, obtém-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Assim, o vetor $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{rt}$ será uma solução de (2.4) se r for um autovalor e \mathbf{v} um autovetor da matriz \mathbf{A} . Os autovalores r_1, \dots, r_n são raízes da equação polinomial de grau n :

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (2.6)$$

Os pontos \mathbf{x}^* para os quais $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ são chamadas **pontos de equilíbrio**, **pontos críticos** ou **soluções de equilíbrio** do sistema (2.4). Esses pontos representam as soluções constantes do sistema. Neste caso, tratando-se de sistemas lineares com coeficientes constantes, o único ponto de equilíbrio, será a origem ($\mathbf{x} = 0$). A importância do estudo desses pontos está relacionada ao fato que as demais soluções, de um sistema de equações diferenciais, tendem a se afastar ou se aproximar deles.

Com isso, a natureza dos autovalores e autovetores associados determinam a natureza da solução geral do sistema (2.4). Sendo assim, considerando \mathbf{A} uma matriz real, tem-se três possibilidades de autovalores para \mathbf{A} :

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si;
2. Alguns autovalores são complexos (e conjugados);
3. Alguns autovalores são repetidos.

Além disso, o Teorema a seguir, conhecido como *Princípio da Superposição*, descreve a relação entre as soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ de um sistema linear. Ele afirma que a combinação linear de soluções de um sistema também será solução desse sistema.

Teorema 1. *Se as funções $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ são soluções de um sistema de equações diferenciais lineares, então a combinação linear $x = C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t) + \dots + C_kx^{(k)}$ também é uma solução para quaisquer constantes C_1, \dots, C_k .*

Para o estudo dos casos supracitados considera-se a partir de agora um sistema do tipo (2.4) de ordem 2. Esta restrição faz-se necessária pois, as soluções desse tipo de sistema podem ser representadas geometricamente por curvas no plano de fase. Desta forma, nas próximas seções, tem-se por objetivo caracterizar os sistemas de acordo com o padrão geométrico formado por suas trajetórias, ou seja, de acordo com a natureza de seus autovalores (BOYCE & DIPRIMA, 2010). Para isso, em cada caso será detalhado o comportamento das trajetórias em geral.

2.2 Autovalores Reais e Distintos

Se os dois autovalores de \mathbf{A} são reais e distintos, então existem autovetores reais $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ linearmente independentes, associados aos autovalores r_1 e r_2 , respectivamente. Assim, as duas soluções do sistema (2.4) são

$$x^{(1)} = v^{(1)}e^{(r_1 t)} \quad \text{e} \quad x^{(2)} = v^{(2)}e^{(r_2 t)}. \quad (2.7)$$

Logo, pelo Princípio da Superposição, a solução geral do sistema é da forma

$$\mathbf{x} = C_1 v^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 v^{(2)} e^{r_2 t}. \quad (2.8)$$

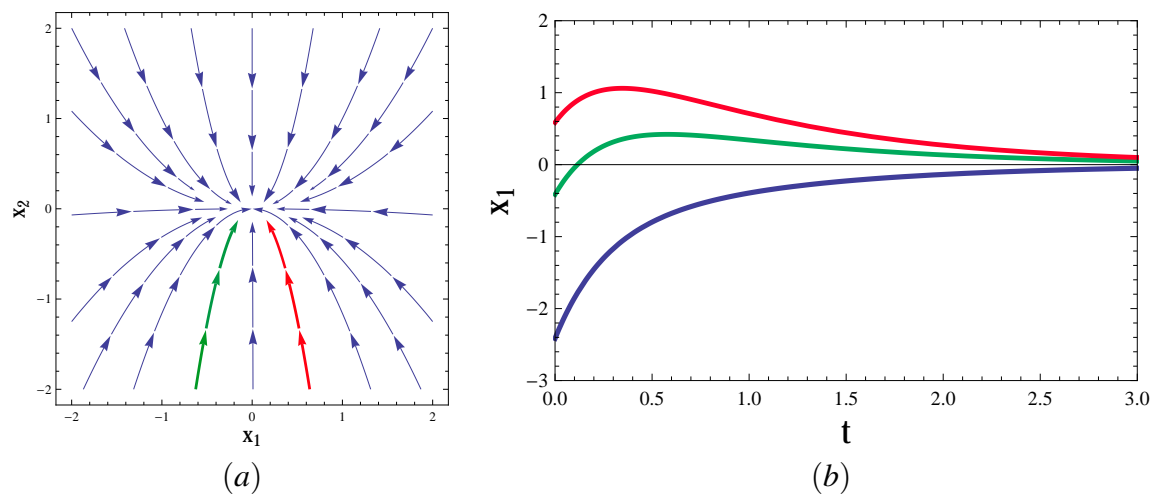
Autovalores Negativos

Considerando $r_1 < r_2 < 0$. Tem-se, a partir de (2.8), que $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$, independente dos valores atribuídos às constantes C_1 e C_2 . Em outras palavras, todas as soluções se aproximam da origem quando $t \rightarrow \infty$.

Os autovetores $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ são direções sobre os quais as soluções tendem a aproximar-se ou afastar-se de $(0, 0)$. Dessa forma, como $r_1 < r_2 < 0$, então o fluxo aproxima-se de $(0, 0)$. Se as condições iniciais são tais que $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, então a solução é $x(t) = v^{(2)}e^{r_2 t}$. Para qualquer t , $x(t)$ é um múltiplo de $v^{(2)}$. Isto significa que a solução está sempre na direção de $v^{(2)}$. Como $r_2 < 0$, assim $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, aproximando-se da origem, na direção de $v^{(2)}$. Nessas condições, esse tipo de ponto de equilíbrio é classificado como **nó**, **nó atrator** ou **sorvedouro**.

A Figura 2.1 (a), ilustra um plano de fase de um nó atrator ou nó estável, pois todas as trajetórias tendem à origem. Na Figura 2.1 (b), estão representadas algumas soluções x_1 em função de t para diferentes condições iniciais. Observe que, independente das condições iniciais, todas essas soluções exibem decaimento exponencial no tempo. Além disso, observe que as trajetórias destacadas (em vermelho e verde) na Figura 2.1 (a) podem ilustrar as soluções representadas pelas mesmas cores na Figura 2.1 (b).

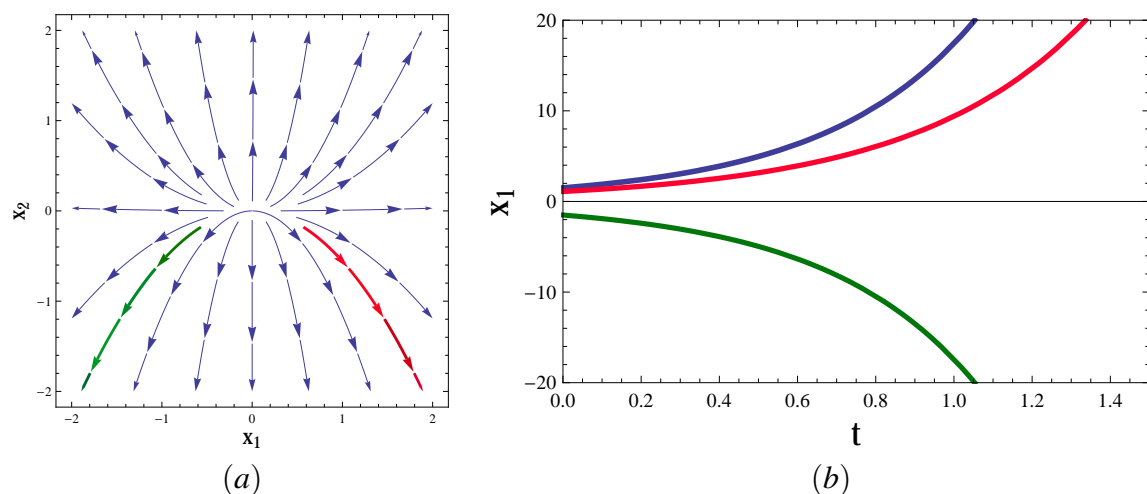
Figura 2.1: Nó atrator: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.



Autovalores Positivos

Para autovalores positivos, isto é, $0 < r_2 < r_1$ as trajetórias mantêm-se como no caso anterior, todavia, o sentido do movimento é de afastamento quanto ao ponto crítico na origem. Considerando as mesmas condições iniciais utilizadas para o primeiro caso, tem-se, para $r_2 > 0$ que $x(t)$ cresce quando $t \rightarrow \infty$ na direção de $v^{(2)}$. Novamente o ponto crítico pode ser denominado **nó** ou **fonte**. Um exemplo de um nó instável é ilustrado na Figura 2.2 (a), onde duas trajetórias estão destacadas em verde e vermelho, pois as mesmas podem ilustrar as soluções representadas pelas mesmas cores na Figura 2.2 (b).

Figura 2.2: Nó instável: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.



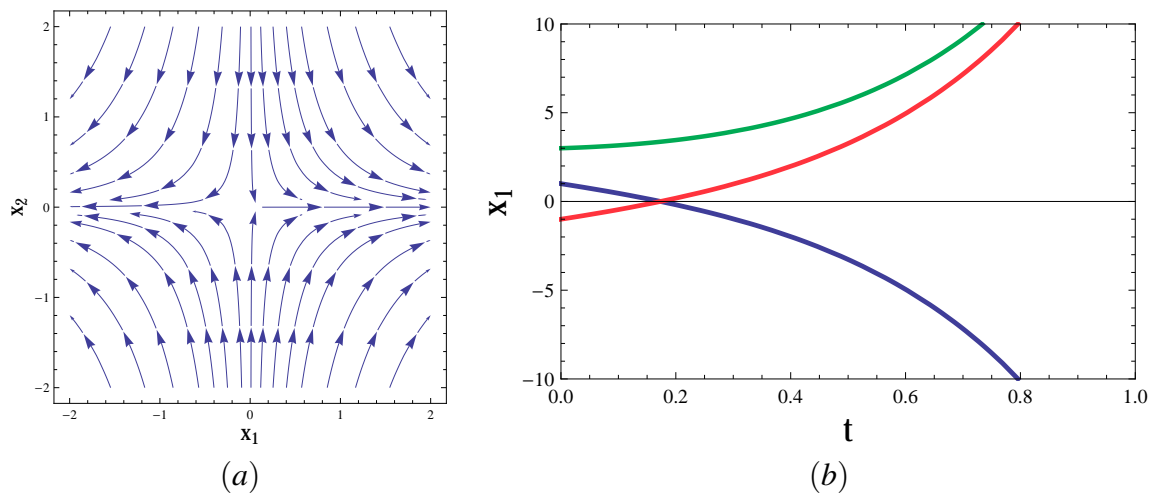
Na Figura 2.2 (b) estão representadas algumas soluções x_1 em função de t para diferentes condições iniciais. Observe que essas soluções crescem exponencialmente como funções de t .

Autovalores com Sinais Opostos

Considerando agora autovalores com sinais opostos, ou seja, $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$, se a solução começa em um ponto da reta que passa pela origem, cuja direção seja dada por $v^{(1)}$, então $C_2 = 0$ e, conseqüentemente, a solução permanece nessa reta.

Para $r_1 > 0$, tem-se que $|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, para a solução que começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de $v^{(2)}$, tem-se $C_1 = 0$ e a solução permanece sobre a reta, contudo, $|(x_1, x_2)| \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Para essas condições, a origem é chamada de **ponto de sela**. Um exemplo de um ponto de sela está ilustrado na Figura 2.3 (a) e algumas soluções de x_1 em função de t na Figura 2.3 (b).

Figura 2.3: Ponto de sela: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.



2.3 Autovalores Complexos

Como a matriz \mathbf{A} é real os coeficientes da equação polinomial (2.6) serão reais. Assim, quando existirem autovalores complexos, os mesmos surgirão em pares conjugados. Se r_1 for um autovalor da forma $r_1 = \lambda + i\mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), então o segundo autovalor

r_2 será da forma $r_2 = \lambda - i\mu$. Simbolicamente essa relação pode ser escrita como $r_2 = \bar{r}_1$ e $v^{(2)} = \overline{v^{(1)}}$. Com isso, as soluções podem ser escritas como

$$x^{(1)}(t) = v^{(1)}e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad x^{(2)}(t) = \overline{v^{(1)}}e^{\bar{r}_1 t}. \quad (2.9)$$

As soluções correspondentes são:

$$x^{(1)}(t) = v^{(1)}e^{(\lambda+i\mu)t} \quad \text{e} \quad x^{(2)}(t) = v^{(2)}e^{(\lambda-i\mu)t}. \quad (2.10)$$

Pode-se encontrar duas soluções reais da equação $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, correspondentes aos autovalores r_1 e r_2 , tomando as partes real e imaginária de $x^{(1)}(t)$ ou $x^{(2)}(t)$. Considerando $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, tem-se

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \quad (2.11)$$

serão as soluções reais correspondentes.

Assim, a solução geral para o sistema 2×2 com autovalores complexos é da forma:

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{u}(t) + C_2 \mathbf{v}(t). \quad (2.12)$$

Quando isto ocorrer a origem do retrato de fase pode ser classificada em **ponto espiral** ou **centro**. A solução $\mathbf{x}(t)$ é uma combinação de termos envolvendo $e^{\lambda t} \cos \mu t$ e $e^{\lambda t} \sin \mu t$. O comportamento qualitativo das soluções depende da parte real λ dos autovalores:

- (a) Para $\lambda = 0$, as soluções apresentam oscilações com amplitude constante (Figura 2.4 (b)).
- (b) Para $\lambda > 0$, as soluções apresentam oscilações com amplitude crescente (Figura 2.5 (b)).
- (c) Para $\lambda < 0$, as soluções apresentam oscilações com amplitude decrescente (Figura 2.6 (b)).

No plano de fase, as trajetórias geram oscilações que giram em torno da origem.

- (a) Para $\lambda = 0$, são curvas fechadas percorridas no sentido horário se $\mu > 0$ e no sentido anti-horário se $\mu < 0$, com $(0,0)$ no seu interior. Nesse caso, $(0,0)$ é um **centro neutro**. As trajetórias não se afastam nem se aproximam da origem, como ilustrado na Figura 2.4 (a).

- (b) Para $\lambda > 0$, as trajetórias são espirais que se afastam da origem. Assim, $(0,0)$ é um **foco** ou **espiral instável**, como ilustrado na Figura 2.5 (a).
- (c) Para $\lambda < 0$, as trajetórias são espirais que se aproximam da origem, e $(0,0)$ é um **foco** ou **espiral estável**, como representado na Figura 2.6 (a).

Figura 2.4: (a) Centro; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.

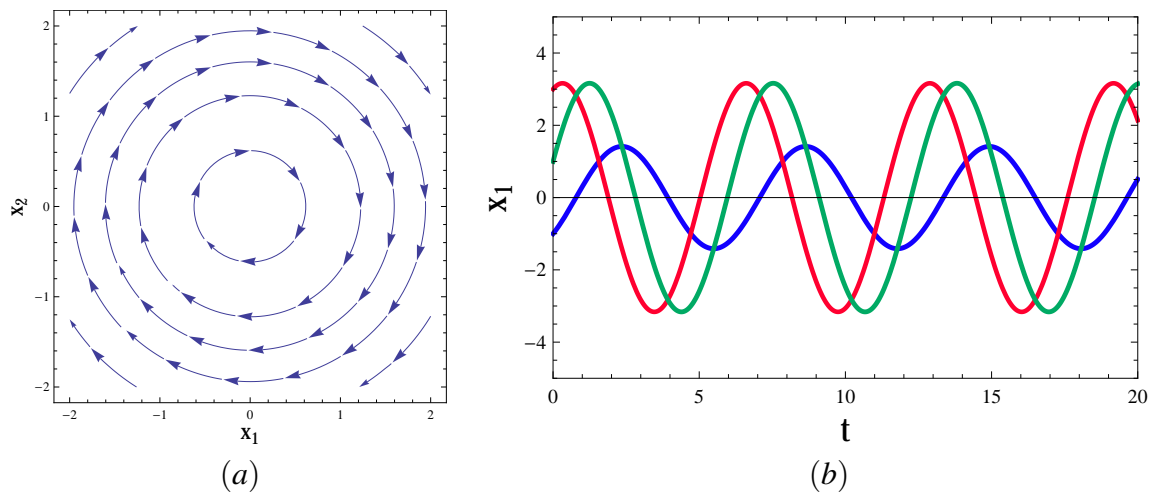


Figura 2.5: (a) Espiral instável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.

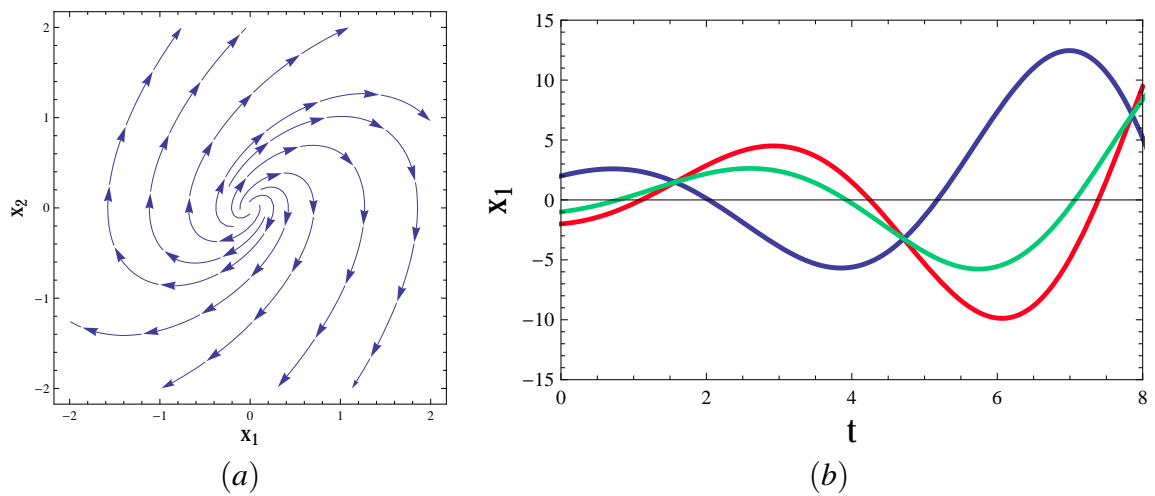
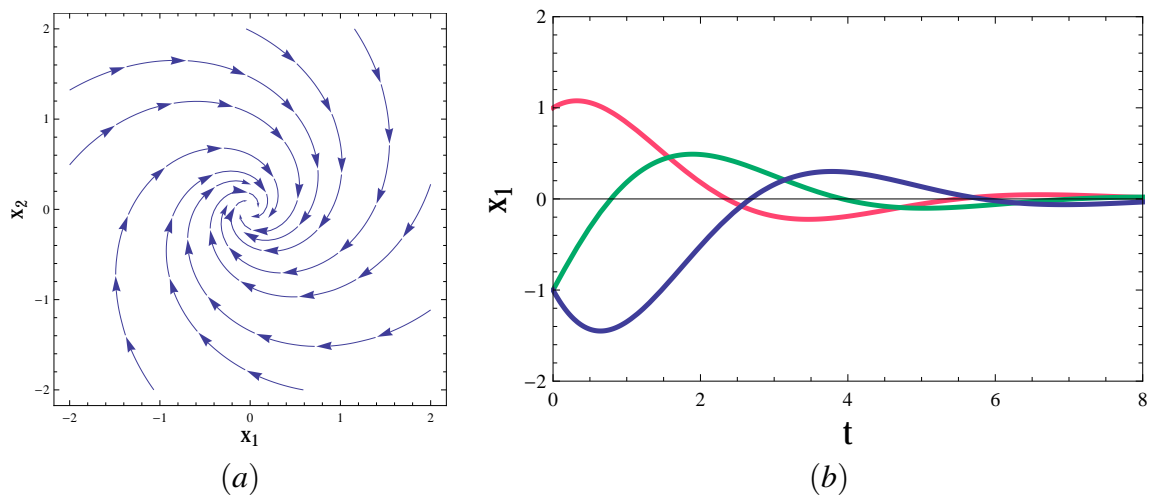


Figura 2.6: (a) Espiral estável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.



2.4 Autovalores Repetidos

Uma terceira possibilidade de autovalores para um sistema do tipo (2.4) é que a matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ tenha autovalor repetido, assim, sua multiplicidade algébrica será $k \geq 2$. Se isso ocorrer, podem haver mais duas possibilidades: na primeira, existem menos do que n autovetores linearmente independentes associados ao autovalor e, na segunda, existem n autovetores associados.

Um Autovetor Independente

Se o polinômio característico de \mathbf{A} não tem raízes distintas, então \mathbf{A} pode não ter n autovetores linearmente independentes (LI). Supondo que $\mathbf{A}_{n \times n}$ tem apenas $k < n$ autovetores LI. Então a equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tem apenas k soluções LI da forma $\mathbf{v}e^{\lambda t}$. É necessário encontrar $n - k$ soluções adicionais LI. Para tal, usa-se a seguinte equação:

$$\mathbf{v}e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \left[\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2\mathbf{v} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-1}\mathbf{v} \right].$$

Em outras palavras, para encontrar soluções adicionais toma-se um autovalor λ de \mathbf{A} e determina-se todos os vetores \mathbf{v} para os quais $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2\mathbf{v} = 0$, mas $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} \neq 0$.

Então, para cada um desses vetores \mathbf{v} ,

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{\lambda t} e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v} = e^{\lambda t} [\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}] \quad (2.13)$$

é uma solução adicional do sistema inicial.

Se o número de soluções não for suficiente, procura-se todos os vetores \mathbf{v} para os quais $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3\mathbf{v} = 0$, mas $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v} \neq 0$. Assim,

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{\lambda t} \left[\mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v} \right] \quad (2.14)$$

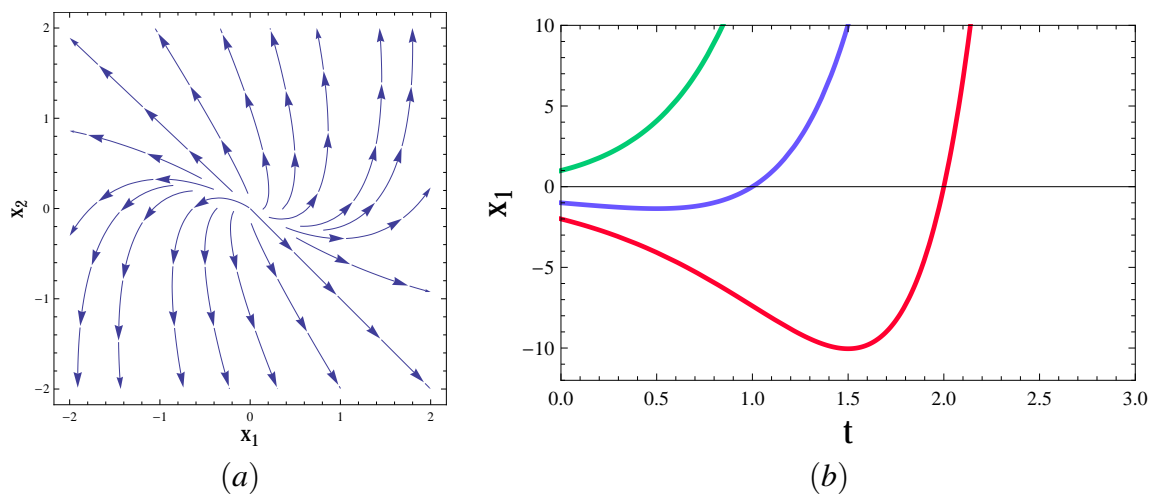
é uma solução adicional do sistema. E assim, sucessivamente, até obter-se um número suficiente de soluções.

Restringindo-se a um sistema 2×2 , a solução torna-se

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{v}e^{rt} + C_2(\mathbf{v}te^{rt} + \mathbf{w}e^{rt}), \quad (2.15)$$

onde \mathbf{v} é o autovetor e \mathbf{w} é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Pela equação descrita acima, quando $t \rightarrow \infty$, todas as trajetórias tendem à origem (se $r < 0$) ou afastam-se da origem (se $r > 0$), tangenciando a reta na direção do autovetor. A origem é classificada em **nó impróprio** ou **degenerado**. A Figura 2.7 ilustra um exemplo de nó impróprio instável, pois as trajetórias afastam-se da origem.

Figura 2.7: (a) Nó impróprio instável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.



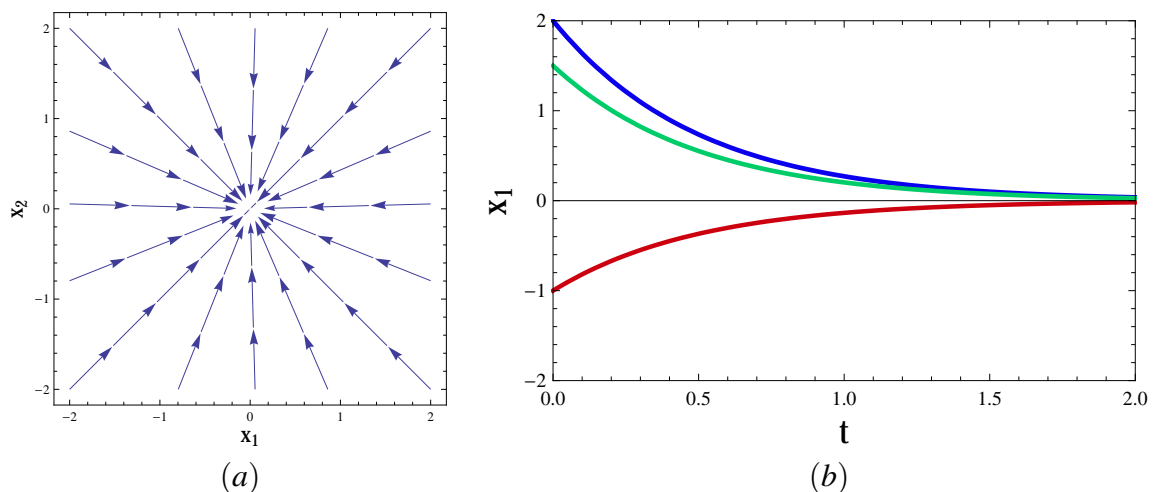
Dois Autovetores Independentes

Para dois autovetores independentes, em um sistema 2×2 , a solução torna-se

$$\mathbf{x} = C_1 v^{(1)} e^{rt} + C_2 v^{(2)} e^{rt},$$

com $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ autovetores independentes. Como a razão $x_1(t)/x_2(t)$ independe de t , mas depende das coordenadas dos autovetores e das constantes arbitrárias C_1 e C_2 , a trajetória irá caminhar ao longo de uma reta que passa pela origem. Se $r < 0$, a solução tenderá à solução nula quando $t \rightarrow \infty$ e toda trajetória estará em uma reta contendo a origem. Nessas circunstâncias, o ponto crítico é chamado de **nó próprio** ou **ponto estrela**. A Figura 2.8 mostra um exemplo de nó próprio estável.

Figura 2.8: (a) Nó próprio estável; (b) Evolução temporal de x_1 em função de t para algumas condições iniciais.



O teorema a seguir resume e caracteriza a estabilidade de cada tipo de ponto de equilíbrio de acordo com os autovalores encontrados.

Teorema 2. O ponto crítico \mathbf{x}^* do sistema linear (2.4) é:

- (i) assintoticamente estável se os autovalores são reais e negativos ou têm a parte real negativa;
- (ii) estável, mas não assintoticamente estável, se os autovalores são imaginários puros;
- (iii) instável se os autovalores são reais e pelo menos um deles é positivo ou ambos têm parte real positiva.

As análises desta seção estão restritas à sistemas de segunda ordem, visto que,

suas soluções podem ser representadas geometricamente por curvas no plano de fase x_1x_2 . Entretanto, é possível que esta análise seja feita para um sistema de ordem n com uma matriz de coeficientes $\mathbf{A}_{n \times n}$, mas apresentará maior complexidade, pois, suas soluções serão curvas em um espaço de dimensão n .

2.5 Análise de Resultados

Este capítulo foi direcionado ao estudo de um sistema linear com coeficientes constantes da forma (2.4). As soluções constantes desse sistema são encontradas através da expressão $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{0}$ onde os pontos \mathbf{x}^* que a satisfazem são chamados pontos de equilíbrio ou pontos críticos. Nesses pontos, o sistema descrito por x_1, x_2, \dots, x_n não varia.

Em sistemas lineares, a natureza dos pontos críticos praticamente determina o comportamento das trajetórias no plano de fase. A partir daí, analisando a natureza dos autovalores e autovetores tem-se a natureza da solução geral do sistema linear.

Pelas definições apresentadas e discutidas no capítulo, é possível verificar que o conjunto das trajetórias obedece uma das três possíveis situações listadas abaixo:

- (a) As trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$. Nesse caso, os autovalores são reais e negativos ou complexos com parte real negativa com a origem denominada nó atrator ou sorvedouro espiral.
- (b) As trajetórias permanecem limitadas sem tender à origem quando $t \rightarrow \infty$. Nesse caso, os autovalores são imaginários puros e com origem denominada centro.
- (c) Algumas trajetórias tendendo ao infinito quando $t \rightarrow \infty$ (possivelmente todas as trajetórias menos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Nesse caso, um dos autovalores é positivo ou complexos com parte real positiva. A origem é chamada de nó fonte, fonte espiral ou ponto de sela.

A tabela que segue apresenta, de acordo com o Teorema 2, um resumo dos conceitos abordados nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4.

Tabela 2.1: Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$

Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente Estável
$r_2 < 0 < r_1$	Ponto de Sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó Próprio ou Impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó Próprio ou Impróprio	Assintoticamente Estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Ponto Espiral	
$\lambda > 0$		Instável
$\lambda < 0$		Assintoticamente Estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estável

3 SISTEMAS AUTÔNOMOS

Em muitos problemas matemáticos que envolvem a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias não é possível encontrar suas soluções analíticas. Nesses casos, é essencial considerar as informações qualitativas que podem ser encontradas a partir das equações (BOYCE & DIPRIMA, 2010). Essas informações podem estar relacionadas com as propriedades de estabilidade do sistema, vistas no Capítulo 2. Dessa forma, neste capítulo serão tratados os conceitos de sistemas autônomos e sua estabilidade, obtenção das trajetórias do sistema e sistemas localmente lineares e sua linearização em torno dos pontos de equilíbrio.

3.1 Sistemas Autônomos e Estabilidade

Considere o seguinte sistema com duas equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y).\end{aligned}\tag{3.1}$$

As funções F e G do sistema considerado acima não dependem explicitamente da variável independente t , apenas das variáveis dependentes x e y . Isso significa que o sistema (3.1) possui um campo de direções associado que independe do tempo, isto é, as soluções que satisfazem alguma condição inicial percorrem a mesma trajetória independentemente do instante t_0 em (x_0, y_0) . Um sistema com estas propriedades é denominado **autônomo**.

Considere um sistema autônomo da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}).\tag{3.2}$$

Os pontos onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, que implicam em $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, quando existirem denominar-se-ão **pontos críticos** ou **pontos de equilíbrio** do sistema (3.2). Além disso, esses pontos correspondem às soluções constantes (ou de equilíbrio) do sistema.

Um ponto crítico \mathbf{x}^0 , será dito **estável** se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$,

tal que toda solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ do sistema (3.1), que satisfaz, em $t = 0$,

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta \quad (3.3)$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon \quad (3.4)$$

para todo $t > 0$ (BOYCE & DIPRIMA, 2010; ZILL & CULLEN, 2001). A condição supracitada significa que todas as soluções que começam suficientemente próximas de \mathbf{x}^0 permanecem próximas dele. Um ponto de equilíbrio que não é estável, denomina-se **instável**.

Além disso, se a condição (3.3) for satisfeita por um δ_0 com $0 < \delta_0 < \delta$, tal que

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0, \quad (3.5)$$

o ponto crítico \mathbf{x}^0 será denominado **assintoticamente estável** (BOYCE & DIPRIMA, 2010; ZILL & CULLEN, 2001). De modo que as trajetórias que começam suficientemente próximas de \mathbf{x}^0 não apenas permanecem próximas mas tendem a \mathbf{x}^0 quando $t \rightarrow \infty$.

Pode-se perceber diante disto, que a estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte que a estabilidade, tendo em vista, que um ponto crítico deve, primeiramente, ser estável antes de (talvez) ser considerado assintoticamente estável. Contudo, apenas a condição limite satisfeita não implica em nenhuma estabilidade (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Conforme descrito no Capítulo 2, nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ de um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes (autônomo) pode ser classificado, de acordo com a natureza dos autovalores, em ponto de sela, nó, espiral, centro ou estrela. Cada um desses tipos de ponto de equilíbrio pode ser classificado também quanto a sua estabilidade, instabilidade ou estabilidade assintótica como expresso na Tabela (2.1).

Essas definições aplicam-se à sistemas de ordem n , ou seja, não há dependência quanto a ordem de um sistema para o estudo desses conceitos. É possível verificar mais claramente essas definições quando interpretadas em um problema específico, como por exemplo, em Física com um *pêndulo oscilatório*, em Biologia Matemática com um sistema de *competição entre espécies*, dentre outros.

A Importância dos Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio de um sistema correspondem às soluções de equilíbrio, isto é, soluções onde $x(y)$ e $y(t)$ são constantes, não havendo variação. Além disso, para sistemas do tipo (2.4) a “natureza do ponto crítico na origem praticamente determina o comportamento das trajetórias no plano de fase”. Contudo, para sistemas autônomos não lineares isso não ocorre da mesma forma, pois podem existir muitos pontos de equilíbrio influenciando nas trajetórias, e também, porque as não linearidades do sistema são importantes, mesmo distantes dos pontos de equilíbrio (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Mesmo havendo diferenças entre sistemas autônomos lineares e não lineares, os pontos de equilíbrio de sistemas autônomos não lineares podem ser classificados da mesma forma que os de sistemas autônomos lineares. Isto será discutido no decorrer do capítulo. Além disso, para sistemas de ordem 2 com pelo menos um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, é importante determinar onde estão as trajetórias que se aproximam desse ponto de equilíbrio no plano de fase.

Considere um ponto P no plano de fase tal que uma trajetória que passa por esse ponto tende a um ponto de equilíbrio assintoticamente estável quando $t \rightarrow \infty$. Dessa forma, diz-se que essa trajetória é atraída pelo ponto de equilíbrio. Estendendo essa definição a um conjunto de pontos P com essa propriedade, esse conjunto será denominado **bacia de atração** ou **região de estabilidade assintótica** do ponto de equilíbrio. Já uma trajetória que limita uma região dessas será chamada **separatriz**, visto que, ela separa as trajetórias que tendem ao ponto de equilíbrio daquelas que não possuem essa propriedade de aproximação.

3.2 Determinação das Trajetórias do Sistema

Muitas vezes é possível a determinação das trajetórias de um sistema 2×2 reduzindo-o a uma equação de primeira ordem relacionada. Para isso, as equações (3.1) são escritas da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}, \quad (3.6)$$

tornando-as uma equação de primeira ordem nas variáveis x e y . Essa redução não será possível quando as funções F e G dependerem de t , ou seja, isso só é possível para sistemas autônomos. Se a resolução da equação (3.6) for possível e se estiver na forma

implícita

$$H(x,y) = c, \quad (3.7)$$

então essa será uma equação para as trajetórias do sistema (3.1), ou seja, as trajetórias serão as curvas de nível de (3.7). Vale ressaltar que não há fórmula geral para a obtenção da função H , o que limita seu estudo a casos especiais. Esse método de obtenção de trajetórias de um sistema autônomo não linear será ilustrado através do exemplo dado a seguir.

Exemplo 1. *Encontre as trajetórias do sistema*

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 12 - 3x^2. \quad (3.8)$$

Pelas equações

$$4 - 2y = 0, \quad 12 - 3x^2 = 0 \quad (3.9)$$

é possível verificar que os pares ordenados $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ são pontos de equilíbrio do sistema (3.8). Para a determinação das trajetórias, basta escrevermos as equações (3.8) na forma (3.6), obtendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y}.$$

Realizando a separação das variáveis e integrando, obtém-se

$$H(x,y) = 4y - y^2 - 12x + x^3 = c \quad (3.10)$$

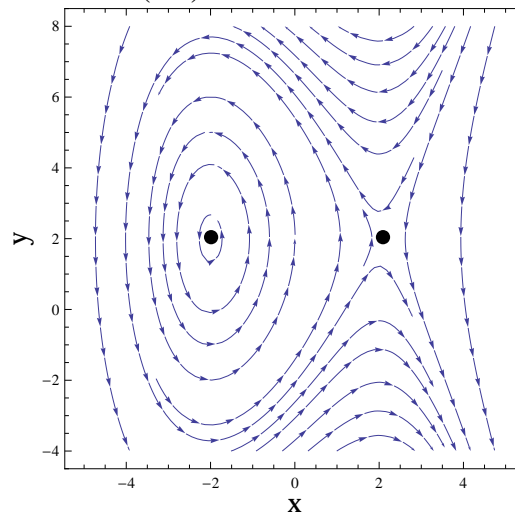
onde c é uma constante qualquer. Através da equação (3.10) e da Figura 3.1, é possível verificar que o ponto de equilíbrio $(2, 2)$ é um ponto de sela e o ponto $(-2, 2)$ é um centro. ■

3.3 Sistemas Localmente Lineares

Sistemas formados por equações diferenciais não lineares, não possuem forma geral, o que torna dificultosa a obtenção de propriedades acerca das soluções. Com isso, a complexidade do estudo de sistemas não lineares é considerada maior quando comparada a sistemas lineares, tendo em vista que, para o segundo, as teorias matemáticas que os descrevem e estudam estão amplamente desenvolvidas.

Diante disso, muitos problemas matemáticos importantes são representados atra-

Figura 3.1: Trajetórias do sistema (3.8).



vés de equações lineares ou que possam ser aproximados por elas. Todavia, o estudo das equações e sistemas não lineares torna-se inevitável, visto que, não será possível descrever nem aproximar por sistemas lineares todo tipo de problema matemático ou de outras áreas que envolvam esses conceitos.

Considere o sistema autônomo bidimensional não linear da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.11)$$

O objetivo é estudar o comportamento das soluções desse sistema em uma vizinhança do ponto de equilíbrio \mathbf{x}^0 . Para que esse estudo seja realizado, é necessário aproximar o sistema (3.11) através de um sistema linear apropriado, cujas trajetórias sejam descritas de maneira mais simples. Além disso, é preciso que as trajetórias do sistema linear sejam boas aproximações das trajetórias do sistema não linear.

Por conveniência, escolhe-se o ponto de equilíbrio como sendo a origem. Mesmo que $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, é sempre possível fazer a substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ na equação (3.11), de modo que, \mathbf{u} satisfaça um sistema autônomo com um ponto de equilíbrio na origem (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Suponha, agora, o sistema (3.11) na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz real 2×2 , $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ contínua uma matriz 2×1 , $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio **isolado**, isto é, existe algum círculo em torno desse ponto no interior

do qual não existem outros pontos de equilíbrio. Nessas condições, se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, \mathbf{x}^0 também será ponto de equilíbrio isolado do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Com isso, para que a aproximação linear do sistema (3.12) seja adequada, isto é, o comportamento dos sistemas seja igual em torno do ponto de equilíbrio, é necessário que \mathbf{g} satisfaça a condição (BOYCE & DIPRIMA, 2010)

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{x} \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

A condição enunciada em (3.13) significa que $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$ é pequeno em comparação a $\|\mathbf{x}\|$ próximo a origem e pode ser escrita na forma escalar considerando $\mathbf{x}^T = (x, y)$ e $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$. Com isso, $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r$ e $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{\frac{1}{2}}$. Daí, segue que a condição (3.13) é satisfeita se (BOYCE & DIPRIMA, 2010)

$$\frac{g_1(x, y)}{r} \rightarrow 0, \quad \frac{g_2(x, y)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Um sistema autônomo não linear da forma (3.12) que satisfaça a condição (3.13) será denominado **sistema localmente linear** ou **quase linear**. O teorema que segue (BESSA, 2011), é suficiente para garantir que um sistema não linear bidimensional da forma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = G(x_1, x_2) \end{cases}, \quad (3.15)$$

seja localmente linear.

Teorema 3. *Um sistema do tipo (3.15) será localmente linear em uma vizinhança U de um ponto crítico \mathbf{x}^0 sempre que as funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ forem duas vezes diferenciáveis e de classe C^2 .*

Considere o seguinte exemplo para ilustrar a aplicação da definição de sistema localmente linear.

Exemplo 2. *Mostre que o sistema*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + x_2 + 2x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -4x_1 - x_2 + x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

é um sistema localmente linear utilizando a condição dada em (3.13).

Colocando o sistema acima na forma (3.12), tem-se

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, é possível verificar que o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio do sistema inicial e que $\det(A) \neq 0$. Os outros três pares ordenados $(-1, 0)$, $(-1/3, -1)$ e $(-2/3, -2)$ também são pontos de equilíbrio, o que torna o ponto $x^0 = (0, 0)$ isolado. Basta verificar se a condição (3.13) é satisfeita, com

$$g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

E assim,

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= 2x_1x_2 \quad \text{e} \quad \|2x_1x_2\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0), \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \quad \text{e} \quad \|x_1^2 - x_2^2\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

A partir da condição satisfeita, tem-se que o sistema é localmente linear na vizinhança do ponto de equilíbrio $(0, 0)$. ■

Retornando ao sistema não linear (3.11), escrito na forma escalar

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y). \tag{3.16}$$

De acordo com Teorema 3, o sistema (3.16) será localmente linear em uma vizinhança do ponto de equilíbrio (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Para mostrar, utiliza-se a expansão de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) , escrevendo as funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ na forma

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \rho_1(x, y),$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \rho_2(x, y),$$

com $\rho_1 / [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, analogamente para ρ_2 . Note que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ e que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ e $dy/dt = d(y - y_0)/dt$, e assim,

o sistema se reduz a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1(x, y) \\ \rho_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

ou, em notação vetorial,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{u} + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

em que $\mathbf{u} = (x - x_0, y - y_0)^T$ e $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)^T$.

As duas consequências desse resultado são, tais que, a primeira diz respeito às funções F e G serem duas vezes diferenciáveis, então o sistema (3.16) é localmente linear e não é necessário utilizar a definição (3.13) para esse sistema; e a segunda, que o sistema linear que aproxima o sistema não linear (3.16) próximo ao ponto de equilíbrio é dado pela parte linear do sistema (3.15), isto é,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

onde $u_1 = x - x_0$ e $u_2 = y - y_0$. Pela equação descrita acima é possível encontrar o sistema linear correspondente a um sistema quase linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio de maneira geral e de fácil resolução (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

A matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

é chamada **matriz Jacobiana** das funções F e G em relação a x e y .

Exemplo 3. *Mostre que o sistema não linear a seguir é um sistema quase linear em todo ponto de equilíbrio e determine o sistema linear correspondente a cada um desses pontos.*

$$\frac{dx}{dt} = (1 + x) \sin(y), \quad \frac{dy}{dt} = 1 - x - \cos(y)$$

Considerando o sistema não linear dado, para mostrar que ele é quase linear em todo ponto crítico e determinar o sistema linear correspondente a cada um desses pontos, primeiramente define-se $F(x, y) = (1 + x) \sin(y)$, $G(x, y) = 1 - x - \cos(y)$ e suas derivadas parciais de primeira ordem são funções diferenciáveis contínuas, pois

$$\frac{dF}{dx} = \sin(y), \quad \frac{dF}{dy} = (1 + x) \cos(y), \quad \frac{dG}{dx} = -1, \quad \frac{dG}{dy} = \sin(y).$$

Encontrando os pontos de equilíbrio a partir do sistema

$$\begin{cases} (1+x)\sin(y) = 0 \\ 1-x-\cos(y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sin(y) + x\sin(y) = 0 \\ 1-\cos(y) = x \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtém-se

$$\begin{aligned} \sin(y) + 1(1-\cos(y))\sin(y) &= 0 &\implies & \sin(y) + \sin(y) - \cos(y)\sin(y) = 0 \\ 2\sin(y) - \cos(y)\sin(y) &= 0 &\implies & \sin(y)(2-\cos(y)) = 0 \\ \sin(y) = 0 \text{ ou } \cos(y) = 2 & &\implies & \sin(y) = 0 \\ & & & y = k\pi, k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Para arcos no sentido trigonométrico, tem-se para x que

$$y = k\pi \quad \rightarrow \quad x = 1 - \cos(k\pi).$$

Com isso, se k assumir um valor par, tal que $k = 2m$, então $x = 0$; caso contrário, se k assumir um valor ímpar, $k = 2m + 1$, então $x = 2$. E assim, os pontos de equilíbrio encontrados são $P_1 = (0, 2m\pi), m = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $P_2 = (2, (2m + 1)\pi), m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Dessa forma, o primeiro sistema linear correspondente é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde $u = x$ e $v = y - 2m\pi$, com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, e o segundo sistema é da forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

onde $u = -2x$ e $v = y - (2m + 1)\pi$, com $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ■

É possível verificar que o sistema linear é uma boa aproximação do sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio. A partir daí, verifica-se a relação entre as trajetórias e a estabilidade do sistema linear aproximado com o sistema não linear. Para tanto, basta analisar a Tabela 3.1, decorrente do Teorema 4.

Teorema 4. *Sejam r_1 e r_2 os autovalores do sistema linear correspondente ao sistema localmente linear. Então o tipo e a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0,0)$ do sistema linear e do sistema quase linear são como descritos na Tabela (3.1).*

Tabela 3.1: Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Quase Lineares

r_1, r_2	Sistema Linear		Sistema Quase Linear	
	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	N	Assint. Estável	N	Assint. Estável
$r_2 < 0 < r_1$	PS	Instável	PS	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	NP ou NI	Assint. Estável	N ou PE	Assint. Estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\lambda < 0$	PE	Assint. Estável	PE	Assint. Estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

N=Nó; PS=Ponto de sela; NP=Nó próprio; NI=Nó impróprio; PE=Ponto espiral; C=Centro.

O Teorema 4 afirma que quando \mathbf{x} é pequeno, os termos não lineares também o são. Assim, a estabilidade não é afetada e o tipo de ponto crítico se mantém como o determinado pelo sistema linear, exceto, quando r_1 e r_2 forem imaginários puros ou quando $r_1 = r_2$.

É possível perceber, então, que pequenas perturbações quanto aos valores dos autovetores r_1 e r_2 só podem alterar o tipo e a estabilidade, especificamente, nos dois casos supracitados. Com base nisso, espera-se que o pequeno termo não linear produza um efeito semelhante, pelo menos nesses dois casos.

Portanto, o principal resultado do Teorema 4 diz respeito aos demais casos, isto é, que em **todos os outros** o termo pequeno não linear não altera o tipo nem a estabilidade do ponto crítico. Logo, é possível determinar o tipo e o ponto crítico do sistema não linear através do estudo de um sistema linear mais simples.

3.4 Análise de Resultados

Este capítulo destinou-se ao estudo de sistemas lineares autônomos e sua estabilidade, sistemas localmente lineares e linearização em torno dos pontos críticos. Ambos os assuntos tratados estão presentes em diversos problemas existentes nas distintas áreas do conhecimento. Ao abordar os sistemas autônomos foram analisados os tipos e a estabilidade dos seus pontos de equilíbrio, bem como, a determinação das suas trajetórias, quando possível. E, apesar da natureza dos pontos de equilíbrio de um sistema não linear não definir por completo o comportamento das trajetórias no plano de fase, sua classificação é dada da mesma forma que para pontos de equilíbrio do sistema linear, como tratado na Tabela 3.1.

Esses estudos tornam-se imprescindíveis para a compreensão de sistemas localmente lineares, abordados na sequência. A decorrência desse estudo é dada pelo fato da complexidade da análise de sistemas não lineares. O estudo de sistemas autônomos não linear é facilitado pela aproximação (linearização) do mesmo através de um sistema linear de menor complexidade. Isto ocorre se as características dos pontos de equilíbrio e suas trajetórias em torno desses pontos são semelhantes.

4 MODELO PREDADOR-PRESA DE LOTKA-VOLTERRA

Nos ecossistemas, quando duas espécies diferentes interagem, a dinâmica populacional de cada uma dessas espécies é afetada de alguma forma. Essa interação pode ser classificada de três maneiras: (i) *simbiose* ou *mutualismo*, quando ambas as espécies são beneficiadas com a presença uma da outra; (ii) *competição*, quando ambas as espécies são afetadas negativamente pela presença da outra; (iii) *predação*, quando uma das espécies (predador) se beneficia com a presença da outra (presa), mas a taxa de crescimento da presa é afetada negativamente pela presença do predador (MURRAY, 2002).

Neste capítulo, será apresentado um modelo matemático clássico voltado à dinâmica populacional para a interação entre duas espécies, uma presa e o seu predador. Este modelo é conhecido como modelo predador-presa de Lotka-Volterra, por ter sido desenvolvido por Lotka (1925) e Volterra em (1926), para tratar de diferentes dinâmicas. O modelo expressa a relação entre duas espécies, onde uma das espécies (o predador) se alimenta da outra (a presa), enquanto essa, se alimenta de outro tipo de suprimento disponível no ambiente.

Nas seções a seguir, serão abordados conceitos sobre o modelo de Lotka-Volterra, sua linearização, obtenção das trajetórias e, finalmente, as mudanças que podem ser aplicadas nele com a finalidade de torná-lo mais realístico.

4.1 O Modelo

A relação de predação entre espécies é comum na natureza e pode ser exemplificada por: raposas e coelhos, onde as raposas caçam os coelhos, que por sua vez, se alimentam da vegetação da floresta; a coruja da neve que se alimenta quase exclusivamente de um roedor ártico chamado lemingue, enquanto que o lemingue se alimenta da tundra ártica; dos peixes e tubarões; pulgões e joaninhas; entre outras espécies (BOYCE & DIPRIMA, 2010; STEWART, 2010; ZILL & CULLEN, 2001).

Ressalta-se que modelos representativos dessa dinâmica não a expressam precisamente, visto que, essa relação apresenta grande complexidade em virtude de diversos fatores influenciadores, tais como, os fenômenos naturais e a intervenção do próprio homem na natureza. Apesar disso, o estudo de sistemas e modelos mais simples são considerados um passo importante para a compreensão das relações existentes na natureza (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Para a representação matemática do Modelo de Lotka-Volterra, considerando $x(t)$ e $y(t)$ as densidades de presas e predadores, respectivamente, fazem-se inicialmente as seguintes hipóteses:

- Na ausência de predadores, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual. Assim, $dx/dt = ax$, $a > 0$ quando $y = 0$.
- Na ausência de presas, a população de predadores irá a extinção, pois, estas são sua única fonte de alimento. Logo, $dy/dt = -cy$, $c > 0$ quando $x = 0$.
- O número de encontros entre predadores e presas é proporcional ao produto das duas populações, ou seja, ao produto xy . Esses encontros tendem a ser benéficos à população de predadores e inibem o crescimento da população de presas.
- A taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma βxy , e a taxa de crescimento da população de presas é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$, em que α e β são constantes positivas.

Em consequência das hipóteses acima, o Modelo de Lotka-Volterra tem a forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy = y(-c + \beta x),\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que a representa a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores, c é a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas, α é a taxa de decréscimo da população de presas em virtude da interação com os predadores e β é a taxa de crescimento populacional dos predadores em razão da predação (BOYCE & DIPRIMA, 2010; EDELSTEIN-KESHET, 1988; MURRAY, 2002; STEWART, 2010; ZILL & CULLEN, 2001).

As duas equações descritas acima formam um sistema de equações diferenciais ordinárias não linear, que por sua vez, a obtenção das soluções analíticas não é tão simples quanto para sistemas lineares. Sendo assim, a análise das soluções será dada de forma qualitativa (geométrica) para posteriormente interpretá-las biologicamente.

4.2 Linearização do Modelo

Para que a análise qualitativa das soluções do modelo (4.1) possa ser feita, inicialmente calculam-se os seus pontos de equilíbrio, os quais são as soluções das equações

$$x(a - \alpha y) = 0 \quad \text{e} \quad y(-c + \beta x) = 0. \quad (4.2)$$

Resolvendo as equações (4.2), obtém-se os seguintes pontos de equilíbrio

$$P_1 = (0, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \right). \quad (4.3)$$

Como o sistema é localmente linear, de acordo com o Teorema 3, a análise qualitativa das soluções desse sistema será dada através da análise qualitativa das soluções do sistema linearizado correspondente. Para a linearização do sistema (4.1) calcula-se, inicialmente, a matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -c + \beta x \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

aplicando-a em cada ponto de equilíbrio, obtém-se os sistemas lineares correspondentes.

- Para o ponto $P_1 = (0, 0)$, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Seus autovalores e autovetores associados são

$$r_1 = a > 0 \quad \rightarrow \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -c < 0 \quad \rightarrow \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a solução geral é da forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-ct} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

com a origem classificada em ponto de sela, tanto para o sistema linear (4.5) quanto para o sistema não linear (4.1) e, portanto, instável.

- Para o ponto $P_2 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \right)$, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c\alpha}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

onde $u = x - (c/\beta)$ e $v = y - (a/\alpha)$. Os autovalores associados são $r = \pm i\sqrt{ac}$ de modo que o ponto de equilíbrio é classificado (como apresentado na Tabela 3.1) em centro (estável) para o sistema linear (4.7). Para encontrar as trajetórias do sistema (4.7), divide-se a segunda equação pela primeira para obter a equação diferencial separável

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\beta a/\alpha)u}{(\alpha c/\beta)v}, \quad (4.8)$$

cujas soluções são

$$\beta^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k, \quad (4.9)$$

onde k é uma constante de integração não negativa. Logo, as trajetórias do sistema linear (4.7) são elipses. Contudo, esse é um dos casos em que o comportamento do sistema linear pode ser o mesmo, ou não, do sistema não linear. Para resolver esse problema, serão obtidas as trajetórias do modelo (4.1) na próxima seção.

4.3 Obtenção das Trajetórias do Modelo Lotka-Volterra

De acordo com o Teorema 4 e a Tabela 3.1, quando o ponto crítico do sistema linearizado é classificado em centro neutro, não é possível determinar se também será um centro neutro para o sistema não linear. Todavia, neste caso, essa indeterminação pode ser resolvida por meio da obtenção das trajetórias do sistema (4.1), como feito para o sistema linear (4.7).

Para encontrar essas trajetórias faz-se dy/dx , ou seja, divide-se a segunda equação do modelo (4.1) pela primeira, donde obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \beta x)}{x(a - \alpha y)}, \quad (4.10)$$

a qual é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Reescrevendo a equação (4.10) da forma

$$\left(\frac{a - \alpha y}{y} \right) dy = \left(\frac{-c + \beta x}{x} \right) dx, \quad (4.11)$$

e integrando em ambos os lados, tem-se a solução da equação

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \beta x = C, \quad (4.12)$$

onde C é uma constante de integração. A equação (4.12) não pode ser resolvida explicitamente, contudo, usando funções elementares é possível mostrar que o gráfico da equação para um valor fixo de C , é uma curva fechada em torno do ponto de equilíbrio $(c/\beta, a/\alpha)$.

Com o objetivo de ilustrar graficamente os resultados obtidos para o modelo predador-presa de Lotka-Volterra (4.1), e posteriormente interpretá-los biologicamente, considere o modelo com os seguintes valores para os parâmetros: $a = 1$, $\alpha = 0,5$, $c = 0,75$ e $\beta = 0,25$ (BOYCE & DIPRIMA, 2010). Desta forma, o modelo torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 0,5xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -0,75y + 0,25xy, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ representam o número de presas e predadores no instante de tempo t .

Inicialmente, são calculados os pontos de equilíbrio do sistema (4.13), os quais são as soluções do sistema algébrico

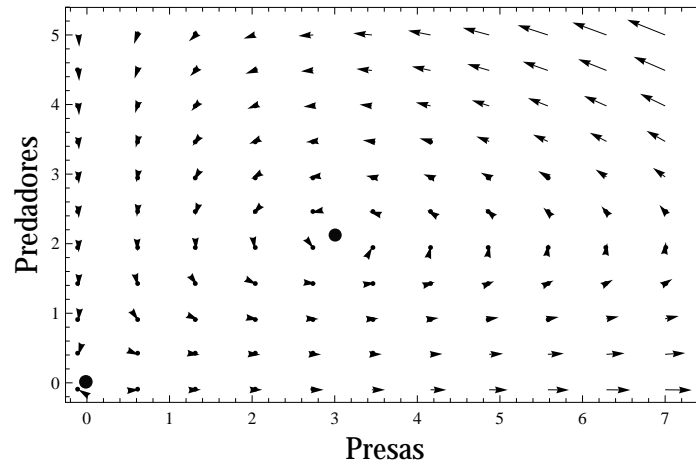
$$\begin{aligned} x(1 - 0,5y) &= 0 \\ y(-0,75 + 0,25x) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, os pontos encontrados são $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (3,2)$. O ponto de equilíbrio P_1 representa a extinção de ambas as populações, ou seja, que na ausência das presas os predadores serão extintos; o ponto P_2 representa a coexistência, ou seja, a cada 2 predadores é necessário uma população de 3 presas.

A Figura 4.1 ilustra os pontos de equilíbrio e um campo de direções para o sistema (4.13). De acordo com a Figura 4.1, parece que as trajetórias circulam em torno do ponto de equilíbrio $(3,2)$, contudo, não se tem certeza se são trajetórias fechadas ou se espiralam para dentro ou para fora do ponto.

Afim de analisar o comportamento qualitativo das trajetórias que determinam as soluções desse sistema, será examinado o comportamento local das soluções em torno de

Figura 4.1: Pontos de equilíbrio e campo de direções para o sistema predador-presa (4.13).



cada ponto de equilíbrio. Para o ponto $P_1 = (0,0)$, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Os autovalores e autovetores associados são

$$r_1 = 1 \quad \rightarrow \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -0,75 \quad \rightarrow \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A solução geral é da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-0,75t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e a origem do sistema linear (4.14) e não linear (4.13) é classificada em ponto de sela e, portanto, instável.

Para o ponto $P_2 = (3,2)$, fazendo a substituição: $x = 3 + u$ e $y = 2 + v$ o sistema linear correspondente é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Seus autovalores e autovetores associados são

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}i}{2} \rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -\frac{\sqrt{3}i}{2} \rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Esse ponto de equilíbrio é classificado em centro estável para o sistema (4.15). Contudo, a natureza desse ponto para o sistema não linear (4.13) não pode ser determinada apenas com essa informação. Logo, para encontrar as trajetórias do sistema (4.15), divida-se a primeira equação pela segunda, obtendo

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0,5u}{-1,5v} = -\frac{u}{3v}.$$

Separando as variáveis, tem-se

$$u du + 3v dv = 0$$

Integrando em ambos os lados

$$u^2 + 3v^2 = k,$$

onde k é uma constante de integração. A partir daí, é possível verificar que as trajetórias são elipses centradas no ponto de equilíbrio.

Retornando ao sistema (4.13) e dividindo a primeira equação pela segunda, tem-se

$$\frac{1 - 0,5y}{y} dy = \frac{-0,75 + 0,25x}{x} dx.$$

Integrando em ambos os lados, obtém-se

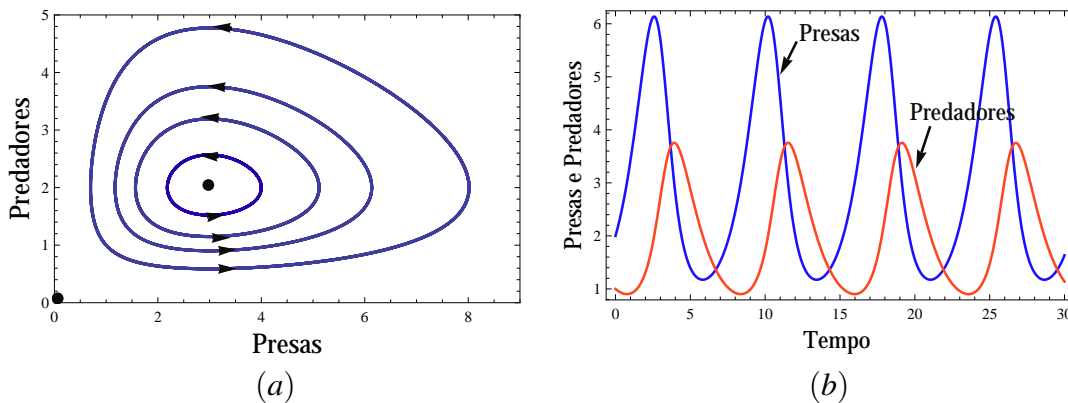
$$0,75 \ln x + \ln y - 0,5y - 0,25x = c,$$

em que c é uma constante de integração.

Apesar de não ser possível resolver explicitamente a equação acima, através da Figura 4.2 (a), para cada valor fixo de c , é possível verificar que o gráfico da equação é uma curva fechada em torno da solução constante (3,2). Sendo assim, o ponto de

equilíbrio é um centro para o sistema não linear (4.13) e o comportamento das populações de presas e predadores apresenta uma oscilação cíclica, conforme ilustra a Figura 4.2 (b) para um conjunto de condições iniciais. Esta oscilação periódica era esperada, já que as trajetórias ilustradas na Figura 4.2 (a) são curvas fechadas.

Figura 4.2: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de presas e predadores em função do tempo.



Interpretação Biológica dos Resultados

Através dos resultados analíticos e do comportamento qualitativo (gráficos) obtidos anteriormente é possível realizar uma interpretação biológica de tais dados. Assim, através da Figura 4.2 (b), verifica-se que, a oscilação da população de presas vem antes da oscilação da população de predadores. Além disso, começando em um estado em que ambas as populações (predadores e presas) são relativamente pequenas, há inicialmente um aumento no número de presas, visto que a quantidade de predadores é pequena.

Ao passo que a população de presas é grande, a população de predadores, com comida abundante, também cresce. Assim, aumenta a caça e a população de presas começa a diminuir. Como sua única fonte de alimento está diminuindo, a população de predadores também decrescerá, e o sistema volta ao seu estado original, completando assim um ciclo. Esses fatos caracterizam um comportamento cíclico das duas populações.

É possível observar esse ciclo na Figura 4.2, onde os gráficos ilustram oscilações típicas para populações que são descritas através do modelo de Lotka-Volterra. Os ciclos independem das condições iniciais e dos valores atribuídos aos parâmetros a , c , α e β . Isto quer dizer que este sistema sempre apresentará soluções periódicas. Contudo, por exemplo, um aumento na taxa de crescimento das presas a ou um decréscimo na taxa de

morte dos predadores c ocasionará um aumento no período das oscilações (MURRAY, 2002).

Na natureza já foram observadas variações cíclicas em populações de predadores e presas, como prevê o modelo de Lotka-Volterra, para lincos e lebres no distrito do Rio MacKenzie no Canadá. Com base nos dados da Companhia Hudson Bay, a abundância de lincos e lebres, como indicado pelo número de peles compradas no período de 1845-1935, mostra que havia uma variação periódica, com um período de 9 a 10 anos. Com os picos das lebres antecedendo o dos lincos por um ano ou mais (BOYCE & DIPRIMA, 2010; ZILL & CULLEN, 2001).

É fato que, não são encontrados somente esses resultados para a interação predador-presa. Existem sistemas que apresentam outros comportamentos, tais como, a extinção de uma das espécies ou a evolução para populações assintoticamente estáveis, isto é, a evolução para a coexistência delas. Diante disso, a próxima seção destina-se às possíveis mudanças que podem ser feitas nas equações de Lotka-Volterra, viabilizando a descrição de diferentes comportamentos entre predadores e presas.

4.4 Mudanças no Modelo de Lotka-Volterra

Existem algumas mudanças que podem ser realizadas nas equações de Lotka-Volterra afim de torná-las mais realísticas e adequá-las às dinâmicas existentes na natureza. A primeira mudança possível é acrescentar o decréscimo da taxa de crescimento populacional com o passar do tempo, conforme prevê o Modelo de Verhulst. Além desse ajuste, é possível incluir a extinção ou saturação nas equações.

Considerando o modelo de Lotka-Volterra (4.1) com um termo de saturação na população de presas $x(t)$, isto é, um termo representativo de neutralização, da forma $-kx^2$, onde k é uma constante positiva e os parâmetros, tais que, $a = 1$, $\alpha = 0,5$, $c = 0,75$ e $\beta = 0,5$, tem-se (BOYCE & DIPRIMA, 2010)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - 0,5y) - 0,5x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y(-0,75 + 0,5x).\end{aligned}\tag{4.16}$$

A partir desse sistema, calculam-se seus pontos de equilíbrio, ou seja, as soluções

constantes dadas pelo sistema

$$\begin{aligned}x(1 - 0,5y - 0,5x) &= 0 \\y(-0,75 + 0,5x) &= 0,\end{aligned}$$

obtendo $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$ e $P_3 = (1,5;0,5)$.

O sistema linear correspondente ao ponto $P_1 = (0,0)$ é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

A solução do sistema (4.17) foi representada e analisada na seção 4.3. Dessa seção tem-se que a origem é classificada em ponto de sela instável para os sistemas (4.17) e (4.16). Qualitativamente, pode-se verificar que a inclusão do termo de saturação não alterou o comportamento do sistema (4.17) próximo a origem.

Analisando o ponto $P_2 = (2,0)$, percebe-se que ele representa a situação em que não há predadores, isto é, $y(t) = 0$ para todo t . Nesse caso, a população de presas tende à saturação $x = 2$ quando $t \rightarrow \infty$, seja qual for a população inicial, não nula, de presas.

Para o ponto $P_3 = (1,5;0,5)$, realizando a substituição $x = 1,5 + u$ e $y = 0,5 + v$ o sistema linear correspondente é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 & -0,75 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

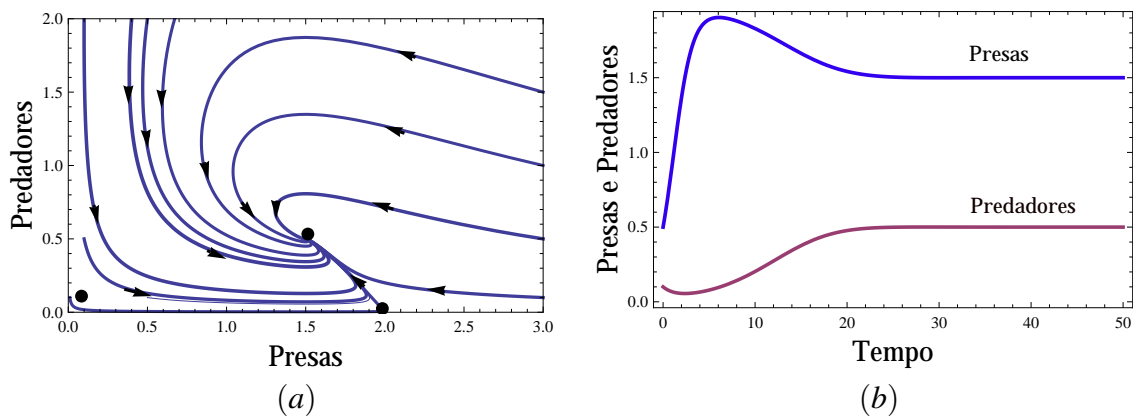
Os autovalores r_1 e r_2 associados são da forma,

$$r_1 = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i \text{ e } r_2 = -\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i.$$

Haja vista, que os autovalores são complexos com parte real negativa, o ponto P_3 é classificado em espiral assintoticamente estável, como ilustrado no retrato de fase da Figura 4.3 (a), tanto para o sistema não linear (4.16) quanto para o linearizado (4.18), de acordo com a Tabela (3.1). Assim, é possível verificar que as espécies tendem assintoticamente à solução estável (de coexistência das espécies) $(x,y) \rightarrow (1,5;0,5)$ quando $t \rightarrow \infty$, como pode ser observado na Figura 4.3 (b), independentemente das condições iniciais. Nesse sentido, percebe-se que nenhuma das espécies evoluiu à extinção.

Considerar-se-à, agora, o modelo de Lotka-Volterra com a possibilidade de extin-

Figura 4.3: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de presas e predadores em função do tempo.



ção. Esse comportamento pode ser descrito, mantendo-se o termo de saturação aplicado anteriormente e ajustando-se o valor do parâmetro c de $c = 0,75$ para $c = 1,5$. O aumento no valor atribuído ao parâmetro c implica no aumento da dependência de sobrevivência da população de predadores com relação à ausência ou decréscimo da população de presas.

Seja o sistema (4.16) com $c = 1,5$ e x e y não negativos da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - 0,5y) - 0,5x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y(-1,5 + 0,5x).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Os pontos de equilíbrio são obtidos a partir das soluções do sistema

$$\begin{aligned}x(1 - 0,5y - 0,5x) &= 0 \\ y(-1,5 + 0,5x) &= 0,\end{aligned}$$

donde obtém-se, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$ e $P_3 = (3,-1)$. Entretanto, o ponto $P_3 = (3,-1)$ caracteriza-se como uma solução constante irreal, visto que, no contexto biológico não há como existir população negativa.

Para o ponto $P_1 = (0,0)$ o sistema linear correspondente é da forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\tag{4.20}$$

Seus dois autovalores associados são r_1 e r_2 , tais que $r_1 = 1$ e $r_2 = -1,5$. Como eles são reais e com sinais opostos, a origem é classificada em ponto de sela instável para

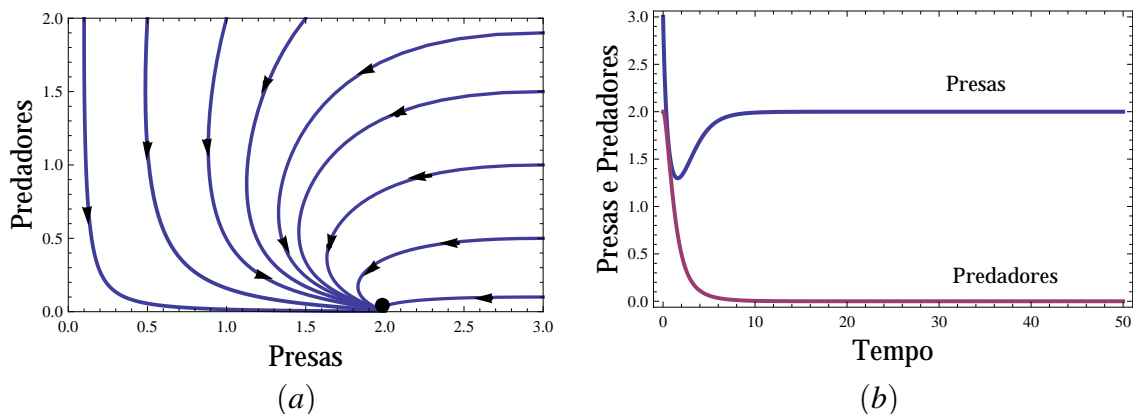
os sistemas (4.19) e (4.20), conforme apresenta a Tabela (3.1).

Para o ponto de equilíbrio $P_2 = (2, 0)$, faz-se a mudança de variável $x = 2 + u$ e $y = v$. Assim, o sistema linear correspondente é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

donde obtém-se os autovalores r_1 e r_2 , tais que, $r_1 = -1$ e $r_2 = -0,5$. Nesse caso, como os dois autovalores são negativos, então o ponto $P_2 = (2, 0)$ é classificado em nó assintoticamente estável para os sistemas (4.21) e (4.19), como pode ser observado através do retrato de fase na Figura 4.4 (a) (Tabela 3.1). Isso representa a tendência das trajetórias ao ponto de equilíbrio $P_2 = (2, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$ sucedendo à extinção dos predadores, como ilustrado na Figura 4.4 (b).

Figura 4.4: (a) Retrato de fase; (b) Evolução temporal de presas e predadores em função do tempo.



4.5 Análise de Resultados

Nesta seção buscou-se definir e analisar o modelo de Lotka-Volterra que descreve a dinâmica predador-presa. Por tratar-se de um sistema autônomo não linear, suas soluções foram analisadas de forma qualitativa, através da sua linearização em torno de cada ponto de equilíbrio.

O ponto de coexistência foi classificado como centro neutro para o sistema linear correspondente, caso em que somente com a linearização não é possível classificá-lo para o sistema predador-presa não linear. Para contornar este problema, foram obtidas as traje-

tórias do sistema e assim concluiu-se que o ponto de equilíbrio é um centro também para o sistema não linear, visto que as trajetórias são elipses que o circundam.

Por se classificado em centro, as populações oscilam periodicamente. Essas soluções periódicas são características ao modelo de Lotka-Volterra, independentemente das condições iniciais e dos valores atribuídos aos parâmetros das equações. A partir das soluções e das trajetórias do sistema foi possível suceder à interpretação biológica dos resultados. Para finalizar, foram analisadas duas possíveis mudanças que podem ser feitas nas equações do modelo para torná-lo mais realístico, visto que, soluções periódicas não são encontradas com facilidade na natureza.

A primeira mudança analisada foi acrescentar um termo que considere a saturação da população de presas, ou seja, a espécie que no modelo original crescia exponencialmente na ausência dos predadores, passou a crescer até atingir a saturação (representada pela constante k). Neste caso, surgem três pontos de equilíbrio, o de extinção de ambas as espécies, o segundo de extinção dos predadores e o terceiro de coexistência das populações. Os dois primeiros pontos de equilíbrio são instáveis e o terceiro é um espiral assintoticamente estável. Desta forma, todas as soluções tendem a esse ponto, não importando as condições iniciais.

A segunda mudança analisada foi considerar que pode haver a extinção da população de predadores. Isto ocorre se o termo de decréscimo da população de predadores, representado pelo parâmetro c for muito alto em relação ao parâmetro β , ou seja, aumenta a dependência da população de predadores com relação à população de presas. Neste caso, o ponto de equilíbrio assintoticamente estável é o que representa a extinção dos predadores. A população de presas cresce até o equilíbrio e ali se mantém indefinidamente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A dinâmica populacional de predadores e presas é encontrada facilmente na natureza, contudo, sua modelagem e descrição através de equações diferenciais nem sempre é tão simples. Esse fato, justifica-se pela representação dessas dinâmicas ser dada por meio de equações diferenciais não lineares, pois, para que a interação entre as populações de presas x e predadores y aconteça, faz-se necessária a presença de um termo da forma xy nas equações.

Tendo em vista o objeto principal de estudo e os objetivos do presente Trabalho de Conclusão de Curso, seu desenvolvimento esteve envolto a um dos principais modelos já desenvolvidos, conhecido como modelo predador-presa de Lotka-Volterra. A importância do estudo desse modelo está relacionada com suas contribuições para com o desenvolvimento e modelagem de sistemas predador-presa mais avançados.

A escolha do tema abordado no projeto e, posteriormente, no Trabalho de Conclusão de Curso, está principalmente relacionada com a possibilidade de interdisciplinaridade entre a Matemática e a Biologia. O interesse e a curiosidade sobre as dinâmicas populacionais de predadores e presas, despertados através do incentivo da professora orientadora, propiciaram a realização deste TCC com o presente tema.

Os estudos feitos inicialmente sobre conceitos mais simples (sistemas lineares) contribuiu para a investigação das soluções do modelo de Lotka-Volterra. É possível perceber a sua relação com sistemas lineares, pois, foi possível a linearização do modelo não linear em torno dos pontos de equilíbrio e o encontro das trajetórias que determinam as suas soluções.

A linearização do modelo permitiu, posteriormente, a realização da análise qualitativa. Todavia, o processo de linearização não forneceu resultados concretos sobre a natureza do ponto de equilíbrio de coexistência quando o mesmo foi classificado em centro neutro, de acordo com Teorema 4 e a Tabela 3.1. Diante disso, foi necessário obter as trajetórias para garantir que o ponto é um centro neutro tanto do sistema linearizado quanto do não linear. Com a obtenção das trajetórias verificou-se que a representação gráfica é uma curva fechada em torno do ponto de equilíbrio.

A partir Figura 4.2 (b), que representa a evolução temporal de presas e predadores em função do tempo, ilustra a oscilação da quantidade de presas e predadores, possibilitando verificar que o crescimento e decréscimo das populações repete-se indefinidamente, implicando em uma oscilação cíclica. Tal comportamento foi projetado pelas

curvas fechadas ilustradas na Figura 4.2 (a).

As soluções do modelo predador-presa caracterizam oscilações cíclicas habituais às dinâmicas populacionais descritas através do modelo de Lotka-Volterra. Isso significa, que independentemente dos valores atribuídos aos parâmetros das equações, suas soluções tendem ao mesmo ciclo, mas podem diferir no período das oscilações quando alterados os valores da taxa de crescimento das presas ou da taxa de decréscimo dos predadores.

Além disso, a influência de diversos fenômenos, não somente naturais, implicam na necessidade de adaptação das equações que modelam a dinâmica entre predadores e presas. Ajustando-se as equações, é possível ampliar as possibilidades de modelagem de interações do tipo predador-presa. A partir de possíveis mudanças percebeu-se a viabilidade de resultados distintos aos habituais, tais como, a tendência à solução estável de coexistência das espécies ou, inclusive, a extinção dos predadores. Ambos resultados podem ser frutos de diversas interações presentes na natureza.

A realização de um Trabalho de Conclusão de Curso voltado à matemática aplicada permite ao acadêmico ampliar suas ideias sobre o curso de Licenciatura em Matemática. Produzir um TCC e, nele, abordar conceitos que estão além daqueles pré-estabelecidos e estudados nas Componentes Curriculares do curso, propiciam a construção de conhecimentos que acrescentam na formação acadêmica, intelectual, pessoal e profissional do autor.

A complementação acadêmica, em virtude da produção deste trabalho, é fruto da relação que o presente tema possui com os conceitos abordados e estudados ao longo da graduação. A escolha de estudar conteúdos pertinentes à matemática aplicada vai ao encontro da proposta que diversas Componentes Curriculares apresentaram no decorrer do curso.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, L. J. S. **An Introduction to Mathematical Biology**. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia**. São Paulo: Contexto, 2011.
- BERRYMAN, A. A. **The Origins and Evolution of Predator-Prey Theory**. *Ecology*, v. 73, n. 5, pp. 1530-1535, 1992.
- BESSA, G. R. **Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Philadelphia: Siam, 1988.
- MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.
- MURRAY, J. D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. 3^a ed. New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p. 551, 2002.
- RAFIKOV, M. **Aplicação dos Modelos Matemáticos no Controle de Populações**. Ijuí, v. 1, pp. 01-22, 2003.
- STEWART, J. **Cálculo: Volume 2**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- VÉRON, J. **Alfred J. Lotka and the Mathematics of Population**. *Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics*, v. 4, n. 1, pp. 1-10, 2008.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.