UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
MATEMÁTICA LICENCIATURA - CAMPUS ITAQUI

GABRIEL CARPES IRALA

RELAÇÃO DE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS ENTRE DIFERENTES MÉDIAS.

ITAQUI
2021

GABRIEL CARPES IRALA

RELAÇÃO DE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS ENTRE DIFERENTES MÉDIAS.

Trabalho de Conclusão de Curso II (TCC II), apresentado ao curso Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Itaqui. Como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Alisson Darós Santos

Coorientador: Radael de Souza Parolin

ITAQUI
2021

Irala, Gabriel Carpes

Relação de Grandezas Geométricas Entre Diferentes Médias / Gabriel Carpes Irala. – 2021.
53 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, Licenciatura em Matemática, Campus Itaqui, 2021.

“Orientação: Alisson Darós Santos; Co-orientação: Radael de Souza Parolin”.

1. ABNT. 2. UNIPAMPA. I. Título.

GABRIEL CARPES IRALA

RELAÇÃO DE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS ENTRE DIFERENTES MÉDIAS.

Trabalho de Conclusão de Curso II (TCC II), apresentado ao curso Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Itaqui. Como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 09 de Outubro de 2021.

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. Alisson Darós Santos
Orientador
UNIPAMPA

____

Prof. Dr. Radael de Souza Parolin
UNIPAMPA

____

Prof. Me. Leonel Giacomini Delatorre
UNIPAMPA

Dedico está pesquisa aos meus pais e irmãos, meus maiores e melhores orientadores na vida.

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido na área da Matemática com ênfase em Matemática Pura, visando o desenvolvimento de estudar e desenvolver soluções que representam relações de dependência entre grandezas geométricas, visando não só determinar associações não usuais entre a geometria e álgebra, como também desenvolver objetos de aprendizagem com Geometria Dinâmica. Neste contexto, este trabalho investiga desenvolver e analisar de soluções que relacionam grandezas geométricas do triângulo e do círculo, estabelecer relações entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, estudar e compreender as características de semelhança entre triângulos, trabalhar com o círculo e suas propriedades trigonométricas, examinar polinômios e suas raízes, bem como abordar a geometria de forma computacional e dinâmica.

Palavras-chave: Geometria. Álgebra. Médias. Estudo de Funções.

ABSTRACT

This work was developed in the field of Mathematics with an emphasis on Pure Mathematics, aiming to develop and study and develop solutions that represent dependency relationships between geometric quantities, aiming not only to determine unusual associations between geometry and algebra, but also to develop learning objects with Dynamic Geometry. In this context, this work investigates the development and analysis of solutions that relate geometric quantities of the triangle and the circle, establish relationships between arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means, study and understand the similarity characteristics between triangles, work with the circle and its trigonometric properties, examine polynomials and their roots, as well as approach geometry computationally and dynamically.

Keywords: Geometry. Algebra. Averages. Study of Functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma das mais antigas áreas da Matemática. Segundo Pavanello (1989), é possível verificar que os primeiros indícios de utilização de conhecimentos geométricos apareceram no setor da agricultura. O que parece mais provável é que tais conhecimentos foram sendo construídos empiricamente como resposta à necessidade de ordem prática das comunidades.

A prática da agricultura dá origem ao desenvolvimento de uma série de novas técnicas, gera grandes transformações na sociedade, contribui também para elaboração de conhecimento e técnicas destinadas a resolver os problemas básicos dessa sociedade. Dessa forma, a agricultura vai, de muitas maneiras, contribuir para que o conhecimento geométrico se desenvolva, na prática, geração após geração, entre os povos da Mesopotâmia e do Egito.

Por volta do século VI a.C, uma nova metodologia passou a ser utilizada no estudo da geometria. Os gregos ganharam espaço e passaram a identificar a construção sistemática do fundamentos da geometria, onde a Matemática é intimamente relacionada com a filosofia, ou seja, desprender do sentido prático, estando mais relacionada com a racionalidade. Foi durante esse período de predominância grega que surge, um dos mais importantes matemáticos da história, Euclides de Alexandria, que é conhecido por seu trabalho *Elements*, no qual ele coletou e organizou sistematicamente todos os conhecimento de geometria, que ditaram a forma do saber geométrico por vários séculos.

Apesar do progresso na geometria, foi somente no século XVII que o matemático René Descartes (1596-1650) estabeleceu relações entre a geometria e a álgebra, com sua obra Discurso do Método.

> Partindo das noções já existentes sobre coordenadas, ele constrói um sistema no qual estabelece uma correspondência entre os pontos do plano e pares ordenados de números reais, tornando possível fazer corresponder curvas do plano a equações a duas variáveis, de modo que a cada configuração geométrica corresponda uma configuração algébrica. (PAVANELLO,1989, p.42)

Atualmente, com a geometria já desenvolvida, tem se buscado relacioná-la com a álgebra cada vez mais. Neste sentido, o presente trabalho tem como problemática, investigar a existência de relações entre grandezas geométricas de diferentes polígonos a partir das definições de áreas e proporções entre segmentos.

Delineamos como objetivo geral desta monografia estudar e desenvolver soluções que representam relações de dependência entre grandezas geométricas, visando não só determinar associações não usuais entre a geometria e álgebra, como também desenvolver objetos de aprendizagem com Geometria Dinâmica, tendo em vista que "as ferramentas de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas." (GIRALDO *et al.*, 2012).

Para o cumprimento do objetivo geral apresentado, esse trabalho tem como objetivos específicos, desenvolver e analisar de soluções que relacionam grandezas geométricas do triângulo e do círculo; estabelecer relações entre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática; estudar e compreender as características de semelhança entre triângulos; trabalhar com o círculo e suas propriedades trigonométricas; examinar polinômios e suas raízes, bem como abordar a geometria de forma computacional e dinâmica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A importância em relacionar Geometria e Álgebra

A geometria inicialmente esteve ligada à agricultura e a necessidade de fixar limites entre propriedades, o que contribuiu decisivamente para a descoberta e utilização de princípios relativos às características de linhas, ângulos e figuras, bem como para o desenvolvimento de processos de cálculos de áreas de superfícies planas, consequentemente fazendo com que os conhecimentos geométricos se tornassem cada vez mais necessários às comunidades. Ao concordar com o autor, entendemos que os elementos de Euclides

> [...] expõem a geometria como um corpo de conhecimento organizado sob a forma de um sistema dedutivo. Sua intenção é que cada afirmação se apresente como a consequência de afirmações previamente estabelecidas, que, por sua vez, derivam de outras, e assim sucessivamente. Todas as afirmações decorrem, porém, de algumas premissas básicas admitidas como verdadeiras. Dessas derivam as demais afirmações -teoremas.(PAVANELLO, 1989, p.35)

A Álgebra também é uma das áreas mais antigas da Matemática, se considerarmos seus primórdios vinculados à Teoria de Números e à Aritmética Básica. Ao longo da História, muito conhecimento foi sendo adicionado e, desde o século XVII, a partir da observação de regras comuns que certos conjuntos com determinadas operações satisfaziam, foram se originando as diferentes estruturas algébricas (e subáreas da Álgebra) que hoje são estudadas.

Com a introdução do plano cartesiano por René Descartes, no início do século XVII, problemas de outras áreas da Matemática, como os da Álgebra, puderam ser transformados em problemas de Geometria (e vice-versa), muitas vezes conduzindo à simplificação das soluções. Essa integração da Álgebra com a Geometria deu origem, dentre outras, à Geometria Analítica que foi um dos pontos chave para que Isaac Newton e Gottfried Leibniz pudessem desenvolver as ideias do Cálculo Diferencial e Integral no final daquele mesmo século.

O ensino matemático há anos vem seguindo um padrão compartimentado entre os ramos da Matemática, onde estudamos Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria separadamente, dando a entender que são áreas que não se relacionam.

Lins e Gimenez (1997) afirmam de modo que o aluno tem que ter em mente que a ‘álgebra é aritmética generalizada’ ou ‘aritmética é a estrutura da álgebra’. E a Geometria é está relacionada com a visualização da álgebra e aritmética, é através da Geometria que a aritmética e a álgebra são expostas de maneira que o aluno possa ver o que se pede nos estudos matemáticos é por isso que se deve unificar a disciplina torná-la única (matemática), precisa-se inseri-la em um quadro mais amplo, e analisar o processo de produção de significados de todas as suas áreas.

2.2 Fundamentação Matemática do Problema

Nesta seção iremos descrever alguns conceitos preliminares que são necessários para a compreensão do problema que será abordado no Trabalho de Conclusão de Curso. Essencialmente trabalharemos com algumas grandezas geométricas envolvendo conceitos como médias e relações trigonométricas e polinomiais.

As médias são essenciais para fazer estimativas de tendências de crescimento populacional, taxas de rendimento em investimentos ao longo de um dado tempo, velocidade média FERREIRA (2017). Apesar do conceito de média ser simples, é importante saber identificar as situações adequadas para uma aplicação correta de cada tipo de relação envolvendo os conceitos de média, pois uma aplicação incorreta pode gerar erros relevantes e estimativas discrepantes com a realidade. Neste momento iremos apresentar as definições de médias presentes em MORGADO (2014).

Uma média de uma sequência de números é um valor que pode substituir todos os elementos da sequência sem alterar uma certa característica da sequência. Se essa característica é a soma dos elementos da sequência, obtemos a média aritmética simples.

Definição 1: Dada uma sequência de $n > 1$ números reais, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a média aritmética simples A é definida por

$$A = \frac{x_1+x+x_3+\ldots+x_n}{n}. \quad (1)$$

Esta é a média mais simples de ser calculada. Note que, basta somarmos os valores da nossa sequência e, em seguida, dividirmos o resultado pela quantidade de termos da mesma. Na média aritmética simples, cada número possui exatamente a mesma importância ou mesmo peso. Se temos uma sequência de números que possuem importância relativa, ou pesos diferentes, devemos utilizar uma média que considere esses pesos, chamada média ponderada.

Definição 2: Dada uma sequência de $n > 1$ números reais, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, com seus pesos dados, respectivamente, por $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, a média aritmética ponderada P é descrita por

$$P = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}. \quad (2)$$

Se a característica a ser considerada for o produto dos elementos da sequência, obteremos a média geométrica.

Definição 3: Dada uma sequência de $n > 1$ números reais positivos, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a média geométrica G é definida por

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}. \quad (3)$$

Observe que só definimos a média geométrica para números positivos. Assim evitamos a possibilidade da média não existir.

Se a característica for a soma dos inversos dos elementos da sequência, obteremos a média harmônica.

Definição 4: Dada uma sequência de $n > 1$ números reais positivos, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, a média harmônica H é definida por

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}. \quad (4)$$

A média harmônica é, pois, o inverso da média aritmética dos inversos dos números. Outra média importante é a média quadrática.

Definição 5: Dada uma sequência de $n > 1$ números reais não nulos, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$,a média quadrática Q é definida por

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}}. \quad (5)$$

ou seja, a média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números.

Para a dedução destes conceitos supracitados a partir de representações geométricas faz-se necessário a compreensão de semelhança de triângulos. O conceito de semelhança é importante nas resoluções de problemas de Geometria. Além disso, do ponto de vista matemático, esse conceito é muito importante por se constituir em pré-requisito para o estudo de vários conteúdos geométricos, assim como a riqueza de conceitos que ele próprio envolve.

Segundo Lima (1991), a noção de semelhança corresponde à ideia natural de ampliação e redução de uma figura, alterando seu tamanho sem modificar sua forma. Ainda segundo o autor, o conceito estudado nas escolas sobre semelhança é definido principalmente para triângulos e, cuja definição, se estende para os demais polígonos.

Baseado em Barbosa (1985), elencamos algumas definições e propriedades de semelhança de triângulos.

Definição 6: Dois triângulos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e seus lados correspondentes sejam proporcionais, isto é, a razão entre as medidas dos lados correspondentes são iguais.

Teorema 1: Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Teorema 2 (1º caso de semelhança – AA): Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

Teorema 3 (2º caso de semelhança – LAL): Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos correspondentes de outro triângulo e o ângulo compreendido é congruente, então os triângulos são semelhantes.

Teorema 4 (3º caso de semelhança – LLL): Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Finalmente, apresentamos uma representação geométrica para um problema que relaciona grandezas geométricas do triângulo e do círculo com os diferentes tipos de médias. A escolha de uma abordagem sobre o estudo das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, deu-se por ser um tema que desempenha papel essencial, pois proporciona ferramentas para análise, leitura e interpretação de dados, tabelas e gráficos.

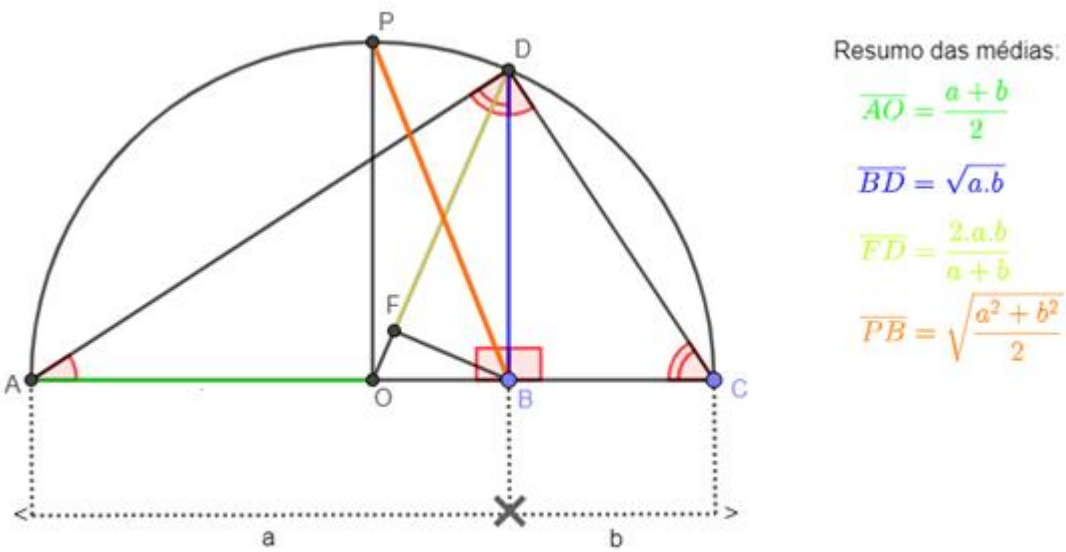
Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), recomenda-se que desde o Ensino Fundamental, se aborde noções básicas de estatística para que o aluno seja confrontado com situações concretas e o mesmo possa compreender conceitos fundamentais dos fenômenos do cotidiano. Entre esses conceitos destaca-se a importância da média de uma sequência de valores numéricos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> "Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas. O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania..."(PCN – Matemática, p.29 – 1997).

A Figura 1 representa as tais médias geometricamente de dois segmentos, segundo *Papus*, utilizando diversas construções e aplicando relações e conceitos matemáticos, permitindo a percepção de forma lúdica entre as desigualdades das médias. As construções geométricas de tais médias serão descritas nas seções subsequentes.

Figura 1 - Representação das médias Aritmética ($\overline{AO}$), Geométrica ($\overline{BD}$), Harmônica ($\overline{FD}$) e Quadrática ($\overline{PB}$).



Fonte: Autoria própria.

2.3 Representação da Média Aritmética

Inicialmente construímos dois segmentos colineares $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de comprimentos *a* e *b*, respectivamente. Vamos construir a média aritmética do segmento $\overline{AC}$, para isso marque o ponto médio O do segmento $\overline{AC}$. A partir deste, construímos um semicírculo com centro em O e raio $\overline{AO}$ (ou $\overline{OC}$). Por construção, temos que $\overline{AC}$ é o diâmetro do semicírculo e, portanto,

$$D = a + b$$

$$D = 2r$$

$$2r = a + b$$

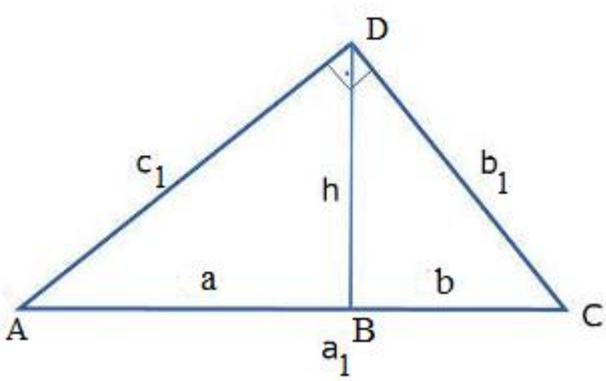
$$r = \frac{a+b}{2}$$

Logo a média aritmética, $\overline{AO}$ é dada por $\frac{a+b}{2}$.

2.4 Representação da Média Geométrica

A partir do semicírculo construindo na seção anterior, traçaremos por B um segmento perpendicular ao diâmetro $\overline{AC}$ e denotando por D o ponto de interseção deste segmento com o semicírculo. Vamos construir os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, assim teremos um triângulo ADC, que está inscrito no semicírculo e seu lado $\overline{AC}$ é o diâmetro do semicírculo, logo esse triângulo é retângulo em $A\widehat{D}C$.

Note que os triângulos ADC, ABD e BCD são semelhantes entre si. De fato, vamos mostrar que ABD e BCD são semelhantes



Sendo:

a_1 = medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90°)

b_1 = cateto oposto

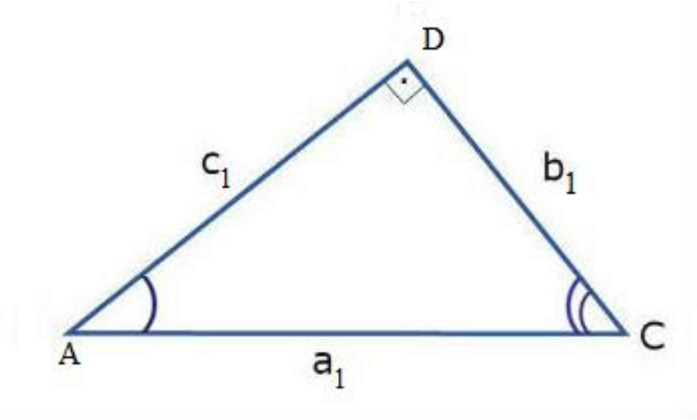
c_1 = cateto adjacente

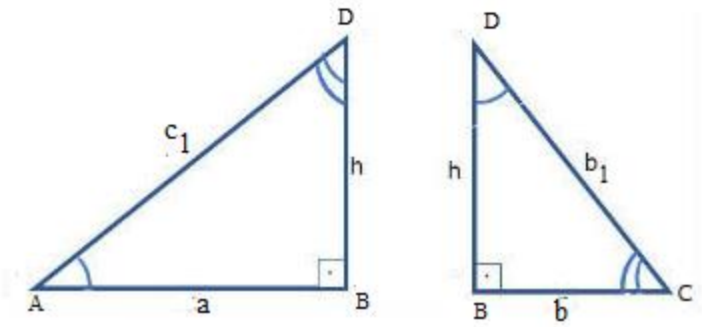
h = altura relativa à hipotenusa

a = projeção do cateto oposto sobre a hipotenusa

b = projeção do cateto adjacente sobre a hipotenusa

Para encontrar as relações métricas, utilizaremos semelhança de triângulos. Considere os triângulos semelhantes ABC, ABD e ADC, representado abaixo





Como os triângulos ADC e ABD são semelhantes $(\Delta ADC \sim ABD)$, temos as seguintes proporções:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{b_1}{h} \Rightarrow a_1 \cdot h = b_1 \cdot c_1$$

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{c_1}{a} \Rightarrow {c_1}^2 = a_1 \cdot a$$

$(\Delta ADC \sim BCD)$ encontramos a proporção

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1}{b} \Rightarrow {b_1}^2 = a_1 \cdot b$$

$(\Delta ABD \sim \Delta BCD)$, temos a proporção

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{h} \Rightarrow h^2 = a \cdot b$$

Temos ainda, que a soma as projeções m e n é igual a hipotenusa, ou seja

$$a_1 = a + b$$

Usando as relações métricas que é o Teorema de Pitágoras. Podemos demonstrar o teorema usando a soma de duas relações encontradas anteriormente.

Vamos somar a relação ${b_1}^2 = a_1 \cdot n$ com ${c_1}^2 = a_1 \cdot m$, conforme mostrado abaixo:

$${b_1}^2 + {c_1}^2 = a_1 \cdot b + a_1 \cdot a$$

$${b_1}^2 + {c_1}^2 = a \cdot (b + a)$$

como $a = m + n$, substituindo na expressão anterior, temos:

$${a_1}^2 = {b_1}^2 + {c_1}^2$$

Com isso temos que a altura elevado ao quadrado, será igual ao produto das projeções $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}$$

Logo, $\overline{BD}$ é a média geométrica G, e que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, então temos que:

$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

2.5 Representação da Média Harmônica

Partindo do semicírculo construindo na seção anterior, vamos construir a média harmônica do segmento $\overline{AC}$, marque o raio $\overline{OD}$, que vai do centro O até o ponto D (definido anteriormente). Dessa forma, $\overline{OD} = r = \frac{a+b}{2}$. A partir de B, trace um segmento perpendicular ao raio $\overline{OD}$, denotando F o ponto de interseção entre este segmento e o raio $\overline{OD}$.

Da mesma forma que provamos acima que os triângulos ADC e ABD são semelhantes, obtemos que os triângulos OBD e DFB também o são. Visto que o ângulo com vértices em D é ângulo comum a eles.

Então, pela semelhança temos que:

$$\Delta OBD \sim \Delta DFB \Longrightarrow \frac{OD}{BD} = \frac{BD}{FD} = \frac{OB}{BF}$$

Onde temos que:

$$\overline{BD} \cdot \overline{BD} = \overline{OD} \cdot \overline{FD}$$

Em que $\overline{BD}^2$ representa a média geométrica e $\overline{OD}$ é o raio do semicírculo ou a média aritmética, assim teremos que:

$$\overline{BD}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{FD} \Rightarrow a \cdot b = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{FD} \Rightarrow \overline{FD} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$$

Resulta que $\overline{FD}$ é a média Harmônica H de a e b, pois

$$\overline{FD} = \frac{2\,a\,.b}{a+b} \Rightarrow H = \frac{2\,a\,.b}{a+b} \Rightarrow H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

2.6 Representação da Média Quadrática

Agora iremos construir a representação da média quadrática, a partir do semicírculo construindo na representação da média aritmética, para isso, tracemos um segmento perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ passando pelo ponto *O*, marcando o ponto P como a interseção deste segmento com o semicírculo já construído.

Assim, o triângulo OPB é retângulo, de hipotenusa $\overline{BP}$ e catetos $\overline{OB}$ e $\overline{PB}$.

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2\ .\overline{OB}^2$$

Agora, pelas construções já realizadas, temos o segmento $\overline{OB}$ formado pela diferença dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{BC}$, em que $\overline{OC} = \frac{a+b}{2}$ e $\overline{BC} = b$. Assim teremos;

$$\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = \frac{a+b}{2} - b \quad \Rightarrow \overline{OB} = \frac{a-b}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo retângulo, onde obtemos:

$$BP^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$BP \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Resulta que $\overline{PB}$ é a média Quadrática Q de a e b, onde

$$\overline{PB} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

2.7 Geometria Computacional e Dinâmica

Segundo OLIVEIRA (2013) visando desenvolver e incentivar um processo de ensino-aprendizagem, cuja prática pedagógica seja subsidiada em metodologias distintas das tradicionais, o uso de computador no ensino de Matemática vem se difundindo consideravelmente nos últimos anos. Os softwares matemáticos atualmente ocupam um lugar relevante nos currículos de Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, as tecnologias em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas. A informática caracteriza o aprendizado como um processo de investigação, o que torna uma grande mudança de paradigma para a educação, com novos conceitos e estruturas a serem pensadas e trabalhadas.

> Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000c, p. 41).

Baseado no estudo de GIRALDO (2012) nessa perceptiva dos software matemáticos, os chamados ambientes de geometria dinâmica tem-se destacado muito no ensino de Matemática. A sua relevância está embasada no aspecto dinâmico do ambiente que permite realizar alterações em um elemento de uma construção geométrica reproduzida na tela do computador e observar as consequências nos demais elementos. Isto permite ao aluno investigar um grande número de situações e explorar conjecturas, constituindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática com o objetivo de validar ou não a matemática das construções. Além disso, esses ambientes permitem a abordagem do conceito de função através da exploração das relações de dependência funcional entre objetos de natureza geométrica (em geral área e comprimento), essas relações de dependência oferecem possibilidades de exploração pedagógica que podem ser muito enriquecedoras:

> É possível estudar comportamentos de funções diretamente por meio da dinâmica do ambiente, sem a mediação das representações usuais em sala de aula, especialmente a representação gráfica. Isto é, o comportamento da função ¸ao pode ser analisado ao se alterar um objeto no ambiente, e observar as consequentes alterações nos objetos que são dependentes deste. Assim, a própria dinâmica do ambiente converte-se em uma forma não convencional de representação. Além disso, pode-se ampliar o universo de funções familiares aos alunos, uma vez que são apresentados exemplos de funções cujos domínios ou contradomínios não são números, e sim conjuntos de objetos geométricos. Nos livros didáticos, em geral, a abordagem de funções tem início com a definição de função em contexto abstrato, como relação entre dois conjuntos genéricos. Entretanto, quase todos os exemplos que se seguem são de funções entre conjuntos numéricos. Desta forma, verifica-se uma lacuna brusca na abordagem - e a apresentação de exemplos de funções de outra natureza é importante para preenchê-la. Finalmente, como são construídas funções entre objetos geométricos, essas situações estabelecem uma articulação entre geometria e funções, campos da Matemática que quase sempre são abordados de forma dissociada no ensino básico. (GIRALDO, 2012, p.70).

3 RELAÇÕES ENTRE MÉDIAS NO SEMICÍRCULO

Diante disso, para compreensão dos objetos geométricos bem como de suas propriedades é necessário o conhecimento de métodos algébricos que possibilitem explicitar as diferentes relações entre as grandezas envolvidas na problemática deste projeto, com foco na abstração e fundamentação matemática das aplicações envolvidas.

Neste sentido, é interessante investigar, por exemplo, a existência de relações entre grandezas geométricas do triângulo e do círculo, comparando a partir da equação

$$Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \tag{6}$$

da média quadrática, representada pelo segmento $\overline{PB}$ na Figura 1, sua relação com as médias aritmética, geométrica e harmônica. Fixando a medida a e deixando a medida b variável em função das médias, isolamos esta variável em todas equações de médias, obtendo:

$$A = \frac{a + b}{2} \Rightarrow b = 2A - a \tag{7}$$

$$G = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow b = \frac{G^2}{a} \tag{8}$$

$$H = \frac{2ab}{a + b} \Rightarrow b = \frac{aH}{2a - H} \tag{9}$$

$$Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow b = \sqrt{2Q^2 - a^2} \tag{10}$$

Agora, podemos relacionar a equação (6) com a equação (7), substituindo a variável b por $2A - a$, de modo que

$$Q(A) = \sqrt{\frac{a^2 + (2A - a)^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + 4A^2 - 4Aa + a^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4A^2 - 4Aa + 2a^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot (2A^2 - 2Aa + a^2)}{2}} = \sqrt{a^2 - 2Aa + 2A^2}$$

Simplificando nossa equação, temos:

$$Q(A) = \sqrt{(a - A)^2 + a^2}. \tag{11}$$

Da mesma maneira, relacionando a equação (6) com as equações (8) e (9), obtemos respectivamente,

$$Q(G) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 + G^4}{2}}. \tag{12}$$

$$Q(H) = \frac{a}{2a - H}\sqrt{H^2 - 2Ha + 2a^2}. \tag{13}$$

Vamos agora relacionar a média aritmética, representada pelo segmento $\overline{AO}$ na Figura 1. Primeiramente relacionando com a média geométrica, a partir das equações (7) e (8),

$$A(G) = \frac{a + \left(\frac{G^2}{a}\right)}{2} = \frac{\frac{a + G^2}{a}}{2}$$

$$= \frac{a^2 + G^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{G^2}{2a}$$

Simplificando a nossa equação, temos:

$$A(G) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{G^2}{a}\right). \tag{14}$$

Da mesma maneira, associando a equação da média aritmética com as equações (10) e (9), obtemos respectivamente,

$$A(Q) = \frac{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}{2}. \tag{15}$$

$$A(H) = \frac{a^2}{2a-H}. \tag{16}$$

Da mesma forma, vamos agora relacionar a média geométrica, representada pelo segmento $\overline{BD}$ na Figura 1, com as seguintes equações (10), (7) e (9), obtemos respectivamente:

$$G(Q) = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{2Q^2 - a^2} \tag{17}$$

$$G(A) = \sqrt{2Aa - a^2} \tag{18}$$

$$G(H) = \sqrt{\frac{a^2 H}{2a-H}} \tag{19}$$

Resta agora relacionar a média harmônica, representada pelo segmento $\overline{PD}$ na Figura 1, com as equações (10), (7) e (8), então, dessas relações temos:

$$H(Q) = \frac{2a\sqrt{2Q^2 - a^2}}{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}. \tag{20}$$

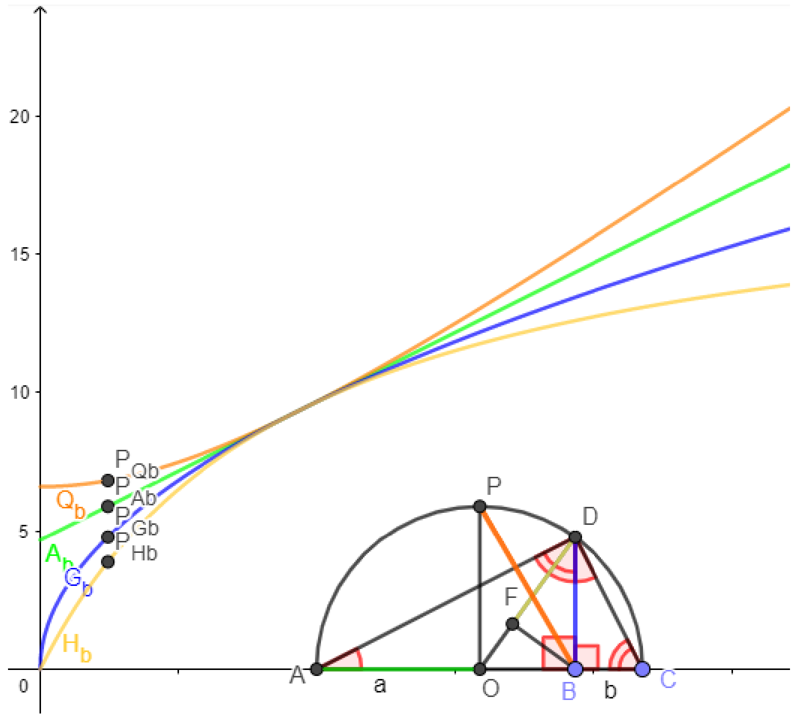
$$H(A) = 2a - \frac{a^2}{A}. \tag{21}$$

$$H(G) = \frac{2G^2}{a^2 + G^2}. \tag{22}$$

Na Figura 2 são apresentadas as funções médias dadas pelas equações (6) a (9) considerando *a* constante e *b* variável. As funções da média quadrática dependentes das outras médias são apresentadas na Figura 3, conforme equações (11) a (13). As funções da média aritmética dependentes das outras médias estão representadas na Figura 4, segundo equações (14) a (16). Na Figura 5 temos as funções da média geométrica dependentes das outras médias, de acordo com as equações (17) a (19). E na figura 6 está representada as funções da média harmônica segundo as equações (20) a (22).

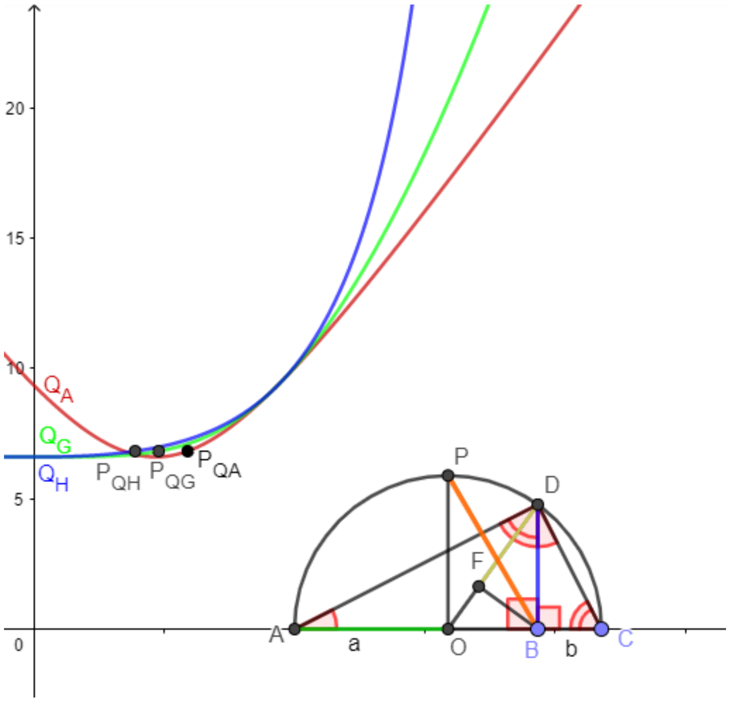
O semicírculo com variação interativa dos segmentos *a* e *b* (a partir dos pontos A, B e C), além da visualização de todas as funções abordadas, estão disponíveis no Objeto de Aprendizagem computacional dinâmico pelo link https://www.geogebra.org/classic/zpsu4dcx .

Figura 2 - Funções médias *Q(b), A(b), G(b) e H(b).*



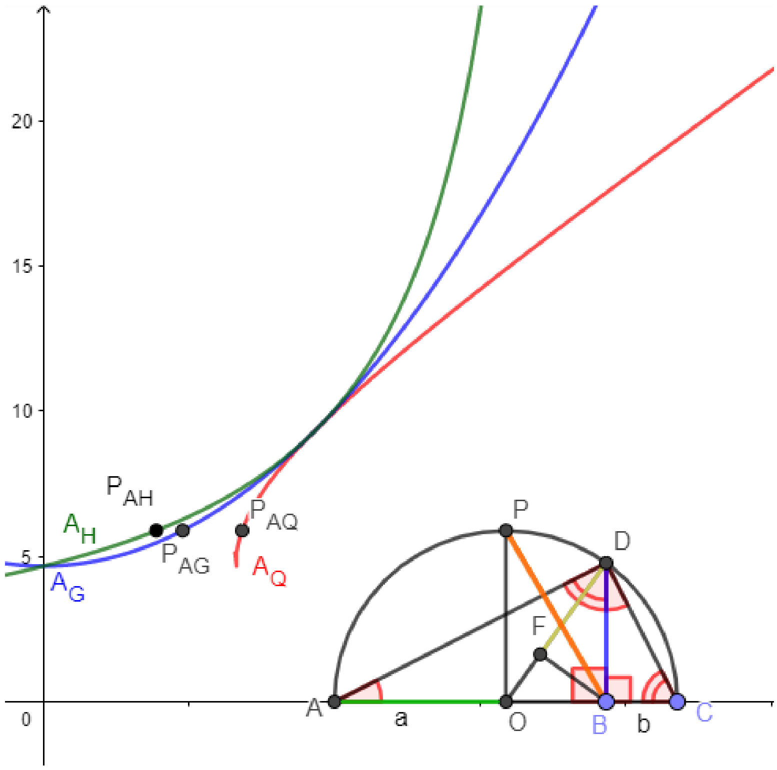
Fonte: Autoria própria.

Figura 3 - Funções da média quadrática em relação às outras médias.



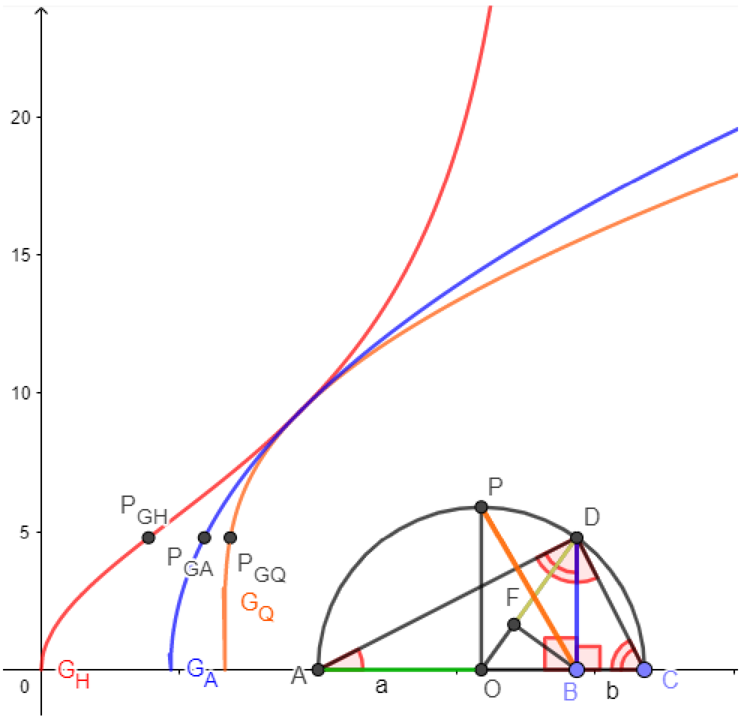
Fonte: Autoria própria.

Figura 4 - Funções da média aritméticas em relação às outras médias.



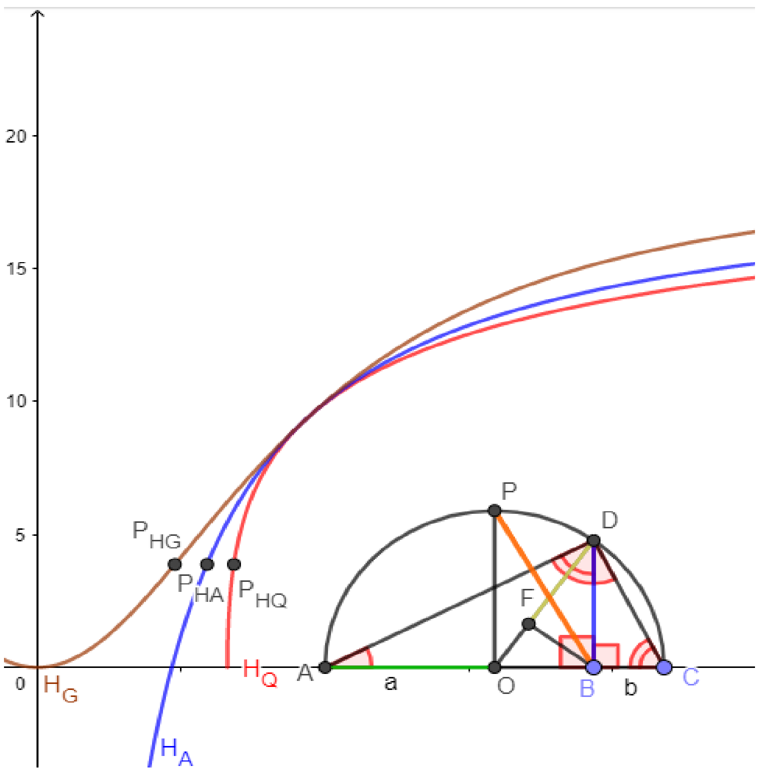
Fonte: Autoria própria.

Figura 5 - Funções da média geométrica em relação às outras médias.



Fonte: Autoria própria.

Figura 6 - Funções da média harmônica em relação às outras médias.



Fonte: Autoria própria.

4 ESTUDO DAS RELAÇÕES ENTRE MÉDIAS

Neste capítulo, vamos analisar as relações obtidas na seção anterior e verificar algebricamente as informações obtidas graficamente.

Iniciamos com a equação (11) que relaciona a média quadrática com a média aritmética, Figura 3. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $Q(A)$, o seu domínio. Assim,

$$(a - A)^2 + A^2 \geq 0 \iff 2A^2 - 2Aa + a^2 \geq 0.$$

Realizando o cálculo das raízes da equação $2A^2 - 2Aa + a^2$=0, obtemos

$$A = \frac{-(-2a) \pm \sqrt{-4a^2}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{2a \pm 2ai}{4}$$

$$A = \frac{2a + 2ai}{4} \qquad\qquad A = \frac{2a - 2ai}{4}$$

$$= \frac{2a\,(1+i)}{4} \qquad\qquad = \frac{2a\,(1-i)}{4}$$

$$A = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}i \qquad\qquad A = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}i$$

tendo como soluções $A = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}i$ e $A = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}i$.

Vejamos que essa equação não possui raízes reais, apenas raízes complexas, isso significa que a função nunca intercepta o eixo das abscissas. Além disso, como o coeficiente do termo quadrático da equação acima é positivo, conclui-se que o gráfico da função $f(A) = 2A^2 - 2Aa + a^2$ possui concavidade voltada para cima, logo $f(A) \geq 0$ para qualquer valor de A.

Portanto, como A representa uma média aritmética entre segmentos no semicírculo, Figura 1, assumiremos apenas valores estritamente maiores que 0, ou seja, o domínio de $Q(A)$ é dado pelo intervalo $(0, +\infty)$.

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{A \to \infty} \left(\sqrt{2A^2 - 2Aa + a^2} \right)$$

$$= \sqrt{\lim_{A \to \infty} \left(A^2 \left(2 - \frac{2a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right) \right)}$$

$$= \sqrt{\lim_{A\to\infty}(A^2)\lim_{A\to\infty}\left(2 - \frac{2a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right)}$$

$$= \infty$$

Analogamente, o limite de $Q(A)$, quando $A \to -\infty$, resulta em ∞. Então, podemos concluir que a equação $Q(A)$ não possui assíntotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $Q(A)$ é contínua no domínio considerado, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos da equação (11), então, derivando Q em termos de A, obtemos a partir da regra da cadeia,

$$Q(A) = \sqrt{(a - A)^2 + A^2}$$

$$Q'(A) = \frac{d}{dA}\left(\sqrt{2A^2 - 2Aa + a^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dA}(2A^2 - 2Aa + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(2A^2 - 2Aa + a^2)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dA}(2A^2 - 2Aa + a^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2A^2 - 2Aa + a^2}} \cdot (4A - 2a),$$

ou seja,

$$Q'(A) = \frac{2A-a}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}}. \qquad (23)$$

Então, analisando a equação $Q'(A) = 0$, vemos que

$$\frac{2A - a}{\sqrt{2A^2 - 2Aa + a^2}} = 0 \Leftrightarrow 2A - a = 0 \Leftrightarrow A = \frac{a}{2}$$

é o ponto crítico da equação. Note que este é o único ponto crítico, pois Q' sempre existe, já que $2A^2 - 2Aa + a^2 > 0$ em todo intervalo real.

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função $Q(A)$, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$Q'(A) > 0 \Leftrightarrow \frac{2A-a}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}} > 0 \qquad \Leftrightarrow A > \frac{a}{2}.$$

Analogamente, $Q'(A) < 0$ quando $A < \frac{a}{2}$. Então, podemos concluir que Q é decrescente a esquerda de $\frac{a}{2}$ e crescente à direita deste ponto, ou seja, $\frac{a}{2}$ é o ponto de mínimo de $Q(A)$, com valor mínimo $Q\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (Q_{A0} na Figura 7).

Agora, com o intuito de utilizar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de Q' em termos de A, a partir de (23) e da regra do quociente, obtemos

$$Q''(A) = \frac{d}{dA}\left(\frac{2A-a}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dA}(2A-a)\cdot\left(\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}\right) - (2A-a)\cdot\frac{d}{dA}\left(\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}\right)}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}^2}$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{2A^2-2Aa+a^2} - (2A-a)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}}\cdot(4A-2a)}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}^2}$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{2A^2-2Aa+a^2} - \frac{(2A-a)^2}{\sqrt{2A^2-2Aa+a^2}}}{2A^2-2Aa+a^2}$$

simplificando a expressão matemática, temos

$$Q''(A) = \frac{a^2}{(2A^2-2Aa+a^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{24}$$

Aplicando a equação $Q''(A)$ no ponto crítico $A = \frac{a}{2}$, concluímos

$$Q''(A) = \frac{a^2}{(2A^2-2Aa+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q''\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{\left(2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)a + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

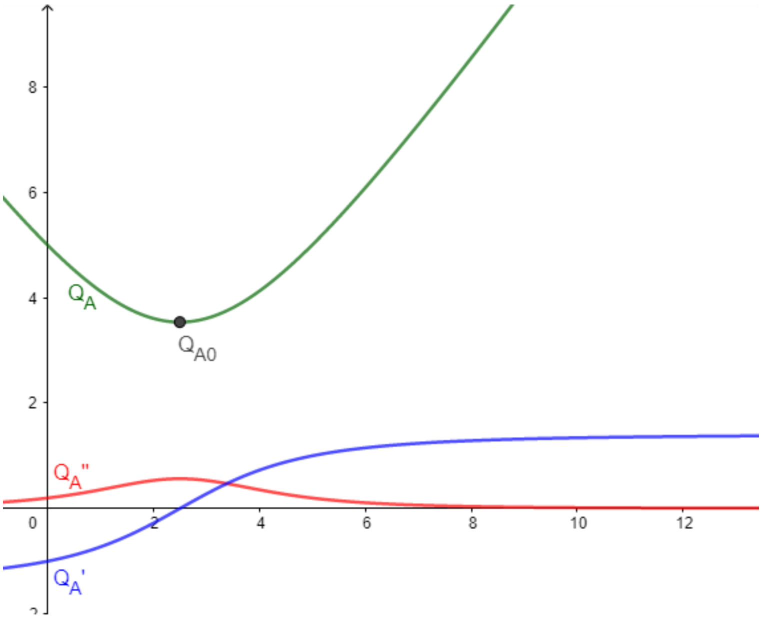
$$= \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{2} - a^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{a} > 0,$$

pois a é a medida de um segmento. Portanto, o teste da segunda derivada confirma que $\frac{a}{2}$ é o ponto de mínimo da função $Q(A)$. Ainda, como pela equação (24), $Q''(A) > 0$, a concavidade de $Q(A)$ é voltada para cima. Na Figura 7 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/yf9u2gwu.

Figura 7 - Funções *Q(A), Q'(A) e Q''(A)* para a constante *a=5.*



Fonte: Autoria própria

Agora iremos analisar a equação (12) que relaciona a média quadrática com a média geométrica, Figura 3. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $Q(G)$, o seu domínio. Assim,

$$\frac{a^4 + G^4}{2} \geq 0 \iff a^4 + G^4 \geq 0 \iff G^4 \geq -a^4 \iff G^4 \geq 0,$$

já que $-a^4 \leq 0$. Ora, mas $G^4 \geq 0$ seja qual for o valor real de G. Portanto, como G representa uma média geométrica entre segmentos no semicírculo, Figura 1, assumiremos apenas valores estritamente maiores que 0, ou seja o domínio de $Q(G)$ é dado pelo intervalo (0,+∞).

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{G \to \infty} \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 + G^4}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \lim_{G \to \infty} \left(\sqrt{\frac{a^4 + G^4}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\lim_{G \to \infty} \left(\frac{a^4 + G^4}{2} \right)}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \lim_{G \to \infty} (a^4 + G^4)}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(a^4 + \lim_{G \to \infty} (G^4) \right)}$$

$$= \infty$$

Analogamente, o limite de $Q(G)$, quando $A \to -\infty$, resulta em ∞. Então, podemos concluir que a equação $Q(G)$não possui assíntotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $Q(G)$ é contínua no domínio considerado, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos de (12), então, derivando Q em termos de G, obtemos a partir da regra da cadeia

$$Q(G) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{G^4 + a^4}{2}}$$

$$Q'(G) = \frac{d}{dG} \left(\frac{\sqrt{G^4 + a^4}}{a\sqrt{2}} \right)$$

$$Q'(G) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dh} \left(\sqrt{G^4 + a^4} \right) \cdot \frac{d}{dG} (G^4 + a^4)$$

$$Q'(G) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{4G^3}{2\sqrt{G^4 + a^4}}$$

ou seja,

$$Q'(G) = \frac{2G^3}{a\sqrt{2G^4 + 2a^4}} . \qquad (25)$$

Então, analisando a equação $Q'(G) = 0$, vemos que

$$\frac{2G^3}{a\sqrt{2G^4 + 2a^4}} = 0 \Leftrightarrow G = 0$$

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função *Q(G)*, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$Q'(G) > 0 \Leftrightarrow \frac{2G^3}{a\sqrt{2G^4+2a^4}} > 0 \Leftrightarrow 2G^3 > 0 \Leftrightarrow G > 0.$$

Analogamente, $Q'(G) < 0$ quando $G < 0$. Então, podemos concluir que Q é decrescente a esquerda de 0 e crescente à direita deste ponto. Porém em nosso problema geométrico, G é estritamente positivo por se tratar da média geométrica, ou seja, o ponto $G = 0$ não está no domínio considerado, portanto não podemos falar em mínimo $Q(G)$.

Agora, com o intuito de aplicar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de Q' em termos de G, a partir de (25), aplicando a regra do quociente, obtemos

$$Q''(G) = \frac{d}{dG}\left(\frac{2G^3}{a\sqrt{G^4+a^4}}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dG}(2G^3)\cdot\left(a\sqrt{2G^4+a^4}\right) - (2G^3)\cdot\frac{d}{dG}\left(a\sqrt{2G^4+a^4}\right)}{\left(a\sqrt{2G^4+a^4}\right)^2}$$

$$= \frac{6G^2\cdot\left(a\sqrt{2G^4+a^4}\right) - (2G^3)\cdot\left(a\frac{1}{2\sqrt{2G^4+a^4}}\cdot 8G^3\right)}{\left(a\sqrt{2G^4+a^4}\right)^2}$$

simplificando a equação, temos

$$Q''(G) = \frac{2G^6+6G^2a^4}{\sqrt{2G^4+2a^4}\cdot(G^4+a^4)\cdot a}. \qquad (26)$$

Aplicando a equação $Q''(G)$ no ponto crítico G=0, concluímos

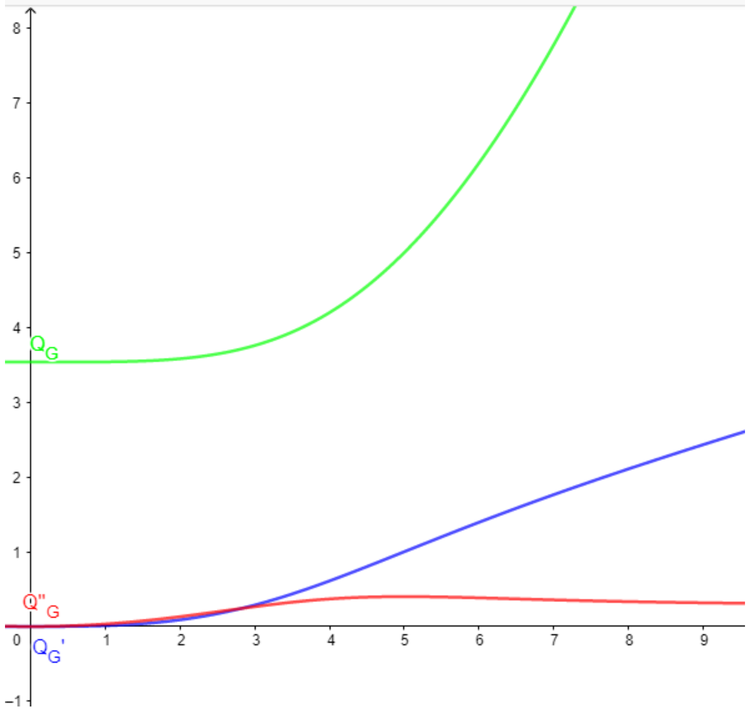
$$Q''(G) = \frac{2G^6+6G^2a^4}{\sqrt{2G^4+a^4}\cdot(G^4+a^4)\cdot a}$$

$$Q''(0) = \frac{2\cdot 0^6+6\cdot 0^2a^4}{a^5\sqrt{a^4}}$$

$$Q''(0) = 0$$

e, portanto, o teste da segunda derivada é inconclusivo. Porém, analisando a equação (26), percebemos que $Q''(G) > 0$ para $G \neq 0$ e, portanto, a concavidade de $Q(G)$ é voltada para cima. Na Figura 8 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para a=5. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de *a*, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/yf9u2gwu .

Figura 8 - Funções *Q(G), Q'(G) e Q''(G)* para a constante *a=5*.



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar a equação (13) que relaciona a média quadrática com a média harmônica, Figura 3. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $Q(H)$, o seu domínio. Assim, considerando a expressão da função $Q(H)$, precisamos analisar dois pontos, o primeiro quando $2a - H > 0$ e o segundo quando $H^2 - 2Ha + 2a^2 \geq 0$.

Dessa forma,

$$2a - H > 0 \Leftrightarrow H < 2a.$$

Agora, analisando a equação do segundo grau $H^2 - 2Ha + 2a = 0$, temos que

$$H = \frac{2a \pm \sqrt{-4a^2}}{2} = \frac{2a \pm 2ai}{2}$$

$$H_1 = \frac{2a + 2ai}{2} = \frac{2a\,(1+1)}{2} = a + ai \qquad \text{e} \qquad H_2 = \frac{2a - 2ai}{2} = \frac{2a\,(1-1)}{2} = a - ai.$$

Então, da mesma forma que para a função $Q(H)$, essa equação não possui raízes reais e como o coeficiente do termo quadrático da equação acima é positivo, conclui-se que $H^2 - 2Ha + 2a^2 \geq 0$ para qualquer valor de H.

Portanto, o domínio da função $Q(H)$ é dado $(0, 2a)$.

Com relação às assíntotas, como estamos considerando $Q(H)$ no domínio limitado $(0, 2a)$ não teremos assíntotas horizontais. No entanto, se desconsiderarmos a interpretação geométrica, iríamos obter para a função $Q(H)$ duas assíntotas horizontais $y = \pm a$.

Agora, podemos observar que temos uma descontinuidade em $H = 2a$. Vamos verificar se nessa descontinuidade há uma assíntota vertical calculando

$$\begin{aligned} &\lim_{H \to 2a^-} \left(\frac{a}{2a - H} \sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} \right) \\ &= \lim_{H \to 2a^-} \left(\frac{a}{2a - H} \right) \lim_{H \to 2a^-} \left(\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} \right) \\ &= \lim_{H \to 2a^-} \left(\frac{a}{2a - 2a} \sqrt{(2\mathrm{a})^2 - 2(2\mathrm{a})\mathrm{a} + 2\mathrm{a}^2} \right) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Então, podemos concluir que a equação $Q(H)$ possui uma assíntota vertical dada pela reta $x = 2a$.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos de (13), então, derivando Q em termos de H, obtemos a partir das regras do produto e quociente

$$\begin{aligned} Q(H) &= \left(\frac{a}{2a - H} \sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} \right) \\ Q'(H) &= \frac{d}{dH} \left(\frac{a}{2a - H} \sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} \right) \\ &= \frac{d}{dH} \left(\frac{a}{2a - H} \right) \cdot \sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} + \frac{a}{2a - H} \cdot \frac{d}{dH} \left(\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} \right) \\ &= \frac{a\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}}{(2a - H)^2} \cdot \frac{2(Ha - a^2)}{2(2a - H)\left(\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2} \right)} \end{aligned}$$

simplificando nossa equação, temos

$$Q'(H) = \frac{Ha^2}{\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a - H)^2}. \tag{27}$$

Então, analisando a equação $Q'(H) = 0$ vemos que

$$\frac{Ha^2}{\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a - H)^2} = 0 \Leftrightarrow H = 0$$

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função $Q(H)$, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$Q'(H) > 0 \Leftrightarrow \frac{Ha^2}{\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a - H)^2} > 0 \Leftrightarrow H > 0$$

Analogamente, $Q'(H) < 0$ quando $H < 0$. Então, podemos concluir que Q é decrescente a esquerda de 0 e crescente à direita deste ponto. Porém, em nosso problema geométrico, Q é estritamente positivo por se tratar da média quadrática, ou seja, o ponto $H = 0$ não está no domínio considerado, portanto não podemos falar em mínimo $Q(H)$.

Agora, com o intuito de aplicar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de Q' em termos de H, a partir da equação (27) e aplicando a regra do quociente, obtemos

$$\mathrm{Q''(H)}=\frac{d}{dG}\left(\frac{Ha^2}{\sqrt{\mathrm{H}^2-2\mathrm{Ha}+2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dH}(Ha^2)\cdot\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2 - Ha^2\cdot\frac{d}{dH}\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2}{\left(\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2\right)^2}$$

$$= \frac{a^2\cdot\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2 - Ha^2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}}\cdot(2a-2H)\cdot(2a-H)^2 + \sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2(-1)\right)}{\left(\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}(2a-H)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-6H^2a^2 + 8a^6 + 7H^3a^3 - 4Ha^5 - 2H^4a^2}{\sqrt{\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2\mathrm{a}^2}\cdot(\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2a^2)(2a-H)^4}$$

simplificando a expressão matemática, temos

$$Q''(H) = \frac{a^2(2H^3 - 3aH^2 + 4a^3)}{(2a-H)^3(\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{28}$$

Aplicando a equação $Q''(H)$ no ponto crítico $H = 0$, concluímos

$$Q''(H) = \frac{a^2(2H^3 - 3aH^2 + 4a^3)}{(2a-H)^3(\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{Ha} + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

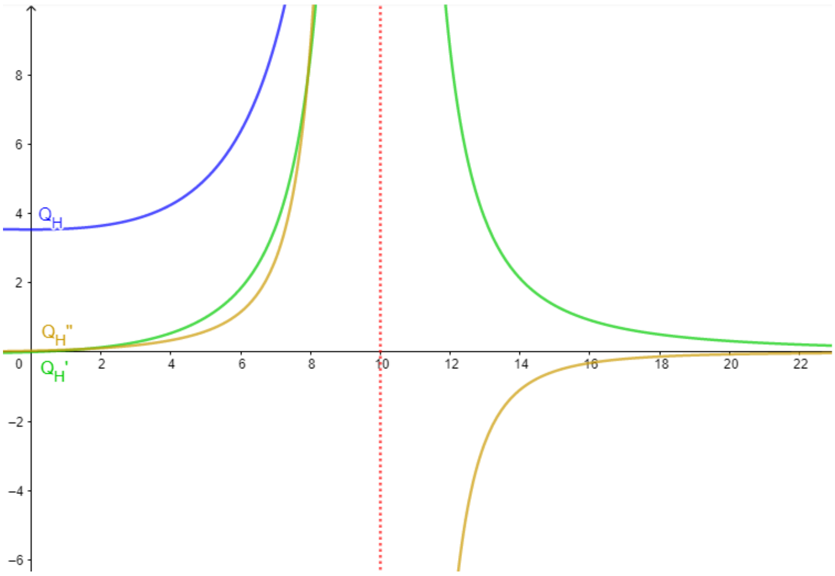
$$Q''(0) = \frac{a^2(2(0)^3 - 3a(0)^2 + 4a^3)}{(2a-0)^3(0^2 - 2(0)\mathrm{a} + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$= \frac{a^2(4a^3)}{(2a)(2a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} > 0$$

pois a é a medida de um segmento. Portanto, o teste da segunda derivada confirma que 0 é o ponto de mínimo da função $Q(H)$. Ainda, como pela equação (28), $Q''(H) > 0$, a concavidade de $Q(H)$ é voltada para cima. Na Figura 9 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para a=5. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de *a*, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/yaakgqgf .

Figura 9 - *Funções Q(H), Q'(H) e Q''(H)* para a constante *a=5*.



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar as equações de (14) a (16) que relacionam a média aritmética com as demais médias conforme a Figura 4. Primeiro vamos abordar a equação (14) que relaciona a média aritmética com a média geométrica. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $A(G)$, o seu domínio. Claramente, como G representa uma média geométrica entre segmentos no semicírculo, Figura 1, o domínio de $A(G)$ é dado pelo intervalo $(0, +\infty)$.

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{G\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{G^2}{a}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{G\to\infty}(a)+\lim_{G\to\infty}\left(\frac{G^2}{a}\right)\right)$$

$$=\infty.$$

Analogamente, o limite de $A(G)$, quando $G\to-\infty$, resulta em ∞. Então, podemos concluir que a equação $A(G)$ não possui assíntotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $A(G)$ é um polinômio, portanto, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos de (14), então, derivando A em termos de G, obtemos

$$A(G) = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{G^2}{a}\right)$$

$$A'(G) = \frac{d}{dG}\left(\frac{a}{2} + \frac{G^2}{a}\right)$$

$$= \frac{d}{dG}\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{d}{dG}\left(\frac{G^2}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot 2G$$

ou seja,

$$A'(G) = \frac{G}{a}. \tag{29}$$

Então, analisando a equação $A'(G) = 0$, vemos que

$$\frac{G}{a} = 0 \Leftrightarrow G = 0$$

é o ponto crítico da função.

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função A(G), aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$A'(G) > 0 \Leftrightarrow \frac{G}{a} > 0 \ \Leftrightarrow G > 0.$$

Analogamente, $A'(G) < 0$ quando $G < 0$. Então, podemos concluir que A é decrescente a esquerda de 0 e crescente à direita deste ponto. Porém, em nosso problema geométrico, G é estritamente positivo por se tratar da média geométrica, ou seja, o ponto $G = 0$ não está no domínio considerado, portanto não podemos falar em mínimo de $A(G)$.

Agora, com o intuito de utilizar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de A' em termos de G, a partir da (29), obtemos

$$A''(G) = \frac{d}{dG}\left(\frac{G}{a}\right)$$

$$A''(G) = \frac{1}{a}. \tag{30}$$

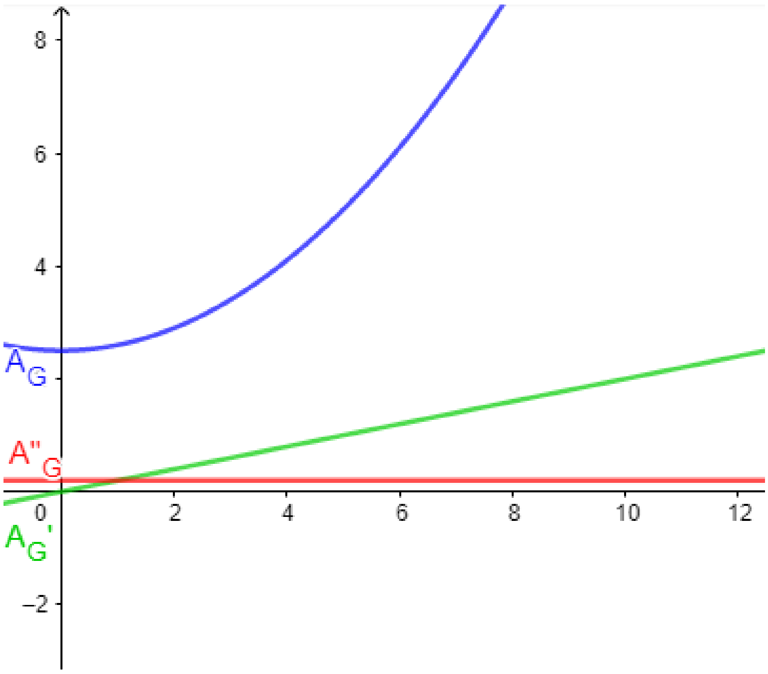
Aplicando a equação $A''(G)$ no ponto crítico $G = 0$, concluímos

$$A''(G) = \frac{1}{a}.$$

$$= \frac{1}{a} > 0$$

Pois a é a medida de um segmento. Portanto, o teste da segunda derivada confirmaria que 0 é o ponto de mínimo da função $A(G)$ caso estivéssemos olhando apenas para a função $A(G)$ sem o conceito geométrico. Ainda, analisando a equação (30), percebemos que $A''(G) > 0$ para quaisquer valores de G e, portanto, a concavidade de $A(G)$ é voltada para cima. Na Figura 10 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para a=5. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/dgh8652z .

Figura 10 - Funções *A(G), A'(G) e A''(G)* para a constante *a=5.*



Fonte: Autoria própria.

Na sequência iremos analisar a equação (15) que relaciona a média aritmética com a média quadrática. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $A(Q)$, o seu domínio. Assim, vamos analisar a seguinte inequação

$$2Q^2 - a^2 \geq 0$$

Para tanto, buscando as raízes da equação $2Q^2 - a^2 = 0$, obtemos $Q = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

Agora, observando que o coeficiente da variável quadrática da equação é positivo, a inequação acima se verifica na reunião de intervalos $\left(-\infty, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right] \cup [\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Portanto, como Q representa uma média quadrática entre segmentos no semicírculo, Figura 1, vamos considerar como domínio o intervalo $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{Q\to\infty}\left(\frac{a+\sqrt{2Q^2-a^2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{Q\to\infty}\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{Q\to\infty}(a) + \lim_{Q\to\infty}\left(\sqrt{2Q^2-a^2}\right)$$

$$= \infty.$$

Analogamente, o limite de $A(Q)$, quando $Q \to -\infty$, resulta em ∞. Então, podemos concluir que a equação $A(Q)$ não possui assíntotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $A(Q)$ é contínua no domínio considerado e definida no extremo inferior $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos da equação (15). Então, derivando A em termos de Q, obtemos a partir da regra da cadeia

$$A(Q) = \frac{a+\sqrt{2Q^2-a^2}}{2}$$

$$A'(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{a+\sqrt{2Q^2-a^2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{dQ}(a) + \frac{d}{dQ}\left(\sqrt{2Q^2-a^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2Q^2-a^2}}\cdot\frac{d}{dQ}(2Q^2-a^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2Q^2-a^2}}\cdot 4Q$$

ou seja,

$$A'(Q) = \frac{Q}{\sqrt{2Q^2 - a^2}}. \tag{31}$$

Então, analisando a equação $A'(Q) = 0$, vemos que ela não possui solução pois pelo domínio observado acima $Q > \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Além disso, $A'(Q)$ não existe quando $2Q^2 - a^2 \leq 0$. No entanto, considerando o domínio de $A(Q)$, é suficiente considerar quando $2Q^2 - a^2 = 0$, ou seja, $A'(Q)$ não existe quando $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Logo $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, é o ponto crítico da equação (15).

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função $A'(Q)$, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$A'(Q) > 0 \Leftrightarrow \frac{Q}{\sqrt{Q^2 - a^2}} > 0 \Leftrightarrow Q > 0.$$

Portanto, como $Q \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ segue que $A'(Q) > 0$ e, assim, $A(Q)$ é crescente em todo o domínio $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\infty)$. Temos então como mínimo $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a}{2}$.

Agora, com o intuito de utilizar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de A' em termos de Q, a partir de (31), aplicando a regra do quociente, obtemos

$$A''(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q}{\sqrt{2Q^2 - a^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dQ}(Q) \cdot \sqrt{2Q^2 - a^2} - Q \cdot \frac{d}{dQ}\left(\sqrt{2Q^2 - a^2}\right)}{\left(\sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{2Q^2 - a^2} - Q \cdot \frac{1}{2\left(\sqrt{2Q^2 - a^2}\right)} \cdot 4Q}{2Q^2 - a^2}$$

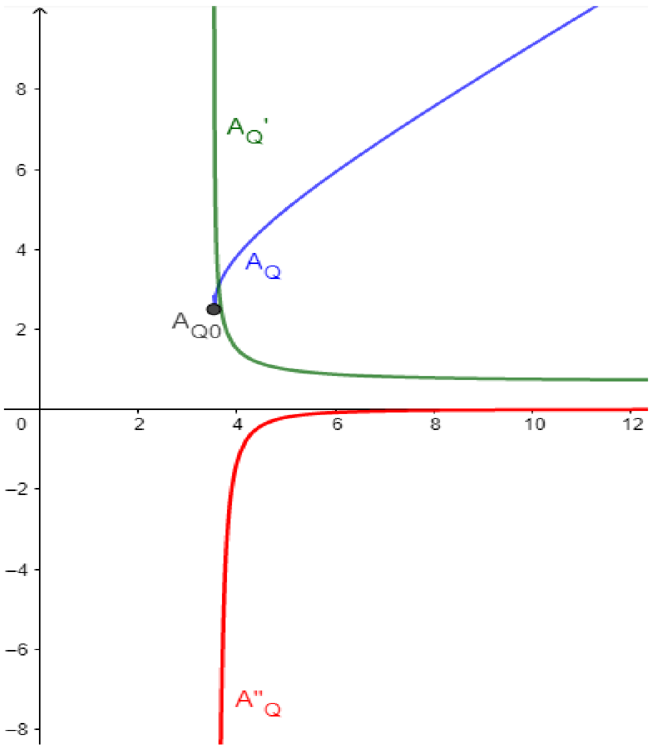
$$= \frac{\sqrt{2Q^2 - a^2} - \frac{2Q}{\sqrt{2Q^2 - a^2}}}{2Q^2 - a^2}$$

simplificando a expressão matemática

$$A''(Q) = -\frac{a^2}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{32}$$

Avaliando o sinal de $A''(Q)$, observa-se que $A''(Q) < 0$ para todo o domínio, e portanto a concavidade de $A(Q)$ é voltada para baixo. Na Figura 11 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/dgh8652z .

Figura 11 - Funções *A(Q), A'(Q) e A''(Q)* para a constante *a=5.*



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar a equação (16) que relaciona a média aritmética com a média harmônica, Figura 4. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $A(H)$, o seu domínio. Assim, considerando a expressão da função $A(H)$, precisamos analisar apenas quando $2a - H > 0$.

Dessa forma,

$$2a - H > 0 \Leftrightarrow H < 2a.$$

Portanto, considerando que estamos em um problema geométrico, o domínio de $A(H)$ é dado por $(0, 2a)$.

Com relação às assíntotas, como estamos considerando $A(H)$ no domínio limitado $(0, 2a)$ não teremos assíntotas horizontais. No entanto, se desconsiderarmos a interpretação geométrica, iríamos obter para a função *A(H)* uma assíntota horizontal $y = 0$.

Agora em relação às assíntotas verticais, podemos observar que temos uma descontinuidade em $H = 2a$. Vamos verificar se nessa descontinuidade há uma assíntota vertical calculando

$$\lim_{H \to 2a^-} \left(\frac{a^2}{2a - H} \right)$$

$$= \infty$$

Então, podemos concluir que a equação $A(H)$ possui assíntota vertical dada pela reta $x = 2a$.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos de (16), vemos que, derivando *A* em termos de *H*, obtemos

$$A(H) = \frac{a^2}{2a - H}$$

$$A'(H) = \frac{d}{dH}\left(\frac{a^2}{2a - H} \right)$$

$$= -a^2 \cdot \frac{\frac{d}{dH}(2a - H)}{(2a - H)^2}$$

$$= -a^2 \cdot \frac{-1}{(2a - H)^2}$$

ou seja,

$$A'(H) = \frac{a^2}{(2a-H)^2}\,. \tag{33}$$

Então, analisando a equação (33), percebemos que $A'(H)$ nunca se anula, seja qual for o valor de H no domínio de $A(H)$. Além disso, $A'(H)$ não existe para $H = 2a$ como já observamos para $A(H)$. Logo, não temos pontos críticos para $A(H)$, pois como $H = 2a$ é uma assíntota vertical para $A(H)$, não está no domínio de $A(H)$.

Com relação ao crescimento e decrescimento da função $A(H)$, podemos observar pela equação (33) que $A(H)$ é sempre crescente, já que $A'(H)$ é positiva.

Agora, com relação a concavidade da função $A(H)$, vamos analisar o sinal da sua segunda derivada. Calculando a derivada de A' em termos de H, a partir da (33) e da regra da cadeia, obtemos

$$A''(H) = \frac{d}{dH}\left(\frac{a^2}{(2a-H)^2}\right)$$

$$= -a^2 \cdot \frac{\frac{d}{dH}[(2a-H)^2]}{[(2a-H)^2]^2}$$

$$= -a^2 \cdot \frac{[2(2a-H)]\cdot(-1)}{(2a-H)^4}$$

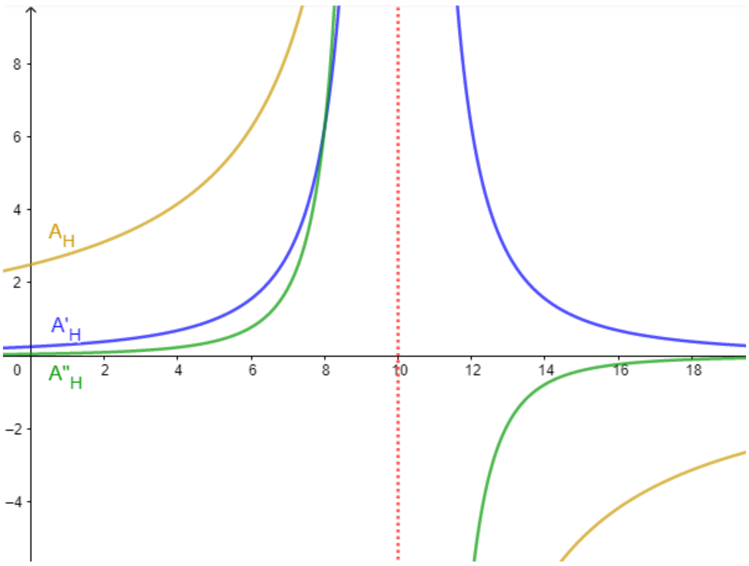
$$A''(H) = \frac{2a^2}{(2a-H)^3}. \quad (34)$$

Então, resolvendo as inequações quociente

$$\frac{2a^2}{(2a-H)^3} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{2a^2}{(2a-H)^3} < 0,$$

podemos concluir que $A''(H) > 0$ quando $H < 2a$ e $A''(H) < 0$ quando $H > 2a$, ou seja, A possui concavidade voltada para cima no intervalo $(0, 2a)$ e voltada para baixo no intervalo $(2a, +\infty)$. Na Figura 12 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para a=5. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/dgh8652z .

Figura 12 - Funções *A(H), A'(H) e A''(H)* para a constante a=5.



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar as equações de (17) a (19) que relacionam a média geométrica com as demais médias conforme a Figura 5. Primeiro vamos abordar a equação (17) que relaciona a média geométrica com a média quadrática. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função *G(Q)*, o seu domínio. Precisamos analisar dois pontos, o primeiro $\sqrt{a} > 0$ e o segundo quando $2Q^2 - a^2 > 0$.

Dessa forma,

$$a > 0$$

e analisando a equação do segundo grau, temos que

$$2Q^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow Q = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

$$Q_1 = -\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{-a\sqrt{2}}{2}\ \{a > 0\} \text{ e } Q_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\ \{a > 0\}$$

Agora, observando que o coeficiente da variável quadrática da equação é positivo, a inequação acima se verifica na união de intervalos$\left(-\infty, \frac{-a\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Portanto, como Q representa uma média quadrática entre segmentos no semicírculo, Figura 1, vamos considerar como domínio o intervalo $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, com $a \geq 0$.

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{Q\to\infty}\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{2Q^2 - a^2}\right)$$

$$= \sqrt{a}\cdot\lim_{Q\to\infty}\left(\sqrt[4]{2Q^2 - a^2}\right)$$

$$= \sqrt{a}\cdot\left(\sqrt[4]{\lim_{Q\to\infty}(2Q^2 - a^2)}\right)$$

$$= \infty.$$

Então, podemos concluir que a equação $G(Q)$ não possui assíntotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $G(Q)$ é contínua no domínio considerado, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos de (17), então, derivando G em termos de Q, a partir da regra da cadeia, obtemos

$$G(Q) = \sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{2Q^2 - a^2}$$

$$G'(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{2Q^2 - a^2}\right)$$

$$= \sqrt{a} \cdot \frac{d}{dQ}(2Q^2 - a^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{a} \cdot \frac{1}{4}(2Q^2 - a^2)^{\frac{-3}{4}} \cdot \frac{d}{dQ}(2Q^2 - a^2)$$

$$= \sqrt{a} \cdot \frac{1}{4}(2Q^2 - a^2)^{\frac{-3}{4}} \cdot 4Q$$

Reescrevendo a expressão matemática acima,

$$G'(Q) = \frac{Q\sqrt{a}}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}}. \qquad (35)$$

Então, analisando a equação $G'(Q) = 0$ vemos que

$$\frac{Q\sqrt{a}}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}} = 0 \Leftrightarrow Q = 0$$

que é um ponto fora do domínio considerado. Além disso, $G'(Q)$ não existe quando $2Q^2 - a^2 = 0$, ou seja, quando $Q = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, que são pontos que também não pertencem ao domínio de $G(Q)$ devido a interpretação geométrica do nosso problema. Portanto, não temos pontos críticos neste caso.

No entanto, cabe ressaltar que se não estivéssemos excluindo os pontos em que $G(Q) = 0$, então $Q = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$ seriam pontos críticos da função $G(Q)$.

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função $G(Q)$, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$G'(Q) > 0 \Leftrightarrow \frac{Q\sqrt{a}}{\left(2Q^2 - a^2\right)^{\frac{3}{4}}} > 0 \Leftrightarrow Q > 0.$$

Então, podemos concluir que $G(Q)$ é crescente no intervalo $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Analogamente se estivéssemos considerando $G(Q)$ sem a interpretação geométrica, teríamos $G'(Q) < 0$ quando $Q < 0$ e, portanto, $G(Q)$ seria decrescente em $\left(-\infty, \frac{-a\sqrt{2}}{2}\right)$. Nestes casos, $Q = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$ seriam pontos de mínimo de $G(Q)$.

Agora, com o intuito de utilizar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de G' em termos de Q, a partir da (35), obtemos

$$G''(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q\sqrt{a}}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}}\right)$$

$$= \sqrt{a} \cdot \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}}\right)$$

$$= \sqrt{a} \cdot \left(\frac{\frac{d}{dQ}(Q) \cdot (2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}} - \frac{d}{dQ}(2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}} \cdot Q}{\left((2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}\right)^2}\right)$$

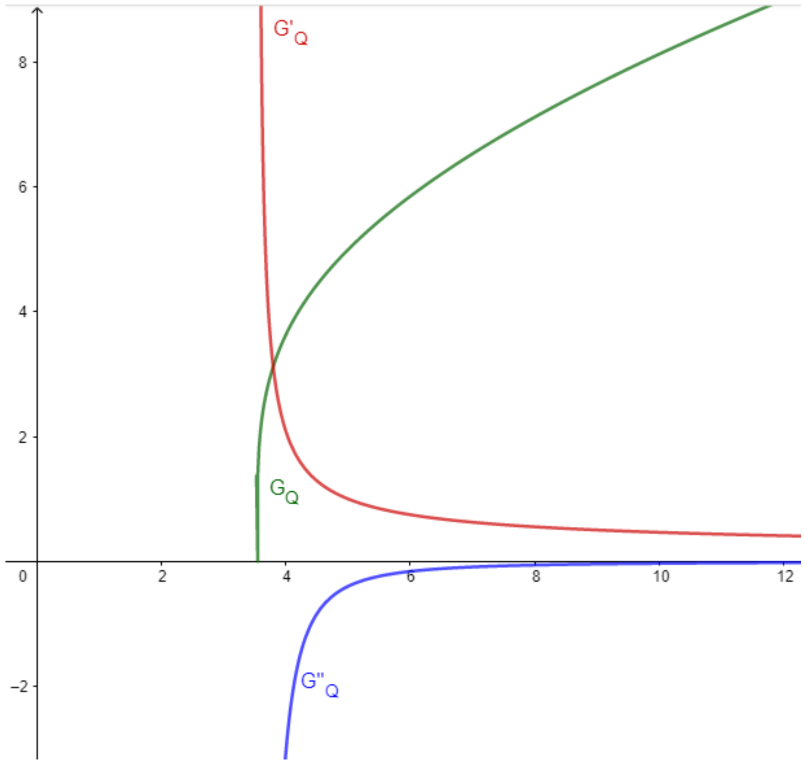
$$= \sqrt{a} \cdot \left[\frac{1 \cdot (2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}} - \frac{3Q}{(2Q^2 - a^2)^{\frac{1}{4}}}}{\left((2Q^2 - a^2)^{\frac{3}{4}}\right)^2}\right]$$

ou seja,

$$G''(Q) = \frac{-\sqrt{a}(Q^2+a^2)}{(2Q^2-a^2)^{\frac{7}{4}}}. \tag{36}$$

Dessa forma, $G''(Q) < 0$ e, portanto a concavidade de *G(A)* é voltada para baixo. Na Figura 13 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para a=5. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de *a*, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/jjhghvwu .

Figura 13 - Funções *G(Q), G'(Q) e G''(Q)* para a constante *a=5.*



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar a equação (18) que relaciona a média geométrica com a média aritmética, Figura 5. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função *G(A)*, o seu domínio. Assim, considerando a expressão da função $G(A)$, precisamos analisar apenas quando $2Aa - a^2 \geq 0$. Então, como $a > 0$,

$$2Aa - a^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2Aa \geq a^2$$
$$\Leftrightarrow A \geq \frac{a}{2}.$$

Portanto, como *G* representa uma média quadrática entre segmentos no semicírculo, Figura 1, vamos considerar como domínio o intervalo $(\frac{a}{2}, +\infty)$.

Com relação à assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{A\to\infty}\left(\sqrt{2Aa - a^2}\right)$$
$$= \sqrt{\lim_{A\to\infty} 2Aa - a^2}$$
$$= \sqrt{\lim_{A\to\infty}(2Aa) - \lim_{A\to\infty}(a^2)}$$
$$= \infty.$$

Então, considerando o domínio de $G(A)$ e o cálculo acima, podemos concluir que a equação $G(A)$ não possui assíntotas horizontais. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $G(A)$ é contínua no domínio considerado, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a investigar os pontos críticos da equação (18). Assim, derivando G em termos de A, obtemos a partir da regra da cadeia,

$$G(A) = \sqrt{2Aa - a^2}$$
$$G'(A) = \frac{d}{dA}\left(\sqrt{2Aa - a^2}\right)$$
$$= \frac{d}{dA}(2Aa - a^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}(2Aa - a^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{d}{dA}(2Aa - a^2)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2Aa - a^2}} \cdot 2a$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2Aa\ - a^2}}$$

Racionalizando a expressão matemática,

$$G'(A) = \frac{\sqrt{2Aa - a^2}}{2A - a}. \tag{37}$$

Então, analisando a equação $G'(A) = 0$, vemos

$$\frac{\sqrt{2Aa - a^2}}{2A - a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2Aa\ - a^2} = 0\ \Leftrightarrow A = \frac{a}{2}.$$

Como $A = \frac{a}{2}$ não está no domínio considerado, não podemos tê-lo como candidato a mínimo ou máximo local. Dessa forma, não temos pontos críticos para $G(A)$. Cabe ressaltar que se estivéssemos trabalhando com $G(A)$ sem a interpretação geométrica, então teríamos $A = \frac{a}{2}$ no domínio e a análise mudaria.

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função $G(A)$, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$G'(A) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2Aa\ - a^2}}{2A - a} > 0\ \Leftrightarrow A > \frac{a}{2}.$$

Então, podemos concluir que G é crescente no intervalo $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$. Novamente, se estivéssemos abordando $G(A)$ sem a interpretação geométrica, poderíamos concluir que $\frac{a}{2}$ seria um ponto de mínimo de $G(A)$, com valor mínimo $G\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ (G_{A0} na Figura 14).

Agora, com o intuito de utilizar o teste da segunda derivada para analisar a concavidade da função $G(A)$, calculando a derivada de G' em termos de A, a partir de (37) e da regra do quociente, obtemos

$$G''(A) = \frac{d}{dA}\left(\frac{\sqrt{2Aa\ - a^2}}{2A - a}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dA}\left(\sqrt{2Aa\ - a^2}\right) \cdot (2A - a) - \left(\sqrt{2Aa\ - a^2}\right)\frac{d}{dA}(2A - a)}{(2A - a)^2}$$

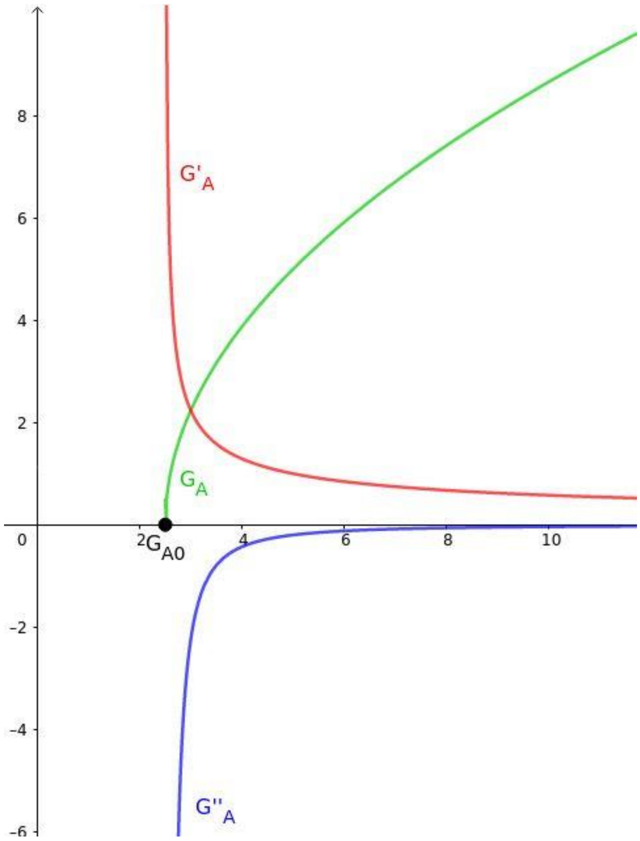
$$= \frac{\frac{a}{\sqrt{2Aa\ - a^2}} \cdot (2A - a) - \left(\sqrt{2Aa\ - a^2}\right) \cdot 2}{(2A - a)^2}$$

Simplificando a expressão matemática, temos

$$G''(A) = -\frac{\sqrt{2Aa - a^2}}{(2A-a)^2}. \quad (38)$$

Portanto, como pela equação (38), $G''(A) < 0$, a concavidade de $G(A)$ é voltada para baixo. Na Figura 14 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para a=5. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/jjhghvwu .

Figura 14 - Funções *G(A), G'(A) e G''(A)* para a constante *a=5.*



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar a equação (19) que relaciona a média geométrica com a média harmônica, Figura 5. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $G(H)$, o seu domínio. Assim, considerando a expressão da função $G(H)$, precisamos analisar a inequação

$$\frac{a^2 H}{2a - H} \geq 0.$$

Devido a dinâmica do problema geométrico que estamos trabalhando, isto é, médias sempre estritamente positivas pois são calculadas a partir de segmentos do semicírculo, Figura

1, para o cálculo da inequação quociente acima não é necessário fazer todo o estudo de sinal usualmente utilizado no cálculo dessas inequações. Para tanto, já sabemos $a^2H > 0$ pois $a > 0$ e $H > 0$, então nos resta apenas analisar quando o denominador $a^2 - H > 0$. Isso nos dá o intervalo $(0, 2a)$ como domínio para a função $G(H)$.

Com relação às assíntotas, podemos observar que temos uma descontinuidade de $G(H)$ em $H = 2a$. Vamos verificar se nessa descontinuidade há uma assíntota vertical calculando o seguinte limite

$$\lim_{H\to 2a^-}\left(\sqrt{\frac{a^2H}{2a-H}}\right)$$

Dessa forma,

$$\lim_{H\to 2a^-}\left(\sqrt{\frac{a^2H}{2a-H}}\right) = a^2 \cdot \sqrt{\lim_{H\to 2a^-}\frac{H}{H}\left(\frac{1}{\frac{2a}{H}-1}\right)}$$

$$= a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\lim_{H\to 2a^-}\left(\frac{2a}{H}-1\right)}}$$

Então, como $\left(\frac{2a}{H}-1\right) \to 0^+$, quando $H \to 2a^-$, obtemos que

$$\lim_{H\to 2a^-}\left(\frac{2a}{H}-1\right) = +\infty$$

ou seja, $H = 2a$ é uma assíntota vertical para $G(H)$.

Agora, passamos a buscar por pontos críticos da equação (19). Vemos que, derivando *G* em termos de *H*, a partir da regra da cadeia,

$$G(H) = \sqrt{\frac{a^2H}{2a-H}}$$

$$G'(H) = \frac{d}{dH}\left(\sqrt{\frac{a^2H}{2a-H}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2H}{2a-H}}} \cdot \frac{d}{dH}\left(\frac{a^2H}{2a-H}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2H}{2a-H}}} \cdot \frac{2a^3}{(2a-H)^2}$$

ou ainda, simplificando a expressão acima

$$G'(H) = \frac{a^2}{\sqrt{H}(-H+2a)^{\frac{3}{2}}}. \tag{39}$$

Então, analisando a equação (39), percebemos que $G'(H)$ nunca se anula, seja qual for o valor de H no domínio de $G(H)$. Além disso, $G'(H)$ não existe para $H = 2a$ e $H = 0$ como já observamos para $G(H)$. Logo, não temos pontos críticos para $G(H)$, pois como $H = 2a$ é uma assíntota vertical para $G(H)$ e $H = 0$ não está no domínio considerado para o problema geométrico.

Com relação ao crescimento e decrescimento da função $G(H)$, podemos observar pela equação (39) que $G(H)$ é sempre crescente, já que $G'(H)$ é positiva.

Agora, com relação a concavidade da função *G(H)*, vamos analisar o sinal da sua segunda derivada. Calculando a derivada de *G'* em termos de *H*, a partir da (39) e da regra da cadeia e do produto, obtemos

$$G''(H) = \frac{d}{dH}\left(\frac{a^2}{\sqrt{H}(-H+2a)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= a^2 \cdot \frac{d}{dH}\left(\frac{1}{\sqrt{H}(-H+2a)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= a^2 \cdot \frac{d}{dH}(H)^{\frac{-1}{2}}(-H+2a)^{\frac{-3}{2}}$$

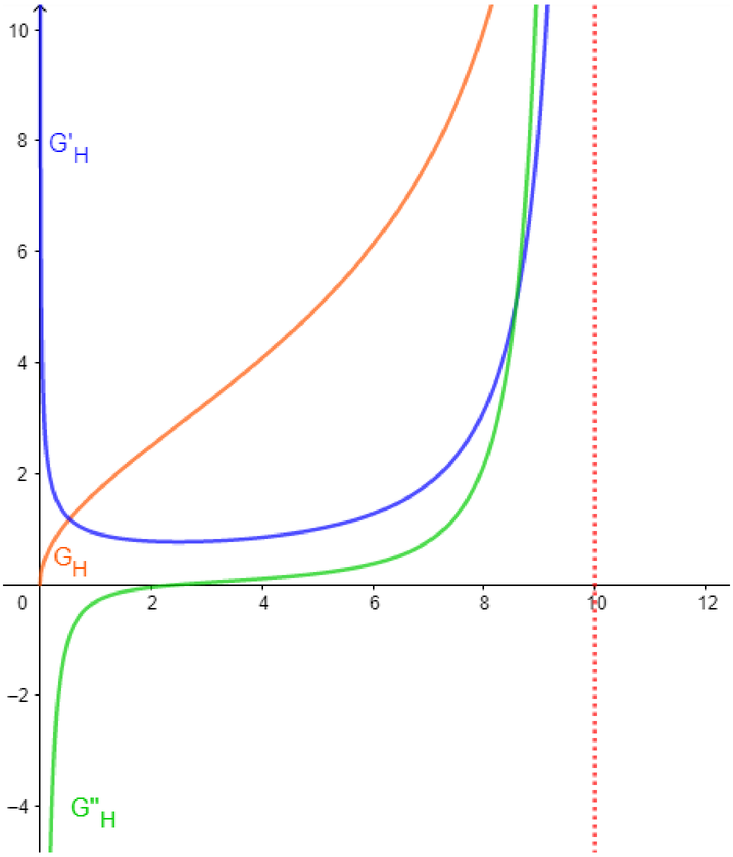
$$= a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}(H)^{\frac{-1}{2}}(-H+2a)^{\frac{-5}{2}} - \frac{1}{2}(H)^{\frac{-3}{2}}(-H+2a)^{\frac{-3}{2}}\right)$$

ou ainda, simplificando a expressão acima, concluímos que

$$G''(H) = a^2\left(\frac{(2H-a)}{H^{\frac{3}{2}}(-H+2a)^{\frac{5}{2}}}\right) \tag{40}$$

Portanto, para sabermos a concavidade de $G(H)$, é suficiente analisar na equação (40) quando $2H - a > 0$ *e* $2H - a < 0$. Assim, concluímos que $G''(H) > 0$ quando $H > \frac{a}{2}$ e, por outro lado, $G''(H) < 0$ quando $H < \frac{a}{2}$. Logo, $H = \frac{a}{2}$ é um ponto de inflexão da função $G(H)$, e $G(H)$ possui concavidade voltada para baixo no intervalo $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ e concavidade voltada para cima no intervalo $\left(\frac{a}{2}, 2a\right)$. Na Figura 15 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a=5$. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/jjhghvwu.

Figura 15 - Funções *G(H), G'(H) e G''(H)* para a constante *a=5*.



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar as equações de (20) a (22) que relacionam a média harmônica com as demais médias conforme a Figura 6. Primeiro vamos abordar a equação (20) que relaciona a média harmônica com a média quadrática. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $H(Q)$, o seu domínio. Vamos analisar quando

$$2Q^2 - a^2 \geq 0 \text{ e } \quad a + \sqrt{2Q^2 - a^2} \neq 0.$$

Para tanto, buscando as raízes da equação $2Q^2 - a^2 = 0$, obtemos $Q = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Agora, observando que o coeficiente da variável quadrática da equação é positivo, a inequação $2Q^2 - a^2 \geq 0$ acima se verifica na reunião de intervalos $\left(-\infty, \frac{-a\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Além disso, como $a > 0$ e, pelo que acabamos de verificar, $\sqrt{2Q^2 - a^2} \geq 0$ no intervalo $\left(-\infty, \frac{-a\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, obtemos que $a + \sqrt{2Q^2 - a^2} \neq 0$ neste intervalo.

Portanto, como Q representa uma média quadrática entre segmentos no semicírculo, Figura 1, vamos considerar como domínio apenas o intervalo $\left[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{Q\to\infty}\left(\frac{2a\sqrt{2Q^2-a^2}}{a+\sqrt{2Q^2-a^2}}\right)\\
&= 2a \cdot \lim_{Q\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2Q^2-a^2}}{a+\sqrt{2Q^2-a^2}}\right)\\
&= 2a \cdot \lim_{Q\to\infty}\left(\frac{Q\sqrt{2-\frac{a^2}{Q^2}}}{a+Q\sqrt{2-\frac{a^2}{Q^2}}}\right)\\
&= 2a \cdot \left(\frac{Q\sqrt{\lim_{Q\to\infty} 2-\frac{a^2}{Q^2}}}{\frac{a^2}{Q^2}+\sqrt{\lim_{Q\to\infty} 2-\frac{a^2}{Q^2}}}\right)\\
&= 2a \cdot \left(\frac{\sqrt{2-0}}{0+\sqrt{2-0}}\right)\\
&= 2a.
\end{aligned}$$

Então, considerando o domínio de $H(Q)$ e o cálculo acima, podemos concluir que a equação $H(Q)$ possui assíntota horizontal, $y = 2a$.

Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $H(Q)$ é contínua no domínio considerado e definida no extremo inferior $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos da equação (20). Então, derivando H em termos de Q, obtemos a partir da regra do quociente,

$$H(Q) = \frac{2a\sqrt{2Q^2 - a^2}}{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}$$

$$H'(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{2a\sqrt{2Q^2 - a^2}}{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dQ}\left(2a\sqrt{2Q^2 - a^2}\right) \cdot \left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right) - \left(2a\sqrt{2Q^2 - a^2}\right) \cdot \frac{d}{dQ}\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)}{\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4aQ}{\sqrt{2Q^2 - a^2}} \cdot \left(a + \frac{2a\sqrt{2Q^2 - a^2}}{a + \sqrt{2Q^2 - a^2}}\right) - \frac{2Q}{\sqrt{2Q^2 - a^2}} \cdot \left(2a\sqrt{2Q^2 - a^2}\right)}{\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2}$$

ou ainda, simplificando a expressão acima,

$$H'(Q) = \frac{4a^2Q}{\sqrt{2Q^2-a^2}\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)^2}. \tag{41}$$

Então, analisando a equação $H'(Q) = 0$, vemos que ela não possui solução pois pelo domínio observado acima $Q \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Além disso, como vimos anteriormente, $a + \sqrt{2Q^2 - a^2} \neq 0$ e $\sqrt{2Q^2 - a^2} \geq 0$, portanto, $H'(Q)$ não existe quando $2Q^2 - a^2 = 0$, ou seja, $H'(Q)$ não existe quando $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Logo $Q = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, é o ponto crítico da equação (20).

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função H'(Q) aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$H'(Q) > 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2Q}{\sqrt{2Q^2-a^2}\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)^2} > 0 \Leftrightarrow \ Q > 0.$$

Portanto, como $Q \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ segue que $H'(Q) > 0$ e, assim, $H(Q)$ é crescente em todo o domínio $[\frac{a\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

Agora, com o intuito de analisar a concavidade da função $H(Q)$ vamos utilizar a segunda derivada, calculando a derivada de H' em termos de Q, a partir de (41). Aplicando a regra do quociente, obtemos

$$H''(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{4a^2Q}{\sqrt{2Q^2 - a^2}\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2}\right)$$

$$\frac{\frac{d}{dQ}(4a^2Q) \cdot \left(\sqrt{2Q^2 - a^2}\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2\right) - (4a^2Q) \cdot \frac{d}{dQ}\left(\sqrt{2Q^2 - a^2}\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2Q^2 - a^2}\left(a + \sqrt{2Q^2 - a^2}\right)^2\right)^2}$$

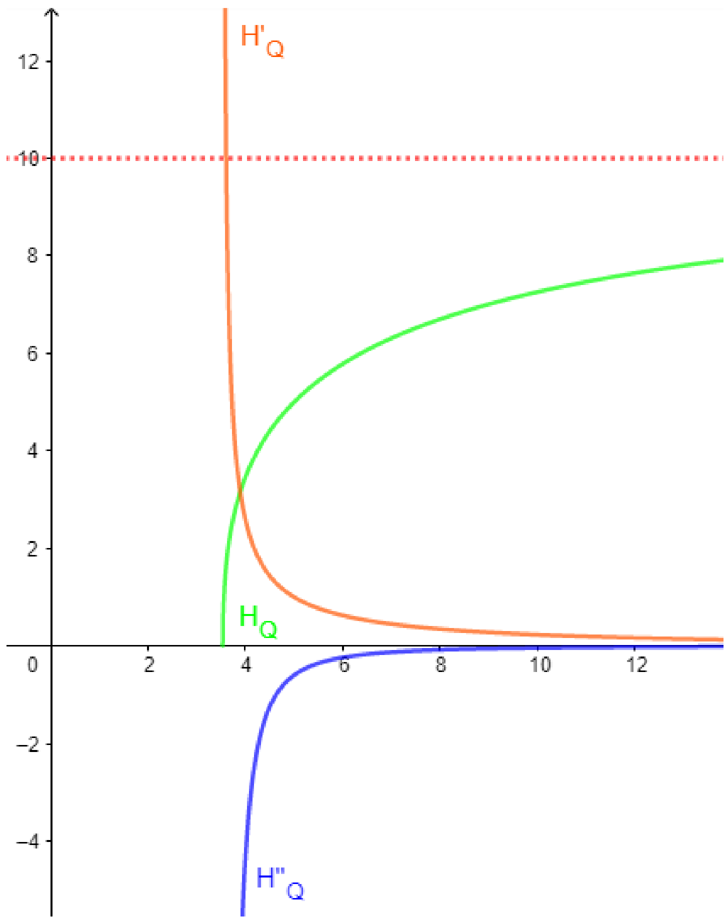
$$= \frac{(4a^2)\cdot\left(\sqrt{2Q^2-a^2}\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)^2\right)-(4a^2Q)\cdot\left(\frac{4Q}{2\sqrt{2Q^2-a^2}}\cdot\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)^2+2\sqrt{2Q^2-a^2}2\cdot\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)\frac{4Q}{2\sqrt{2Q^2-a^2}}\right)}{\left(\sqrt{2Q^2-a^2}\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)^2\right)^2}$$

ou ainda, simplificando a expressão matemática

$$H''(Q) = -\frac{4a^2\left(a^3+a^2\sqrt{2Q^2-a^2}+4Q^2\sqrt{2Q^2-a^2}\right)}{(2Q^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\left(a+\sqrt{2Q^2-a^2}\right)^3}. \qquad (42)$$

Avaliando o sinal de $H''(Q)$, observa-se que $H''(Q) < 0$ para todo o domínio, e portanto a concavidade de $H(Q)$ é voltada para baixo. Na Figura 16 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/yjs68yh7.

Figura 16 - Funções *H(Q), H'(Q) e H''(Q)* para a constante *a=5*.



Fonte: Autoria própria.

Agora iremos analisar a equação (21) que relaciona a média harmônica com a média aritmética, Figura 6. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $H(A)$, o seu domínio. Assim,

$$2a - \frac{a^2}{A} \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \frac{a}{2}, a > 0$$

Portanto, como A representa uma média aritmética entre segmentos no semicírculo, Figura 1, assumiremos apenas valores estritamente maiores que 0, ou seja o domínio $de\ H(A)$ é dado pelo intervalo $(\frac{a}{2}, +\infty)$ com $a\ > 0$.

Com relação à assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{A\to\infty}\left(2a - \frac{a^2}{A}\right)$$

$$= \lim_{A\to\infty}(2a) - \lim_{A\to\infty}\left(\frac{a^2}{A}\right)$$

$$= 2a$$

Então, considerando o domínio de $H(A)$ e o cálculo acima, podemos concluir que a equação $H(A)$ possui assíntota horizontal, $x = 2a$. Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $H(A)$ é contínua no domínio considerado, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a investigar os pontos críticos da equação (21). Assim, derivando H em termos de A, usando as regras de derivação, obtemos

$$H(A) = 2a - \frac{a^2}{A}$$

$$H'(A) = \frac{d}{dA}\left(2a - \frac{a^2}{A}\right)$$

$$= \frac{d}{dA}(2a) - \frac{d}{dA}\left(\frac{a^2}{A}\right)$$

$$H'(A) = \frac{a^2}{A^2}. \qquad (43)$$

Então, analisando a equação (43), percebemos que $H'(A)$ nunca se anula, seja qual for o valor de A no domínio de $H(A)$. Além disso, $H'(A)$ não existe para $A = 0$ como já observamos para $H(A)$. Logo, não temos pontos críticos para $H(A)$, pois como $A = 0$ é uma assíntota vertical para $H(A)$, não está no domínio de $H(A)$.

Com relação ao crescimento e decrescimento da função $H(A)$, podemos observar pela equação (43) que $H(A)$ é sempre crescente, já que $H'(A)$ é positiva.

Agora, com relação à concavidade da função $H(A)$, vamos analisar o sinal da sua segunda derivada. Calculando a derivada de H' em termos de A, a partir da (43) , obtemos

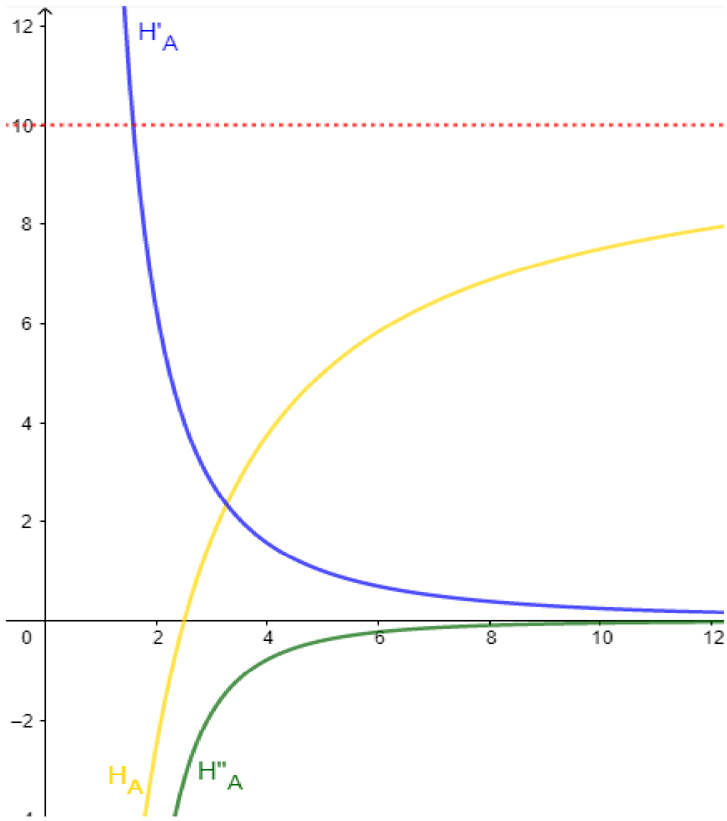
$$H''(A) = \frac{d}{dA}\left(\frac{a^2}{A^2}\right)$$

$$= a^2 \frac{d}{dA}(A^{-2})$$

$$H''(A) = -\frac{2a^2}{A^3}. \quad (44)$$

Podemos concluir que $H''(A) < 0$ quando $A > 0$, ou seja, H possui concavidade voltada para baixo no intervalo $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$. Na Figura 17 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/yjs68yh7.

Figura 17 - Funções *H(A), H'(A) e H''(A)* para a constante *a=5.*



Fonte: Autoria própria.

Por fim, iremos analisar a equação (22) que relaciona a média harmônica com a média geométrica, Figura 6. Neste sentido, o primeiro detalhe para analisarmos é a condição de existência da função $H(G)$, o seu domínio. Claramente, como G representa uma média geométrica entre segmentos no semicírculo, Figura 1, o domínio de $H(G)$ é dado pelo intervalo $(0, +\infty)$.

Com relação às assíntotas horizontais, temos

$$\lim_{G\to\infty}\left(\frac{2G^2}{a^2+G^2}\right)$$

$$= \lim_{G\to\infty}\left(\frac{2G^2}{G^2\cdot\left(\frac{a^2}{G^2}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{G\to\infty}\left(\frac{2}{\frac{a^2}{G^2}+1}\right)$$

$$= \frac{2}{\lim_{G\to\infty}\frac{a^2}{G^2}+1}$$

$$=2$$

Então, podemos concluir que a equação $H(G)$ possui assíntota horizontal, $y = 2$ .Em se tratando de assíntotas verticais, como a função $H(G)$ é uma função racional com denominador diferente de zero, portanto, contínua, conclui-se que não existem assíntotas verticais.

Agora, passamos a buscar os pontos críticos de (22), então, derivando H em termos de G, a partir da regra do quociente, obtemos

$$H(G) = \frac{2G^2}{a^2+G^2}$$

$$H'(G) = \frac{d}{dG}\left(\frac{2G^2}{a^2+G^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dG}(2G^2)\cdot a^2 + G^2 - 2G^2\cdot\frac{d}{dG}(a^2+G^2)}{(a^2+G^2)^2}$$

$$= \frac{4G\cdot(a^2+G^2) - 2G^2\cdot 2G}{(a^2+G^2)^2}$$

$$H'(G) = \frac{4Ga^2}{(a^2+G^2)^2}. \tag{45}$$

Então, analisando a equação $H'(G) = 0$, vemos que

$$\frac{4Ga^2}{(a^2+G^2)^2} = 0 \Leftrightarrow G = 0$$

do qual não está no domínio de $H(G)$, e portanto a função não contém pontos críticos.

Vamos analisar as questões de crescimento e decrescimento da função $H(G)$, aplicando o teste da primeira derivada. Para tanto,

$$H'(G) > 0 \Leftrightarrow \frac{4Ga^2}{(a^2+G^2)^2} > 0 \ \Leftrightarrow G > 0.$$

Analogamente, $H'(G) < 0$ quando $G < 0$. Então, podemos concluir que H é decrescente a esquerda de 0 e crescente à direita deste ponto. Porém, em nosso problema geométrico, G é estritamente positivo por se tratar da média geométrica, ou seja, o ponto $G = 0$ não está no domínio considerado, portanto não podemos falar em mínimo de $H(G)$.

Agora, com o intuito de utilizar o teste da segunda derivada, calculando a derivada de H' em termos de G, a partir da (45), a partir da regra do quociente, obtemos

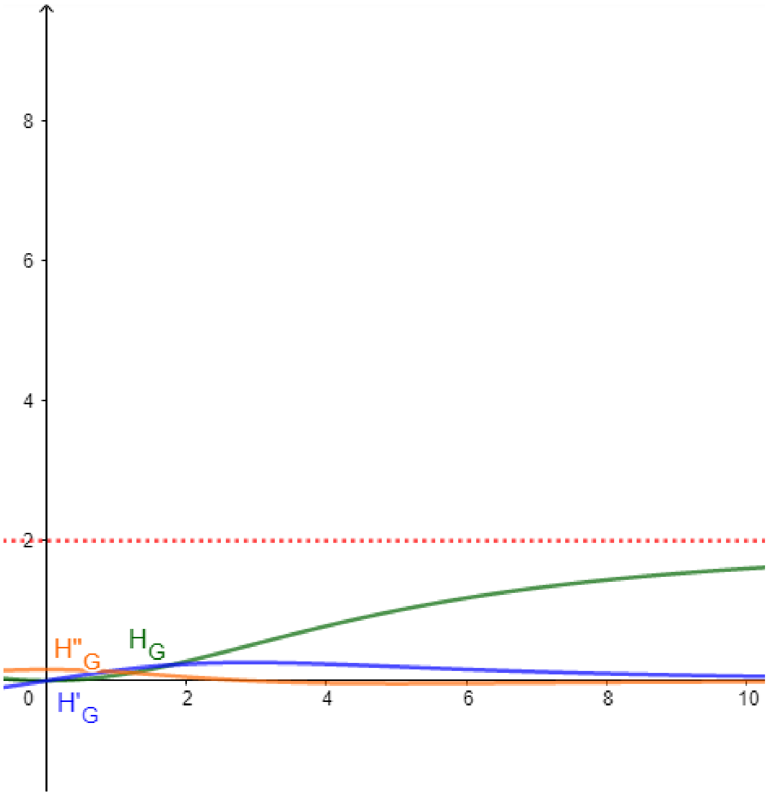
$$\begin{aligned}
H''(G) &= \frac{d}{dG}\left(\frac{4a^2G}{(a^2+G^2)^2}\right) \\
&= 4a^2 \cdot \frac{d}{dG}\left(\frac{G}{(a^2+G^2)^2}\right) \\
&= 4a^2 \cdot \frac{\frac{d}{dG}(G)\cdot(a^2+G^2)^2 - G\cdot\frac{d}{dG}((a^2+G^2)^2)}{((a^2+G^2)^2)^2} \\
&= 4a^2 \cdot \frac{1\cdot(a^2+G^2)^2 - G\cdot 4G(a^2+G^2)}{(a^2+G^2)^4}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$H''(G) = \frac{4a^2(a^2-3G^2)}{(a^2+G^2)^3} \tag{46}$$

podemos concluir que $H''(G) > 0$ quando $0 < G < \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e, portanto $H(G)$ tem concavidade voltada para cima no intervalo $\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. Por outro lado, quando $G > \frac{a\sqrt{3}}{3}$, então $H''(G) < 0$ e, por sua vez, $H(G)$ tem concavidade voltada para baixo no intervalo$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Na Figura 18 podemos observar as características e propriedades discutidas, no caso específico para $a = 5$. No Objeto de Aprendizagem com geometria dinâmica podemos verificar para diferentes valores de a, disponível no link https://www.geogebra.org/classic/yjs68yh7.

Figura 18 - Funções *H(G), H'(G) e H''(G)* para a constante *a=5*.



Fonte: Autoria própria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como conclusão deste trabalho é possível ressaltar algumas peculiaridades envolvendo as diferentes médias no contexto geométrico apresentado. Pode-se observar que quando são relacionadas as médias aritmética e quadrática, obtemos expressões matemáticas mais simples de se trabalhar e, por sua vez, expressões gráficas de menor complexidade. Por outro lado, quando trabalhamos com as médias geométrica e harmônica, observa-se a ocorrência de assíntotas verticais ou horizontais, bem como expressões mais interessantes se pensarmos na análise de pontos críticos ou de inflexão através dos cálculos de primeira e segunda derivada.

Das médias quadráticas, quando a variável é a média aritmética temos uma função raiz com o radicando polinomial quadrático, apresentando concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo. No caso da variável média geométrica, a função também é raiz, mas agora com radicando polinomial de quarto grau, apresentando concavidade voltada para cima. Já para a variável média harmônica temos uma função dada por um quociente, onde o numerador é uma raiz com radicando polinomial quadrático e o denominador é polinomial de grau um. Nesta última, apresenta-se uma assíntota vertical no extremo superior do domínio.

Considerando as médias aritméticas, quando a variável é a média geométrica temos uma função polinomial quadrática com concavidade voltada para cima. No caso da variável média quadrática, a função é raiz com radicando polinomial quadrático, apresentando concavidade voltada para baixo e assume um valor mínimo no extremo inferior do domínio. Já para a variável média harmônica temos uma função racional com um quociente linear, onde apresenta uma assíntota vertical no extremo superior do domínio.

Das médias geométricas, quando a variável é a média quadrática, temos uma função raíz com índice quatro e radicando sendo uma função polinomial quadrática. Essa média geométrica, apresenta concavidade voltada para baixo. No caso da variável média aritmética, a função também é raiz, mas agora com índice dois, mantendo um radicando como sendo um polinômio quadrático e apresentando concavidade voltada para baixo. Já para a variável média harmônica temos uma função dada por uma raiz onde o radicando é um quociente, de numerador quadrático e denominador linear. Nesta última, apresenta-se um ponto de inflexão separando as concavidades contrárias, além de uma assíntota vertical no extremo superior do domínio.

Finalmente, em se tratando das médias harmônicas, quando posta em função da média quadrática, temos uma função com um quociente, onde tanto o numerador quanto o denominador apresentam uma raiz com radicando sendo uma função polinomial quadrática.

Essa média apresenta uma assíntota horizontal e concavidade voltada para baixo. No caso da variável média aritmética, a função é racional com denominar linear, apresentando concavidade voltada para baixo e uma assíntota horizontal. Já para a variável média geométrica temos uma função racional de numerador e denominador quadrático. Nesta última, apresenta-se um ponto de inflexão separando as concavidades contrárias, além de uma assíntota horizontal y=2, independente do segmento *a*, o que não ocorre em nenhum dos outros casos para esta ou outra das médias trabalhadas.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM 1985.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

FERREIRA, L. S. **Uma Abordagem Sobre Médias e Suas Aplicações no Ensino Médio.** SBM, 2017 (Coleção PROFMAT).

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** 5.ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GIRALDO, V.; MATTOS, F. R.; CAETANO, P. A. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 4 ed. Campinas: Papirus Editora, 1997, 176 p.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 09 de abril de 2021.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**, ed.1ª, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2014. (Coleção PROFMAT).

OTANI, N.; FIALHO, F. A. P. **TCC: métodos e técnicas.** 2.ed. Florianópolis: Visual Books, 2011.

OLIVEIRA, A G. **Funções e geometria: o uso de ambiente de geometria dinâmica como subsídio para a caracterização das funções quadráticas.** 2013. 35 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

PAVANELLO, R, M. **O ABANDONO DO ENSINO DE GEOMETRIA: uma visão histórica**. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.