

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CAMPUS ITAQUI-RS
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

DANRLEI SILVEIRA TRINDADE

**O CONCEITO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: ANÁLISE DE MATERIAIS
DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR**

ITAQUI-RS

2016

DANRLEI SILVEIRA TRINDADE

**O CONCEITO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: ANÁLISE DE MATERIAIS
DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para conclusão do
Curso de Matemática – Licenciatura pela
Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA
- Campus Itaqui-RS.

Orientador (a): Maria Arlita da Silveira Soares

**ITAQUI-RS
2016**

DANRLEI SILVEIRA TRINDADE

**O CONCEITO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: ANÁLISE DE MATERIAIS
DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO E ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para conclusão do
Curso de Matemática – Licenciatura pela
Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA
- Campus Itaqui-RS.

Aprovado em _____ de _____ de _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ma. Maria Arlita da Silveira Soares (orientadora)
UNIPAMPA – Caçapava do Sul-RS

Prof. Dra. Ângela Maria Hartmann
UNIPAMPA – Caçapava do Sul-RS

Prof. Dra. Cátia Maria Nehring
UNIJUI – Ijuí-RS

AGRADECIMENTOS

Antes de agradecer a todos que fizeram parte deste processo, não poderia deixar de agradecer a Deus, por estar sempre ao meu lado, mesmo nos momentos em que eu não acreditei que fosse capaz de chegar até aqui.

Agradeço meus pais, sem o apoio e auxílio durante toda a minha vida, eu não seria a pessoa que sou hoje. A eles dedico este trabalho.

A minha orientadora, professora Arlita, não há palavras que expressem a minha admiração pela pessoa que és, pela excelente profissional, fonte de inspiração a muitas pessoas, inclusive eu. Obrigado por contribuir na “nossa” pesquisa e que muitas outras surjam.

Agradeço ao professor Leugim, que vem acompanhando o meu trabalho desde a minha primeira graduação, professor competente e disposto a auxiliar-me sempre que necessário. Aos meus colegas de curso, muito obrigado por potencializar grandes discussões acerca do processo de ensino e aprendizagem.

Quero deixar a minha gratidão aos colegas do Pibid, em especial a colega Alessandra, pelas contribuições e parcerias acerca deste e de outros trabalhos.

Grato pelos professores que fizeram parte da minha trajetória e que não foram citados. Tornei-me um profissional consciente dos meus limites e potencialidades a partir de seus ensinamentos.

Agradeço a minha amiga Néli, sabendo que, assim como os demais amigos, acredita muito no meu potencial e está (mesmo que distante) junto a mim, desejando-me sucesso.

Enfim, agradeço aos meus amigos pelo incentivo e apoio nos momentos em que me fiz distante.

Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor assim, não morre jamais. (Rubem Alves)

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo discutir questões inerentes ao processo do desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular, o conceito de Sequência Numérica. Para tanto, analisa-se o modo como este conceito é apresentado em duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio de três escolas do município de Itaquí, aprovadas pelo PNLD (2015) e uma seção específica de uma obra de Cálculo, bem como a relação do conceito de Sequência com o conceito de limite. A opção metodológica baseou-se em uma pesquisa qualitativa por meio de uma análise documental. Mais especificamente, utilizou-se a análise de conteúdo para o trabalho com os documentos. A análise dos dados possibilitou verificar que, as Sequências Numéricas, nas coleções do Ensino Médio, são abordadas em sua maioria nos capítulos relacionados às progressões (aritméticas e algébricas), ou seja, abordadas, praticamente, só no 1º ano. Quanto às fases de um padrão, a coleção C1 explorou as três fases em mais atividades do que a coleção C2. Em relação às representações semióticas, a coleção C1 optou pela representação figural em um número maior de atividades que C2. Nas transformações cognitivas há ênfase para o tratamento numérico em C2 em detrimento de C1. No entanto, no manual do professor da coleção C2, há sugestões para o trabalho com as 3 fases de um padrão e com a representação figural como registro de partida. Constatou-se que a coleção C1 aborda o conceito de limite e convergência de forma intuitiva, possibilitando a mobilização de aspectos do pensamento matemático avançado. No que tange a seção do livro de Cálculo (C3), percebeu-se que as Sequências foram propostas no mesmo capítulo de séries, sendo que são propostas mais atividades para esta última. Nas atividades de Sequência enfatiza-se as 3 fases de um padrão, visto que a maioria das atividades exigem o processo de generalizar, processo este importante na abstração. Em relação às transformações cognitivas, observou-se um tratamento algébrico excessivo, justificável no Ensino Superior. A coleção C3 abordou com mais afinco as características do Pensamento Matemático Avançado, como esperado em função do nível de Ensino. Diante desses resultados, ressalta-se a importância de um trabalho com estudantes do Ensino Médio e Ensino Superior, em que o padrão seja compreendido como eixo estruturador de inúmeros conceitos e fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento matemático avançado.

Palavras-Chave: Pensamento Algébrico, Pensamento Matemático Avançado, Padrão, Sequência Numérica.

ABSTRACT

This research aims to discuss issues related to the process of developing algebraic thinking, in particular, the concept of numerical sequence. Therefore, it analyzes how this concept is presented in two collections of textbooks of high school three schools in the city of Itaquí, approved by PNLD (2015) and a specific section of a work of calculation, and the relationship the concept of sequence with the concept of limit. The theoretical and methodological choice was based on a qualitative research through a documentary analysis. More specifically, we used content analysis to work with documents. Data analysis enabled us to verify that the Number Sequences, in high school collections, are covered mostly in chapters related to progressions (arithmetic and algebraic), or addressed practically only in the 1st year. As for the stages of a pattern, the C1 collection explored the three phases in more activities than C2 collection. Regarding semiotic representations, the C1 collection opted for figural representation in a larger number of activities than C2. There are changes in cognitive emphasis on numerical treatment C2 instead of C1. However, in the C2 collection teacher's manual, there are suggestions to work with the 3 phases of a standard and the figural representation as a starting record. It was found that the collection C1 approaches the limit concept and convergence intuitive, allowing mobilization advanced mathematical aspects of thinking. Regarding the calculation section of the book (C3), it was noticed that the sequences have been proposed in the same series chapter, and more are proposed activities for the latter. In the sequence of activities emphasized that the 3 phases of a standard, since most of the activities required generalizing the process, a process important in abstraction. Regarding cognitive changes, there was an excessive algebraic treatment, justified in Higher Education. The C3 collection addressed harder the features of Advanced Mathematical Thinking, as expected due to the education level. Given these results, we emphasize the importance of working with high school students and higher education, in the standard it is understood as a structural axis of numerous concepts and fundamental in the development of algebraic thinking and advanced mathematical thinking.

Key words: Algebraic Thinking, Advanced Mathematical Thinking, Pattern, Numerical Sequence.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Artigos mapeados quanto ao descritor “Sequências” e categorias de análise.....	20
Quadro 2: Número de atividades encontradas nas coleções de livros didáticos e categorias de análise	46
Quadro 3: Atividade proposta no manual do professor na coleção C1	50
Quadro 4: Número de situações encontradas em C3 analisada e categorias de análise	59

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Situação 1 apresentada na dissertação E.....	24
Figura 2: Situação 3 apresentada na dissertação E.....	25
Figura 3: Situação apresentada na dissertação F.....	27
Figura 4: Situação de Sondagem da dissertação G.....	29
Figura 5: Dimensões da Álgebra.....	32
Figura 6: Polígonos regulares inscritos no círculo.....	45
Figura 7: Aproximação da Área de uma curva por retângulos.....	46
Figura 8: Atividade da coleção C1.....	48
Figura 9: Atividade de Potenciação da coleção C1.....	48
Figura 10: Atividade de Função Exponencial da coleção C1.....	49
Figura 11: Definição de Sequência Finita.....	50
Figura 12: Definição de Sequência Infinita.....	50
Figura 13: Atividade utilizando Fractais no desenvolvimento da PG.....	50
Figura 14: Atividade envolvendo Função Exponencial em C1.....	52
Figura 15: Atividade envolvendo Sequências Numéricas em C1.....	52
Figura 16: Atividade Figural de Progressões em C1.....	53
Figura 17: Relação entre PA e Função Afim.....	53
Figura 18: PG e Série Geométrica convergente.....	54
Figura 19: Progressão Aritmética em C2.....	55
Figura 20: Funções no desenvolvimento de Sequências em C2.....	55
Figura 21: Atividade envolvendo PA em C2.....	55
Figura 22: Representação Gráfica em C2.....	56
Figura 23: Representação Figural em C2.....	56
Figura 24: Atividade envolvendo PG em C2.....	57
Figura 25: Análise das Sequências quanto ao crescimento e decréscimo em C2.....	57
Figura 26: Conversão no sentido $RN \rightarrow RA$	58
Figura 27: Sugestões para o trabalho com Sequências em C2.....	58
Figura 28: Situações Conceituais em C3.....	60
Figura 29: Limite de Sequências.....	61
Figura 30: Situações utilizando a representação gráfica.....	61
Figura 31: Situação em C3 no sentido $RA \rightarrow RG$	62
Figura 32: Situação em C3 no sentido $RA \rightarrow RN$	62
Figura 33: Listagem de termos de uma Sequência em C3.....	63
Figura 34: Situação em C3 utilizando Tratamento Algébrico.....	63

SUMÁRIO

PROBLEMATIZAÇÃO	10
CAPÍTULO 1: PENSAMENTO ALGÉBRICO: CONSIDERAÇÕES ACERCA DO PADRÃO, PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E SEQUÊNCIA NUMÉRICA	16
1.1 MAPEAMENTO DE PESQUISAS BRASILEIRAS ACERCA DO CONCEITO DE SEQUÊNCIA NUMÉRICA.....	16
1.2 MAPEAMENTO EM PORTAIS DE UNIVERSIDADES BRASILEIRAS DO CONCEITO DE SEQUÊNCIA NUMÉRICA.....	21
1.3 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: ALGUNS ENTENDIMENTOS.....	30
CAPÍTULO 2: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	38
2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS	38
2.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS FONTES DE PRODUÇÃO DE DADOS	41
2.2.1 CARACTERÍSTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS: O PLANO NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO.....	41
2.2.2 ANÁLISE GERAL DA ORGANIZAÇÃO DO LIVRO DE CÁLCULO	45
CAPÍTULO 3: ANÁLISE DOS DADOS	47
3.1 ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO.....	47
3.2 ANÁLISE DA SEÇÃO ESPECÍFICA DO LIVRO DE CÁLCULO.....	59
CAPÍTULO 4: CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	68
ANEXOS	71
ANEXO I: QUESTIONÁRIO PILOTO PROPOSTO NA DISSERTAÇÃO D	71
APÊNDICES	72
APÊNDICE I: MAPEAMENTO EM REVISTAS	72
APÊNDICE II: MAPEAMENTO EM DISSERTAÇÕES	76

PROBLEMATIZAÇÃO

A partir das minhas vivências/experiências acadêmicas percebo que muitas das dificuldades dos estudantes em Matemática estão relacionadas ao entendimento dos conceitos e processos algébricos. Estas dificuldades perpassam desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Durante a minha trajetória minhas discussões voltaram-se para a área da Educação Matemática, especialmente, com desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim, por meio da realização dos Estágios não obrigatórios e obrigatórios, das atividades de monitoria no Ensino Superior e das discussões realizadas no PIBID¹ direcionei minhas investigações para essa temática, em particular, para o conceito de sequências numéricas.

No intuito de estar sempre em “movimento” no processo de formação da profissão docente, participo do grupo de pesquisa, intitulado matE² (Educação e Educação Matemática), cujo objetivo é realizar discussões acerca do currículo, trabalho docente e o ensino e aprendizagem de diversos conceitos matemáticos realizados na Educação Básica e no Ensino Superior. O grupo tem dedicado seus estudos a análise de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e as referências utilizadas nos cursos de licenciatura em Matemática, principalmente, os livros de Cálculo, por entender que estes materiais são ferramentas que auxiliam os professores e os estudantes no desenvolvimento de suas atividades. A intenção do grupo com as análises de livros é múltipla. Propõe-se analisar as características didático-pedagógicas das obras, bem como, as relacionadas aos conceitos/conteúdos de Matemática e dos Componentes Curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática. Também, busca-se identificar alguns obstáculos e/ou atividades significativas presentes nestes materiais e apresentar sugestões para que os professores possam fazer seus encaminhamentos.

A participação nas atividades acadêmicas (ensino, pesquisa e extensão), no PIBID e no matE², juntamente, com o apreço pela docência fez com que os estudos que compõem esta pesquisa fossem organizados na forma de artigo científico e publicados em eventos da área da Educação Matemática, a saber: VI Jornada Nacional de Educação Matemática e XIX Jornada Regional de Educação Matemática realizado na Universidade Federal de Passo Fundo – RS. O artigo apresentado neste evento está intitulado: “Mapeamento em periódicos brasileiros do conceito de Sequência Numérica”. Além disso, outro artigo foi construído e será apresentado

¹ Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

no XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática que tem como título “Abordagem do conceito de Sequências em duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio”. Este artigo será apresentado em São Paulo no mês de julho deste ano, na Universidade Cruzeiro do Sul.

Diante do exposto, ao analisar aspectos relacionados à Matemática escolar percebe-se dentre os desafios e limitações, destaca-se o ensino dos conceitos algébricos, bem como a abordagem destes em livros didáticos da Educação Básica (KERN, 2008).

A importância dos conceitos e processos algébricos fica explícita quando se analisa os muitos fenômenos que podem ser modelados por eles (BRASIL, 2000). Por exemplo, no ensino de Funções, há possibilidade de construção de uma linguagem algébrica de caráter linguístico-científico. Em outras palavras, o estabelecimento de relações entre grandezas, potencializado pelo conceito de Função permite a elaboração de modelos matemáticos para a resolução de situações-problema reais.

Segundo Gereti et. al (2013), a álgebra tem sido alvo de estudos e pesquisas na área da Educação Matemática, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento avançado; suas várias dimensões; sua presença nas propostas curriculares; na identificação das relações entre seus conceitos com outros conceitos matemáticos; além do processo de ensino e aprendizagem. Destaca-se que as pesquisas concernentes ao estudo da álgebra têm avançado, principalmente, as que são desenvolvidas nos espaço-tempo das salas de aulas (KERN, 2008; PONTE, 2014; VIELMO, 2012; BRASIL, 1998; BRASIL, 2000, NCTM, 2000).

Para esta pesquisa realizou-se um mapeamento em periódicos e nos portais de 11 universidades brasileiras que possuem programas de Pós-Graduação na área da Educação Matemática. A busca pelos trabalhos foi realizada por meio dos seguintes descritores: Pensamento Algébrico, Padrão/Padrões e Sequências Numéricas/Geométricas. Nos periódicos², foram identificados 15 trabalhos relacionados com os descritores selecionados. Nos portais das universidades³ analisados, observou-se um total de 10 dissertações que contemplam os descritores. Destacam-se, nos periódicos pesquisados, três trabalhos relacionados ao conceito de Sequência Numérica e nas dissertações, quatro pesquisas relacionadas a este conceito. Estes dados indicam que há pesquisas sobre o pensamento

² Os periódicos pesquisados foram: Bolema, Boletim GEPEM, Caminhos da Educação Matemática em Revista – Sergipe, Educação Matemática Pesquisa, Revemat, Revista Paranaense De Educação Matemática- RPEM, Rematec, ACTA - ULBRA e Zetetiké.

³ Os portais das universidades pesquisadas foram: UNESP – RC, PUC-SP, UESC-BA, UFJF-MG, USS-RJ, UFMS-RS, IFG-GO, UFOP- Ouro Preto, UFMS-MS, UFPE-PE, e UNIBAN/ANHANGUERA.

algébrico, no entanto, em relação ao estudo das sequências o número é reduzido. Além disso, não há nenhum trabalho que problematize a abordagem do conceito de sequência no Ensino Médio e no Ensino Superior, simultaneamente.

A escolha dos portais das universidades está relacionada com a Área da Educação Matemática presentes nos programas de Graduação e Pós – Graduação. Ainda, optou-se por analisar três artigos e quatro dissertações por tratarem do conceito de Sequência Numérica.

Diante disso, busca-se problematizar algumas questões concernentes ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) o trabalho relacionado com o campo da álgebra deve ser desenvolvido desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e ampliado nos Anos Finais. Para tanto, é relevante a:

[...] exploração de situações-problema, [pois] o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, [poderá] estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 50).

Neste sentido, o estabelecimento de relações entre duas grandezas, a observação de padrões e generalização, possibilitará o entendimento da noção de Função, por exemplo, desde o Ensino Fundamental. Porém, a abordagem formal do conceito deverá ser explorada com maior ênfase no Ensino Médio (BRASIL, 1998).

Os PCN (BRASIL, 1998) sublinham, também, que o estudo da Álgebra possibilita ao estudante desenvolver aspectos relacionados ao processo de abstração e generalização (entendida, nesta pesquisa, como subprocesso da abstração, conforme Dreyfus (1991)), fazendo com que adquiram formas/estratégias de resolução de problemas.

Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que historicamente o objeto central da Álgebra era identificado como expressões e equações. Atualmente, percebe-se que neste campo existem relações matemáticas abstratas que possibilitam expressar equações, inequações ou funções e, da mesma forma, podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações entre conjuntos. Este pesquisador, também, menciona que alguns matemáticos, ainda, entendem que o objeto central da Álgebra são os símbolos, ou seja, a Álgebra (campo da matemática) usa de uma linguagem própria (algébrica), fazendo com que o trabalho de manipular símbolos e expressões algébricas seja o mais relevante. Porém, o uso excessivo do “algebrismo” pode fazer com que o estudante utilize procedimentos e algoritmos, sem estabelecer relações.

Segundo as NCTM⁴ (2000) os estudantes necessitam compreender os processos algébricos, pois a utilização destes processos é uma das competências em Matemática. Nesta perspectiva, Vale (2008, p.1) sublinha que o trabalho com a Álgebra:

[...] está fortemente ligado à manipulação simbólica e à resolução de equações. Mas a álgebra é mais do que isso. Os alunos precisam entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Muitos desses conceitos algébricos podem ser construídos partindo das experiências com números; contudo a álgebra também está fortemente ligada à geometria e ao tratamento de dados.

Constata-se na citação anterior que a Álgebra é mais que a utilização de símbolos e a resolução de equações e inequações e para que esta visão seja compreendida pelos estudantes é preciso relacionar os conceitos algébricos com a Aritmética, Geometria, Estatísticas, entre outros ramos da Matemática.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9), corroboram a posição de Vale (2008) afirmando que “o grande objectivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário [no Brasil, Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio] é desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos, mas vai muito além disso.” Por exemplo, compreender os padrões presentes no mundo.

Em relação ao conceito de Sequência (um dos casos específicos de padrões) abordado tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, entende-se que o ensino deste conceito no Ensino Médio não pode ser reduzido a PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica). Em outras palavras, no Ensino Médio é relevante trabalhar vários tipos de sequências cujos modelos matemáticos vão além da função afim e exponencial. Além disso, torna-se necessário buscar relacionar as Sequências Numéricas com seus gráficos, pois possibilita ao estudante identificar Sequências crescentes ou decrescentes, analisar o domínio e imagem da função, se os valores de y se aproximam de algum valor, quando os valores de x se aproximam do infinito, etc. Com isso, o estudante compreende e analisa o comportamento de uma Sequência sem precisar utilizar de processos mecanizados no tratamento dos dados (BRASIL, 2000).

Sendo assim, acredita-se que o estudo de Sequências Numéricas deve ser trabalhado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, ampliado e aprofundado no Ensino Médio, não se limitando a ideia de PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica). Já no

⁴ Principles and Standards for School Mathematics (Princípios e Normas para a Matemática Escolar).

Ensino Superior precisa ter como objetivo principal desenvolver as capacidades cognitivas superiores relacionadas ao pensamento avançado.

De acordo com Nasser (2012) o processo do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado exige que os estudantes tenham capacidades de construir entidades abstratas, diferentemente do Pensamento Matemático Elementar, no qual os conceitos seguem uma coerência, com caráter descritivo. Por exemplo, ao trabalhar com a Sequência, $a(n) = \frac{1}{n}$, pede-se aos estudantes que se listem seus respectivos primeiros termos. Pode-se avançar um pouco e solicitar que o estudante verifique o que acontece com os valores de $a(n)$ quando os valores de n aumentam. Nestas duas situações os conceitos seguem o caráter descritivo. Se a proposta é verificar se esta Sequência é convergente (quando se aproxima de um número) ou divergente (não se aproxima de um número) a análise avança e a mobilização do conceito de limite é necessária. Ainda, há possibilidade de problematizar se a Sequência é limitada (se os seus termos oscilam entre dois números).

O trabalho com o desenvolvimento do pensamento matemático avançado deve ser evidenciado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e desenvolvido com mais afinco no Ensino Médio, para que, no processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, os estudantes não enfrentem obstáculos epistemológicos relacionados aos conceitos matemáticos. Além disso, o processo de transição relaciona-se ao processo de término da Educação Básica e início dos estudos no Ensino Superior. Entende-se que nesta transição o conceito de Sequência Numérica precisa ser retomado com a intenção de se trabalhar as noções de limite e série.

Diante deste panorama acerca da Álgebra, a presente pesquisa organizou-se para responder a seguinte questão: *Como as questões relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático algébrico e pensamento avançado estão presentes nas obras apresentadas nas ementas do Curso de Matemática - Licenciatura do Campus de Itaqui/RS e nos livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD (2015), escolhidos por três escolas do município de Itaqui/RS?*

Para orientar a pesquisa foram elaboradas algumas questões específicas: a) De que maneira o conceito de Sequência Numérica está presente nas obras, ou seja, como é feita a abordagem deste conceito? b) Quais as fases para análise de um padrão estão propostas nestas obras? Quais aproximações e distanciamentos entre o que é proposto para o Ensino Médio e para o Ensino Superior há nas obras analisadas no que se refere à Sequência Numérica?

De maneira geral, objetivou-se analisar livros didáticos do Ensino Médio de três escolas do município de Itaquí/RS e as referências presentes nas ementas do curso de Matemática/Licenciatura da Universidade Federal do Pampa – Campus Itaquí, a fim de realizar um estudo comparativo acerca da abordagem do conceito de Sequência Numérica. De forma específica, buscou-se compreender de que maneira o conceito de Sequência Numérica está presente nestes documentos, sob a perspectiva do Pensamento Matemático Avançado (PMA) ou Elementar (PME). Além disso, verificar se estão presentes as fases de um padrão e possíveis aproximações e distanciamentos das propostas para estes diferentes níveis de ensino.

Para tanto, optou-se por seguir os pressupostos de uma pesquisa qualitativa e para a análise dos dados a Análise de Conteúdo foi escolhida por “possibilitar aplicar discursos diversificados utilizando procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens” (BARDIN, 2011, p. 44).

Esta pesquisa apresenta além desta problematização três capítulos e considerações finais. No capítulo I, intitulado *Pensamento Algébrico: considerações acerca do Padrão, Pensamento Matemático Avançado e Sequência Numérica* são expostos as constatações acerca do mapeamento realizado em periódicos brasileiros relacionados à Educação Matemática e as questões relacionadas ao padrão como eixo estruturador de inúmeros conceitos matemáticos, em particular, os algébricos. Além disso, as questões relacionadas ao PMA e Sequência Numérica são problematizadas.

O capítulo II, intitulado *procedimentos metodológicos*, explicita a forma como a pesquisa foi conduzida, com o detalhamento do objeto de estudo. Ainda neste capítulo, são destacadas as características gerais das obras analisadas, retratando-as por meio do PNLD (no caso da análise de Livro Didático da Educação Básica) e apresentando as características gerais do livro de Cálculo do Ensino Superior.

Por conseguinte a análise dos dados é realizada. Primeiramente, apresenta-se a análise dos livros didáticos da Educação Básica e do livro de Cálculo. Ambas as análises visam compreender o modo como o conceito de Sequência vem sendo problematizado, sob a ótica do PMA e as questões acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Por fim, as considerações finais da pesquisa são apresentadas e discutidas. Neste capítulo, será feita uma retomada dos elementos da pesquisa, bem como constatações gerais do trabalho realizado, na perspectiva de não enclausuramento da discussão feita ao longo da pesquisa.

CAPÍTULO 1

PENSAMENTO ALGÉBRICO: CONSIDERAÇÕES ACERCA DO PADRÃO, PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Neste capítulo, apresentam-se aspectos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, padrão, Sequência Numérica e PMA.

1.1 MAPEAMENTO DE PESQUISAS BRASILEIRAS ACERCA DO CONCEITO DE SEQUÊNCIA NUMÉRICA

No mapeamento realizado para esta pesquisa, conforme já mencionado na problematização, foram identificados 15 artigos que tratam do desenvolvimento do pensamento algébrico. Dentre estes foram analisadas três pesquisas que tratam do conceito de Sequência Numérica. Sendo denominadas de A, B e C para manter o anonimato dos autores e melhor organização dos dados.

O artigo A visa compreender como são estabelecidos padrões de interação entre discentes e docentes por meio de Sequências Numéricas representadas pictoricamente, em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental. Os autores problematizam o trabalho com investigações matemáticas, julgando-as necessárias e fundamentais à aprendizagem em matemática, pois acreditam que estas proporcionam um ambiente para o desenvolvimento de contextos ricos. Para tanto, propõem situações envolvendo Sequências Numéricas que requerem a articulação entre Geometria e a Álgebra.

Segundo os autores do trabalho A, as professoras participantes conduziram as situações baseadas na problemática de articulação dos diferentes padrões de interação (Padrão Extrativo, de Discussão, de Funil, de Focalização e de Matematização Direta) e tentaram mobilizar diversos conceitos matemáticos. Os autores, ainda, referem-se aos padrões de interação como sendo as regularidades constituídas nas interações entre professores e alunos.

No que concerne aos tipos de padrões de interação, sua presença ocorre em: Padrões Extrativos estão presentes quando o professor propõe uma tarefa ambígua e os estudantes são estimulados a analisa-la; Padrões de Discussão revelam-se quando o professor faz perguntas a um discente ou grupo sobre suas conjecturas a fim de torná-la válida; Padrões de Funil são relações que emergem quando o professor realiza alguns problemas para que as dificuldades dos estudantes sejam amenizadas, e com isto, resolvam o problema inicialmente proposto; Padrões de Focalização se estabelece quando o professor tem intenção de direcionar a atenção

dos discentes para um aspecto em particular do problema proposto, e então, os estudantes continuam a resolução de forma autônoma; e, por fim, Padrões de Matemática Direta tem origem na relação entre estudantes e professores quando este propõe tarefas abertas que permitem diferentes abordagens e, ao decorrer, cada estudante é direcionado a resolvê-la à seu próprio modo.

Para desenvolvimento e análise do trabalho, os autores utilizaram da metodologia das Investigações Matemáticas baseada nas ideias de Ernest (1996)⁵ e Ponte, Fonseca e Brunheira⁶ (1999). Além disso, buscaram aporte teórico nas ideias de Banchi e Bell (2008)⁷ para explicitar o que denominam de níveis que uma investigação pode assumir, a saber: Investigação de Confirmação (nível 1), Investigação Estruturada (nível 2), Investigação Guiada (nível 3) e Investigação Aberta (nível 4).

Com relação às situações apresentadas, observou-se que a intencionalidade das professoras era de explorar o conceito de Sequência Numérica por meio da representação figural. Ainda, foram feitos questionamentos, para os estudantes, de cunho aberto (característica do processo investigativo) na tentativa de fazer com que buscassem um padrão a cada situação e, partindo disto, buscar generalizar a Sequência determinando a lei matemática. Destaca-se a importância deste trabalho, a medida que possibilita aos estudantes mobilizarem capacidades de generalização e abstração, essenciais para a aprendizagem em matemática.

Quanto a observação das fases de um padrão, pôde-se perceber que os estudantes buscaram/encontraram um/alguns padrões envolvidos nas situações (fase 1) e posteriormente reconheceram os padrões achados nas situações (fase 2) e por fim, generalizaram o padrão (fase 3). Salienta-se que a terceira fase do padrão, proposto por Herbert e Brown (1997) foi atingida a medida que os estudantes conseguiram entender quais os processos e algoritmos deveriam aplicar para continuar o padrão, porém nem sempre conseguiram estabelecer uma lei de formação (registro algébrico), ou seja, não utilizaram do processo de justificação e argumentação em matemática.

⁵ ERNEST, P. Varieties of constructivism: a framework for comparison. In: STEFE, L.; NESHER, P.; COBB, P.; GOLDIN, G.; GREEER, B. (Ed). **Theories of Mathematical Learning**. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.p.335-350.

⁶ PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. As atividades de investigação, o professor e a aula de matemática. In: ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1999, Lisboa. **Actas do ProfMat99**. Lisboa: APM, 1999.p.91-101. CD-ROM.

⁷ BANCHI, H. BELL, R. The many levels of inquiry. **Science and Children**, Virginia, v.46, n.2, p.26-29, Oct. 2008.

No que diz respeito ao processo do PME e PMA notou-se que foram abordados alguns processos do PMA, visto que os estudantes mobilizaram diversas capacidades (busca por padrões, regularidades, visualização, etc.). Ressalta-se a importância do trabalho com o PMA, pois algumas questões são formalizadas, com caráter axiomático, considerando os níveis de ensino trabalhados.

No artigo B, os autores desenvolveram uma atividade na perspectiva da história da matemática, baseando-se nos pressupostos metodológicos relacionados à Sequência Fedathi. Esta metodologia está relacionada ao processo investigativo de experimentação em sala de aula que se assemelha ao processo de identificar, compreender e buscar soluções para um problema. Para tanto, investiga a Sequência de Fibonacci no campo dos inteiros, organizando o trabalho em quatro fases: 1ª fase denominada tomada de decisão, ou seja, apresentação do problema, cujo objetivo é reconhecimento/descoberta/identificação de um problema, problematizando com os estudantes algumas propriedades da Sequência de Fibonacci, proporcionando o debate de ideias gerais, utilizando do processo de argumentação e justificação em matemática; 2ª fase envolve os processos de compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Nesta fase os estudantes conjecturam ideias, potencializando o processo de generalização; 3ª fase relacionada à apresentação e organização de modelos matemáticos, na busca da solução de um dado problema, possibilitando a demonstração; 4ª fase, processo de prova, no qual se formaliza o modelo matemático. Neste momento, o docente explicita as propriedades envolvidas formalmente, explorando o processo de generalização e abstração.

Constata-se que a situação apresentada tem caráter axiomático, com deduções formais e com a utilização excessiva de processos algébricos. Cabe destacar que as fases trabalhadas/problematizadas na situação assemelham-se as ideias do PMA no que tange aos processos de abstrair e representar. No entanto, não foi observado o uso de algumas representações do objeto matemático, por exemplo, representação figural que pode potencializar a apreensão de significados relacionados ao entendimento de Sequências.

Verifica-se que a busca por padrões foi evidenciada (embora não se faça menção), no momento em que os estudantes buscam regularidades e generalizam um processo por meio de uma lei matemática. Salienta-se que, mesmo com o uso de uma linguagem formalizada, algumas noções devem ser problematizadas, pois a aprendizagem de conceitos matemáticos requer a resolução de diferentes situações e a mobilização de diferentes representações, buscando articulações entre elas.

No artigo C, os autores problematizam o uso do GeoGebra na aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, utilizam os pressupostos teóricos acerca do PMA e a Teoria dos Três Mundos de Tall (1991)⁸. Quanto aos Três Mundos, os autores explicitam cada uma das etapas baseados no entendimento de Tall (2002, 2004, 2007, 2008)⁹ a saber: Mundo conceitual/corporificado refere-se a primeira percepção sensorial do objeto matemático e como este é representado abstratamente na mente, ou seja, fundamenta-se nas experiências e ações no sentido de um “corpo” ao objeto; Mundo proceitual/simbólico desenvolve-se por meio de cálculos aritméticos e manipulação simbólica, e com estes generalizar as ideias. O termo proceitual foi desenvolvido por Tall, no qual define este termo como a dualidade do processo e do conceito de objeto matemático. Existe uma relação entre estes dois Mundos na medida em que a corporificação é utilizada para dar significado ao símbolo, e o simbolismo estrutura a corporificação; e, Mundo formal/axiomático estabelece-se por meio de prova formal a partir de axiomas e definições. Vale sublinhar que este mundo é uma combinação mais avançada dos dois primeiros.

Os autores apresentam atividades corporificadas entendidas como atividades que proporcionam um ambiente de exploração de conceitos, por meio de experimentação, formulação e conjecturas, buscando explorar os mundos corporificado e simbólico. Em relação à corporificação das Séries e Sequências, estas se tornavam corporificadas, pois a abordagem adotada pelos autores direcionava os discentes a perceber as diferenças entre as Séries convergentes e divergentes.

O software GeoGebra foi utilizado, pois os autores acreditam que pode contribuir na compreensão do conceito de Sequências e Séries, bem como o trabalho com as representações matemáticas, além de possibilitar a visualização e relacionar as diversas representações por meio das janelas Álgebra (representação algébrica), Visualização (representação gráfica e visualização do domínio natural) e Planilha (representação numérica), e também, por entenderem que o uso de softwares não apresentam os objetos matemáticos de maneira estática possibilitando a transição entre os Três Mundos, propostos por Tall.

⁸ TALL, D.O. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D.O (Org). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p.3 – 21.

⁹ TALL, D.O. Using Technology to Support na Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. First Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2002.

TALL, D.O. Introducing Three Worlds of Mathematics. 2004. Disponível em: <<https://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf>> .Acesso em: 15/10/2002.

TALL, D.O. Embodiment, symbolism, argumentation and proof. Keynote presented at the **Conference on Reading Writing and Argumentation**, in Taiwan, May, 2007.

TALL, D.O. The transition to Formal Thinking Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*. Netherlands: Springer Netherlands, v.20, n.2, 2008. p.5-24.

Os autores desenvolveram aspectos concernentes ao processo de transição do Ensino Médio para o Superior, à medida que exploraram outras Sequências Numéricas que vão além de PA e PG. Além disso, solicitaram aos estudantes justificativas e argumentos, no registro da língua natural, para as questões propostas. Não foi observada a utilização da representação figural como um meio para introduzir o conceito de Sequência, o que pode limitar a análise de padrões.

Ao tratar das ideias do PMA, os autores enfatizaram a exploração dos processos de formalizar, deduzir e definir situações. Além disso, utilizaram uma variedade de situações que possibilitavam compreender os conceitos de Sequências e Séries.

Após a descrição e análise expostas acima, optou-se por organizar o quadro 1, em que são explicitadas as categorias de análise desta pesquisa.

Quadro 1: Artigos mapeados quanto ao descritor Sequências e categorias de análise

Categorias	Trab. A	Trab. B	Trab. C
Entendimento de padrão.	X	X	
Compreensão de sequência numérica como função.	X	X	X
Processo de generalização e abstração (fases do padrão).	X	X	X
Utilização de diversas representações matemáticas.	X		X
Abordagem de sequência numérica no Ensino Médio, além de PA e PG. (se for o caso)	X	X	
Abordagem de sequência numérica no Ensino Superior, para além do tratamento algébrico. (se for o caso)			X

Com base do Quadro 1, percebe-se que dois artigos apresentam o entendimento de padrão. O artigo C aborda um tipo de padrão (sequências), mas não deixa explícita o entendimento de padrão como estruturador de conceitos matemáticos. Em relação à compreensão de Sequência Numérica como Função, os três artigos foram categorizados, principalmente porque vão além do estudo das progressões (PA e PG). Quanto à categoria fases do padrão, os três artigos foram classificados, pois a partir do momento que é exigida a descoberta de lei de formação o estudante generaliza e abstrai o objeto matemático. Sobre as diversas representações, entende-se que apenas o artigo B não contemplou esta categoria, pois representou o objeto apenas pelo registro numérico e algébrico, em detrimento das representações gráfica e pictórica.

É importante ressaltar que os autores dos artigos A, B e C não restringem a compreensão de Sequências como sendo somente PA e PG, e sim exploram as diversas Funções, por exemplo, a Sequência de Fibonacci. No que concerne à abordagem de Sequência Numérica no Ensino Superior, apenas o artigo C desenvolveu atividades neste nível de ensino.

1.2 MAPEAMENTO EM PORTAIS DE UNIVERSIDADES BRASILEIRAS DO CONCEITO DE SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Conforme mencionado na problematização, também se realizou um mapeamento em portais de universidades brasileiras acerca do conceito de Sequência Numérica. Nesta pesquisa, foram identificadas 10 dissertações que tratam do desenvolvimento do pensamento algébrico. Dentre estas foram analisadas quatro pesquisas que tratam do conceito de Sequência Numérica. Sendo denominadas de D, E, F e G para manter o anonimato dos autores e melhor organização dos dados.

Com relação à dissertação D, o autor desenvolveu um estudo sobre a convergência de Sequência Numérica com acadêmicos de um curso de Matemática que já tiveram contato com a noção de limite. Pretendeu-se investigar o conhecimento dos acadêmicos quanto à resistência em desagregar suas concepções acerca do conceito de limite de um movimento físico, de uma aproximação, haja vista que sua definição é estática para um movimento físico. Objetivou-se também discutir o que entendem por: “ter limite” e “ser limitado”, dentre outros aspectos relacionados à Sequência e seu domínio.

Com relação às situações, foram desenvolvidas cinco atividades aplicadas. O pesquisador utilizou os pressupostos da Engenharia Didática, proposta por Michèlle Artigue e o entendimento do conceito de limite e convergência de Sequências segue a perspectiva do pesquisador Bento de Jesus Caraça¹⁰.

Inicialmente, foram problematizadas as questões relacionadas ao índice de reprovação e evasão nos cursos de Matemática, principalmente, nas licenciaturas. Esta constatação dá-se, segundo o pesquisador, no momento em que os estudantes se deparam com os componentes curriculares relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. Também, apresenta a forma como os conceitos são expostos nestas disciplinas, muitas vezes de forma mecânica, focada no algoritmo, o que pode ocasionar problemas no entendimento dos conceitos.

As situações apresentadas tinham por objetivo explorar a questão dos dois tipos de infinito propostos por Caraça, e da mesma forma, discutir o significado dos termos “ter limite” e “ser limitado” que na Matemática possuem significados distintos. Elaboraram-se questionários e análise a partir do trabalho de Sierpinska¹¹. Também foram utilizados os

¹⁰ CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva Publicações, Lda.1998.

¹¹ SIERPINSKA, A. Obstacles Epistemologiques Relatifs a la Notion de Limite. **Recherches em Didactique des Mathematiques**. Grenoble. v.6. n.1. p. 5-67. 1985.

pressupostos de Aline Robert¹², que trabalha na perspectiva das Sequências Numéricas. Em seu trabalho, Robert procurou responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais são as dificuldades específicas da convergência de Sequências Numéricas?” A pesquisadora utilizou de questionários reunindo os resultados sobre os procedimentos utilizados pelos estudantes, classificando em modelos expressos. Sierpiska explicita o que Robert quer dizer com modelo expresso. A pesquisadora categorizou 1200 protocolos dos estudantes organizando-os esses modelos em: Modelos Primitivos, Modelos Dinâmicos, Modelos Estáticos e Modelos Mistos. Cabe destacar que cada modelo determina o grau de resposta aos questionamentos acerca da convergência de Sequências (monotonicidade, limite e definição).

Como mencionado anteriormente, a pesquisa realizou-se com estudantes do Ensino Superior, contando com 20 acadêmicos do 3º ano de um curso de Licenciatura de uma universidade particular do interior de São Paulo. A pesquisa dividiu-se em cinco momentos constituídos pelas seguintes etapas: elaboração do questionário, aplicação e análise. Dos questionários propostos, um era realizado individualmente na tentativa de verificar se os acadêmicos conseguiriam representar um conjunto infinito e finito, se entenderiam a letra n como variável ou associação de n com infinito, bem como outras questões relacionadas às noções de Sequência. Nas demais situações, os acadêmicos foram dispostos em duplas para a resolução.

A aplicação do questionário piloto¹³ teve duração de 50 minutos. Destaca-se uma das quatro questões abordadas na pesquisa, a que, segundo a pesquisadora, tornou-se a questão mais “provocativa”. A situação é a seguinte: $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{3n}{2+n}$. O objetivo desta questão foi de verificar como o acadêmico agiria diante de um número natural n , ou seja, um ponto isolado, quando tende a 2. O que os estudantes poderiam responder é que não faz sentido falar em limite de uma Sequência para n se aproximando de um ponto isolado. Porém, esperava-se que os estudantes responderiam que o limite daquela Sequência, quando n tende a 2, é $\frac{3}{2}$, substituindo o valor de 2 em n .

Cabe destacar que, para esta pesquisa discutiu-se apenas o questionário piloto, por este proporcionar verificar os conhecimentos prévios dos estudantes acerca do conceito de limite.

¹² ROBERT, A. *L’acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l’Enseignement Supérieur. Divers articles de Mathématiques*. 1982. 442f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Universidade Paris VII.

¹³ No item anexo consta o questionário piloto utilizado na dissertação D.

Após a aplicação dos questionários, constatou-se que das dez duplas, oito duplas acertaram as duas primeiras questões (consideradas introdutórias e simples). De modo geral, a maioria dos estudantes acertou as três primeiras questões e ninguém acertou a última questão, a situação apresentada acima.

Constatou-se que houve resistência entre os acadêmicos em compreender os termos “limite tende”, ou seja, poucos escreveram com clareza que o que varia conforme n aumenta é a Função e não o limite da Função.

Com relação ao exposto, observou-se que a representação figural e gráfica do conceito não foi evidenciada. O uso de software também não foi foco de análise do pesquisador. Acredita-se que o uso de um software, por exemplo, Geogebra poderia auxiliar os acadêmicos no entendimento na diferenciação de “ter limite” e “ser limitada”.

Com relação às fases de um padrão, uma das categorias utilizadas para analisar os trabalhos mapeados, observou-se que as primeiras situações atingiram as fases 1 e 2 (reconhecimento de um padrão/regularidade e características). As demais atividades apresentadas nos demais questionários exploraram a terceira fase (relacionada ao processo de generalização).

Notou-se que na maioria das situações os acadêmicos apresentaram processos de argumentação e justificação, o que contribuiu para o pesquisador identificar os obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de Sequência.

Com relação ao PMA, observou-se que esta pesquisa (dissertação D), mesmo não utilizando os pressupostos do PMA de forma explícita, destacou os processos de descrever e definir os conceitos. Cabe destacar que demonstrações com caráter axiomático não foram abordadas, pois não era o foco da pesquisa.

Esta pesquisa destaca a importância da formalização do conceito de Sequência Numérica quanto às fases do padrão, atingindo a terceira fase, relacionada ao processo de generalização e abstração. Ainda, na dissertação D analisada as situações propostas permitiram aos estudantes diferenciar o que significa ter limite e ser limitada.

A dissertação E visa compreender o pensamento algébrico por meio de Sequências de padrões geométricos, utilizando dos pressupostos da Engenharia Didática. O pesquisador utilizou dos pressupostos teóricos de Régine Douady (1987)¹⁴ e Raymond Duval (1993)¹⁵ para fundamentar sua pesquisa.

¹⁴ DOUADY, Régine. **Rapport enseignement-aprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadre. Cahiers de didactique**, n. 3,1987.

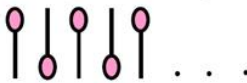
Inicialmente, o pesquisador expõe uma discussão acerca do campo da Álgebra, pelo fato de considerá-la um campo da matemática com concepções díspares e fonte de entendimentos confusos. Realizou uma análise a partir dos erros dos estudantes, por acreditar que por meio desta análise, algumas razões pelas quais a Álgebra é considerada “difícil”, tanto por parte dos estudantes como pelos professores, são justificáveis. Em contrapartida, salienta que uma das dificuldades em entender a Álgebra está no fato da dificuldade dos estudantes em interpretar os símbolos matemáticos, ou seja, está na forma como as respostas são apresentadas. Os estudantes não aceitam respostas do tipo “ $2x + 4y$ ”, por exemplo.

Esta pesquisa foi desenvolvida com uma turma da 6ª série do Ensino Fundamental (7º ano), composta por 30 estudantes em uma escola da grande São Paulo. Realizou-se uma Sequência Didática com oito atividades caracterizadas como experimentais¹⁶, trabalhadas em duplas. O tempo de aplicação da pesquisa foi de 14 aulas com 50 minutos cada aula. As atividades tinham por intenção provocar o uso de um símbolo para expressar a regra de formação de cada Sequência.

Devido à noção do campo da Álgebra limitar-se a apenas em um registro (algébrico), as atividades propostas destacaram a representação figural como ponto de partida para o trabalho com Sequências, realizando possíveis conversões e tratamentos. As primeiras situações são de caráter simples e de fácil resolução, visto que os estudantes já possuem, conforme o pesquisador, conhecimentos prévios para resolvê-las, à medida que as situações vão aumentando, o grau de dificuldade aumenta, pois há exigência de conversões e a fase do padrão se modifica e, ainda, as Sequências envolvem padrões diferenciados. A primeira situação proposta é apresentada na Figura 1 sendo escolhida por que ela apresenta todas as fases do padrão, percebendo-se os processos relacionados ao PMA, mostrando a forma que o grau de dificuldade aumenta:

Figura 1: Situação 1 apresentada na dissertação E

Observe a seqüência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando:



a) Qual o 12º elemento da seqüência?
 b) Qual o 23º elemento da seqüência?
 c) E o 54º elemento?
 d) Como você descreveria a regra de formação desta seqüência?

Fonte: Excerto retirado da dissertação E

¹⁵ DUVAL, Raymond. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, v. 5, 1993.

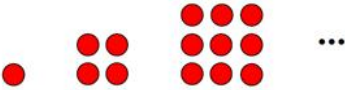
¹⁶ O pesquisador caracterizou as atividades como experimentais, pois compreende que os processos algébricos utilizam mais de uma forma de expressão para ser manifestado. Ainda, entende que a utilização das representações matemáticas bem como o aumento do grau de dificuldade à medida que as situações aumentam caracteriza a pesquisa como experimental.

Por meio desta situação, pretendia-se que os estudantes percebessem algumas regularidades na Sequência, observando a alternância em relação à orientação de cada pirulito. Esperava-se que os estudantes associassem as posições pares e o pirulito voltado para baixo e ímpar com relação aos pirulitos voltados para cima. No entanto, os estudantes associaram a figura com relação à posição da bolinha, se esta estiver para cima a posição é ímpar, caso contrário, é par. Essa constatação também está adequada. Não houve grandes obstáculos com relação a essa constatação.

Diferentemente da primeira situação, a situação 3 (Figura 2) não trata de figuras que alternam e sim seguem um padrão de construção que podem ser expresso por meio de uma lei matemática. O estudante precisa transitar entre a representação figural para a numérica e desta para a algébrica, o que exige um esforço cognitivo maior do que o exigido na situação 1.

Figura 2: Situação 3 apresentada na dissertação E

Observe a seqüência de figuras abaixo:



a) Desenhe a 4ª figura da seqüência.

b) Desenhe a 6ª figura da seqüência. Quantas bolinhas ela tem?

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu numero de bolinhas

d) A 10ª figura tem quantas bolinhas?

e) E a 21ª figura, tem quantas bolinhas?

f) O que fazer para descobrir o número de bolinhas de qualquer figura da seqüência?

Escreva uma regra.

Fonte: Excerto retirado da dissertação E

Esperava-se para esta atividade que os estudantes relacionassem a quantidade de bolinhas de cada figura de acordo com a sua posição ocupada na Sequência, ou seja, por meio do levantamento de conjecturas e hipóteses, identificando o padrão, sem ter que construir as próximas figuras. O pesquisador constatou que os estudantes conseguiriam generalizar a Sequência, encontrando uma lei de formação, ou seja, a terceira fase do padrão foi atingida. Cabe destacar que a professora/pesquisadora sempre realizava intervenções, fazendo questionamentos acerca da quantidade de bolinhas de acordo com a posição. Ainda, constatou-se que mesmo os estudantes compreendendo o padrão, nenhum conseguiu escrever a lei matemática de forma simplificada, ou seja, apenas a letra para registrar o número da posição vezes ele mesmo. Mesmo assim, há uma evolução no nível de abstração, em que o estudante começa a se desprender do aritmético, passando para o algébrico.

Diante disso, percebeu-se que a representação figural foi trabalhada como ponto de partida, justamente por este ser o foco da pesquisa, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

Ainda, o processo de justificação e argumentação foi observado, pois os estudantes deveriam registrar o que estava acontecendo com as figuras no momento em que a posição se modificava, utilizando diferentes registros de representação semiótica.

Algumas questões relacionadas ao PMA foram notadas, por possibilitar aos estudantes generalizar as situações, levantar conjecturas, representar situações de maneiras distintas. Por se tratar de uma pesquisa com o Ensino Fundamental, o caráter axiomático não foi proposto. Cabe salientar que, os processos relacionados ao PMA não se destina unicamente a estudantes do Ensino Superior e sua concepção e abordagem se dão de acordo com o nível de ensino o qual o estudante pertence.

Este trabalho possibilitou aos estudantes explorar Sequências Figurais, potencializando as três fases do padrão. Ainda, as transformações cognitivas foram discutidas e realizadas, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Da mesma forma, ampliaram seus conhecimentos relacionados à Álgebra por meio das situações, conseguindo resolvê-las com mais autonomia.

A dissertação F buscou desenvolver atividades com estudantes do Ensino Superior de um curso de Licenciatura em Matemática, problematizando conceitos relacionados à convergência de Sequências. Os pressupostos teórico-metodológicos seguem as ideias de Aline Robert¹⁷.

Este trabalho vem ao encontro com o trabalho analisado na dissertação D, mas, neste caso, a pesquisa foi realizada com estudantes que nunca estudaram limites. Segundo o pesquisador, seu trabalho visou romper com a linearidade com o qual os conceitos são trabalhados. Fundamentou-se também, nos elementos presentes na relação professor – aluno – saber, conhecida por contrato didático proposto por Brousseau¹⁸. Ainda, norteou-se nos estudos de Anka Sierpiska¹⁹ no que tange os obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de limite.

Nesta pesquisa não é solicitada que se defina uma Sequência convergente. Mesmo assim, algumas noções foram apresentadas, por exemplo, conceitos relacionados à

¹⁷ BOUR, M. C.. **Papier IREM**, n° 4. Ed. IREM de Paris Sud, 1980 (Anexo à tese de Aline Robert).

¹⁸ BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7, n° 2. Grenoble, 1986.

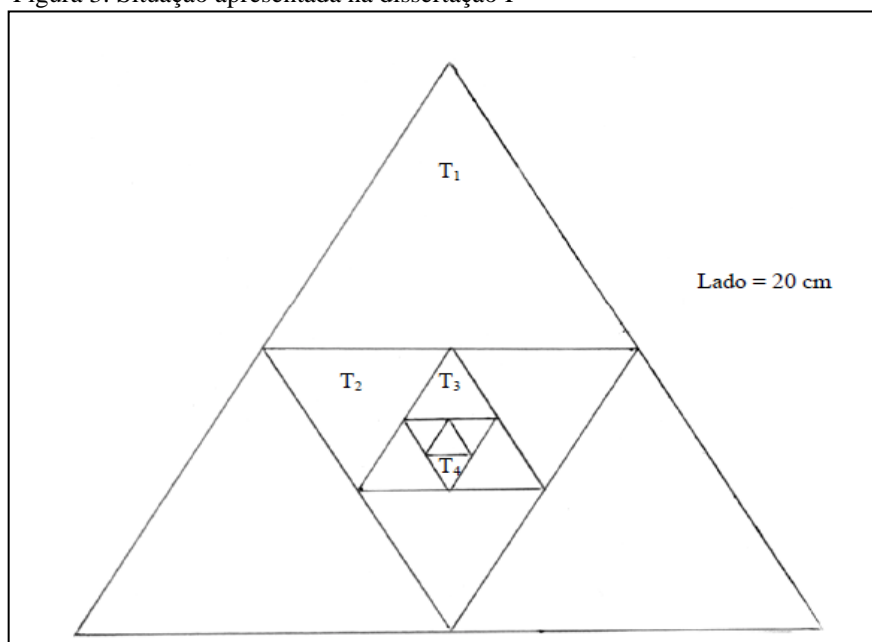
¹⁹ SIERPINSKA, A.. **Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite**. RDM, vol. 6, 1985.

monotonicidade de Sequências bem como o cálculo do limite, quando uma Sequência é convergente. Ainda, os processos históricos foram potencializados, contribuindo no entendimento do conceito. O pesquisador analisou os erros dos estudantes, considerando-os fundamentais na análise dos resultados e possíveis justificativas. As definições de erro e obstáculo seguiram as concepções de Aline Robert, Brousseau, Iglori, Sierpinska e Michèle Artigue.

A pesquisa foi realizada com uma turma composta por 27 estudantes, no final do segundo semestre do primeiro ano, de um curso de Ciências e Matemática em São Paulo. Inicialmente foi realizada uma pré-experimentação por meio de um problema de sondagem, a fim de verificar as concepções com relação ao entendimento dos estudantes acerca de infinito. As quatro primeiras questões da pré-experimentação foram elaboradas com o objetivo de encaminhar o estudante à questão principal e a quinta situação teve por intuito verificar o entendimento de convergência. Cabe deixar claro que, o estudante submete-se a uma avaliação de um assunto que não havia estudado ainda, ou seja, não compete ao ano que está cursando.

De acordo com a pesquisadora, as primeiras quatro questões quase não obtiveram erros analisou-se somente a quinta questão, apresentada na figura 3:

Figura 3: Situação apresentada na dissertação F



Fonte: Excerto retirado da dissertação F

A figura acima explicita a construção de triângulos a partir da união dos pontos médios dos seus lados. Pede-se que seja calculado o perímetro de T_1 , T_2 , T_3 e T_4 . Depois é

solicitado que se some os perímetros encontrados nos quatro primeiros retângulos. Por conseguinte, de seis primeiros triângulos, e em seguida de nove, dez, onze e doze primeiros triângulos. A última questão (questão 5) exigia que o acadêmico percebesse a quantidade necessária de triângulos sabendo que a soma de perímetros fosse igual a 120 cm.

Com relação à questão 5, observou-se que apenas dois estudantes perceberam que a soma dos perímetros não atinge 120. Notou-se que alguns estudantes utilizaram de fórmulas para resolver, chegando a utilizar o termo geral de uma PA, sendo que a situação se trata de uma PG.

A atividade inicial (pré-experimentação) contou com a representação figural do conceito, que pode contribuir no processo de construção do conhecimento matemático. Ainda, foram trabalhadas questões relacionadas ao conceito de Função e após isso especificidades do conceito de Sequência, por exemplo, monotonicidade.

Com relação aos processos de justificação e argumentação, estes foram evidenciados, no momento em que os estudantes deveriam levantar de conjecturas e justificá-las, mobilizando diferentes registros de representação semiótica.

Ainda, com respeito ao PMA, observou-se inicialmente que algumas questões poderiam ser alteradas (por se tratarem de estudantes do Ensino Superior), ou seja, outros tipos de Sequências figurais poderiam ser explorados, bem como o trabalho com a representação gráfica, haja vista que o intuito era de explicitar o conceito de limite.

A dissertação G apresenta uma Sequência Didática desenvolvida com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental para introdução à Álgebra, em especial, a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões apresentados sob a forma de problemas. Assim, tinha por objetivo verificar se o uso de Sequências aritméticas e padrões apresentados na forma de problema podem contribuir na construção do pensamento algébrico.

Primeiramente, o pesquisador aborda as questões do desenvolvimento do pensamento algébrico, de forma similar ao apresentado na dissertação F. O quadro teórico apresentado baseou-se nos pressupostos de Fiorentini²⁰ (2004) e Robert²¹ (1998). Salienta-se que o autor da dissertação G aponta os resultados da dissertação F, como forma de fundamentar sua pesquisa. Ainda, apresenta outras pesquisas concernentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

²⁰ FIORENTINI, D; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Unicamp, 2004.

²¹ ROBERT, A. Ferramentas de análise de conteúdos matemáticos à ensinar no liceu e na universidade. Em: **Recherches em didactique des Mathématiques**. vol. 18, nº 2, p. 139-190, 1998.

Verifica-se que há quadro teórico rico, utilizando os Parâmetros Curriculares Nacionais²², as avaliações de larga escala e demais pesquisadores, demonstrando a importância da Álgebra na matemática escolar.

Como dito inicialmente, a pesquisa foi realizada com 28 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada de Ensino em São Paulo. Da mesma forma que nas pesquisas anteriores, os estudantes trabalharam em duplas, realizando as situações no horário de aula regular. Também, foi realizada uma atividade de sondagem, para verificar os conhecimentos dos estudantes acerca do tema.

A sequência didática foi desenvolvida com o objetivo de demonstrar uma nova proposta de ensino no processo do desenvolvimento do pensamento algébrico com estudantes do Ensino Fundamental. Acredita-se que a proposta seja considerada inovadora, pois a pesquisadora potencializou os pressupostos da Engenharia Didática, enfatizando a construção de expressões algébricas por meio dos padrões presentes nas situações – problemas. Para tanto, tomou-se como base a análise dos resultados os estudos de Fiorentini (2004), que subdividiu o processo do desenvolvimento do pensamento algébrico em três fases: préalgébrica, fase de transição do aritmético para o algébrico e um pensamento algébrico mais avançado.

Nesta análise será apresentada apenas a questão de Sondagem, por acreditar que esta situação determina o grau de conhecimento dos estudantes. A atividade proposta é a seguinte:

Figura 4: Situação de Sondagem da dissertação G

<p>1. Apertos de mão</p> <p>Cinco pessoas estiveram presentes a uma reunião. Ao chegar, cada uma cumprimentou as demais.</p> <p>a. Quantos apertos de mão foram dados? Registre como pensou.</p> <p>b. Quantos apertos de mão seriam dados se estivessem presentes: (Preencha a tabela com os resultados)</p> <p>6 pessoas?</p> <p>7 pessoas?</p> <p>10 pessoas?</p> <p>20 pessoas?</p> <p>E um número n qualquer de pessoas?</p>	<p>c. Escreva uma expressão que permita calcular o número A de apertos de mão entre um número n qualquer de pessoas.</p>
--	--

Fonte: Excerto retirado da dissertação G

²² BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, SEF, 1998.

Ainda, uma tabela foi proposta para auxiliar na organização dos dados. Esperava-se que os estudantes respondessem as perguntas até chegar ao processo de generalização, por meio da observação de algumas regularidades. Alguns tratamentos equivocados poderiam ser realizados, no momento em que se cada pessoa realiza quatro cumprimentos e aplicar o princípio multiplicativo, realizando a operação quatro vezes cinco.

Diferentemente da dissertação E, esta tinha por objetivo verificar se os estudantes compreendem padrões aritméticos por meio de situações-problema. Destacou-se, na dissertação G que inicialmente, os estudantes não conseguiram generalizar uma Sequência, seja ela figural ou numérica, pois estes tiveram dificuldades de desprender-se do tratamento numérico. Ao serem propostas mais situações, os estudantes conseguiram avançar seus pensamentos, generalizando as Sequências, sempre com a intervenção da pesquisadora.

Com relação às representações matemáticas, em G observou-se a representação no registro da língua natural e numérica para o desenvolvimento das atividades.

Quanto às fases de um padrão, estas foram evidenciadas à medida que a terceira fase (processo de generalização e abstração) foi problematizada em todas as situações.

Ainda, os processos de justificação e argumentação foram evidenciados, no momento em que os estudantes deveriam registrar seus pensamentos. Com relação aos pressupostos do PMA, tendo em vista o nível de ensino, evidenciaram-se algumas características desta perspectiva, principalmente no que se refere aos processos de generalizar, representar e justificar.

A dissertação analisada norteou o entendimento dos processos algébricos por meio do uso de situações – problema, contribuindo para o desenvolvimento do conceito de Sequências.

Cabe destacar que a intenção da pesquisadora era de desenvolver o pensamento matemático algébrico dos estudantes, utilizando-se de Sequências no desenvolvimento, ou seja, o foco da pesquisa não era compreender o conceito de Sequência e sim utilizá-la de modo a mobilizar diversos conceitos.

1.3 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: ALGUNS ENTENDIMENTOS

De acordo com as NCTM (2000) todos os estudantes necessitam compreender os processos algébricos, pois a Álgebra refere-se às estruturas abstratas e sua utilização na resolução de problemas é expressa por meio de símbolos. Contudo, a utilização dos símbolos

deve ser desenvolvida, partindo das vivências/experiências dos estudantes com números, objetos geométricos, análise de dados, entre outros. Este documento sublinha que:

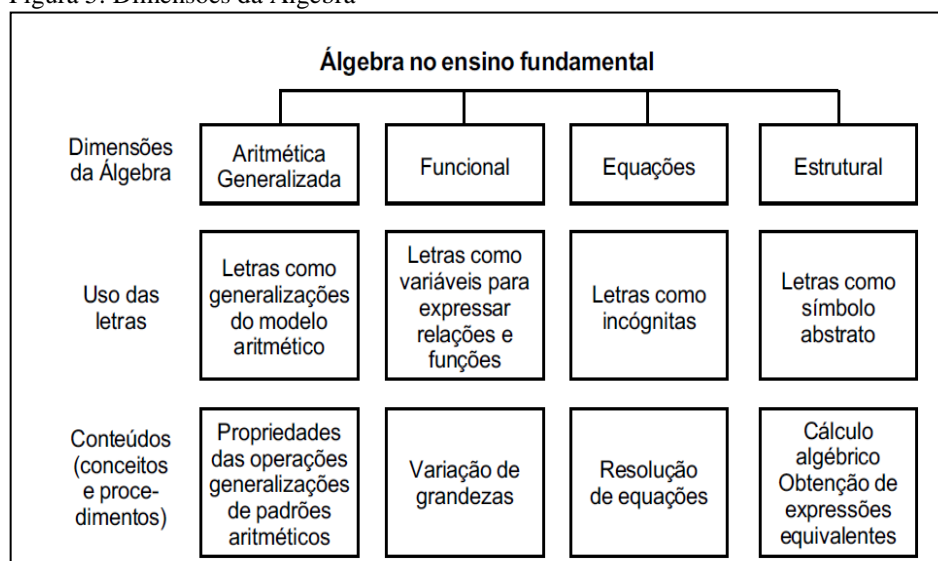
Considerando a álgebra como fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade, os professores poderão ajudar os alunos a construir uma base sólida baseada na compreensão e nas suas experiências como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado no 3º ciclo e no secundário. Por exemplo, a experiência sistemática com padrões poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função (Erick Smith, para edição) e a experiência com os números e as suas propriedades cria bases para o trabalho posterior com símbolos e expressões algébricas. Ao aprenderem que as situações podem, frequentemente, ser descritas por meio da matemática, os alunos poderão começar a desenvolver noções elementares de modelação matemática. (NCTM, 2000, p.39)

A Álgebra é identificada e compreendida na Educação Básica, geralmente, como um processo de manipulação de símbolos (NCTM, 2000). Porém, a Álgebra vai além da manipulação de símbolos, ou seja, “os estudantes necessitam compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registrar ideias e tirar ilações face a certas situações” (NCTM, 2000, p.39).

Ainda, com relação ao papel das dimensões e funções no currículo da Álgebra, Usiskin (1995) afirma que sua utilização ocorre de maneira reduzida nos livros do primeiro ano (do Ensino Fundamental) e seu tratamento é “relativamente insignificante e só passam a ter importância na álgebra no segundo ano” (p.12). São quatro concepções relacionadas ao processo algébrico, a saber: álgebra como aritmética generalizada; álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; álgebra como estudo de relações entre grandezas e álgebra como estudo das estruturas.

Com relação às dimensões da Álgebra, os PCN (1998) explicitam quatro concepções, similares às ideias de Usiskin, como se observa na Figura 5:

Figura 5: Dimensões da Álgebra



Fonte: BRASIL (1998, p. 116)

Em relação às quatro dimensões da Álgebra os PCN (BRASIL, 1998) mencionam que, geralmente, o ensino reduz-se a equações, sem articulação as demais dimensões ao longo do Ensino Fundamental, em particular, com a dimensão funcional. O trabalho com dimensão funcional, na maioria das vezes, é deixado para o Ensino Médio, principalmente, para o 1º ano desta etapa da Educação Básica. Destaca-se a dimensão funcional, pois esta permite aos estudantes estabelecerem relações entre grandezas, bem como analisar os padrões presentes em fenômenos da natureza, de outras áreas do conhecimento, por exemplo, Física, Química, Biologia e Artes.

Quanto ao estudo dos padrões, Pires e Silva (2013) compreendem que o trabalho relacionado com padrões torna o estudo de conceitos matemáticos mais significativos. Para estes pesquisadores padrão não é um conceito matemático, mas um eixo estruturador de inúmeros conceitos. Por exemplo, propor atividades que envolvam Sequências Geométricas explorando os números triangulares, quadrados perfeitos, pentagonais entre outros, possibilitando aos estudantes estabelecer relações entre aritmética, álgebra e geometria (PIRES, SILVA, 2013).

Nesta perspectiva, pode-se definir a Matemática como a ciência de padrões e ordem, conforme afirma Devlin (2002) e reforça-se a importância do trabalho do professor de propor situações em que a descoberta de padrões e conexões entre conceitos seja o foco principal.

Segundo Vielmo (2012), ela é uma ciência que auxilia e possibilita entender diversas coisas ao nosso redor. O estudo de padrões possibilita aos estudantes desenvolverem capacidades para reconhecê-los, notando regularidades, generalizando, na busca da

compreensão de situações, sejam próprias da matemática, das práticas sociais ou de outras áreas do conhecimento.

Ainda, Herbert e Brown (1997) destacam a importância do processo investigativo no estudo de padrões, enunciando três fases, a saber: 1) *procura de padrões*, na qual há uma busca por informações importantes; 2) *reconhecimento de um padrão*, no qual se busca a descrição, análise de propriedades matemáticas e representação de diversas formas do padrão para melhor compreendê-lo; 3) *generalização de um padrão*, processo relacionado à justificação e aplicação.

As Sequências Numéricas são um tipo de padrão, matematicamente definido por “uma lista de números escritos em uma ordem definida”. Na linguagem matemática, podemos representar uma sequência por: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ (STEWART, 2010). Entende-se que a definição matemática do conceito não é suficiente para sua aprendizagem. Para que esta aprendizagem ocorra, é importante análise de diferentes situações nas quais o conceito está envolvido, a mobilização e coordenação de diferentes representações matemáticas e a utilização dos procedimentos relacionados (propriedades, algoritmos) às representações e ao conceito.

No estudo de Sequências Numéricas há possibilidade do trabalho com o processo de generalização e abstração. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN+ (BRASIL, 2000) na abordagem de Sequências deve ocorrer o estabelecimento de relações com o conceito de Função e outros conceitos matemáticos, geralmente, abordados no Ensino Superior. Por exemplo, no estudo da Progressão Geométrica (PG) pode-se abordar ideias de infinito, sequência limitada, limite, convergência, entre outros, essenciais para o desenvolvimento de diversas capacidades superiores, por exemplo, comunicar e representar, generalizar e abstrair, relevantes para a compreensão de conceitos matemáticos do Ensino Superior.

Outro exemplo, ao analisar a Sequência decrescente, $a_n = (-3, -9, -27, -81, -243, \dots)$, verifica-se que a razão é constante, neste caso, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, pois ao dividir o termo seguinte pelo anterior, se obtém uma regularidade. Sabendo que o primeiro termo desta PG é -3, ou seja, $a_1 = -3$ e $q = 3$ $a_1 < 0$ e $q \geq 3$, conclui-se que a Sequência é decrescente. Ainda, há possibilidade de determinar uma lei matemática que defina esta Sequência e verificar algebricamente se é crescente ou decrescente. A lei que determina esta Sequência é dada por $a_n = -3 \cdot 3^{n-1}$, sendo decrescente, pois: $-3 \cdot 3^{n-1} > -3 \cdot 3^{n+1-1}$; $-3 \cdot 3^{n-1} > -3 \cdot 3^n$; visto que $a_n > a_{n+1}$ para

todo $n \geq 1$. Da mesma forma, é importante apontar algumas ideias relacionadas à Sequência Limitada e Limite de Sequência.

Cabe destacar que algumas questões são apresentadas no Ensino Médio, como a observação das regularidades e padrões, bem como outras são situações problematizadas no Ensino Superior, por exemplo, aspectos relacionados à demonstração (mostrar algebricamente se uma Sequência cresce ou decresce).

Diante do exposto, entende-se que alguns conceitos matemáticos estudados no Ensino Superior podem e devem ser abordados no Ensino Médio. Os PCN+ salientam que:

O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as idéias de convergência e de infinito. Essas idéias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2000, p.118)

Reitera-se que essas ideias podem ser exploradas no Ensino Médio, por meio de situações que permitam trabalhar intuitivamente os conceitos, de modo que o formalismo matemático e o rigor sejam desenvolvidos no Ensino Superior. No que concerne ao estudo de Séries de Potência, uma PG infinita de razão menor que um possui soma, que é o limite de Sequência de somas parciais. Stewart (2010) aborda em sua obra no momento do cálculo do raio de convergência para alguns casos, utilizando de alguns testes para verificar a convergência.

Contudo, o trabalho com os pensamentos intuitivos e dedutivos precisa encontrar uma “harmonia”, caso contrário, a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior se torna para a maioria dos estudantes complicada.

Elias, Barbosa e Savioli (2011) afirmam que há uma complexa transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, porque, na maioria das vezes, os conceitos matemáticos abordados no Ensino Médio enfatizam apenas o caráter elementar, descritivo, sem preocupação com ampliação dos conceitos. Já no Ensino Superior, os conceitos são trabalhados sob a perspectiva axiomática (definição) sem, geralmente, retomar e/ou relacionar com o caráter elementar.

Nesta perspectiva, Nasser (2012, p. 94) destaca que “enquanto na Matemática elementar os conteúdos seguem uma coerência, na Matemática avançada, os alunos devem construir entidades abstratas, por meio de deduções a partir de definições formais”. Assim, a evolução do pensamento matemático elementar para o avançado envolve a transição da

descrição para a definição, do convencimento para a demonstração. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva, levando à abstração.

Para Tall (apud IGLIORI, 2012) compreender um processo matemático significa realizar a passagem do processo de descrição para a definição, isto acontece quando os estudantes desencadeiam uma sequência de ações. Por exemplo, se considerar a operação “ $3 + 4$, o símbolo $+$ indica para um estudante jovem uma instrução para a operação de adição; e para um estudante mais experiente indica o conceito de soma que resulta em 7” (ibidem, p. 108).

Diante disso, há uma discussão referente à abordagem desses conceitos em níveis diferentes, a saber: Como um mesmo conceito pode ser trabalhado na Educação Básica e no Ensino Superior? Entender as características do Pensamento Matemático Avançado pode contribuir na problematização desta questão.

Na busca da compreensão das características do PMA e o processo de transição dos processos díspares relacionados a descrever e definir, Dreyfus (apud ELIAS, BARBOLSA & SAVIOLI, 2011) afirma que os processos de abstração e representação são processos do pensamento matemático elementar e avançado. Contudo, a complexidade com que é trabalhado é o que difere cada um destes processos. Ressalta-se que a transição do pensamento matemático elementar para o avançado é complexa e exige mudança curricular, tanto na Educação Básica como em cursos de Licenciatura.

O PMA consiste: “[...] numa grande série de processos que interagem entre si, como por exemplo, os processos de representar, visualizar, generalizar, ou ainda outros tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar sintetizar, abstrair ou formalizar” (DREYFUS apud COSTA, 2002, p.257). Em outras palavras, há uma sequência de passos necessários para o processo de abstração matemática, o que difere do Pensamento Matemático Elementar (PME), que consiste em processos descritivos, sem caráter formal.

De acordo com Machado e Bianchini (2013) a abstração é um processo de construção de estruturas mentais por meio de propriedades e relações entre objetos matemáticos, atentando para as estruturas envolvidas. A abstração é desenvolvida a partir de subprocessos: generalização e sintetização. Assim, entende-se generalizar como um processo de expansão de um domínio de validade, enquanto sintetizar significa a formação de um objeto matemático a partir de combinações de partes. Assim como os processos de representação e abstração, os subprocessos generalizar e sintetizar são indissociáveis (MACHADO E BIACHINI, 2013).

No que tange as representações matemáticas, Dreyfus (apud FROTA, 2012) sublinha que no processo do PMA as representações podem ser mentais (implícitas) ou simbólicas, de

configuração oral ou escrita, designando uma comunicação de ideias entre os conceitos matemáticos. Desta forma, para que se tenha sucesso em matemática, torna-se necessário que os estudantes consigam construir capacidades mentais ricas, ou seja, utilize das representações, realizando conexões entre os diferentes aspectos de um mesmo conceito.

Neste sentido, Frota (2012, p. 98) diz que as “representações mentais construídas são explicitadas na forma de registros, que podem ser orais ou escritos. O acesso a um objeto matemático mental depende de um sistema de representação para designá-lo”. Afirma também que é necessário para a aprendizagem de conceitos matemáticos o uso de representações semióticas, caracterizando a atividade matemática sob a perspectiva cognitivista.

A representação de um conceito parte da perspectiva de exemplificar uma determinada situação e acontece nos registros: simbólico, mental, escrito, pictórico, língua natural, gestual e outros.

É importante destacar que Dreyfus (1991) defende a necessidade de articular e alternar entre as várias representações de um mesmo objeto matemático, para tanto, articular e alternar são subprocessos da representação. No que concerne o estudo das representações matemáticas, Duval (2013) elaborou a teoria denominada Registros de Representação Semiótica, na qual enfatiza a importância das representações semióticas (língua natural, representação algébrica, representação numérica e representação figural ou gráfica) e suas transformações cognitivas na aprendizagem de Matemática, visto que o objeto matemático só é acessível por meio de representações. Este pesquisador utilizou o termo “registro” para diferenciar dos outros sistemas semióticos trabalhados fora da matemática. As transformações cognitivas que ocorrem na atividade matemática foram denominadas por tratamento e conversão. O tratamento é uma transformação dentro do mesmo registro. Já a conversão é uma transformação entre registros, por exemplo, ao analisar a seguinte sequência: (3, 5, 7, 9, 11, 13,...) (registro numérico) é solicitado que seja determinada a lei que define esta sequência (registro algébrico), ou seja, há uma transformação entre dois registros.

O trabalho com a transformação cognitiva conversão é importante, pois os registros são parciais entre si, ou seja, cada registro apresenta seus aspectos e peculiaridades. Para Duval (2013) não é possível conduzir e compreender a atividade matemática sem o uso das representações semióticas e suas respectivas conversões e tratamentos. Este teórico afirma que há certo enclausuramento de registros de representação, porque, geralmente, propõem-se atividades que requerem apenas a mobilização de uma representação. Contudo, ao propor sequências numéricas há a possibilidade de conversão do registro numérico (registro de

partida) para outros registros, por exemplo, figural, algébrico e gráfico, o que contribuiria no entendimento das três fases do padrão.

Ainda, de acordo com Iglioni (2012) a concepção de PMA não se torna clara, pois há várias interpretações e entendimentos ao se referir o qualificativo “avançado” a matemática ou ao pensamento. Para esta autora, referir-se a matemática avançada não se relacionaria com a educação matemática, pois, não há uma comparação entre conceitos matemáticos mais elementares ou intuitivos. Desta forma, o qualificativo avançado estaria relacionado com o pensamento, ou seja, “um processo que ocorre na mente do estudante”.

Ao tratar das ideias do PMA e Sequências Numéricas, destacam-se as noções de convergência de sequências e da mesma forma, o conceito de função, que está estritamente relacionado, pois, ao analisar a convergência de uma sequência (ou série) a associação com funções é pertinente para o cálculo do limite.

Ainda, Nunes (2001) em seu trabalho destacou alguns obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de limite e, por conseguinte Sequência Numérica no Ensino Superior que são baseados no estudo de Sierpiska (no estudo de noções de limite) e Bour (na construção do conceito de convergência de sequências). Nunes (2001) apresenta cinco obstáculos: a) horror ao infinito; b) obstáculos ligados à noção de função; c) obstáculos geométricos; d) obstáculos lógicos; e) o obstáculo do símbolo. Também, para Sierpiska (apud Nunes, 2001) o primeiro obstáculo é considerado o mais relevante, na medida em que estudantes, muitas vezes, confundem infinito com limitado.

Assim sendo, compreender o conceito de Sequência sob a ótica do PMA associando-a com o conceito de Função torna-se necessário para o seu entendimento. Ainda, por meio da exploração dos padrões presentes na Matemática contribuem para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Desta forma, a análise dos livros didáticos e referências são realizadas.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, expõem-se as opções metodológicas escolhidas para esta pesquisa. Ainda, são explicitadas as categorias de análise. Da mesma forma, algumas especificidades relacionadas à escolha das coleções/seções estarão evidenciadas. Por fim, dados quantitativos com relação aos materiais analisados são descritos nos procedimentos metodológicos.

2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

A escolha teórico-metodológica baseou-se em uma pesquisa qualitativa, pois está atrelada a questão da pesquisa e aos objetivos do estudo. De acordo com Borba (2004) a pesquisa qualitativa vem ganhando destaque nas pesquisas em Educação Matemática e sua definição está em constante movimento, ou seja, há concepções diversas sobre este tipo de pesquisa.

O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento. (BORBA, 2004, p.2)

Neste sentido, a pesquisa qualitativa analisa as características do trabalho, dando enfoque à compreensão e discussão acerca dos dados obtidos. A análise torna-se subjetiva, pois ao utilizar este tipo de opção metodológica são feitas inferências a respeito dos dados obtidos, o que não impossibilita análise de dados quantitativos. Cabe salientar que nesse processo o pesquisador não é neutro no processo de análise, pois se torna necessário apontar as limitações e potencialidades da análise qualitativa, na medida em que se fazem inferências e busca evidenciar as características da análise. O pesquisador, por sua vez, problematiza os resultados e não apenas, os apresenta.

Dentre as possibilidades de se realizar uma pesquisa qualitativa optou-se pela análise documental. Em conformidade com Chaumier (1988, 1989 apud BARDIN, 2011, p. 51) a análise documental é definida como: “uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob uma forma diferente da original, a fim de facilitar, num estado ulterior, a sua consulta e referência”.

Bardin (2011) salienta que a análise documental preconiza o armazenamento de informações, obtendo quantidade significativa (aspectos quantitativos) e o estabelecimento de relações pertinentes (aspectos qualitativos). A análise documental trabalha com documentos, constituindo um banco de dados.

Os documentos de análise do presente estudo foram: Livros Didáticos do Ensino Médio de três escolas do município de Itaqui/RS e as obras presentes em quatro ementas do curso de Matemática²³ – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA Campus Itaqui/RS. O critério de escolha das ementas deu-se pela constatação do conceito de Sequência Numérica nessas ementas, ou seja, o PPC²⁴ do curso foi analisado e verificou-se o trabalho com a álgebra nessas ementas. No decorrer da pesquisa, optou-se por analisar somente o componente curricular Cálculo IV, visto que trata com especificidade do conceito de Sequência Numérica. Desta forma, analisou-se uma seção específica de um capítulo de uma obra que consta como bibliografia básica da componente curricular.

Por conseguinte, a técnica escolhida para análise dos dados foi a análise de conteúdo. De acordo com Bardin (2011) análise de conteúdo é “um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens”. (p.44). Estas técnicas da análise de conteúdo possibilitam ao pesquisador realizar inferências, ou seja, afirmações/hipóteses sobre a pesquisa que pretende realizar, fundamentando-as com o assunto estudado. Nesse processo, torna-se necessário que se identifique a fonte (emissor), ou seja, para quem é destinado o estudo. Além disso, deve-se utilizar de categorias de análise para justificar o seu trabalho. Após isso, deve-se pensar o que se pretende analisar (mensagem), para quem está destinada a análise e por fim, o processo de decodificação é importante, na qual se tem um olhar crítico e específico que identifique os efeitos que a pesquisa trará para o seu trabalho.

No processo de Análise de Conteúdo torna-se necessário que o pesquisador realize uma pré-análise, ou seja, identifique os documentos/materiais que irá utilizar na sua pesquisa, fazendo uma leitura flutuante. Escolhido e definido os objetivos, categorizar a pesquisa é importante, mesmo que possa limitar a pesquisa. Mas, podem surgir, ao longo da pesquisa, categorias posteriores, que não são descartadas. No entendimento de Bardin (2011), há concepções díspares com respeito à seleção de categorias. Julgamos necessária a sua utilização, na medida em que se possa nortear a análise e posteriores inferências.

²³ As quatro ementas são concernentes aos componentes curriculares de Teoria Elementar das Funções (Pré-Cálculo), Laboratório de Ensino em Matemática I e III e Cálculo IV.

²⁴ Projeto Político Curricular.

Em relação à pré-análise, nesta pesquisa, foram organizadas as ideias iniciais, o que Bardin (2011) denomina a definição do corpus documental da pesquisa. Para isso, serão selecionadas as coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD (2015), tomando como critério que estas coleções sejam as escolhidas por professores das escolas da rede estadual de Itaquí/RS e no Ensino Superior pelo corpo docente da instituição. Ainda, na pré-análise serão elencados indicadores que permitirão verificar a forma como as sequências são apresentadas nas coleções de livros didáticos e nas quatro ementas do curso de Matemática-Licenciatura.

Estes indicadores têm como aporte teórico as pesquisas sobre Pensamento Algébrico (Kern, 2012; Ponte, 2009; PCN, 1998; BRASIL, 2000; NCTM, 2000; COSTA, 2002; VALE, 2008), Pensamento Avançado (DREYFUS (1991 apud GERETI et.al 2013); TALL, 1991), Sequências (VIELMO, 2012; NUNES, 2001; SANTOS, 2005; GRECCO, 2008; MODANEZ, 2003) e as propostas curriculares (NCTM, 2000; BRASIL, 1998).

Ao explorar os materiais e definir as categorias, o tratamento surge para que se possa apresentar os resultados e problematizá-los. Nesta fase da Análise de Conteúdo as coleções de livros didáticos e as ementas foram analisadas a partir dos indicadores (aporte teórico), descritos anteriormente.

Para a análise foram selecionadas atividades que tratam do desenvolvimento do pensamento algébrico e com mais afinco o conceito de Sequências em duas coleções de livros didáticos e no capítulo específico de Sequências, do Ensino Superior. As coleções de livros didáticos foram denominadas de C1 e C2 e a seção foi denominada de C3, para manter a coerência no momento de discutir e problematizar os dados das fontes.

Após a análise inicial das coleções e da seção do livro do Ensino Superior foram propostas as seguintes categorias: a) entendimento de padrão como característica estrutural dos conceitos matemáticos; b) compreensão de sequência numérica como função; c) processo de generalização e abstração (fases do padrão); d) diversas representações matemáticas; e) transformações cognitivas; f) abordagem de sequência numérica no Ensino Médio, além de PA e PG; g) tratamento dado ao conceito de limite; h) classificação das sequências numéricas no Ensino Superior quanto à convergência.

Para aprofundar a análise foram organizados três quadros no software *Microsoft Excel for Windows*®, com as seguintes informações: Capítulo, Atividade, Página, Sequência Finita ou Infinita, Lei Matemática, Transformações Cognitivas (Tratamento e Conversão), Dimensões da Álgebra (Aritmética Generalizada, Equação, Funcional e Estrutural, conforme as recomendações dos PCN) e Fases do Padrão. A partir da organização dos quadros, pode-se

obter uma noção geral das atividades, bem como sua disposição ao longo dos capítulos/seções. Neste sentido, as inferências foram realizadas. Após isso, as interpretações das mensagens presentes nos documentos fizeram-se necessárias, para utilizar dos resultados de análise para fins teóricos, estabelecendo relações com estudos realizados.

É importante registrar que foram selecionadas apenas as atividades propostas, ou seja, aquelas que os estudantes/acadêmicos precisam resolver, gerando um total de 415 atividades/situações relacionadas ao conceito de Sequência Numérica nas duas coleções analisadas e na seção específica do Ensino Superior. Destas atividades, 139 pertencem à coleção C1 e 174 à coleção C2. Na seção específica do livro de Cálculo, denominada C3, observou-se um total de 102 situações que problematizam nesta obra/livro o conceito de Sequências no Ensino Superior.

2.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS FONTES DE PRODUÇÃO DE DADOS

Nesta seção, são apresentadas as características gerais das coleções de livros didáticos do Ensino Médio analisados e do livro elaborado para o estudo de conceitos matemáticos no Ensino Superior.

2.2.1 CARACTERÍSTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS: O PLANO NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

O guia do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), utilizado nesta pesquisa, apresenta as resenhas dos livros aprovados no ano de 2015. Este guia é elaborado com o objetivo de contribuir na escolha do professor do texto didático que o apoiará no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, avaliando as características de cada livro de maneira que sua escolha se adeque ao contexto escolar em que os estudantes pertencem.

Além das resenhas, há textos ao longo do guia que auxiliam o docente no processo de formação continuada. Ao final do guia constam as considerações gerais sobre livros didáticos para o Ensino Médio, bem como são apresentadas algumas aproximações e distanciamentos entre as obras resenhadas.

Para esta pesquisa são importantes as avaliações expostas no guia para as coleções C1 e C2 (já definidas anteriormente). A coleção C1 é caracterizada por apresentar contextualizações dos conceitos matemáticos, desde a apresentação dos conteúdos como em atividades propostas. Contudo, a ordem das explanações é da seguinte forma: Definição –

Situações Resolvidas – Atividades de Aplicação da teoria. Entende-se que esta abordagem restringe a participação dos estudantes na elaboração conceitual.

Em C1 as seções e capítulos estão dispostos da seguinte forma: No primeiro ano do Ensino Médio está subdividido em quatro unidades com nove capítulos. Os conteúdos seguem a ordem: Conjuntos: operações; conjuntos numéricos; intervalos; Produto cartesiano; funções: conceito; gráfico; Função afim: gráfico; proporcionalidade e função linear; inequações do 1º grau; Função quadrática: gráfico; inequações do 2º grau; Potenciação; notação científica; função exponencial; equações e inequações exponenciais; Logaritmos: propriedades; função logarítmica; equações e inequações logarítmicas; Módulo de um número; função modular; equações e inequações modulares; Sequências; progressões aritméticas; progressões geométricas; Teoremas de Tales e de Pitágoras; trigonometria no triângulo retângulo; trigonometria em um triângulo qualquer.

No segundo ano, estão propostos cinco unidades com nove capítulos. Os conceitos abordados são os seguintes: Seno, cosseno, e tangente de um arco; funções trigonométricas; Relações e equações trigonométricas; Porcentagem; acréscimo e desconto; juros; amortização; Estatística: gráficos; tabelas; medidas de tendência central; Matrizes: tipos, igualdade, operações, matriz inversa; determinantes; Sistemas lineares; escalonamento; Área: polígonos; círculo; Análise combinatória: princípio fundamental da contagem; fatorial; arranjo; permutação; combinação; binômio de Newton; Probabilidade; probabilidade condicional; estatística e probabilidades.

O terceiro ano propõe-se cinco unidades com oito capítulos. Os conceitos potencializados neste volume são eles: Estatística: variáveis, distribuição; medidas de tendência central; medidas de dispersão; Geometria espacial de posição; paralelismo e perpendicularidade; projeções ortogonais; distâncias; Poliedros: convexos; não convexos; regulares; prismas; pirâmides; Corpos redondos: cilindro; cone; esfera; Geometria analítica: distância entre dois pontos; condição de alinhamento de três pontos; área de triângulo; retas; inequação do 1º grau com duas variáveis; Circunferência; cônicas; Números complexos: operações, módulo, representação trigonométrica; Polinômios e equações polinomiais: operações com polinômios; teorema fundamental da álgebra; relação de Girard; multiplicidade de raízes; raízes complexas.

Finalizam os capítulos as seções: *Explorando o tema; Refletindo sobre o capítulo; e Atividades complementares*. Ao final de cada livro, encontram-se as seções *Acessando tecnologias e Ampliando seus conhecimentos*, além das respostas às atividades propostas, e a bibliografia utilizada.

Há presença de recursos tecnológicos (calculadora e outros) ao longo de alguns capítulos. O Manual do professor contém informações que auxiliam o professor em seu trabalho pedagógico, por exemplo, à inclusão de atividades diversificadas (projetos, pesquisas, jogos etc.), além das contidas no livro do estudante;

O PNLD (2015) afirma que a coleção C1 apresenta e define Sequências Numéricas de maneira adequada, como funções com domínio nos números naturais. Mas são priorizadas as progressões aritméticas e geométricas. Cabe salientar que os processos algébricos são potencializados nos três volumes, com mais ênfase no primeiro ano do Ensino Médio, o qual o conceito de Função é trabalhado com mais afinco.

A coleção C2 apresenta um elevado rigor matemático, porém de acordo com o PNLD (2015) adequado ao nível de ensino destinado. A abordagem segue a seguinte sequência: noções potencializadas por meio de exemplos/atividades seguidos de uma parte teórica e de novos exemplos e situações resolvidas. Da mesma forma que a coleção C1 essa abordagem pode limitar a aprendizagem do estudante em função de sua pouca participação na elaboração dos conceitos.

Os volumes da coleção são organizados em capítulos que se dividem em itens. No primeiro ano do Ensino Médio são propostos os seguintes conceitos ao longo de 14 capítulos: Noções de conjuntos: igualdade, inclusão; operações: interseção, reunião, diferença Conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais; Funções: noção intuitiva, definições, domínio, contradomínio, gráficos; taxa média de variação; Função afim: linear, proporções; equação do 1º grau; inequações do 1º grau; Função quadrática; equação de 2º grau; gráfico: parábola; inequações do 2º grau; Função definida por mais de uma sentença: gráfico; função modular; equações e inequações modulares; Potência de expoente: natural, inteiro negativo, racional, real; função exponencial; equações e inequações; Logaritmos: definição, propriedades; função logarítmica; equações e inequações; Funções: sobrejetoras, injetoras, bijetoras; função inversa; composição de funções; Sequências numéricas; progressões aritméticas e geométricas; Matemática comercial: porcentagem; aumentos e descontos; variação percentual; Semelhança entre figuras; semelhança de triângulos; teorema de Pitágoras; aplicações; Razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente; relações entre razões trigonométricas; Estatística básica: variável, frequência, representações gráficas.

No segundo ano são propostos 16 capítulos com os seguintes conteúdos distribuídos ao longo: Circunferência trigonométrica: arcos, ângulos; aplicações; Razões trigonométricas na circunferência: seno, cosseno, tangente; outras razões trigonométricas; Leis dos senos e dos cossenos; O círculo trigonométrico; funções: periódicas, seno, cosseno, tangente;

aplicações; Fórmulas de adição e subtração para senos, cossenos e tangentes; Matrizes: definição, representação, tipos, operações; matriz inversa; Sistemas de equações lineares; determinantes; regras de Cramer e de Sarrus; sistemas homogêneos; Áreas de figuras planas: triângulos, quadriláteros, polígonos regulares, círculos; Geometria espacial de posição: noções e proposições primitivas, posições relativas, teoremas fundamentais; Prisma: conceito, elementos, classificação; paralelepípedo; Princípio de Cavalieri; área e volume; Pirâmide: conceito, elementos, classificação; área e volume; tetraedro regular; tronco de pirâmide; Cilindro: conceito; elementos, classificação; área e volume; seção meridiana e cilindro equilátero; Cone: conceito, elementos, classificação; área e volume; seção meridiana e cone equilátero; tronco de cone; Esfera: conceito, seções, elementos; volume e área da superfície esférica; partes da esfera: volume; Análise combinatória: princípio fundamental da contagem, fatorial, permutações, arranjos, combinações; binômio de Newton; Experimentos aleatórios; espaço amostral e evento; probabilidade; lei binomial da probabilidade.

No último volume desta coleção são abordados nove capítulos com os seguintes conceitos: O ponto; plano cartesiano, distância entre dois pontos, condição de alinhamento de três pontos; A reta: equações, inclinação; função afim e equação da reta; paralelismo; perpendicularidade; distância entre ponto e reta; área do triângulo; ângulo entre retas; A circunferência: equações, posições relativas; inequações do 2º grau com duas incógnitas; Elipse, hipérbole e parábola: caracterização, elementos, equações; Estatística básica: introdução, medidas de centralidade, medidas de dispersão; Matemática financeira: juros simples, juros compostos; juros e funções; Números complexos: definição, conjugado, quociente, módulo, argumento; forma trigonométrica: operações Polinômios: definição, função polinomial, igualdade, operações; teorema do resto; dispositivo de Briot-Ruffini; Equações algébricas: teorema fundamental da álgebra, teorema da decomposição, multiplicidade de raízes; relações de Girard; raízes complexas; teorema das raízes racionais.

A apresentação dos conceitos segue a ordem: Introdução – Exemplificação – Questões Resolvidas – Exercícios Propostos. Destaca-se que aspectos da história da matemática bem como exemplos de situações aplicadas a outras áreas do conhecimento são evidenciadas ao longo dos capítulos de cada coleção. Na parte final dos capítulos há mais exercícios propostos com caráter de desafio. Ao final de cada volume constam as respostas das situações problematizadas ao longo dos capítulos.

Cabe destacar que a maneira como os conteúdos são propostos é caracterizada, segundo o PNL D (2015) com o uso excessivo de conteúdos bem como detalhamento

exagerado. Da mesma forma, no que concerne o campo da Álgebra, há uma ênfase deste campo no primeiro ano do Ensino Médio, em especial para o conceito de Função.

2.2.2 ANÁLISE GERAL DA ORGANIZAÇÃO DO LIVRO DE CÁLCULO

Como mencionado nos procedimentos metodológicos, foi analisada uma seção específica de um capítulo da obra que está presente na bibliografia básica da Componente Curricular de Cálculo IV (componente obrigatório do curso de Matemática/Licenciatura).

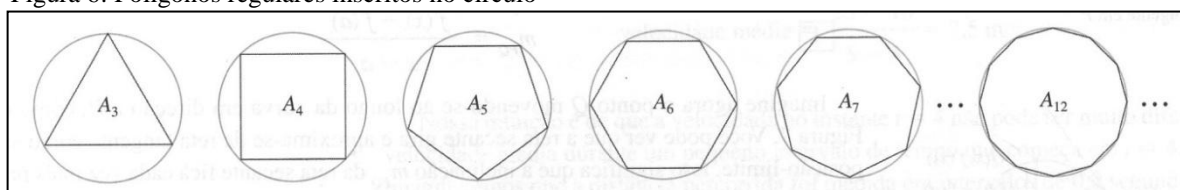
Neste sentido, entende-se que expor as características gerais da organização do livro favorece a elaboração de inferências e apresentação de resultados. O livro em análise apresenta nove capítulos. Destaca-se que este livro faz parte de uma obra com dois volumes e o conceito analisado está no volume 2.

Inicialmente, há testes de verificação relacionados a álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Este item contém exercícios caracterizados como conhecimentos prévios que servem de base para os conceitos que serão abordados ao longo dos capítulos, ou seja, serve como um material de revisão no sentido de verificar/identificar falhas/obstáculos que o estudante possa ter no desenvolvimento das situações ao longo dos capítulos. Por exemplo, nos testes de verificação da Álgebra, há situações de simplificação de expressões, racionalização de denominadores e desigualdades entre expressões, fundamentais para o desenvolvimento de outros conceitos, por exemplo, cálculo do limite de função.

Por conseguinte, há uma apresentação do Cálculo, expondo o problema da área, abordando noções intuitivas de limite. A abordagem do problema da área é explícita da seguinte maneira: Seja A a área de um polígono com n lados. À medida que aumentamos n , fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

O autor utiliza a representação geométrica para abordar o cálculo da área do círculo por meio da aproximação de áreas de polígonos regulares. Método este utilizado pelos gregos, denominado de método da exaustão.

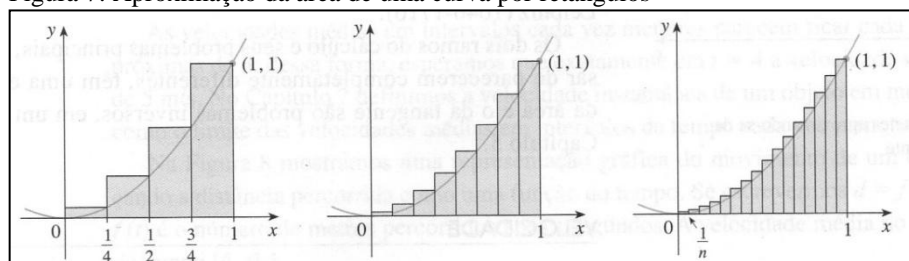
Figura 6: Polígonos regulares inscritos no círculo



Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Há também uma abordagem similar para encontrar a área de regiões entre curvas, exposta na Figura 7.

Figura 7: Aproximação da área de uma curva por retângulos



Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Este problema da área é problematizado no Cálculo Integral, assim como o cálculo do volume de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra bem como o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque, todos resolvidos por meio das técnicas de integração. Além disso, o autor aborda o limite de uma sequência e soma de séries, bem como o problema da tangente.

O primeiro capítulo do livro trata das Equações Diferenciais, com apresentação de situações, definições, modelos matemáticos, seguidos de exercícios e aplicações. Há uma grande abordagem acerca das equações lineares de primeira ordem.

O segundo capítulo destina-se as Equações Paramétricas e Coordenadas Polares. Da mesma forma que o capítulo anterior, há situações, definições e exercícios. O terceiro capítulo está relacionado a Sequências e Séries, capítulo este dividido em duas seções. A primeira seção trata de sequência, a qual se dedicou um olhar mais atento para as situações apresentadas. Já a segunda seção trata de séries. Os demais capítulos seguem a disposição apresentação – definição – exercícios quanto à abordagem dos conceitos.

O quarto capítulo apresenta os Vetores e a Geometria no Espaço, seguido de Funções Vetoriais. Em seguida, as Derivadas Parciais e as Integrais Múltiplas são propostas. Por fim, o Cálculo Vetorial e as Equações Lineares de Segunda Ordem são problematizados. Cabe destacar que ao final da obra constam os apêndices, seguidos das respostas finais dos exercícios de cada capítulo e cada seção.

A seguir, são expostas as análises das fontes de produção de dados selecionadas para esta pesquisa.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DOS DADOS

No capítulo anterior, foram apresentadas as opções metodológicas utilizadas neste trabalho. Ainda, as características das fontes de produção de dados fizeram-se presentes. A seguir, a análise das coleções e do livro de Cálculo será discutida e problematizada.

3.1 ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Nesta seção é exposta a análise das coleções de livros didáticos escolhidos este trabalho.

Apresenta-se o Quadro 2 com os resultados quantitativos das atividades propostas nas coleções analisadas. Na primeira coluna do Quadro 2 consta a coleção que foi analisada, seguida do número de atividades categorizadas (coluna 2). Por conseguinte, expõe-se o tipo de representação (Numérica, Figural ou Gráfica) em que a sequência foi apresentada e se a sequência é finita ou infinita (coluna 3). Com relação às transformações cognitivas, apresentam-se os tratamentos e as conversões. Por fim, expõe-se o quantitativo relacionado à dimensão algébrica abordada (função (F), equação (E) e função ou equação (F/E)).

Quadro 2: Número de atividades encontradas nas coleções de livros didáticos e categorias de análise

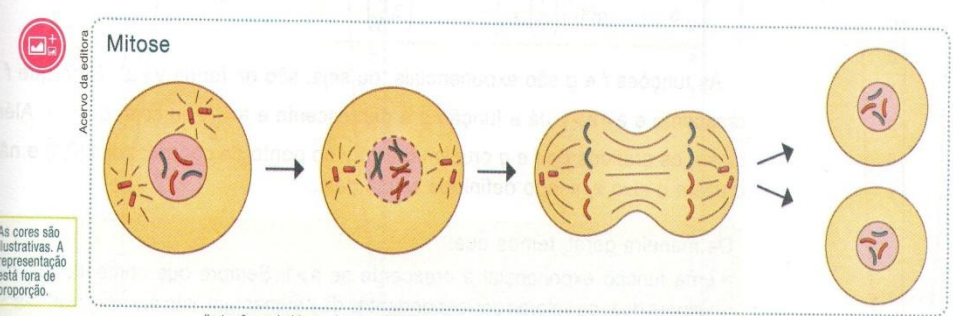
Coleção	Nº de ativ.	Tipo de Sequência					Transf. Representação		Dimensão Algébrica		
		Representação			Finita	Inf.	T	C	F	E	F/E
		Num.	Figural	Gráfica							
1	139	92	42	5	55	84	25	114	42	17	78
2	174	168	3	3	61	113	40	134	26	105	43
Total	313	260	45	8	116	197	65	248	68	122	121

As atividades categorizadas na coleção C1 estão distribuídas na maioria dos capítulos do volume 1. Nos demais volumes não foram identificados atividades que problematizassem o conceito de Sequência Numérica. As atividades identificadas buscam uma articulação com diferentes conceitos matemáticos, por exemplo, geometria e álgebra, exemplificadas na Figura 8.

Outra situação envolvendo sequência no estudo de questões relacionadas à função exponencial é apresentada na Figura 10.

Figura 10: Atividade de Função Exponencial da coleção C1

34. A divisão celular denominada mitose consiste em uma célula duplicar o seu conteúdo e então se dividir em duas, chamadas células-filhas. Cada célula-filha, por sua vez, repete esse processo, totalizando, após a 2ª divisão, quatro células-filhas.



Acervo da editora

Mitose

As cores são ilustrativas. A representação está fora de proporção.

Ilustração produzida com base em: TORTORA, Gerard J. Corpo humano: fundamentos de anatomia e fisiologia. Tradução Cláudia L. Zimmer, 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000. p. 56.

a) Determine o número total de células-filhas obtidas a partir de uma única célula após:

- 3 divisões
- 4 divisões
- 7 divisões

b) Escreva uma função que associe a quantidade total de células-filhas y , obtida a partir de uma única célula, após uma quantidade x ($x > 0$) de divisões.

Fonte: Excerto retirado da coleção C1

Nesta situação (Figura 10) são exploradas questões da Matemática relacionadas a outras áreas do conhecimento. Inicialmente, pergunta-se qual é o número total de células-filhas, após determinadas divisões celulares. Posteriormente, pede-se a lei matemática que determina uma Função que associa a quantidade total de células-filhas, após uma quantidade x de divisões, o que contribui para o processo de generalização, que contribui o desenvolvimento da abstração. Ainda, a situação contempla a terceira fase do padrão, que envolve encontrar uma lei matemática que expresse a relação apresentada.

Constata-se que a terceira fase do padrão é evidenciada nesta situação, à medida que os estudantes devem generalizar as Sequências, encontrando a lei matemática correspondente.

Observa-se que na coleção C1 a maioria das atividades (88,48%, ou seja, 123 atividades de 139) contemplou a abordagem de sequência como função, à medida que as situações apresentadas utilizavam sequências para compreender funções e vice-versa. Ou seja, mesmo identificando a maioria das atividades no capítulo Progressões, as atividades não se restringem ao uso da fórmula do termo geral da PA e da PG, o que limitaria o entendimento de sequência como uma função de $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$.

atividades que podem ser potencializadas durante as aulas, além daquelas propostas no livro do estudante. Observou-se apenas no volume 1 sugestões de trabalho com seqüências numéricas. Talvez porque é neste volume que a maioria das atividades envolvendo seqüências foram propostas.

Uma das sugestões de trabalho, apresentado no manual do professor, com Sequências está relacionada com os processos de generalização e abstração do conceito de PA, em que foi verificado o caráter axiomático. A situação proposta é exposta no Quadro 3.

Quadro 3: Atividade proposta no manual do professor na coleção C1

Mostre que, se a PA (a_1, a_2, \dots, a_n) tem soma S_{a_n} , então a PA $(k \cdot a_1, k \cdot a_2, \dots, k \cdot a_n)$ com $k \in R$, terá soma $S_n = k \cdot S_{a_n}$.

A resolução está explícita da seguinte maneira: Seja a PA (a_1, a_2, \dots, a_n) de soma S_{a_n} , queremos provar que a PA $(k \cdot a_1, k \cdot a_2, \dots, k \cdot a_n)$ com $k \in R$, tem soma $S_n = k \cdot S_{a_n}$. Tomemos a PA $(k \cdot a_1, k \cdot a_2, \dots, k \cdot a_n)$ e seja S_n a soma dos termos dessa PA, temos:

$$S_n = k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_n = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \text{ (I)}$$

Sabemos que a soma da PA (a_1, a_2, \dots, a_n) é igual a S_{a_n} , em que:

$$S_{a_n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Substituindo o valor de S_{a_n} em (I), temos:

$$S_n = k \cdot S_{a_n}$$

Como queríamos demonstrar.

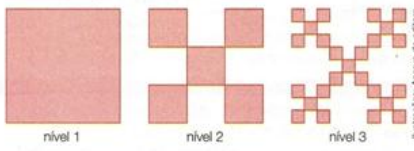
Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Observa-se que a situação exposta no Quadro 3, geralmente, é pouco explorada no Ensino Médio, pois exige que os estudantes desenvolvam diversas capacidades, ou seja, que construam seus pensamentos sob a ótica do PMA, que vai além de descrever um objeto matemático.

Em relação às representações matemáticas, nota-se que a representação figural é tomada como ponto de partida em 30,21% do total de atividades propostas. Considera-se um número significativo, pois, geralmente, a representação numérica é utilizada como ponto de partida, em especial, no trabalho com progressões, o que limita o desenvolvimento das capacidades superiores de abstração e generalização. Além disso, na maioria das vezes, o uso de diversas representações é pouco problematizado em livros didáticos. A Figura 14 expõe outra atividade envolvendo Fractais no estudo de Funções Exponenciais:

Figura 14: Atividade envolvendo Função Exponencial em C1

44. A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.



nível 1 nível 2 nível 3

Ilustração: Acervo da Editora

a) Utilizando malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Qual função expressa o número y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência?

* $y = 5^{x+1}$ * $y = 5^x$ * $y = 5^{x-1}$

c) Em qual nível da sequência a figura será formada por:

* 3 125 quadradinhos?
* 78 125 quadradinhos?

Fonte: Excerto retirado da coleção C1

Ainda, com relação às representações do conceito, a representação figural é tomada como ponto de partida na abordagem do conceito de Função Exponencial, expressando a relação entre a figura e a lei matemática que deve ser encontrada, partindo da construção dos próximos níveis dessa Sequência. A relação de dependência entre as variáveis é notada nesta situação. Além disso, a terceira fase do padrão foi observada nesta situação. Ainda, a situação contempla a categoria sequências além de PA e PG, notando-se o trabalho com os Fractais.

Constata-se que as atividades que exigem tratamentos numéricos correspondem a 15,82% do total (22 atividades). Este resultado pode ser considerado significativo porque em relação às fases do padrão o tratamento numérico exige apenas a primeira fase, indicando que as demais fases do padrão exigem a conversão, transformação cognitiva essencial para a aquisição dos conceitos matemáticos.

A conversão entre os registros do conceito matemático foram evidenciadas, totalizando 82,02% das atividades, sendo que 17,98% (25 atividades) representadas pela conversão do registro numérico para o algébrico, como se observa na Figura 15.

Figura 15: Atividade envolvendo Sequências Numéricas em C1

10. Escreva o termo geral a_n de cada sequência, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

a) (2, 3, 4, 5, 6, ...)

b) (-2, 3, 8, 13, 18, ...)

c) $(2, 2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3}, 6, 5 + \sqrt{5}, 6 + \sqrt{6}, \dots)$

Fonte: Excerto retirado da coleção C1

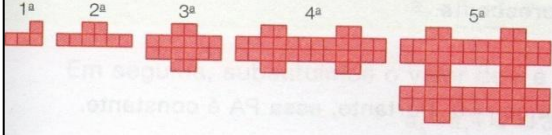
A segunda conversão mais abordada, com 11,51% (16 atividades) é do registro figural para o registro algébrico, reforçando a importância da representação figural como ponto de partida para o ensino de Sequências.

É importante destacar que no capítulo Progressões a abordagem é realizada por meio de uma situação-problema seguido da definição de uma Sequência Finita e Infinita. Por

consequente a exploração de atividades é realizada. Observa-se que a representação figural é potencializada neste capítulo com mais ênfase. A figura a seguir mostra essa relação:

Figura 16: Atividade figural de Progressões em C1

8. (Cefet-SP) Observe as 5 primeiras figuras de uma sequência infinita e suas respectivas posições. Cada figura é formada por quadradinhos.



A quantidade q de quadradinhos da figura dessa sequência que ocupa a posição p pode ser expressa por:

a) $q=p^2$ c) $q=2p$ e) $q=2^{p+1}$
 b) $q=2^p$ d) $q=4+2p$

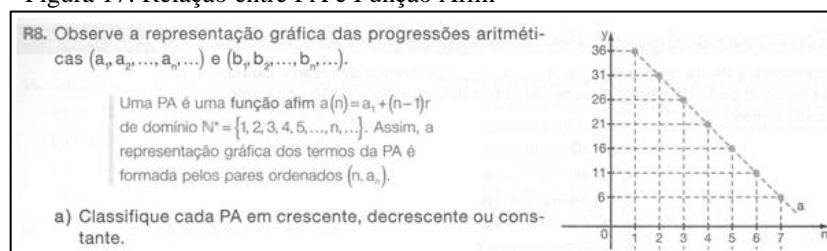
Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Excerto retirado da coleção C1

Quanto à categoria Sequência como Função, a atividade acima estabelece esta relação existente entre a quantidade q de quadradinhos em função da posição p ocupada. Novamente a representação figural foi tomada como ponto de partida para o trabalho com Sequências e Funções. No que tange aos tratamentos cognitivos, estes foram evidenciados, notando-se a conversão entre o registro figural e deste para o algébrico.

Ainda, destaca-se a relação da PA e Função Afim, utilizando da representação gráfica do conceito (Figura 17).

Figura 17: Relação entre PA e Função Afim



Fonte: Excerto retirado da coleção C1

Além disso, há uma abordagem considerada pertinente para o trabalho com Série Geométrica Convergente, em que se apresenta o cálculo do limite da soma dos termos de uma PG, observado no capítulo Progressões (Figura 18).

Figura 18: PG e Série Geométrica Convergente

Série geométrica convergente

Considere a PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots\right)$, de razão $q = \frac{1}{3}$ e termo geral definido por $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Note que, quanto maior o valor de n , mais próximo de zero é o termo da PG.

Por exemplo:

- $a_8 = \frac{1}{81} = 0,01235$
- $a_{15} = \frac{1}{2187} = 0,00046$
- $a_{20} = \frac{1}{6561} = 0,00015$

Podemos dizer que, à medida que n cresce indefinidamente, a_n aproxima-se de zero, ou seja, tende a zero.

De modo geral, se $0 < |q| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$.

Estudamos anteriormente que $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$, para $q \neq 1$. Calculando o limite de S_n quando n tende ao infinito e $0 < |q| < 1$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a(1-0)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Calculando a soma dos termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots\right)$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Portanto, o limite da soma dos termos dessa PG é $\frac{3}{2}$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$.

A fórmula que permite calcular o limite da soma dos termos de uma PG infinita de razão q , com $0 < |q| < 1$, é dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

Chamamos essa soma de **série geométrica convergente**.

Quando $q \geq 1$ ou $q \leq -1$, chamamos a soma da PG de **série geométrica divergente**.

Na PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$ temos:

- $S_1 = \frac{4}{3} = 1,3$
- $S_2 = \frac{13}{9} = 1,4$
- $S_3 = \frac{40}{27} = 1,481$
- \vdots
- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} = 1,5$

Fonte: Excerto retirado da coleção C1

Essa abordagem é considerada caracterizada por meio dos pressupostos do Pensamento Matemático Avançado, pois envolvem os processos de generalização e abstração, com caráter axiomático.

Ao analisar a coleção C1 constata-se que as três fases do padrão foram evidenciadas na maioria das situações, o que contribui para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Ainda, as representações matemáticas e seus respectivos tratamentos e conversões foram solicitados nas situações apresentadas, principalmente a representação figural do conceito de Sequência. Com relação à categoria Sequência como Função, observou-se uma quantidade significativa de situações que contemplam o entedimento de Sequência como Função e vice-versa. Por fim, as questões do PMA foram notadas em algumas situações, pois envolveu vários processos, dentre eles: representar e generalizar, incluindo abstrair.

Na coleção C2, observa-se a abordagem de Sequências Numéricas somente no Capítulo 10 do volume 1, denominado *Progressões*, o que limita o estudo dos padrões como eixo estruturador de vários conceitos. Como mencionado anteriormente, observou-se 174 atividades propostas que, em alguns casos, se tornam repetitivas, pois as transformações cognitivas são as mesmas e os registros a serem mobilizados também. Assim, o uso de “fórmulas” é observado em 25,86% das atividades categorizadas. Por exemplo, no trabalho com Progressão Aritmética, as atividades priorizam o uso de expressões para encontrar os próximos termos de uma Sequência (Figura 19), sendo que, poderiam ser observadas as regularidades e partindo delas, buscar generalizar a Sequência, sem o uso de fórmulas.

Figura 19: Progressão Aritmética em C2

Exercícios

- Seja a sequência definida por $a_n = -3 + 5n, n \in \mathbb{N}^*$. Determine:
 - a_2
 - a_4
 - a_{11}
- Escreva os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = 3 + 2n + n^2, n \in \mathbb{N}^*$.

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Com relação à categoria Sequência como Função, observou-se que as atividades pouco contemplam esta categoria, ou seja, apenas 28 atividades (16,09%), enfatizam esta relação, conforme se pode observar na atividade exposta na Figura 20.

Figura 20: Funções no desenvolvimento de Sequências em C2

35. Seja $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = -2 + 3x$.

- Represente o conjunto imagem de f .
- Faça a representação gráfica dessa função.

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Note que esta atividade é uma Sequência, pois seu domínio está representado pelo conjunto dos Números Naturais. Ainda, é solicitado que se esboce o gráfico da Função. Neste caso, a imagem desta Função também são números naturais, o que pode gerar erros na representação gráfica, visto que os pontos estão alinhados, os estudantes podem traçar uma reta que não representação o gráfico desta Função.

Quanto as fases de um padrão, 70,12% das atividades foram identificadas nas fases 1 e 2 (procura de padrão e reconhecimento de um padrão, respectivamente), pois para muitas das atividades não é necessário determinar a lei matemática para Sequência Numérica. Da mesma forma que a situação anterior apresentada, situação exposta na Figura 21 mostra que, apesar da coleção abordar um determinado rigor matemático na exploração dos conceitos, as situações não demonstram essa característica.

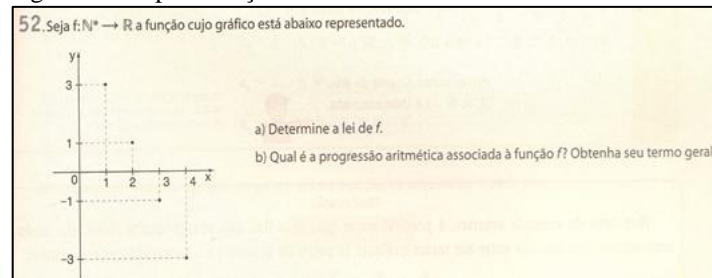
Figura 21: Atividade envolvendo PA em C2

- Dada a P.A. (28, 36, 44, 52, ...), determine seu:
 - oitavo termo;
 - décimo nono termo.
- Em relação à P.A. (-31, -35, -39, -43, ...), determine:
 - a_{15}
 - a_{31}

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Na coleção C2 há muitas atividades que solicitam o mesmo procedimento. Entende-se que essa abordagem limita o entendimento de diversos conceitos, em especial, o de Sequências. Assim, apenas 29,88% das atividades (52 de um total de 174) contemplam a fase 3 do padrão (Figura 22).

Figura 22: Representação Gráfica em C2

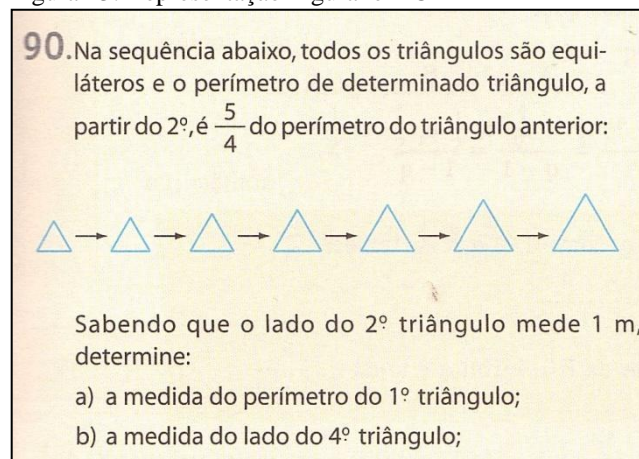


Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Destaca-se esta situação (Figura 22), pois é solicitado que se determine a lei da Função a partir do gráfico. Ainda, é solicitado que se encontre a PA associada à Função, obtendo seu termo geral.

No que se refere às representações matemáticas, nota-se que a representação figural não foi trabalhada como ponto de partida e poucas vezes aparecem na coleção C2, perfazendo um total de três atividades, o que corresponde a 1,72% do total. A Figura 23 exemplifica esta afirmação.

Figura 23: Representação Figural em C2



Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Acredita-se que esta situação pode contribuir para o entendimento do conceito, porém o levantamento de mais conjecturas deve ser realizado. Por exemplo, verificar se há uma lei que determina o perímetro para um número qualquer de triângulos.

Desta forma, este número indica que o trabalho com diversas representações é pouco explorado. Salienta-se a importância de se trabalhar com as diversas representações de um conceito, em especial, com a representação figural, na medida em que os estudantes levantam conjecturas, observam regularidades e generalizam uma Sequência, com caráter formal, conforme Duval (2013).

Quanto às transformações cognitivas, constata-se que a C2 propor um número maior de atividades que requerem o tratamento numérico (40 atividades) do que a coleção C1 (17 atividades). A atividade exposta na Figura 24 exemplifica esta afirmação.

Figura 24: Atividade envolvendo PG em C2

53. Identifique as sequências que representam progressões geométricas:

a) (3, 12, 48, 192, ...)	d) $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots)$
b) (-3, 6, -12, 24, -48, ...)	e) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, \dots\right)$
c) (5, 15, 75, 375, ...)	f) $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots)$

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

A maioria destas atividades envolvem PA e PG, o que limita o estudo de Sequências Numéricas, pois para a compreensão global do conceito, torna-se necessário que sejam explorados tipos diferentes de Sequências, por exemplo, sequências cujo padrão é periódico (funções trigonométricas). As Sequências (Figura 25) foram propostas com o objetivo de analisar quais são crescentes, decrescentes ou constantes, o que requer apenas tratamentos numéricos.

Figura 25: Análise das Sequências quanto ao crescimento e decrescimento em C2

a) (38, 35, 32, 29, 26, ...)
b) (-40, -34, -28, -22, -16, ...)
c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \dots\right)$
d) (90, 80, 70, 60, 50, ...)
e) $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \dots\right)$
f) $(\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1, \dots)$

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

A conversão entre os registros é identificada em 77,01% das atividades, contudo, em sua maioria, a transformação envolve apenas um único sentido, isto é, do registro numérico para o algébrico (35,82%, considerando o 77,01% como 100%). A atividade apresentada na Figura 26 exige que se encontre o termo geral dado uma Sequência na sua representação numérica.

Figura 26: Conversão no sentido RN \rightarrow RA em C2

21. Determine o termo geral de cada uma das progressões aritméticas seguintes:

a) (2, 4, 6, 8, 10, ...)

b) (-1, 4, 9, 14, 19, ...)



c) (33, 30, 27, 24, ...)

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Cabe destacar que não foram observados outros tipos de Sequências que vão além de PA e PG, reforçando a afirmação que a proposta apresentada na coleção pode limitar o ensino de Sequências no Ensino Médio.

Observando e analisando o manual do professor, notou-se que nos três volumes (1º ano, 2º ano e 3º ano) há sugestões de trabalho com Sequências Numéricas articulado com outros conceitos matemáticos. Por exemplo, no volume 1 há sugestões para o docente de trabalho com Sequências Numéricas e padrões geométricos (Figura 27).

Figura 27: Sugestões para o trabalho com Sequências em C2

<p>Atividade 5: Sequências e padrões geométricos</p> <p>Essa atividade pode ser utilizada para trabalhar previamente o conceito de sequência que será formalizado no capítulo 10 (Progressões).</p> <p>Objetivos</p> <ul style="list-style-type: none"> ▀ Observar regularidades em padrões geométricos. ▀ Formular conjecturas, levantar hipóteses e realizar testes. ▀ Escrever o termo geral de uma sequência. ▀ Socializar diferentes soluções para um mesmo problema. ▀ Proporcionar discussões coletivas a partir das respostas obtidas pelos alunos. <p>Material</p> <ul style="list-style-type: none"> ▀ Material escolar básico (papel, lápis e borracha). ▀ Caso haja a possibilidade e material adequado, o professor pode utilizar um projetor ou <i>data-show</i> para visualizar as imagens que serão usadas. <p>Número de aulas: 2 a 3.</p>	<p>Desenvolvimento</p> <p>Divida a classe em grupos e distribua, a cada aluno, as duas imagens que serão utilizadas a seguir.</p> <p>Imagem que será utilizada na 1ª parte da atividade</p>  <p>Imagem que será utilizada na 2ª parte da atividade</p> 
--	--

Fonte: Excerto retirado da coleção C2

Salienta-se que este tipo de atividade contribui para o desenvolvimento de diversas capacidades já mencionadas, principalmente, no que tange a observação dos padrões, levantamento de hipóteses e conjecturas que auxiliarão o estudante no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Essa atividade indica que em matemática, um determinado problema/situação pode ser resolvido de inúmeras formas. Por exemplo, o estudante pode resolver a situação utilizando dos conceitos da PA ou pode resolvê-la sem ter aprendido o referido conceito por meio da busca por regularidades. Além disso, a mobilização de diversos conceitos acontece, ao passo que vários questionamentos são realizados.

Ao longo do volume 2, as Sequências apresentam-se por meio do trabalho com o Triângulo de Sierpinski, Floco de Neve de Koch e Tapete de Sierpinski. Já no volume 3, há atividades buscando articulação entre juros compostos e progressão geométrica.

Destaca-se que, nas atividades propostas não há menção as noções de infinito com relação às Sequências, porém ao trabalhar com a soma dos termos de uma PG, há uma abordagem pertinente no que se refere o conceito de limite, explicitando que uma Sequência do tipo $a(n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ quando são atribuídos valores para n , com $n \in \mathbb{N}$, observa-se que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo n fica cada vez mais próximo de zero. Diz-se então que o limite de $a(n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ quando n tende ao infinito vale zero, representado da seguinte forma: $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 0$. Esta abordagem, geralmente, é pouco explorada no Ensino Médio.

Ao analisar a coleção C2 constata-se que poucas categorias foram contempladas, pois em muitas situações não seria necessário encontrar uma lei matemática que determinasse a Sequência. Essa constatação indica que os processos de generalizar e abstrair não são tomados. Da mesma forma, as fases do padrão atingiram, em várias situações, a segunda fase (relacionada à identificação de características e propriedades) limitando o entendimento do conceito. Quanto às representações matemáticas, poucas situações utilizaram da representação figural ou gráfica para o desenvolvimento de diferentes conceitos, em especial, Sequências e Funções. No que se refere às transformações cognitivas, observou um tratamento numérico excessivo em boa parte das situações. Os pressupostos do PMA pouco foram evidenciados nas situações, embora na teoria o rigor matemático fosse evidenciado.

3.2 ANÁLISE DA SEÇÃO ESPECÍFICA DO LIVRO DE CÁLCULO

Apresenta-se a seguir a análise da seção específica do capítulo do Livro de Cálculo, que faz parte de uma obra com dois volumes. Sendo assim, será analisado o segundo volume desta obra. Como mencionado anteriormente, analisaremos a seção denominada C3, a fim de manter a ordem das análises e anonimato do autor do livro e realizar assim, possíveis filiações ou rupturas.

O Quadro 3 expõe os resultados quantitativos das situações propostas na seção analisada. Na primeira coluna do quadro 3 consta a seção que foi analisada, seguida do número de atividades categorizadas (coluna 2). Em seguida, apresenta-se o tipo de representação (Numérica, Figural ou Gráfica) em que a sequência foi proposta e se a sequência é finita ou infinita (coluna 3). Com relação às transformações cognitivas, são identificados os tratamentos e as conversões. Também, expõe-se o quantitativo relacionado à dimensão algébrica abordada (função (F), equação (E) e função ou equação (F/E)). Por fim, apresenta-se a classificação das Sequências (quanto a sua convergência).

Quadro 4: Número de situações encontradas em C3 analisada e categorias de análise

C3	Nº de situações	Tipo de Sequência					Transf. Rep.		Dimensão Algébrica			Converg.		
		Representação			Finita	Inf.	T	C	F	E	F/E	Sim	Não	Sim/Não
		Num.	Figural	Gráfica										
3	102	86	0	9	95	0	68	27	95	0	0	57	20	1
Total	102	95			95		95		95			78		

Cabe destacar que algumas situações não foram categorizadas porque são atividades de revisão dos conceitos, em especial, exigem a mobilização de definições. A Figura 28 exemplifica um conjunto de atividades não categorizadas.

Figura 28: Situações conceituais em C3

- (a) O que é uma sequência?

(b) O que significa dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$?

(c) O que significa dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$?

(a) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.

(b) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Constata-se que estas situações apresentadas inicialmente auxiliam os acadêmicos na compreensão do conceito de Sequência, quanto a sua convergência, bem como a análise do cálculo do limite quando tende a algum número. Apesar das situações não se adequarem nas categorias elencadas, o processo de justificação e argumentação foi evidenciado, caracterizando-se essenciais para a atividade matemática.

No que se refere à categoria Sequência como Função 93,13% (95 situações) contemplaram esta categoria, visto que ao expor as Sequências e analisar sua convergência, o tratamento dado tem caráter funcional, diferentemente de algumas atividades analisadas nos livros didáticos. Em outros termos, no Ensino Superior trabalha-se com as definições e demonstrações com pouca ênfase para aspectos descritivos e são abordadas várias Sequências que vão além de PA e PG, não se restringindo ao uso de fórmulas.

Com relação à categoria fases de um padrão, enquadraram-se 92,15% das situações (94 de um total de 102). Esse número expressivo caracteriza-se pelos processos de abstração e generalização (características da terceira fase de um padrão) à medida que as situações apresentadas solicitam uma lei matemática partindo de Sequências Numéricas, ou seja, as situações requerem a conversão do registro numérico para o algébrico. Novamente, algumas situações requerem o processo de justificação e argumentação, essenciais no processo do desenvolvimento do pensamento algébrico e avançado (Figura 29).

Figura 29: Limite de Sequências

59. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a sequência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Destaca-se que 10,2% exigiam o processo de justificação e/ou argumentação, no momento que nestas situações as palavras “explique”, “justifique”, “por quê” e “o que é” foram explicitadas.

No que se referem às representações matemáticas, apenas nove (8,82% de um total de 95) situações exploraram a representação gráfica no desenvolvimento do conceito de Sequência Numérica. Ainda, todas as situações exploraram como ponto de partida as Sequências na representação algébrica, na qual se entende que essa abordagem pode limitar o seu entendimento.

A Figura 30 mostra Sequências na representação algébrica e solicita-se que a representação gráfica seja elaborada para auxiliar na análise da convergência e no cálculo do limite de uma Sequência, bem como sua demonstração.

Figura 30: Situações utilizando a representação gráfica

47-53 Use um gráfico da sequência para decidir se ela é convergente ou divergente. Se a sequência for convergente, conjecture o valor do limite a partir do gráfico e então demonstre sua conjectura. (Veja a margem esquerda da página 646 para sugestões de como traçar gráficos de sequências.)

47. $a_n = 1 + (-2/e)^n$ 48. $a_n = \sqrt{n} \sin(\pi/\sqrt{n})$

49. $a_n = \sqrt{\frac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$ 50. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Nota-se que a utilização do gráfico irá auxiliar o acadêmico em questões específicas do conceito de Sequência, por exemplo, se a Sequência se aproxima de um valor ou não, conjecturando o valor do limite. Sendo que, no Ensino Médio, estas questões são pouco problematizadas. Entende-se, desta forma, que obstáculos epistemológicos surgem devido a não abordagem destas questões na Educação Básica.

Ainda, nas situações apresentadas, evidencia-se a transformação cognitiva no sentido $RA \rightarrow RG^{25}$ em nove (32,14%) situações (tomando como totalidade 28 situações) que problematizam a representação algébrica para a gráfica. Observa-se na figura 31 uma situação em que a elaboração da representação gráfica é sugerida para o cálculo do valor do limite.

Figura 31: Situação em C3 no sentido $RA \rightarrow RG$

(a) Use um gráfico para conjecturar o valor do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use um gráfico da sequência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,001$ na Definição 2.

Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Assim como na situação anterior, o gráfico irá contribuir para o acadêmico no desenvolvimento do cálculo do valor do limite quando este tende ao infinito. Neste caso o foco está na análise do valor do limite, ou seja, a representação gráfica auxilia a compreensão do conceito de limite e Sequência.

Destaca-se também a conversão entre o registro algébrico (RA) e deste para o registro numérico, ou seja, no sentido $RA \rightarrow RN^{26}$ (14 situações). As situações apresentadas na Figura 32 exemplificam esta afirmação.

Figura 32: Situação em C3 no sentido $RA \rightarrow RN$

15. Liste os primeiros seis termos da sequência definida por

$$a_n = \frac{n}{2n + 1}$$

Esta sequência parece ter um limite? Em caso afirmativo, encontre-o.

16. Liste os primeiros nove termos da sequência $\{\cos(n\pi/3)\}$. Essa sequência parece ter um limite? Em caso afirmativo, encontre-o. Em caso negativo, explique por quê.

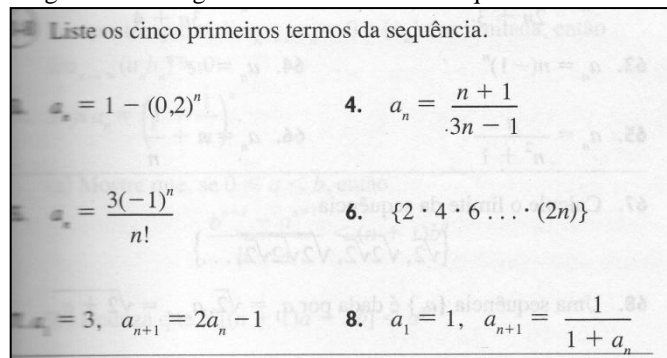
Fonte: Excerto retirado da coleção C3

²⁵ RA: Registro Algébrico; RG: Registro Gráfico.

²⁶ RA: Registro Algébrico; RN: Registro Numérico.

Estas situações assemelham-se com algumas exploradas no Ensino Médio, no que tange a segunda fase. Acredita-se que noções intuitivas de limite podem ser trabalhadas desde no Ensino Médio. Ainda, quanto aos tratamentos cognitivos, observou-se que inicialmente ocorreu a conversão entre o registro algébrico e deste para o numérico. Para o cálculo do limite, a utilização de tratamentos algébricos e possíveis manipulações devem ser realizadas.

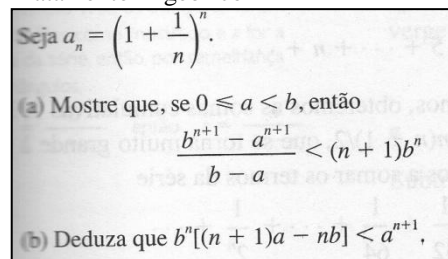
Figura 33: Listagem de termos de uma Sequência em C3



Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Quanto aos tratamentos cognitivos, observa-se o tratamento algébrico excessivo, totalizando 71,57% (68 situações) de um total de 95 situações potencializadas. Cabe destacar que, o tratamento dado às situações tinha caráter axiomático, com deduções formais. A situação exposta na Figura 34 aborda uma situação que exige somente o tratamento algébrico:

Figura 34: Situação em C3 utilizando Tratamento Algébrico



Fonte: Excerto retirado da coleção C3

Salienta-se que esse tipo de situação deve ser trabalhado e discutido, porém entende-se que somente no momento em que os acadêmicos tenham trabalhado com diversas representações do conceito, principalmente, a gráfica e figural, possibilitando seu entendimento de forma global.

Com relação ao tratamento dado ao conceito de limite, mais da metade das situações, ou seja, 55,88% (57 situações de 102) solicitam que se fosse determinado o limite das

sequências. Essa constatação dá-se em função do tratamento dado as questões do Ensino Superior, na medida em que há uma formalização do conceito. Desta forma, além de noções intuitivas, questões de limite e convergência são potencializadas com mais afinco.

Desta forma, elencou-se a categoria classificação das Sequências do Ensino Superior quanto à convergência, notando-se que a maioria das Sequências é convergente. Destaca-se que das 102 situações, 78 puderam ser classificadas no que tange a convergência. Observando-se 57 Sequências convergentes (73,07%) e 21 (28,64%) divergentes. Uma situação apresentada foi classificada como convergente e divergente, de acordo com os intervalos apresentados, no momento em que no enunciado da situação devem-se encontrar os intervalos em que a Sequência converge ou diverge.

Por fim, constata-se que as situações apresentadas potencializam Sequências além de PA e PG, observado em 90 situações o que possibilita aos estudantes/acadêmicos um entendimento do conceito de maneira global, na medida em que não há o uso excessivo de fórmulas e algoritmos prontos. Ainda, cabe salientar que as situações apresentadas possuem caráter do PMA, pois o tratamento dado às situações inclui as características próprias do PMA, como capacidades de representar, visualizar, generalizar, ou ainda outros tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. (Dreyfus, 1991).

Ao analisar a coleção C3 constata-se que o formalismo matemático é evidenciado com mais afinco, ao passo que a coleção destina-se a estudantes do Ensino Superior. Porém, no que tange as representações matemáticas, não foi observado à representação figural ou gráfica como ponto de partida da atividade matemática. Os pressupostos relacionados ao PMA foram evidenciados, no momento que deduções formais, de caráter axiomático foram potencializadas. Da mesma forma, os processos de generalização e abstração foram notados, bem como as fases do padrão e o tratamento dado ao conceito de limite.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da problematização realizada, abordagem do quadro teórico, aspectos metodológicos e análise dos dados, pôde-se constatar, de modo geral, que o conceito de Sequência Numérica no processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior necessita ser reorganizado e reestruturado, principalmente, no que tange a aspectos relacionados às fases do padrão, entendimento de Sequência Numérica, além de PA e PG, representações matemáticas, noções intuitivas de Limite e Convergência de Sequências, bem como os processos relacionados a justificar, argumentar e generalizar. Processos estes identificados em apenas uma coleção do Ensino Médio. Além disso, verifica-se que a coleção que pouco contemplou as categorias de análise é utilizada em duas escolas estaduais do Município de Itaqui – RS. Já no Ensino Superior, aspectos axiomáticos foram notados em excesso, haja vista que a seção analisada destina-se a estudantes de diversas áreas do conhecimento.

A realização dos mapeamentos em periódicos e portais de diversas universidades brasileiras permite afirmar que nenhuma pesquisa preocupou-se com o processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, o que reforça a relevância desta pesquisa. Também, poucas pesquisas preocuparam-se em apontar os pressupostos do Pensamento Matemático Avançado, sendo que as pesquisas em que foi observada essa perspectiva destinavam-se a estudantes do Ensino Superior. Reitera-se que o PMA não é destinado somente a estudantes do Ensino Superior. Outra dado que chama atenção é o fato de que a maioria dos trabalhos mapeados optou pela Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e ensino, indicando que há sequências didáticas já elaboradas cujo objetivo é o ensino e aprendizagem de sequências numéricas.

Com relação às coleções, observou-se que o conceito de Sequência Numérica foi abordado com ênfase em um capítulo da C1, visto que nos demais capítulos e nos outros volumes há poucas atividades. Estas atividades envolvem Sequências Figurais, sendo que algumas solicitam aos estudantes os processos de justificação e argumentação, aspectos importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Destaca-se que, as Sequências Numéricas vão além de PA e PG, em especial, ao abordar Fractais.

Quanto aos tratamentos, estes foram evidenciados na maioria das situações. Apesar de observar conversão do registro numérico para o algébrico em mais situações em comparação

com a conversão do registro figural para o numérico ou algébrico, percebeu-se que as conversões ocorreram em mais de dois registros, ou seja, o registro numérico, algébrico e figural foi discutido. Além disso, alguns aspectos relacionados à demonstração foram identificados com mais afinco no manual de sugestões do professor, utilizando do formalismo matemático. Destaca-se que a coleção analisada abordou as noções do conceito de limite e convergência ao potencializar o conceito de PG e Série Geométrica.

No que se refere à coleção C2, constatou-se que o quadro teórico dos volumes valoriza rigor matemático, por vezes, exagerado para o Ensino Médio. As situações envolvendo Sequências Numéricas foram verificadas apenas em um capítulo específico do volume 1, denominado *Progressões*. Assim, pode-se afirmar que o eixo padrão não é tomado como estruturador do conceito de Sequência.

Quanto à categoria representações matemáticas, observou-se poucas situações envolvendo a representação figural e gráfica como ponto de partida e as conversões requerem a transição da representação algébrica para numérica, em ambos os sentidos.

Além disso, não foram observados outros tipos de Sequências, diferentemente da coleção C1, o qual se explorou o uso dos Fractais, por exemplo. Porém, no manual do professor da coleção C2, há sugestões de situações envolvendo Sequências Figurais nos três volumes, articulado com outros conceitos desenvolvidos ao longo dos capítulos. Ainda, nas sugestões, tomou-se como ponto de partida Sequências Figurais, entendidas como essenciais para a atividade em matemática.

Em C3, observou-se um rigor matemático, com deduções formais e demonstrações de teoremas no desenvolvimento do conceito de Sequências, como esperado para uma obra elaborada para o Ensino Superior.

No que concerne às representações matemáticas, poucas situações utilizaram da representação gráfica no desenvolvimento do conceito. Além disso, nenhuma situação problematizou Sequências Figurais. Quanto ao conceito de limite, observou-se que em mais da metade das situações foi solicitado o seu cálculo.

Cabe destacar que grande parte das situações exigia um tratamento algébrico, entendidos aqui como fundamentais no Ensino Superior. Contudo, chama-se atenção para a importância de se propor outras transformações cognitivas, por exemplo, a conversão do registro figural para o numérico e deste para o algébrico, em situações que permitam ao estudante levar conjecturas e hipóteses, testar estas conjecturas e hipóteses e generalizar, atingido a terceira fase do padrão.

Os aspectos relacionados ao PMA foram evidenciados, por se tratar de um livro de Cálculo do Ensino Superior, a saber: deduções formais, técnicas e regras para a decisão quanto à convergência de Sequências. Destaca-se, também, que a maioria das Sequências em C3 é convergente.

Diante desses resultados, entende-se que limitar uma discussão no âmbito da Educação Matemática é uma questão que não cabe nesta pesquisa, o que se pretende aqui é apontar possibilidades de futuras pesquisas a partir das obras analisadas e referências propostas no Ensino Superior. Compreende-se que o trabalho com Sequências Numéricas precisa de reformulações, tratando o eixo padrão como estruturador dos conteúdos matemáticos, estruturando o currículo, por exemplo.

Ressalta-se que futuras pesquisas podem ser realizadas devido à complexidade do tema de pesquisa. Há possibilidade de trabalho com estudantes do Ensino Médio, potencializando situações envolvendo os padrões em matemática para o trabalho com Sequências bem como a associação com o conceito de Funções e as diversas representações do conceito.

Outra possibilidade de trabalho esta relacionada com acadêmicos ingressantes de um curso superior na área de Matemática, em especial, as Licenciaturas, na tentativa de diminuir os índices de reprovação e evasão, observados em pesquisas envolvendo esse público-alvo.

Assim sendo, o processo de transição do Ensino Médio para o Ensino Superior requer trabalho além de pessoal, um esforço por parte dos professores da Educação Básica e do Ensino Superior para que diversos conceitos estudados no Ensino Médio se correlacionem ao estudado no Ensino Superior, superando os obstáculos epistemológicos dos estudantes.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução Luis Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.

BORBA, M.C. **A Pesquisa Qualitativa Em Educação Matemática**. Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria da Educação fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: **As ciências da natureza e a matemática**, 2002. Disponível em: < <http://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/ciencias-da-natureza-matematica-e-suas-tecnologias-mais.pdf>> Acesso em: 10/11/2015.

_____. **Plano Nacional do Livro Didático**. Guia de livros didáticos Ensino Médio, 2015. Disponível em: < <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015>> Acesso em: 20/05/2016.

COSTA, C. **Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização**. Escola Superior de Educação de Coimbra, 2002.

DEVLIN, K. **Matemática: A ciência dos padrões**. Porto, Portugal: Porto Editora, 2002.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking. In: **Chapter 2 : Advanced Mathematical Thinking Processes**. Edited by David Tall, p. 25 – 40, 2002.

DUVAL, R. **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Concedida a FREITAS, de. J.L.M; REZENDE,V. Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, v.2, n.3, jul-dez. 2013.

ELIAS, H.R. BARBOSA, L.N.S.C.de. SAVIOLI, A.M.P.D. **Matemática Avançada e Elementar nos Livros Didáticos: o conceito dos números inteiros**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

FROTA, M.C.R. **A representação como processo do Pensamento Matemático Avançado**. XXVI Reunião Latino Americana de Matemática Educativa. Belo Horizonte – MG, 2012.

GERETI, L.C.V. et.al. **Pensamento Matemático Avançado e Pensamento Algébrico evidenciados em tarefas de sistemas de equações lineares**. Anais do VII CIBEM. Montevideo/Uruguai, 16 a 20 de setembro de 2013.

GRECCO, E.C.S. **Uso de Padrões e Sequências: uma proposta de abordagem para a Introdução a álgebra para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado apresentado a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2008.

HERBERT, K.; BROWN, R. H., **Patterns as tools for Algebraic Reasoning**, 1997.

IGLIORI, S.B.C. **Pensamento Matemático Avançado: Em debate.** XXVI Reunião Latino Americana de Matemática Educativa. Belo Horizonte – MG, 2012.

KERN, N.B. **Uma Introdução ao Pensamento Algébrico através de relações funcionais.** Dissertação de Mestrado apresentado a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Porto Alegre/RS, 2008.

MACHADO, S.D.A. BIANCHINI, B.L. **Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua “forma” de pensar a Matemática.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.3, pp.590-605, 2013.

MODANEZ, L. **Das Sequências de Padrões Geométricos á Introdução ao Pensamento Algébrico.** Dissertação de Mestrado apresentado a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2003.

NASSER, L. **Papel da Abstração no Pensamento Matemático Avançado.** XXVI Reunião Latino Americana de Matemática Educativa. Belo Horizonte – MG, 2012.

NCTM (2007). **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês, publicado em 2000).

NUNES, M.de. N.F. **Sequências Numéricas: Um Estudo de Convergência através de atividades.** Dissertação de Mestrado apresentado a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2001.

PIRES, C.M.C. SILVA, da. M.A. **A riqueza nos currículos de Matemática do Ensino Médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos.** Revista Zetétiké-FE/Unicamp – v. 21, n. 39 – jan/jun 2013.

PONTE, J.P; et.al. Práticas Profissionais dos Professores de Matemática in: **Ações do professor na construção coletiva de um argumento genérico numa turma do 9.º ano.** Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 1ª edição, Coleção: Encontros de Educação, 2014.

PONTE, J. P; BRANCO, N; MATOS, A. **A Álgebra no Ensino Básico.** Portugal: Ministério da Educação-BGIdc, 2009.

SANTOS, M.G. **Um Estudo sobre Convergência de Sequências com alunos que já tiveram o contato com a noção de Limite.** Dissertação de Mestrado apresentado a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2005.

STEWART, J. Cálculo. In: **Sequências.** Tradução da 6ª Edição norte americana. tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins ; revisão técnica Helena Maria Ávila de Castro. – São Paulo: Cengage Learning, 2010.

USISKIN, Z. As ideias da Álgebra. In: **Concepções sobre Álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** Traduzido por: Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1995.

VALE, I. et.al. **Os padrões no Ensino da Álgebra.** Escola Superior de Educação de Viana do Castelo - LIBEC, 2008.

VIELMO, C. **Sequências Numéricas: Uma Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio.** Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Regional Integrada Do Alto Uruguai e Das Missões, Campus De Santiago/RS, 2012.

ANEXOS**ANEXO I – QUESTIONÁRIO PILOTO PROPOSTO NA DISSERTAÇÃO D**

Resolva as questões abaixo, indicando o valor do limite, se houver, e comente:

Explicando com palavras;

Explicando com desenho;

$$n \in \mathbb{N}$$

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 5$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2+n}$

APÊNDICES

APÊNCIDE I: MAPEAMENTO EM REVISTAS

Nº	Título	Autor	Ano	Revista	Descritor	Nacionalidade do(s) autor(ES)
1	Características do pensamento algébrico de estudantes do Ensino Médio com equações do 1º grau	Cláudia Lisete Oliveira Groenwald – Ednei Luis Becher	2010	ACTA - ULBRA	Pensamento Algébrico	Brasil
2	Exploración del pensamiento algebraico de profesores de matemática em formación – “La Prueba EVAPAL”	Andrés González Rondell – Fredy Enrique González	2011	ACTA - ULBRA	Pensamento Algébrico	Venezuela
3	Influência dos padrões de interação didática no desenvolvimento da aprendizagem em matemática: Análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre seqüências	Adriana Assis - Cristina Frade - Juan D. Godino	2013	Bolema	Padrão	Brasil
4	Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal	Márcia Cristina De Costa - Trindade Cyrino - Hélia Margarida De Oliveira	2011	Bolema	Pensamento Algébrico	Brasil e Portugal
5	A existência da seqüência de Fibonacci no campo dos inteiros: Uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da seqüência Fedathi	Francisco Regis Vieira Alves - Hermínio Borges Neto	2011	Boletim GEPEM	Seqüência	Brasil
6	Tarefas com padrões num percurso de formação de professores do ensino básico: Alguns exemplos de boas práticas	Teresa Pimentel - Isabel Vale	2011	Boletim GEPEM	Padrão	Brasil
7	O Pensamento de Jacob Klein sobre a simbolização algébrica nos Séculos XVI e XVII	Evilásio José De Arruda	2015	Caminhos Da Educação Matemática Em Revista - Sergipe	Pensamento Algébrico	Brasil
8	A dialética entre pensamento e simbolismo algébricos	Bárbara Lutaif Bianchini – Sílvia Dias Alcântara Machado	2010	Educação Matemática Pesquisa	Pensamento Algébrico	Brasil
9	Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio	Cláudia Lisete Oliveira Groenwald – Ednei Luis Becher	2010	Educação Matemática Pesquisa	Pensamento Algébrico	Brasil
10	Padrões em contextos	Isabel Vale	2013	Revmat	Padrão	

	figurativos: Um caminho para a generalização em matemática					
11	Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano	Floriano Augusto Veiga Viseu - Daniela Nogueira	2014	Revemat	Pensamento Algébrico	Brasil
12	Formulação de problemas envolvendo generalização de padrões por alunos do Ensino Fundamental: Análise de registros orais e escritos	Louise Dos Santos Lima - Claudia Segadas	2015	Revista Paranaense De Educação Matemática-RPEM	Padrão	Brasil
13	Manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do Ensino Fundamental I	Daniele Peres Da Silva - Angela Marta Pereira Das Dores Savioli	2014	Revista Paranaense De Educação Matemática-RPEM	Pensamento Algébrico	Brasil
14	Modelagem matemática e representações semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico	Dionísio Burak - Célia Finc Brandt	2010	Zetetiké	Pensamento Algébrico	Brasil
15	Algumas contribuições do geogebra para uma abordagem corporificada da convergência de sequências numéricas no cálculo.	Daila Silva Seabra de Moura Fonseca - Regina Helena de Olveira Lino Franchi	2013	Rematec	Sequência	Brasil

Nº	Objetivos da Pesquisa	Instrumento de Produção de Dados	Sujeitos
1	O objetivo desse trabalho foi investigar as características do pensamento algébrico de estudantes do Ensino Médio, desenvolvido pelos estudantes participantes da investigação durante o Ensino Fundamental, em equações do 1º grau.	A investigação adotou um viés qualitativo sob o enfoque de estudo de caso, pois buscou investigar questões com o objetivo de estudar o fenômeno em sua complexidade e no contexto natural (BOGDAN; BIKLEN, 1994).	Alunos do Ensino Médio
2	Analisar as relações entre os processos do pensamento algébrico e a mediação tecnológica.	Teve caráter diagnóstico e confirmatório, no qual foi aplicado um instrumento, um teste, chamado Evolução do Pensamento Algébrico (EVAPAL), que foi projetado pelos autores, e foi validado por meio do julgamento de três peritos. A seleção dos sujeitos da pesquisa não envolveu qualquer tipo de análise estatística e de amostragem, e no total foram 118 alunos, alguns dos quais já tinham sido aprovados em um primeiro curso de álgebra.	Grupo de professores de Matemática e estudantes de uma universidade pública de formação de professores da Venezuela.
3	Explorar as <i>configurações didáticas</i> (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006) e, mais especificamente, os padrões de interação estabelecidos entre professoras e alunos em uma atividade exploratório-investigativa de Matemática, visando melhor	Analisou-se uma tarefa exploratório-investigativa implementada em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental (alunos de aproximadamente 12 anos) de uma escola pública situada na região urbana de Belo Horizonte (MG). Foi utilizado como modelo teórico-metodológico o 3º nível de análise	Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental.

	compreender a emergência desses padrões e seus efeitos sobre o desenvolvimento da aprendizagem.	proposto pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento Matemático (EOS) (FONT; PLANAS; GODINO, 2010). Também, identificaram-se os padrões de interação suscitados (GODINO; LLINARES, 2000; MENEZES, 2005) indispensáveis à inferência dos atos e processos de significação mobilizados.	
4	O objetivo foi o de relacionar os tipos de pensamento algébrico mobilizados e os objetivos de aprendizagem presentes nos documentos oficiais de orientação curricular vigentes em Portugal, tendo em conta o nível de escolaridade dos alunos.	A recolha de dados foi realizada numa escola da região de Lisboa por meio da aplicação, acompanhada de entrevista, de quatro tarefas. Foram organizados os tipos de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos em função de três grandes categorias, nomeadamente Aritmética Generalizada, Pensamento Funcional e Modelação, e de subcategorias que emergiram no decorrer da análise.	Três alunos de diferentes ciclos do Ensino Básico.
5	Descrever uma atividade para sala de aula que caracteriza a possibilidade de se definir a sequência de Fibonacci no campo dos inteiros.	Ancorou-se a abordagem na metodologia de ensino nomeada <i>Sequência Fedathi</i> – SF que, segundo Borges Neto et al (2001, p. 592), prevê um “clima experimental de investigação em sala de aula, semelhante ao processo de identificação, compreensão e solução um problema, por parte de um matemático profissional”.	-
6	Propor situações didáticas sobre padrões aos professores e estudantes proporcionando um contexto rico de exploração matemática, permitindo trabalhar a generalização, componente fundamental da álgebra.	A equipe elaborou uma proposta didática em três fases: (1) Contagens; (2) Sequências; e (3) Problemas. Um conjunto de tarefas foi assim apresentado aos formandos nas sessões conjuntas e trabalhado nesse âmbito. Posteriormente, os formandos levaram para a sua sala de aula todas ou parte destas tarefas, tendo-as adaptado às suas turmas quando necessário. Deste conjunto de tarefas apresentaram-se alguns exemplos, ilustrados com trabalhos de alunos, de cada uma das três fases da proposta didática.	A experiência relatada desenvolveu-se no âmbito de um programa de formação contínua em Matemática para professores do ensino básico (alunos de 6-10 anos).
7	A proposta do texto foi de trazer traduções de partes significativas da obra de Jacob Klein, no sentido de evidenciar aspectos da relação simétrica e assimétrica entre símbolo e objeto, na compreensão e construção de conceitos matemáticos.	Abordagem pautada na história geral e história da formação dos conceitos na matemática.	Não há
8	O artigo levanta questões sobre a dialética necessária entre o pensamento e o simbolismo algébricos e evidencia a importância do tema no desenvolvimento da Álgebra escolar.	É apresentado o modelo teórico sobre os três usos das variáveis, 3UV, criado pelo grupo mexicano de Sônia Ursini, seguido de exemplos pautados nessa teoria, que possibilita verificar a dialética evidenciada anteriormente, no caso do trato sintático e semântico das variáveis.	Não há
9	Esse trabalho buscou mapear, as competências e habilidades algébricas desenvolvidas durante o Ensino Fundamental com os	O presente estudo teve com instrumentação de dados uma investigação qualitativa segundo uma abordagem de estudo de caso.	Estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

	conteúdos comumente estudados naquelas séries, através de uma investigação qualitativa segundo uma abordagem de estudo de caso.		
10	Apresentar tarefas em contextos figurativos que se revelam como um bom ponto de partida para a generalização de padrões, como um caminho para o estudo da álgebra. Além disso, pretendeu-se trazer situações envolvendo padrões, apontando algumas possibilidades de trabalho em sala de aula de matemática.	Apresenta-se uma sequência didática de natureza exploratória, onde o principal enfoque é que a generalização surja, numa primeira fase, da análise dos aspectos visuais da tarefa de modo a permitir efetuar generalizações próximas e distantes.	Alunos do ensino básico (6-9 anos).
11	Buscou-se averiguar como se desenvolve o pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano no estudo das funções.	Metodologia qualitativa e interpretativa. Recolheram-se os dados através da atividade da aluna na resolução de tarefas propostas na sala de aula e de uma entrevista.	Aluna do 10º ano
12	O objetivo desta pesquisa foi de verificar o desempenho dos alunos em uma situação em que são chamados a formularem um problema a partir de uma figura dada. Analisou-se, entre outros aspectos, a expressão oral e escrita destes alunos.	Utilizou-se a metodologia de ensino-aprendizagem de matemática via resolução de Problemas.	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental
13	Identificar, analisar e discutir características do pensamento algébrico elementar nas produções escritas de oito tarefas da <i>Early Algebra</i> .	A instrumentação dos dados baseou-se na <i>Early Algebra</i> como área de pesquisa.	Estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental I.
14	Apresentar análises e reflexões sobre as possibilidades de contemplar a Modelagem Matemática com uma teoria de representações semióticas.	A pesquisa teve como instrumentação de dados a modelagem matemática, resolução de problemas a luz da teoria das representações semióticas.	Trabalho viivenciado junto a um grupo de professores durante um curso realizado em Faxinal do Céu, no Município de Pinhão, no interior do Estado do Paraná.
15	Apresenta algumas contribuições do software GeoGebra para a criação de ambientes de exploração, de modo a corporificar a convergência de sequências numéricas.	O trabalho teve como pressuposto teórico-metodológico as ideias do Pensamento Avançado e os Três Mundos da Matemática.	Estudantes de uma turma de Cálculo do Ensino Superior.

APÊNDICE II: MAPEAMENTO EM DISSERTAÇÕES

Nº	Título	Autor	Universidade	Ano	Descritores
1	Um estudo sobre convergência de sequências com alunos que já tiveram o contato com a noção de limite	Milena Gonçalves Santos	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2005	Sequências Numéricas
2	Uso de padrões e sequências: Uma proposta de abordagem para a introdução a álgebra para alunos do 7º ano do ensino fundamental	Emily Cassiana Santolin Grecco	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2008	Padrões
3	Das sequências de padrões geométricos á introdução ao pensamento algébrico	Leila Modanez	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2003	Padrões Geométricos
4	Sequências numéricas: um estudo de convergência através de atividades	Marly de Nardi Ferraz Nunes	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2001	Sequências Numéricas
5	Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de álgebra por alunos sem acuidade visual	Karina Laguna Andrezzo	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2005	Padrões
6	Os alunos do 1º ano do ensino médio e os padrões: observação, realização e compreensão	Cristiane Regina de Moura Ferreira	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2009	Padrões
7	Introdução do pensamento algébrico para alunos Do EJA: uma proposta de ensino	Edgar Alves da Silva	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC	2007	Pensamento Algébrico
8	Estratégias de generalização de padrões de alunos do ensino fundamental Do ponto de vista de seus professores	Maria Margarida Massignan de Almeida	Universidade Católica de São Paulo – PUC	2006	Padrões
9	Os alunos de 5ª série/6º ano frente a atividades sobre observação e generalização de padrões	Lucimeire Omoti de Aquino	Universidade Católica de São Paulo – PUC	2008	Padrões
10	Uma investigação sobre a produção de tarefas algébricas para o 6º ano do ensino fundamental	Mageri Rosa Ramos	Universidade Federal de Juiz de Fora – Minas Gerais - MG	2011	Pensamento Algébrico

Nº	Objetivos da Pesquisa	Instrumento de produção de dados	Sujeitos
1	O objetivo é investigar a resistência dos estudantes em desassociar a concepção de limite de um movimento físico, de uma aproximação, já que sua definição é estática. Pretende-se também discutir as concepções apresentadas pelos alunos quanto a: “ter limite” e “ser limitado”, sequências numéricas, convergência de sequências e a diferença entre a	Foi desenvolvida uma sequência de cinco atividades para ser aplicada a esses alunos. O estudo foi embasado num trabalho sobre os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito de limite realizado por Anka Sierpinska e na pesquisa de Aline Robert, cujo tema está relacionado à aquisição do conceito de convergência de sequências numéricas, bem como, em conceitos	Estudantes do Ensino Superior

	representação de um conjunto com n elementos e de outro com infinitos, o que inclui estudar o significado de uma variável n natural.	matemáticos relativos à questão do infinito apresentados por Bento de Jesus Caraça em seu livro intitulado: “Conceitos Fundamentais da Matemática”.	
2	O objetivo desta pesquisa foi apresentar uma proposta de sequência didática destinada a alunos de 7º ano do Ensino Fundamental para introdução à Álgebra, em particular a dois de seus componentes: a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões e sequência apresentados sob a forma de problemas.	Os procedimentos metodológicos adotados foram baseados na teoria da Engenharia Didática, de Michele Artigue (1998, Apud MACHADO, 1999), que a define por dois pontos principais: uma parte experimental baseada nas realizações didáticas em sala de aula, que inclui a formulação, realização, observação e análise de uma sequência de ensino e uma validação específica, baseada no confronto entre análise a priori e análise a posteriori.	Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental
3	O objetivo dessa pesquisa é o estudo da introdução ao pensamento algébrico, por meio de sequências de padrões geométricos.	Por meio de uma sequência didática, envolvendo oito atividades elaboradas a partir do uso de sequências de padrões geométricos. A pesquisa fundamentou-se principalmente nas teorias sobre Mudanças de Quadros, de Régine DOUADY (1987), e Registros de Representação Semiótica, de Raymond DUVAL (1993). A metodologia adotada seguiu os princípios da engenharia didática.	A pesquisa envolveu professores e alunos de 6ª série do Ensino Fundamental.
4	O objetivo desse trabalho é propiciar aos alunos a apropriação de conceitos relacionados com a convergência de sequências.	Utilizando-nos dos princípios da Engenharia Didática, elaboramos e aplicamos uma sequência composta de 10 atividades e um pós-teste. Nessas atividades foram trabalhados, através de problemas, os conceitos relacionados com sequências numéricas e convergência.	Alunos de um curso de licenciatura em matemática, que não haviam ainda sido introduzidos no estudo dos limites e do cálculo infinitesimal.
5	Nesta pesquisa, buscou-se identificar fatores que contribuíram na apreensão de expressões algébricas por alunos sem acuidade visual.	A pesquisa teve como ponto de partida a posição de Vygotsky referente à integração social do aluno portador de alguma deficiência e seu potencial para um desenvolvimento normal. A sugestão de abordagem algébrica através de generalizações de padrões figurativos teve suporte de vários pesquisadores em educação Matemática, em particular, os estudos e considerações de Küchemann (1981), Booth (1988) e Mason (1996).	Alunos do Ensino Médio.
6	O presente estudo relata uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi investigar como o aluno que terminou o Primeiro ano do Ensino Médio, em 2008 observa, realiza e compreende as atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões.	Para a coleta de dados foi elaborado e aplicado um instrumento diagnóstico, inspirado nas ideias da Engenharia Didática, conforme Machado (2003).	Alunos do Ensino Médio
7	A presente dissertação teve por objetivo investigar uma abordagem de ensino dos conceitos de incógnita,	A pesquisa foi pautada na modelagem matemática e nos estudos da Etnomatemática. Tivemos por hipótese	Estudantes da Educação de Jovens e Adultos

	variável e equação do 1º grau.	o desenvolvimento de uma intervenção de ensino utilizando situações-problema, trabalhando os conceitos de incógnita, variável e equação do 1º grau, contextualizadas com o cotidiano dos alunos jovens e adultos.	
8	O presente estudo buscou verificar se os professores do Ensino Fundamental de escolas Públicas Estaduais de uma cidade do interior de SP trabalham atividades que envolvem a observação de regularidades e de generalização de padrão, e caso trabalhem, quais as estratégias de resolução que preveem que seus alunos utilizariam.	Para a coleta de dados foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com cinco professores da rede estadual	Professores do Ensino Fundamental
9	Esta dissertação relata uma investigação cujo objetivo foi investigar se e como alunos de uma 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental são sensibilizados e criam estratégias para resolver situações que envolvem a percepção e generalização de padrões em sequências.	Para a coleta de dados elaborou-se e aplicou-se uma sequência didática, inspirada nas fases da Engenharia Didática, conforme Machado (2002), sendo que a análise “a posteriori” foi multidimensional, pois englobou: análise dos protocolos, de áudio e de vídeo.	As atividades da sequência foram propostas a 33 alunos do 6º ano de uma escola pública da periferia de São Paulo.
10	Esta produção científica tem como ponto de partida a análise de diferentes concepções de álgebra, pensamento algébrico e atividade algébrica. Um dos objetivos desta pesquisa foi a produção de tarefas, com características específicas e referenciadas teoricamente, que auxiliassem no desenvolvimento do pensamento algébrico discente.	A investigação se caracteriza por uma abordagem qualitativa e adota como base teórica o Modelo dos Campos Semânticos (MCS).	Foram aplicadas a um grupo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, e os significados que eles produziram para estas tarefas foram analisados sob os aportes do MCS.