

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**MATHEUS JARDIM GRACES**

**O SISTEMA DE LORENZ E O CAOS  
DETERMINÍSTICO**

**Itaqui  
2021**

**MATHEUS JARDIM GRACES**

**O SISTEMA DE LORENZ E O CAOS  
DETERMINÍSTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Elisa Regina Cara

**Itaqui  
2021**

— Graces, Matheus Jardim

O sistema de Lorenz e o caos determinístico /  
Matheus Jardim Graces. – maio, 2021.

53 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Uni-  
versidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemá-  
tica, 2021.

“Orientação: Elisa Regina Cara”.

1. Sistema de Lorenz. 2. Análise Qualitativa. 3. Pon-  
tos de Equilíbrio. 4. Caos. I. Título.

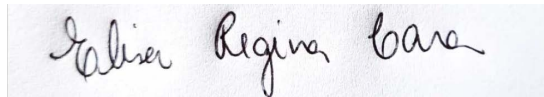
**MATHEUS JARDIM GRACES**

**O SISTEMA DE LORENZ E O CAOS DE-  
TERMINÍSTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao curso de Licenciatura em Matemática como  
requisito parcial para a obtenção do grau de  
Licenciado em Matemática.

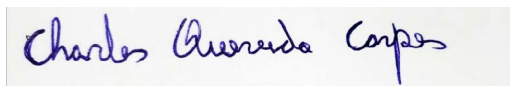
Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 1 de maio de 2021.

Banca examinadora:



---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Elisa Regina Cara  
Orientadora



---

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes  
Universidade Federal do Pampa



---

Prof. Dr. Alisson Darós Santos  
Universidade Federal do Pampa

## RESUMO

Este trabalho foi produzido no campo da Matemática com ênfase em Sistemas Dinâmicos de Tempo Contínuo e Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Para isto, foram realizados levantamentos bibliográficos com o objetivo de investigar o chamado Caos, presente no Sistema de Lorenz (ou Equações de Lorenz). Para a análise das equações, utilizaremos a técnica qualitativa de Jules Henri Poincaré (1854-1912). Ao invés de procurar fórmulas através de métodos analíticos, buscaremos pistas de como um determinado sistema não linear dado evolui, investigando as propriedades das funções que compõem este sistema. Esta técnica de análise de equações também busca a descrição das variáveis de estado e os resultados são representados no espaço de fase. Por fim, os pontos de equilíbrio (ou soluções de equilíbrio) são classificados de acordo com a Teoria de Estabilidade de Lyapunov.

**Palavras-chave:** Sistema de Lorenz. Análise Qualitativa. Pontos de Equilíbrio. Caos.

## ABSTRACT

This work was produced in the field of Mathematics with an emphasis on Continuous Time Dynamic Systems and Qualitative Theory of Differential Equations. For this, bibliographic study were developed with the objective of investigating the called Chaos presented in the Lorenz System (or Lorenz equations). For an analysis of the equations, we will use the qualitative technique of Jules Henri Poincaré (1854-1912). Instead of search for formulas using analytical methods, we will search for clues as to how a given non-linear system evolves, investigating properties of the functions that make up this system. This equation analysis technique also search to describe the state variables and the results are represented in the phase space. Finally, the equilibrium points (or equilibrium solutions) are classified according to Lyapunov Stability Theory.

**Keywords:** Lorenz system. Qualitative analysis. Equilibrium points. Chaos.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Como dois padrões divergem (saídas impressas por Lorenz (1961)).	9
Figura 2	Retrato de fase do sistema do Exemplo 1, conforme a variação o parâmetro $\mu$ .	21
Figura 3	Representação de uma órbita ou trajetória no espaço de fase.	23
Figura 4	Exemplos do ponto de equilíbrio $x^0$ (origem) assintoticamente estável e somente estável.	25
Figura 5	(a) Caso assintoticamente estável; (b) Caso estável.	32
Figura 6	Volume das condições iniciais no espaço de fase.	35
Figura 7	Fenômeno de convecção térmica.	39
Figura 8	Gráfico $X(t), Y(t)$ e $Z(t)$ com $r = 28$ e condição inicial $(5, 5, 5)$ .	45
Figura 9	(a) Gráfico $X(t)$ com $r = 28$ e condição inicial $(5, 5, 5)$ ; (b) Gráfico $X(t)$ com $r = 28$ e condição inicial $(5, 01; 5; 5)$ .	45
Figura 10	Soluções $X(t), Y(t)$ e $Z(t)$ para $r = 100$ e condição inicial $(5, 5, 5)$ .	46
Figura 11	(a) Gráfico $X(t), Y(t)$ e $Z(t)$ com $r = 21$ e condição inicial $(3, 8, 0)$ ; (b) Gráfico $X(t), Y(y)$ e $Z(t)$ com $r = 21$ e condição inicial $(5, 5, 5)$ ; (c) Gráfico $X(t), Y(y)$ e $Z(t)$ com $r = 21$ e condição inicial $(5, 5, 10)$ .	47
Figura 12	Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz com $r = 28$ e condição inicial $(5, 5, 5)$ , no plano $XY$ .	47
Figura 13	Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz com $r = 28$ e condição inicial $(5, 5, 5)$ , no plano $XZ$ .	48

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
<b>2 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES DE TEMPO CONTÍNUO</b> .....	<b>11</b>
2.1 Sistemas Lineares.....	11
2.2 Sistemas Dinâmicos Autônomos .....	21
2.3 Espaço de Fase e Pontos de Equilíbrio.....	22
2.4 Estabilidade e Instabilidade .....	23
<b>3 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES DE TEMPO CONTÍNUO</b> .....	<b>26</b>
3.1 Método Indireto de Lyapunov .....	26
3.2 Método Direto de Lyapunov.....	30
<b>4 DINÂMICA CAÓTICA</b> .....	<b>34</b>
4.1 Sistemas Conservativos, Dissipativos e Expansivos .....	34
4.2 Atrator em Sistemas Dissipativos .....	36
<b>5 O SISTEMA DE LORENZ</b> .....	<b>38</b>
5.1 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade .....	39
5.2 O Caos e o Atrator Estranho .....	44
5.3 Estabilidade Global na Origem ( $r < 1$ ).....	48
5.4 Limitação das soluções no sistema de Lorenz ( $\sigma > 0, r > 1, b > 0$ ).....	49
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>51</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>52</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos remete aos trabalhos de Henri Poincaré em relação às equações diferenciais, ao final do século XIX. Devido ao fato que a maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida por meio de fórmulas, Poincaré desenvolveu uma nova abordagem. Nesta, as soluções devem ser objeto de uma análise qualitativa, utilizando as ferramentas geométricas disponíveis, a qual deve ser complementada com um estudo numérico da equação diferencial.

Nas últimas décadas, pode-se notar o crescimento em estudos relacionados a fenômenos não lineares, introduzindo novas abordagens e conceitos no tratamento de sistemas dinâmicos conservativos e dissipativos. Entre os aspectos centrais desses estudos reside o comportamento caótico determinístico (FIEDLER-FERRARA; DO PRADO, 1994).

Isso se dá porque muitos dos fenômenos da natureza podem ser modelados por processos iterativos expressos em termos matemáticos por iterações de uma transformação em certo espaço de eventos, representando o caso de evolução temporal discreta ou o caso de uma evolução contínua por uma equação diferencial ou um campo de vetores. Nas duas situações os processos iterativos são chamados sistemas dinâmicos (PALIS, 1994).

Dentre uma vasta gama de aplicações, tais modelos são empregados na previsão de eventos, seja a curto ou longo prazo. Assim, normalmente está-se interessado no comportamento a longo prazo de suas soluções. Isso nos leva à noção de atrator: eles são o conjunto de eventos limitantes que exibem inúmeras possibilidades para o comportamento futuro das trajetórias iniciadas em diferentes pontos do espaço de eventos (PALIS, 1994).

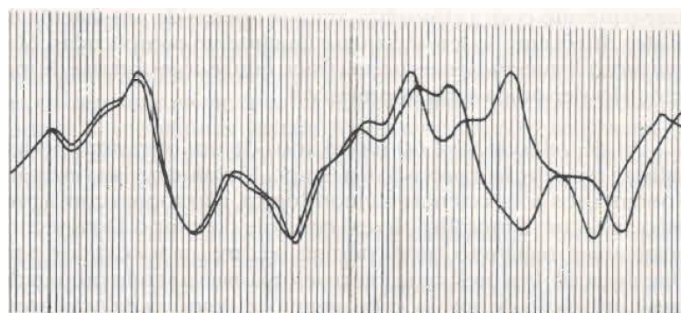
Contudo, o desenvolvimento das técnicas computacionais, fizeram com que esses modelos revelassem grandes riquezas, como o grau de incerteza quanto ao comportamento das soluções a longo prazo. Com isso, surgiram novos atratores, descobertos nas décadas de 60, 70 e 80, que receberam o nome de estranhos (PALIS, 1994).

Nessa mesma linha de pesquisa estava Edward Norton Lorenz, graduado em matemática e professor de ciências atmosféricas no Massachusetts Institute of Technology (MIT). Como todo professor de meteorologia, interessava-se por previsão do tempo e se perguntava: por que não se pode prever o tempo com um grau de confiabilidade razoável? Enquanto trabalhava num antigo computador nas salas do MIT. Combinou em um Royal McBee, 12 diferentes equações que analisavam fenômenos atmosféricos como a força do vento, pressão barométrica, etc. Revendo os números, descobriu que o computador havia

reduzido (por limitação de memória) o número 0,506127 para 0,506. Para ele na época era aparentemente uma variação sem nenhuma importância (GLEICK, 1991).

Insistindo em refazer os cálculos com todos os seis dígitos decimais. Pode observar que o computador devolveu uma previsão de tempo completamente diferente da original. Depois do incidente, Lorenz desenvolveu a tese básica de que situações iniciais ligeiramente diferentes podem se desenvolver em situações consideravelmente diferentes. A Figura 1, ilustra o comportamento de dois padrões a partir de condições iniciais relativamente próximas.

Figura 1 – Como dois padrões divergem (saídas impressas por Lorenz (1961)).



Fonte: Gleick (1991).

Em 1961, Lorenz foi visitar Saltzman<sup>1</sup>, este trabalhava com um sistema composto por sete equações que descreviam processos atmosféricos. Lorenz ao investigar o sistema de Saltzman, notou que os valores de quatro das sete variáveis, se tornavam muito pequenos. Após ser autorizado por Saltzman, Lorenz resolveu a versão simplificada com apenas três variáveis, e obteve também uma solução não periódica, para os mesmos parâmetros escolhidos por Saltzman. Dessa forma, Lorenz obteve um sistema composto por três equações diferenciais ordinárias conhecidas como o sistema de Lorenz (MONTEIRO, 2011).

O sistema apresentado por Lorenz em seu famoso artigo “*Deterministic Nonperiodic Flow*”<sup>2</sup> compunha três equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem, as quais continham três variáveis,  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$ , e três parâmetros:  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$ , números reais positivo. Este modelo foi amplamente estudado e vários resultados foram publicados

<sup>1</sup>Barry Saltzman, nasceu em, Nova York, EUA. Formou-se no Instituto de Tecnologia de Massachusetts, tendo como sua principal publicação o livro *Dynamical paleoclimatology*.

<sup>2</sup>A pesquisa informada neste trabalho foi patrocinada pela Direção de Pesquisa Geofísica do Centro de Pesquisa de Cambridge.

sobre o mesmo. Em resumo, o sistema de Lorenz é composto pelas equações

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ.\end{aligned}\tag{1}$$

Ao investigar este sistema, Lorenz resolveu o problema da imprevisibilidade da atmosfera. Verificou que o menor erro nas medidas das condições do clima, compromete a validade de qualquer previsão. A dependência sensível nas condições iniciais deste sistema, ficou conhecida como Efeito Borboleta. Segundo Lorenz,

*“O bater de asas de uma borboleta no Brasil provoca um tornado no Texas.”*

Dessa forma, este trabalho tem por objetivo principal investigar o caos determinístico presente no sistema de Lorenz e como se chega à existência do atrator estranho. Para isso, no Capítulo 2, serão tratados conceitos iniciais relacionados a sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. Esta teoria é se faz importante, pois, o estudo de sistemas não lineares requer a análise de um sistema linearizado. No Capítulo 3, serão expostos métodos de análise de sistemas autônomos não lineares, para tratar a estabilidade ou não dos pontos críticos desses sistemas. No Capítulo 4, serão determinadas algumas condições para que ocorra o Caos em determinados sistemas e mais algumas definições importantes para compreensão da Dinâmica Caótica. No Capítulo 5, será apresentada a análise qualitativa do sistema de Lorenz e os resultados serão representados graficamente obtidos a partir de métodos numéricos. O capítulo Considerações Finais será reservado para resumir os principais resultados apresentados neste trabalho.

## 2 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES DE TEMPO CONTÍNUO

Para solucionar um conjunto de equações diferenciais existem dois caminhos, pode-se tentar integrá-lo analiticamente ou resolvê-lo numericamente. A primeira abordagem só é possível em casos muito específicos, já a segunda tem o inconveniente de ser válida apenas para a situação calculada, ou seja, uma nova escolha de condições iniciais ou dos parâmetros requer uma nova solução numérica (MONTEIRO, 2011).

Há razões importantes para o estudo de sistemas lineares. Isso se deve porque através de um processo de linearização, pode-se fazer um estudo local de sistemas não lineares, utilizando um sistema linear associado (MONTEIRO, 2011). Neste capítulo abordaremos os conceitos iniciais relacionados aos sistemas dinâmicos lineares.

### 2.1 Sistemas Lineares

#### Definição 1.

- (a) Um *sistema* é um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito que ocorrem com os elementos desse conjunto.
- (b) Um sistema é *dinâmico* quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos variam no tempo.

Do Cálculo Diferencial sabe-se que dada uma grandeza  $x(t)$ , para um  $t$  contínuo, a taxa de variação dessa grandeza é representada pela derivada  $dx(t)/dt$ . No caso contínuo, em que  $t \in \mathbb{R}_+$ , a área da matemática responsável por estudar essas taxas de variação, é a área de Equações Diferenciais. No caso discreto, em que  $t \in \mathbb{Z}$ , para o estudo dessas alterações, devem-se utilizar as chamadas Equações de Diferenças (MONTEIRO, 2011).

Neste trabalho, nos restringiremos à abordagem de conceitos de equações de tempo contínuo, mais precisamente o tempo será a única variável independente de tais equações. A evolução de um sistema desse tipo é governada por uma ou mais equações como as exemplificadas abaixo.

$$\frac{dx(t)}{dt} - 4x(t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + \tanh(\pi t)x(t) - 5t^2 = 0 \quad (3)$$

As equações (2) e (3) são as chamadas **Equações Diferenciais Ordinárias**, as quais dependem de uma única variável independente. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Pode-se ainda classificar as equações em lineares e não lineares (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

A forma mais geral de se escrever uma **Equação Diferencial Ordinária Linear** de ordem  $n$  para a variável dependente  $x(t)$  sendo  $t \in \mathbb{R}$  é

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_n(t)x(t) = F(t). \quad (4)$$

Entende-se que uma equação diferencial é linear se pode ser escrita como uma combinação dos termos  $x(t), dx(t)/dt, \dots, d^n x(t)/dt^n$ , onde a ponderação é realizada pelos coeficientes  $a_j(t)$  com  $j = 0, 1, \dots, n$ . Por outro lado, sistemas não lineares são aqueles cujas equações que os governam não podem ser escritas na forma da equação (4). Por exemplo, as equações (2) e (3) são lineares.

Considere o sistema Lorenz que é descrito pelas equações

$$\frac{dX}{dt} = -\sigma X + \sigma Y \quad (5)$$

$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ \quad (6)$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ. \quad (7)$$

Observe que na equação (6) e na equação (7) aparecem termos não lineares quadráticos ( $XZ$  e  $YX$ ). Dessa forma, o sistema acima é classificado como não linear (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Uma equação diferencial é chamada de **Homogênea** se a função  $F(t)$  em (4) é nula, caso contrário  $F(t) \neq 0$ , a equação é dita **Não Homogênea**. A **Solução Geral** de uma equação diferencial de ordem  $n$  é a solução que contém todas as soluções possíveis dessa equação. Para saber como um sistema linear dado evolui, a partir de um instante  $t_0$ , precisa-se resolver o **Problema de Valor Inicial**. De modo que para determinar a solução, é necessário especificar o valor de  $x(t)$  no instante  $t_0$ , assim como os valores das  $n - 1$  primeiras derivadas de  $x(t)$  calculadas em  $t_0$ .

Assim determinam-se,

$$x(t_0), \frac{dx(t_0)}{dt}, \frac{d^2x(t_0)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}}, \quad (8)$$

que formam a **Condição Inicial** do problema, posteriormente encontramos as  $n$  constantes arbitrárias que compõem a solução geral de uma equação de ordem  $n$  (MONTEIRO, 2011).

Dada uma equação diferencial linear de ordem  $n$ , podemos reescrevê-la na forma de um sistema de  $n$  equações de primeira ordem. Essa transformação pode ser feita para a equação (4), definimos  $x_1(t) = x(t)$ , de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{F(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}x_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x_n. \end{aligned} \tag{9}$$

O **Estado** de um sistema num instante  $t$  é dado pelos valores das **Variáveis de Estado**  $x_j(t)$  com  $j = 1, 2, \dots, n$ . Em um problema de condição inicial, o estado de um sistema num dado momento, constitui toda a informação necessária para determinar sua evolução (MONTEIRO, 2011).

Quando usados métodos computacionais para determinar como um sistema dado evolui, é conveniente se usar  $n$  equações de primeira ordem, em vez da equação de ordem  $n$ . A principal vantagem é que com  $n$  equações de primeira ordem, é possível fazer a análise analítica em situações muito específicas, numérica ou qualitativa (MONTEIRO, 2011).

Considere agora o sistema de equações diferenciais lineares escritas na forma matricial:

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \tag{10}$$

em que

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad e \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Se  $F(t) = 0$  na equação (10), obtemos o sistema linear homogêneo

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (11)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $X$  um vetor  $n \times 1$ . Considerando os elementos de  $A$  como números reais, se  $n = 1$  o sistema reduz-se à equação

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1, \quad (12)$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Para resolver a equação (12) de forma analítica, separamos as variáveis de modo a obter

$$\frac{dx_1}{x_1} = \lambda dt, \quad (13)$$

e integramos ambos os lados de (13) obtendo,

$$\ln x_1 = \lambda t + c \Leftrightarrow x_1 = e^{\lambda t + c} \Leftrightarrow x_1 = ce^{\lambda t}. \quad (14)$$

Portanto, a solução de (12) é dada por

$$x_1(t) = ce^{\lambda t}, \quad (15)$$

com  $c \in \mathbb{R}$ , sendo a constante de integração.

Para resolver o sistema (11) é preciso determinar  $n$  soluções, tal que,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  devem ser encontrados. Então, vamos considerar  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  um vetor e buscar para (11) soluções da forma

$$X(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}. \quad (16)$$

Substituindo a solução  $X(t)$  acima no sistema (11), tem-se

$$\lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = A\mathbf{v}e^{\lambda t}. \quad (17)$$

Dividindo por  $e^{\lambda t}$  a equação anterior e considerando  $\mathbf{I}$  a matriz identidade  $n \times n$ , obtém-se

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \text{ ou } (A - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0. \quad (18)$$

Assim,  $X(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$  será uma solução de (11) se  $\lambda$  for um autovalor e  $\mathbf{v}$  um autovetor da matriz  $A$ . Os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são raízes da equação polinomial de grau

$n$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (19)$$

Para resolver um sistema de ordem  $n$ , a cada autovalor  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), associa-se uma função de tal forma que:

- Se  $\lambda_j$  é raiz real simples do polinômio (19), então a função associada é  $e^{\lambda_j t}$ ;
- Se  $\lambda_j$  é raiz real com multiplicidade  $m$ , as funções associadas são  $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_j t}$ ;
- Se  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  e  $\lambda_{j+1} = \alpha_{j+1} + i\beta_{j+1}$ , um par de raízes complexas conjugadas, são associadas ao par de funções  $e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$  e  $e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$ ;
- Se há um par de autovetores complexos conjugados que são raízes com multiplicidade  $m$ , então associam-se as funções  $e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$  e  $e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$ ;  $te^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$  e  $te^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$  e  $t^{m-1} e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$ .

Portanto a solução geral é dada pela combinação linear dessas funções. As constantes arbitrárias que aparecem na solução, são determinadas a partir da condição inicial (MONTEIRO, 2011; BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Para sistemas lineares são válidos os seguinte teoremas sobre existência e unicidade de soluções.

**Teorema 1.** (*Existência e Unicidade*). *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) &= X^{(0)}. \end{aligned} \quad (20)$$

*Suponha que  $a_{ij}(t)$ ,  $f_i(t)$  sejam funções contínuas num intervalo  $I$  onde  $t_0$  é um valor especificado de  $t$  e  $X^{(0)}$  um número dado. Então, o problema tem uma única solução no intervalo  $I$ .*

*Demonstração (SANTOS, 2011).*

Para os sistemas de equações lineares homogêneos, isto é, sistemas com  $F(t) = 0$ ,

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (21)$$

é válido o princípio da superposição que diz que se  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções de (21), então

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) \quad (22)$$



também o é, para todas as constantes reais  $\alpha$  e  $\beta$ . Uma expressão da forma (22) é chamada **Combinação Linear** de  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ .

Verificaremos que realmente  $X(t)$  dado por (22) é solução de (21). Para isso, note que

$$X'(t) = \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t), \quad (23)$$

então, como  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções de (21),

$$\begin{aligned} \alpha A(t)X_1(t) + \beta A(t)X_2(t) &= A(t)(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) \\ &= A(t)X(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Assim,  $X_1'(t) = A(t)X_1(t)$  e  $X_2'(t) = A(t)X_2(t)$ . Isso prova o teorema a seguir.

**Teorema 2.** (*Princípio da Superposição*). *Se  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são soluções do sistema homogêneo*

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (25)$$

*então,  $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ , para  $\alpha$  e  $\beta$  números, também o é.*

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + F(t) \\ X(0) &= X^{(0)} \end{aligned} \quad (26)$$

Iremos determinar condições sobre  $n$  soluções  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  para que existam constantes  $c_1, \dots, c_n$  tais que

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t) \quad (27)$$

seja solução do problema de valor inicial (26). Substituindo  $t = 0$  em (27), obtemos o seguinte sistema de equações lineares algébricas

$$X(0) = c_1 X_1(0) + \dots + c_n X_n(0), \quad (28)$$

que pode ser escrito na forma

$$MC = X(0) \quad (29)$$

onde

$$M = [X_1(0) \cdots X_n(0)], \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Se a matriz do sistema  $M$  é invertível, então para toda condição inicial  $X(0) \in \mathbb{R}^n$  o sistema  $MC = X(0)$  tem uma única solução  $(c_1, \dots, c_n)$  dada por

$$C = M^{-1}X(0). \quad (30)$$

Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Portanto, se

$$\det[X_1(0) \cdots X_n(0)] \neq 0 \quad (31)$$

então para toda a condição  $X(0) = X^{(0)}$  existem  $c_1, \dots, c_n$  que satisfazem

$$X(t) = c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t) \quad (32)$$

que é solução do problema de valor inicial (26).

Dessa forma, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.** *Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema  $X' = AX$  tais que*

$$\det[X_1(0) \cdots X_n(0)] \neq 0. \quad (33)$$

*Então para toda a condição inicial  $X(0) \in \mathbb{R}^n$  o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t) \\ X(0) &= X^{(0)} \end{aligned} \quad (34)$$

*tem uma única solução que é da forma*

$$X(t) = c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t). \quad (35)$$

*Demonstração (SANTOS, 2011).*

Vejam agora, a seguinte definição.

**Definição 2. (a)** *Sejam  $X_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, X_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais. O determinante*

$$\mathbb{W}[X_1, \dots, X_n](t) = \det[X_1(t) \cdots X_n(t)] \quad (36)$$

*é chamado **Wronskiano** das funções vetoriais  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  em  $t \in \mathbb{R}$ .*

**(b)** *Se  $n$  soluções  $X_1, \dots, X_n$  do sistema  $X' = AX$  são tais que o wronskiano é diferente de zero em  $t = 0$  dizemos que elas são **Soluções Fundamentais** do sistema homogêneo*

$$X' = AX. \quad (37)$$

**(c)** *Se  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  são soluções fundamentais do sistema  $X' = AX$ , então a família de soluções*

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t), \quad (38)$$

*para constantes  $c_1, \dots, c_n$  é chamada solução geral de  $X' = AX$ .*

Portanto, a solução de geral de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneas é dada pelo conjunto de  $n$  soluções  $X_1, \dots, X_n$ , tal que

$$\mathbb{W}[X_1, \dots, X_n](0) = \det[X_1(0) \cdots X_n(0)] \neq 0. \quad (39)$$

Consideremos o sistema de equações diferenciais lineares não homogêneo em sua forma matricial

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (40)$$

**Teorema 4.** *Seja  $X_p(t)$  uma solução particular de (40). Sejam  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  soluções do sistema homogêneo correspondente tais que  $X_1(0), \dots, X_n(0)$  são LI. Então, a solução geral do sistema não homogêneo (40) é*

$$X(t) = X_p(t) + c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t). \quad (41)$$

*Demonstração (SANTOS, 2011).*

No caso de um sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas, sua solução é dada pela soma entre uma solução do sistema homogêneo e uma **Solução Particular**, que é uma solução válida considerando a entrada  $F(t) \neq 0$ .

**Exemplo 1.** Considere o sistema  $X'(t) = AX(t)$  onde,

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} \text{ e } \mu \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar um conjunto fundamental de soluções, supomos

$$X(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t},$$

de onde obtém-se

$$(A - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0.$$

Assim, nosso problema resume-se em encontrar autovalores e autovetores associados a matriz  $A$ . Começamos encontrando os autovalores a partir da resolução da equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O par de autovalores associados a matriz  $A$  são  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm i$ . Agora encontraremos os autovetores  $(v^{(1)}, v^{(2)})$  associados aos autovalores  $(\lambda_{1,2})$  já encontrados. Resolveremos então, os seguintes sistemas de equações lineares

$$\begin{pmatrix} -\mu - \lambda_1 & 1 \\ -1 & -\mu - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -\mu - \lambda_2 & 1 \\ -1 & -\mu - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de cálculos omitidos aqui, obtemos os autovetores associados

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ e } v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Logo, um conjunto fundamental de soluções para o sistema é

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\mu+i)t} \quad e \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\mu-i)t}.$$

Para determinar as soluções reais, precisamos encontrar as partes real e imaginária de  $x_1(t)$  ou  $x_2(t)$ . De fato,

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\mu+i)t}$$

e pela fórmula de Euler ( $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ ) temos que

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\mu+i)t} (\cos t + i \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} \cos t \\ -e^{-\mu t} \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-\mu t} \operatorname{sen} t \\ -e^{-\mu t} \cos t \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$u(t) = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \quad e \quad v(t) = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

é um conjunto de soluções reais. Como o wronskiano nunca se anula, segue que  $u(t)$  e  $v(t)$  formam um conjunto fundamental de soluções. Pelo Princípio da Superposição segue que

$$X(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

também é solução.

Utilizando a condição inicial

$$X(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

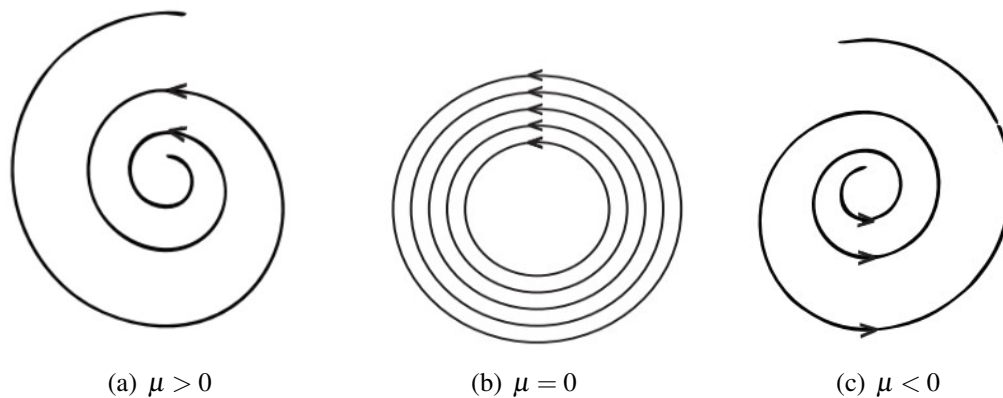
temos que a solução é dada por

$$X(t) = a u(t) = a e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

O retrato de fase para este sistema é ilustrado na Figura 2 a seguir.

Para  $\mu > 0$  o ponto de equilíbrio  $X = 0$  é estável, pois as órbitas se espiralizam para a origem. Para  $\mu < 0$ , o ponto de equilíbrio  $X = 0$  é instável, pois as órbitas se

Figura 2 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 1, conforme a variação o parâmetro  $\mu$ .



Fonte: Souza (2015).

afastam da origem. No entanto, para  $\mu = 0$ , o ponto de equilíbrio é um centro e cada órbita é  $2\pi$ -periódica.

## 2.2 Sistemas Dinâmicos Autônomos

A distinção entre sistemas autônomos e não autônomos é de grande relevância, pois, a análise qualitativa geométrica pode ser estendida para sistemas autônomos em geral, ou seja, lineares e não lineares. Mas, não é útil para sistemas não autônomos (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Nesta seção, serão considerados conceitos importantes para a análise geométrica das soluções de equilíbrio dos sistemas autônomos. Neste sentido, abordaremos questões como espaço de fase, ponto de equilíbrio e estabilidade destas soluções.

**Definição 3.** *Um Sistema Autônomo é um conjunto de equações diferenciais, lineares ou não, com parâmetros constantes em que as funções de entrada não dependem explicitamente do tempo ( $t$ ).*

Note que o sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(X, Y, Z) \\ \frac{dY}{dt} &= G(X, Y, Z) \\ \frac{dZ}{dt} &= H(X, Y, Z), \end{aligned} \tag{42}$$

é autônomo, pois, a variável  $t$  não aparece de forma explícita. Caso contrário se a variável tempo aparecer em algum coeficiente ou em alguma função de entrada, chamamos o sistema de **Não Autônomo**.

### 2.3 Espaço de Fase e Pontos de Equilíbrio

**Definição 4.** *O Espaço de Fase, é um espaço  $n$ -dimensional, onde os eixos das coordenadas são eixo- $x_1, \dots$ , eixo- $x_n$ . Um Estado pode ser representado como um ponto de coordenadas  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  neste espaço.*

Com o passar do tempo, esse ponto pode se mover como exemplifica a Figura 4, sendo que sua evolução temporal é determinada pelas  $n$  equações diferenciais de primeira ordem correspondentes

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (43)$$

ou, na notação vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t). \quad (44)$$

As variáveis dependentes  $x_j$  são chamadas **Variáveis de Estado**. As funções  $f_j$  o **Campo Vetorial** ou **Campo de Velocidades** desse sistema. Chama-se **Retrato de Fase** o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir das condições iniciais que as funções  $f_j$  estão definidas (MONTEIRO, 2011).

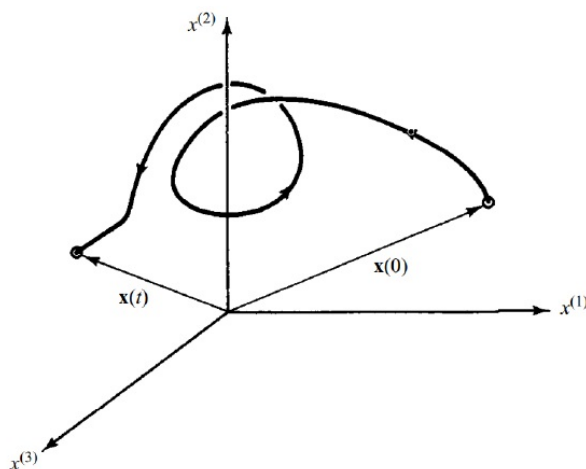
**Definição 5.** *O caminho no espaço de fase seguido pelo sistema à medida que evolui com o tempo é chamado de **Órbita** ou **Trajectoria**. (Veja a Figura 3)*

Considere um sistema  $n$ -dimensional autônomo da forma (43)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t). \quad (45)$$

**Definição 6.** *Os pontos  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  para os quais  $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$  são chamados **Pontos de Equilíbrio** ou **Soluções de Equilíbrio** do sistema.*

Figura 3 – Representação de uma órbita ou trajetória no espaço de fase.



Fonte: Felicio (2018).

Estes pontos representam soluções constantes do sistema (43), isto é,  $\vec{x}(0) = \vec{x}^*$ , então o sistema permanece inalterado, ou seja,  $\vec{x}(t) = \vec{x}^*$  para todo  $t$ .

Uma solução de equilíbrio pode ser estável ou instável. Um ponto equilíbrio é dito **Estável** se toda perturbação suficientemente pequena decai com o passar do tempo. Um ponto equilíbrio é **Instável** quando pequenas perturbações crescem com o passar do tempo (STROGATZ, 1994).

## 2.4 Estabilidade e Instabilidade

Pontos críticos são as soluções de equilíbrio de um sistema, assim,  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  são constantes. Pode parecer razoável pensar que tais pontos não são interessantes. Porém, para sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes, a natureza do ponto crítico na origem praticamente determina o comportamento das trajetórias desse sistema (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Para sistemas autônomos não lineares isso já não é verdade, pois, podem existir muitos pontos críticos competindo para influenciar as trajetórias, e também as não linearidades do sistema são importantes longe dos pontos críticos. Contudo, os pontos críticos de sistemas não lineares autônomos podem ser classificados da mesma forma que os sistemas lineares (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Nesta seção, discutiremos os conceitos de **Estabilidade**, **Estabilidade Assintó-**



**tica e Instabilidade.** No mesmo sentido, iremos nos restringir a sistemas de duas equações, mas as definições que vamos apresentar são independentes do tamanho do sistema. Isto é, as definições de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade também se aplicam a sistema de  $n$  equações (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

Considere o sistema autônomo da forma

$$x' = f(x). \quad (46)$$

onde,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad e \quad f(x) = \begin{pmatrix} F(x_1, x_2) \\ G(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Os pontos, onde  $f(x) = 0$  são os chamados pontos críticos, ou soluções de equilíbrio do sistema autônomo (46).

**Definição 7.** Um ponto crítico  $x^0$  do sistema (46) é dito *estável* se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que toda solução  $x = \phi(t)$  do sistema (46), que satisfaz, em  $t = 0$ ,

$$\|\phi(0) - x^0\| < \delta, \quad (47)$$

existe para todo  $t$  positivo e satisfaz

$$\|\phi(t) - x^0\| < \varepsilon \quad (48)$$

para todo  $t \geq 0$ . Um ponto crítico que não é estável é dito *instável*.

**Definição 8.** Um ponto crítico  $x^0$  é dito *assintoticamente estável* se é estável e existe um  $\delta_0$ , com  $0 < \delta_0 < \delta$ , tal que, se uma solução satisfaz

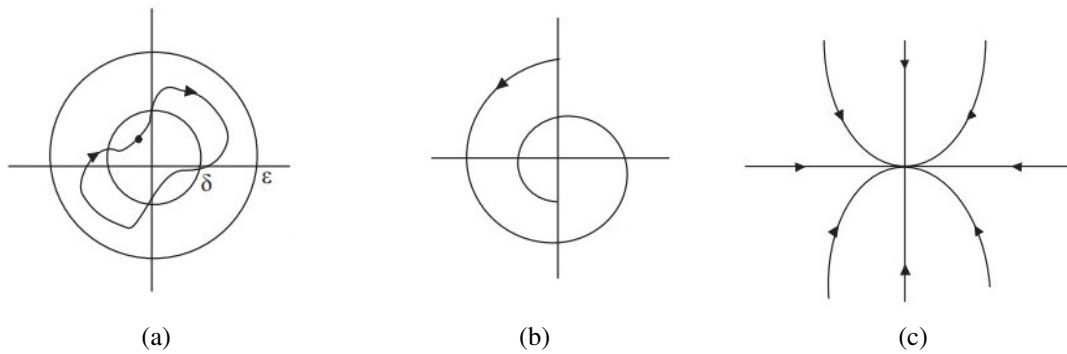
$$\|\phi(0) - x^0\| < \delta_0 \quad (49)$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^0. \quad (50)$$

A Figura 4, exemplo (b) e (c) apresentam pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, já o exemplo (a) mostra um ponto de equilíbrio somente estável. Resumindo, um ponto crítico é estável quando todas as soluções que começam suficientemente próximas de  $x^0$  permanecem próximas de  $x^0$ . Quando se trata de um ponto crítico assintoticamente

Figura 4 – Exemplos do ponto de equilíbrio  $x^0$  (origem) assintoticamente estável e somente estável.



Fonte: Autor desconhecido (2021).

estável, as trajetórias que começam suficientemente próximas de  $x^0$  não apenas permanecem próximas mas têm que acabar tendendo a  $x^0$  quando  $t \rightarrow \infty$  (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

### 3 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES DE TEMPO CONTÍNUO

As soluções analíticas para equações diferenciais não lineares, em geral, são impossíveis de serem determinadas. Porém, sob algumas condições, podemos aproximar um sistema não linear, em torno de um ponto de equilíbrio, por um sistema linear. Assim, a aproximação linear, às vezes, pode prever o comportamento das soluções do sistema não linear que se iniciam na vizinhança desse ponto (MONTEIRO, 2011). Neste capítulo, iremos analisar equações diferenciais não lineares autônomas, com ênfase no caso bidimensional. O método de Lyapunov<sup>1</sup> a seguir é baseado em Bassanezi (1988).

#### 3.1 Método Indireto de Lyapunov

Consideremos o sistema autônomo geral de segunda ordem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y),\end{aligned}\tag{51}$$

onde  $F$  e  $G$  são funções conhecidas não lineares. Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto de equilíbrio isolado do sistema, isto é,

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0\tag{52}$$

e existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $F(x, y) \neq 0$ ,  $G(x, y) \neq 0$  para todo par  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ ,  $(x, y)$  pertence ao círculo de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $\varepsilon > 0$ .

É sabido que  $x(t) = x_0$  e  $y(t) = y_0$  são soluções constantes do sistema (51). Analisaremos as trajetórias do sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio. Sem perda de generalidade, podemos considerar  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , pois caso contrário, se  $x_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq 0$  fazemos a substituição  $x = x_0 + u$  e  $y = y_0 + v$ . Considerando as funções  $F$  e  $G$  contínuas e com derivadas de primeira ordem também contínuas numa vizinhança de  $(0, 0)$ , podemos expandir o sistema (51) em Séries de Taylor em torno do ponto  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y) = F(0,0) + x \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) + F_1(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y) = G(0,0) + x \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) + G_1(x,y),\end{aligned}\tag{53}$$

<sup>1</sup>Alexandr M. Liapunov (1857-1918), Matemático Russo que publicou, em 1892, a principal Teoria de Estabilidade usada em Controle de Sistemas Dinâmicos Não Lineares.

onde  $F_1(x, y)$  e  $G_1(x, y)$  representam os termos com derivadas mistas e de maior ordem.

Além disso, temos que

$$F(0, 0) = G(0, 0) = 0. \quad (54)$$

Se a condição

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{F_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{G_1(x, y)}{r} = 0, \quad (55)$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância do ponto  $(x, y)$  da origem  $(0, 0)$  é válida, o comportamento das órbitas numa vizinhança de  $(0, 0)$  é determinado pelo sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y, \\ \frac{dy}{dt} &= G_x(0, 0)x + G_y(0, 0)y. \end{aligned} \quad (56)$$

Dessa forma, dizemos que um sistema autônomo não linear é **Quase Linear**, quando tiver a forma de

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy, \end{aligned} \quad (57)$$

e se a condição (55) for satisfeita.

Veja agora, a seguinte definição. Esta, é relacionada aos autovalores de uma matriz ou sistema.

**Definição 9.** *Uma matriz  $A$  é dita **Hiperbólica** se nenhum dos seus autovalores tem parte real nula. Também chamamos o sistema linear*

$$X' = AX \quad (58)$$

*de **Hiperbólico**. Analogamente ao caso linear, dizemos que um ponto de equilíbrio  $X^*$  de um sistema não linear é hiperbólico se, todos os autovalores do sistema linearizado correspondente possuem parte real não nula.*

**O Teorema de Hartman-Grobman**<sup>2</sup> provado por volta de 1960, garante que a

---

<sup>2</sup>Grobman é russo, Hartman americano. Grobman enunciou esse teorema em 1959 e o provou em 1962; Hartman o provou em 1960 e em 1963 provou de maneira mais simples. Provavelmente um não conhecia o outro, devido a Guerra Fria.

estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno desse ponto (MONTEIRO, 2011).

**Teorema 5.** (*Hartman-Grobman*) *Na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não linear  $n$ -dimensional apresenta comportamento qualitativamente equivalente ao sistema linear correspondente.*

Com o uso deste resultado, pode-se classificar os ponto de equilíbrio de um sistema dado no contexto do Teorema 6 a seguir. Podemos representar um sistema não linear de maneira generalizada como,

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \Gamma(\mathbf{X}), \quad (59)$$

onde  $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{0}$  é um ponto de equilíbrio,  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $\Gamma(\mathbf{X})$  uma designação geral para as funções contínuas definidas em uma vizinhança da origem. Além disso, são de ordem de nulidade inferior a  $\mathbf{X}$ , ou seja,

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\mathbf{X})}{\|\mathbf{X}\|} = 0. \quad (60)$$

Apresentamos agora o Teorema da Linearização de Lyapunov-Poincaré, que nos permitirá analisar a estabilidade de sistemas como em (59).

**Teorema 6.** (*Lyapunov-Poincaré*) *Seja  $\mathbf{X}'$  um campo continuamente diferenciável em uma vizinhança da origem onde podemos escrever*

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \Gamma(\mathbf{X}), \quad (61)$$

com  $\Gamma(\mathbf{X})$  satisfazendo a condição (60).

- (a) *Se a matriz  $A$  tiver todos os seus autovalores  $\lambda$  tal que  $Re \lambda < 0$  (parte real negativa), então o sistema será assintoticamente estável para o campo  $\mathbf{X}'$ ;*
- (b) *Se a matriz  $A$  tiver um de seus autovalores  $\lambda$  tal que  $Re \lambda > 0$  (parte real positiva) então o sistema será instável;*
- (c) *Se todos os autovalores  $\lambda$  de  $A$  forem tais que  $Re \lambda > 0$ , o ponto crítico é repulsor; isto é, existe uma vizinhança da origem  $V$  tal que se  $X(t)$  for uma órbita não nula, existirá  $t_0$ , e para  $t > t_0$  temos que  $X(t) \notin V$ .*

*Demonstração (BASSANEZI, 1988).*

**Exemplo 2.** *Determine a natureza dos pontos de equilíbrio do sistema*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - xy = F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= 2y - 2y^2 = G(x,y).\end{aligned}\tag{62}$$

O sistema é quase linear, uma vez que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{-xy}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-2y^2}{r} = 0\tag{63}$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Através do sistema algébrico

$$\begin{aligned}x - xy &= x(1 - y) = 0 \\ 2y - 2y^2 &= 2y(2 - y) = 0,\end{aligned}\tag{64}$$

obtemos os pontos de equilíbrio  $(0,0)$  e  $(0,2)$ . Analisaremos cada ponto separadamente.

(i) Próximo à origem  $(0,0)$  o sistema não linear pode ser aproximado pelo sistema linear

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \frac{\partial F(0,0)}{\partial x} + y \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= x \frac{\partial G(0,0)}{\partial x} + y \frac{\partial G(0,0)}{\partial y}\end{aligned}\tag{65}$$

que equivale ao sistema,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= 2y,\end{aligned}\tag{66}$$

cujas raízes da equação característica são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ . Portanto, de acordo com o Teorema 6, o sistema original é instável no ponto  $(0,0)$ .

(ii) No ponto  $(0,2)$  é necessário a mudança de variáveis  $x = u$  e  $y = 2 + v$ . Assim, o sistema inicial será dado por

$$\frac{du}{dt} = u - u(2 + v) = -u - uv\tag{67}$$

$$\frac{dv}{dt} = 2(2+v) - 2(2+v)^2 = -2v - v^2.$$

Verifica-se que este sistema é quase linear pelo mesmo critério do item (i). Vamos analisar o ponto crítico  $(0,0)$  desse sistema, que equivale ao ponto  $(0,2)$  do sistema original. Com método análogo ao anterior obtém-se o sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -u \\ \frac{dy}{dt} &= -2v. \end{aligned} \tag{68}$$

Neste caso, a equação característica tem as raízes  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Portanto, de acordo com o Teorema 6, o sistema original é assintoticamente estável no ponto  $(0,2)$ .

### 3.2 Método Direto de Lyapunov

O Método Direto de Lyapunov, é utilizado para tirarmos conclusões a respeito da **Estabilidade Global** ou não de um sistema de equações diferenciais. A análise é feita por meio de um função auxiliar, chamada **Função de Lyapunov**. As funções de Lyapunov, estão relacionadas ao conceito de energia de sistemas não conservativos. Nesses sistemas, a energia não é preservada pela trajetória. Neste caso, assume um comportamento monótono decrescente se o sistema for dissipativo, e monótono crescente se o sistema for expansivo. As definições e exemplos a seguir são baseadas em Bessa (2011).

Para o desenvolvimento do método, considere o sistema autônomo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y), \end{aligned} \tag{69}$$

onde,  $F(0,0) = G(0,0) = 0$  e  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , um aberto contendo a origem  $(0,0)$ .

**Definição 10.** Uma função  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas parciais contínuas é dita:

- (i) **definida positiva (definida negativa)** se  $L(0,0) = 0$  e  $L(x,y) > 0$  ( $L(x,y) < 0$ ),  $\forall (x,y) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$ .
- (ii) **semidefinida positiva (semidefinida negativa)** se  $L(x,y) \geq 0$  ( $L(x,y) \leq 0$ ),  $\forall (x,y) \in \Omega$ .

**Exemplo 3.** A função  $L(x, y) = x^2 + y^2$  é definida positiva, pois,

$$L(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \quad e \quad x^2 + y^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Já a função  $L(x, y) = (x + y)^2$  é semidefinida positiva, note que

$$L(x, y) = 0 \text{ na reta } y = -x \text{ e } L(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x)\}.$$

O método direto de Lyapunov consiste em analisar o comportamento da função  $L$ , como a do exemplo acima, ao longo das trajetórias do sistema (69). Assim, se  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  é uma solução do sistema (69), então

$$\begin{aligned} \frac{dL[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= L_x[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\phi(t)}{dt} + L_y[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= L_x(x, y)F(x, y) + L_y(x, y)G(x, y) \end{aligned} \quad (70)$$

Enunciaremos agora o Teorema de Lyapunov, que nos fornece condições suficientes para analisarmos a estabilidade e a instabilidade global de um sistema dado.

**Teorema 7.** (Lyapunov) Seja  $(x, y) = (0, 0)$  um ponto crítico isolado do sistema (69) em  $\Omega$  e seja  $L$ , uma função com derivadas parciais contínuas e definida positiva em  $\Omega$ .

- (i) Se  $L'(x, y) \leq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ , então  $(0, 0)$  é **estável**;
- (ii) Se  $L'(x, y) < 0$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ , então  $(0, 0)$  é **assintoticamente estável**;
- (iii) Se  $L'(x, y) > 0$ ;  $\forall (x, y) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$ , então  $(0, 0)$  é **instável**.

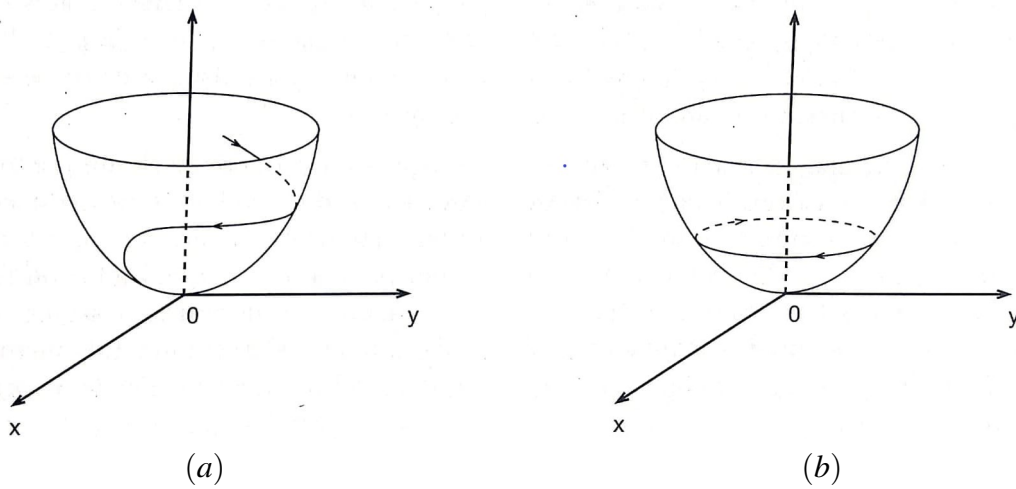
*Demonstração (BESSA, 2011).*

As definições e teoremas apresentados para sistemas de ordem 2, foram apenas particularizações que podem ser estendidas para sistemas de ordem  $n$ . Na Figura 5, são exemplificados dois tipos de estabilidade e também como duas trajetórias comportam-se próximo a origem, a partir de uma função de Lyapunov.

Como não existe um método preciso para se determinar funções de Lyapunov, o teorema a seguir nos mostra uma família de funções que são fortes candidatas.



Figura 5 – (a) Caso assintoticamente estável; (b) Caso estável.



Fonte: Monteiro (2011).

**Teorema 8.** A função  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad (71)$$

é definida positiva se, e somente se

$$a > 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0, \quad (72)$$

e é definida negativa se, e somente se,

$$a < 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0. \quad (73)$$

*Demonstração (BESSA, 2011).*

A utilização do Teorema 8 é ilustrada através do próximo exemplo.

**Exemplo 4.** Mostre que o ponto crítico  $(0,0)$  do sistema autônomo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x^2y^2 \end{aligned} \quad (74)$$

é assintoticamente estável.

Vamos encontrar uma função de Lyapunov da forma (71). Como,

$$L_x(x,y) = 2ax + by, \quad L_y(x,y) = bx + 2cy, \quad (75)$$

então, utilizando a identidade (70), vemos que a função de Lyapunov procurada, satisfaz

$$\begin{aligned} L'(x,y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) \\ &= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)]. \end{aligned} \quad (76)$$

Escolhendo  $b = 0$  e  $a > 0$  e  $c > 0$ , então  $L' < 0$  (definida negativa) e  $L > 0$  (definida positiva) pelo Teorema 8. Logo, pelo item (ii) do Teorema 7 a origem  $(0,0)$  é um ponto crítico assintoticamente estável.

## 4 DINÂMICA CAÓTICA

Um sistema dinâmico pode ainda ser classificado em **Conservativo**, **Dissipativo** ou **Expansivo**. Suponha que as condições iniciais de um sistema dinâmico delimitem um determinado “volume”. Dizemos que um sistema é **Conservativo** se, durante sua evolução temporal, há preservação de volume no espaço de fase. Num sistema **Dissipativo**, o volume suposto se contrai com o passar do tempo. Em um sistema dito **Expansivo**, o volume aumenta (MONTEIRO, 2011).

### 4.1 Sistemas Conservativos, Dissipativos e Expansivos

**Teorema 9.** (*Teorema do Divergente*). *Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora). Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas componentes tenha derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Sob essas hipóteses, tem-se:*

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV. \quad (77)$$

*Demonstração (STEWART, 2013).*

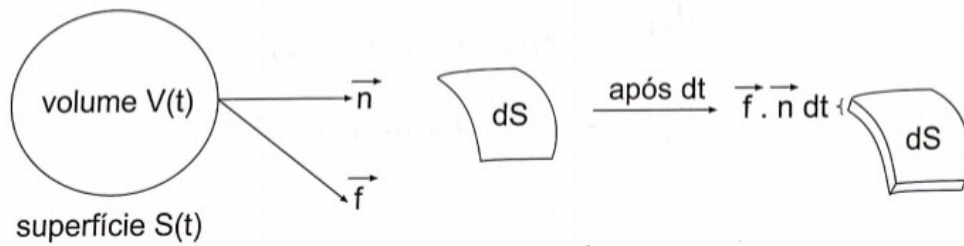
Considere um sistema autônomo descrito na forma vetorial pela equação

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (78)$$

Seja  $S(t)$  uma superfície qualquer com volume no espaço de fase dado por  $V(t)$ . Os pontos em  $S$ , e no seu interior são as condições iniciais das trajetórias de (78). Considere uma variação temporal  $dt$ , e com isso,  $S(t)$  evolui para  $S(t + dt)$ . Logo, devemos verificar qual é o novo volume  $V(t + dt)$ . Na Figura 6,  $\vec{n}$  é um vetor de módulo unitário que aponta perpendicularmente para fora do volume  $V$ , e  $\vec{f}(\vec{x})$  é a velocidade instantânea do sistema no ponto  $\vec{x}$ . O produto escalar  $\vec{n} \cdot \vec{f}$  representa a componente normal da velocidade em  $\vec{x}$ , que aponta para fora de  $V$  (MONTEIRO, 2011).

Em um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a evolução de um pedaço de área  $dS$  gera um volume  $(\vec{n} \cdot \vec{f} dt) dS$ , como mostra a Figura 6. Assim,  $V(t + dt)$  é igual a  $V(t)$  mais

Figura 6 – Volume das condições iniciais no espaço de fase.



Fonte: Monteiro (2011).

o volume gerado pela evolução infinitesimal da superfície,

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S (\vec{n} \cdot \vec{f}) dS \quad (79)$$

reorganizando a equação, temos

$$\frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \frac{dV}{dt} = \int_S (\vec{n} \cdot \vec{f}) dS \quad (80)$$

Empregando o **Teorema do Divergente (ou Teorema de Gauss)**, tem-se

$$\int_S (\vec{n} \cdot \vec{f}) dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV. \quad (81)$$

Logo, o sistema é **Conservativo** se  $dV/dt = 0$ , ou seja, quando o **Divergente** do campo vetorial  $\vec{f}$  é nulo. O sistema é **Dissipativo** se  $dV/dt < 0$ . Caso,  $dV/dt > 0$  o sistema é **Expansivo**.

**Exemplo 5.** *Mostre que o sistema de Lorenz (1) é dissipativo.*

Considere uma superfície fechada no espaço de fase, digamos  $S(t)$ , com volume  $V(t)$ . Então

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV. \quad (82)$$

Para esse sistema, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial X} + \frac{\partial f_2}{\partial Y} + \frac{\partial f_3}{\partial Z} = -\sigma - 1 - b < 0, \quad (83)$$

pois os parâmetros  $\sigma$  e  $b$  são números positivos. De (82),

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V(t) \Rightarrow V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}. \quad (84)$$

Pode-se afirmar então, que o volume inicial  $V(0)$  no espaço de estados é contraído exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$ . Conclui-se, que o sistema de Lorenz é dissipativo.

## 4.2 Atrator em Sistemas Dissipativos

Definiremos nesta seção **Atrator**, **Atrator Estranho** e **Caos**. Em sistemas dissipativos, podem existir regiões limitadas do espaço de fase, chamadas atratores. Veremos que um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico possui um atrator chamado atrator estranho (MONTEIRO, 2011).

**Definição 11.** *Um conjunto fechado de pontos  $\Sigma$ , no espaço de fase de um sistema dinâmico é **Atrator** se:*

- (a)  $\Sigma$  é um conjunto invariante: qualquer trajetória  $\vec{x}(t)$  que começa em  $\Sigma$ , permanece em  $\Sigma$  por todo tempo;
- (b)  $\Sigma$  atrai um conjunto aberto de condições iniciais;
- (c)  $\Sigma$  é mínimo: não há subconjunto de  $\Sigma$  que satisfaça as duas condições anteriores.

O **Teorema de Poincaré-Bendixson** foi demonstrado, pela primeira vez, por Poincaré, em 1886. Posteriormente Bendixson<sup>1</sup> estabeleceu uma demonstração mais rigorosa, em 1901. Esse teorema segundo Monteiro (2011) estabelece que se um sistema dinâmico é de tempo contínuo, autônomo e tridimensional, seu atrator pode ser do tipo:

- **Ponto de equilíbrio**, que corresponde a uma solução cujo comportamento dinâmico não depende do tempo;
- **Ciclo limite**, comportamento periódico no tempo, com amplitude determinados pela forma das equações e parâmetros;
- **Superfície toroidal**, que representa um regime periódico ou quase periódico, com duas frequências fundamentais e independentes;
- **Atrator estranho**, atrator que apresenta sensibilidade às condições iniciais.

<sup>1</sup>Ivar Otto Bendixson foi um matemático sueco. Obteve um doutorado em 29 de maio de 1890 na Universidade de Upsália. Foi palestrante do Congresso Internacional de Matemáticos em Paris em 1900.

Em relação a definição de Caos, existem diversas interpretações. Neste caso usaremos a que mais se adequa a nossa problemática. Segue conforme Strogatz (1994), as definições relativas a Caos.

**Definição 12.** *Caos é o comportamento aperiódico a longo prazo de um sistema determinístico que apresenta sensibilidade nas condições iniciais.*

- “Comportamento aperiódico a longo prazo” significa que existem trajetórias que não se estabelecem em pontos fixos, órbitas periódicas ou quase-periódicas;
- “Determinístico” significa que o comportamento irregular do sistema decorre da sua não linearidade;
- “Dependência sensível das condições iniciais” significa que as trajetórias próximas separam-se exponencialmente rápido.

Um sistema dinâmico determinístico, cuja evolução temporal leva assintoticamente a um atrator estranho, apresenta dinâmica caótica. Para existir o comportamento caótico em um sistema autônomo de tempo contínuo, é necessário que ele seja não linear, dissipativo e, pelo menos, tridimensional (MONTEIRO, 2011).

## 5 O SISTEMA DE LORENZ

Neste capítulo, analisaremos um sistema não linear autônomo de terceira ordem que vem sendo estudado intensamente. Este sistema de certa forma é o objeto principal desta pesquisa, já que os métodos e conceitos matemáticos estudados até aqui, servirão para analisar e interpretar de maneira qualitativa (geométrica) suas soluções próximas a seus pontos de equilíbrio.

Os métodos descritos até aqui, para sistemas autônomos de segunda ordem, podem ser utilizados para sistemas de ordem maior. Porém, em sistemas de ordem maior, aparecem certas dificuldades ao tentar aplicar os métodos. Fazer gráficos claros e compreensíveis de trajetórias de maneira precisa em um espaço de dimensão maior que dois, por exemplo, em três dimensões, já é difícil (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

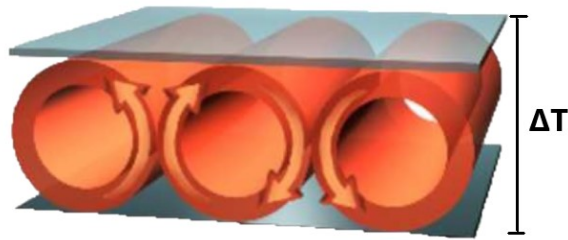
As Equações de Lorenz descrevem um problema importante na área da Meteorologia. Este trata do movimento de convecção térmica em uma camada de fluido, como por exemplo a atmosfera da Terra, que é mais quente em baixo do que em cima, como ilustrado na Figura 7. Lorenz ao investigar esse fenômeno foi levado ao sistema não linear autônomo tridimensional:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ.\end{aligned}\tag{85}$$

Nesse sistema, o parâmetro  $\sigma$  é conhecido como número de Prandtl;  $r$  é proporcional à diferença de temperatura  $\Delta T$  no fluido e  $b$  depende das dimensões do sistema. Em relação as variáveis  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$  temos que:  $X(t)$  é proporcional à intensidade da convecção;  $Y(t)$  é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes do fluido;  $Z(t)$  é proporcional à distorção do perfil vertical de temperatura (MONTEIRO, 2011).

Os três parâmetros do sistema de Lorenz são reais positivos onde,  $\sigma$  e  $b$  dependem do material e das propriedades geométricas da camada de fluido. Neste trabalho, assumiremos  $\sigma = 10$  e  $b = \frac{8}{3}$ , valores para atmosfera usados por Saltzman e Lorenz (LORENZ, 1962). O parâmetro  $r$  chamado número de Rayleigh será investigado, no sentido de como sua variação pode influenciar as soluções do sistema.

Figura 7 – Fenômeno de convecção térmica.



Fonte: Viana (2019).

### 5.1 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

Consideramos agora o sistema de Lorenz dado por

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= F(X, Y, Z) = -10X + 10Y \\ \frac{dY}{dt} &= G(X, Y, Z) = rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{dt} &= H(X, Y, Z) = XY - \frac{8}{3}Z.\end{aligned}\tag{86}$$

O sistema é quase linear, uma vez que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{-XZ}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{XY}{r} = 0\tag{87}$$

onde  $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ . Assim, poderemos analisar este sistema no contexto do Teorema 6.

O primeiro passo para se analisar as equações de Lorenz é encontrar seus pontos críticos ou pontos de equilíbrio, resolvendo o sistema algébrico

$$\begin{aligned}-10X + 10Y &= 0 \\ rX - Y - XZ &= 0 \\ XY - \frac{8}{3}Z &= 0.\end{aligned}\tag{88}$$

Da primeira equação, temos

$$-10X + 10Y = 0 \Rightarrow X = Y.\tag{89}$$



Então, eliminando  $Y$  da segunda e terceira equações, obtemos

$$X(r-1-Z) = 0 \quad (90)$$

$$X^2 - \frac{8}{3}Z = 0. \quad (91)$$

Tomando  $X = 0$ , então,  $Y = 0$  e, da equação (91), segue que  $Z = 0$ . Agora, observe que a equação (90) é satisfeita se  $Z = r - 1$ . Logo, da equação (91) segue que  $X = \pm\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}$  e, como  $X = Y$ , então  $Y = \pm\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}$ . Assim, denotaremos os pontos críticos do sistema de Lorenz (86) da seguinte maneira:

- (i)  $P_1 = (0, 0, 0)$ , é um ponto crítico para qualquer valor de  $r$  e é o único ponto crítico para  $r < 1$ ;
- (ii)  $P_2 = \left(\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, r-1\right)$  e  $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, -\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, r-1\right)$ , esses dois pontos só existem quando  $r > 1$ . Note que os três pontos coincidem quando  $r = 1$ .

Determinaremos a seguir, o comportamento local das soluções em uma vizinhança de cada um dos pontos de equilíbrio  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ :

Próximo à origem  $P_1 = (0, 0, 0)$ , o sistema de Lorenz pode ser expandido em séries de Taylor, obtendo assim o sistema linear

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= X \frac{\partial F(0,0,0)}{\partial X} + Y \frac{\partial F(0,0,0)}{\partial Y} + Z \frac{\partial F(0,0,0)}{\partial Z} \\ \frac{dY}{dt} &= X \frac{\partial G(0,0,0)}{\partial X} + Y \frac{\partial G(0,0,0)}{\partial Y} + Z \frac{\partial G(0,0,0)}{\partial Z} \\ \frac{dZ}{dt} &= X \frac{\partial H(0,0,0)}{\partial X} + Y \frac{\partial H(0,0,0)}{\partial Y} + Z \frac{\partial H(0,0,0)}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (92)$$

donde segue que,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -10X + 10Y \\ \frac{dY}{dt} &= rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= -\frac{8}{3}Z. \end{aligned} \quad (93)$$

Inicialmente, encontremos os autovalores a partir da resolução da equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (94)$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são determinados pela equação característica

$$-\left(\frac{8}{3} + \lambda\right) [\lambda^2 + 11\lambda - 10(r-1)] = 0. \quad (95)$$

Portanto, os autovalores do sistema (92) são:

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}. \quad (96)$$

As soluções da equação (95) dependem de  $r$  da seguinte maneira:

- Para  $r < 1$ , por exemplo, quando  $r = \frac{1}{2}$ , os autovalores são

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \quad \lambda_2 = -10,52494, \quad \lambda_3 = -0,47506. \quad (97)$$

Então, pelo Teorema 6 a origem é assintoticamente estável para  $r < 1$ .

- Note que  $\lambda_3$ , muda de sinal quando  $r = 1$  e é positivo para  $r > 1$ . Por exemplo, quando  $r = 21$ , os autovalores são:

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{-11 - \sqrt{921}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{921}}{2}. \quad (98)$$

Logo, pelo Teorema 6 a origem é instável se  $r > 1$ , ou seja, todas as soluções começando próximas a  $P_1 = (0, 0, 0)$  tendem a crescer quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Vamos considerar agora, a vizinhança do ponto crítico  $P_2 = \left(\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, r-1\right)$  para  $r > 1$ . No ponto  $P_2$  é necessário a mudança de variáveis, tomemos então,  $X = \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + U$ ,  $Y = \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + V$  e  $Z = (r-1) + W$ . Assim, o sistema inicial (86) será dado por

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -10 \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + U \right] + 10 \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + V \right] \\ \frac{dV}{dt} &= r \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + U \right] - \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + V \right] - \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + U \right] [(r-1) + W] \end{aligned} \quad (99)$$

$$\frac{dW}{dt} = \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + U \right] \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} + V \right] - \frac{8}{3}[(r-1) + W],$$

podemos ainda reescrever o sistema como

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= R(U, V, W) = -10U + 10V \\ \frac{dV}{dt} &= S(U, V, W) = U - V - \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \right] W - UW \\ \frac{dW}{dt} &= T(U, V, W) = \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \right] U + \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \right] V - \frac{8}{3}W. \end{aligned} \quad (100)$$

Vamos analisar o ponto crítico  $(0,0,0)$  do sistema (100), que equivale ao ponto  $P_2$  do sistema original (86). Com método análogo ao anterior, utilizando séries de Taylor, obtem-se o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= U \frac{\partial R(0,0,0)}{\partial U} + V \frac{\partial R(0,0,0)}{\partial V} + W \frac{\partial R(0,0,0)}{\partial W} \\ \frac{dV}{dt} &= U \frac{\partial S(0,0,0)}{\partial U} + V \frac{\partial S(0,0,0)}{\partial V} + W \frac{\partial S(0,0,0)}{\partial W} \\ \frac{dW}{dt} &= U \frac{\partial T(0,0,0)}{\partial U} + V \frac{\partial T(0,0,0)}{\partial V} + W \frac{\partial T(0,0,0)}{\partial W}, \end{aligned} \quad (101)$$

que pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -10U + 10V \\ \frac{dV}{dt} &= U - V - \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \right] W \\ \frac{dW}{dt} &= \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \right] U + \left[ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \right] V - \frac{8}{3}W. \end{aligned} \quad (102)$$

Novamente, encontraremos os autovalores a partir da resolução da equação característica

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0, \quad (103)$$

onde,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} \\ \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} & \sqrt{\frac{8}{3}(r-1)} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resultando em

$$3\lambda^3 + 41\lambda^2 + 8(r+10)\lambda + 160(r-1) = 0. \quad (104)$$

Para o estudo da estabilidade de  $P_2$ , faremos uso do seguinte resultado, conhecido como critério de Routh–Hurwitz (COELHO, 2008).

**Teorema 10.** (Routh–Hurwitz) *Seja o  $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ . As raízes de  $p(\lambda)$  têm raízes com parte real negativa se, e somente se,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_0 > 0$  e  $a_2a_1 > a_0$ .*

Para a equação (104), temos os seguintes coeficientes

$$a_2 = \frac{41}{3}, \quad a_1 = \frac{8}{3}(r+10), \quad a_0 = \frac{160}{3}(r-1). \quad (105)$$

Como  $r > 1$  é fácil ver que  $a_1 = \frac{8}{3}(r+10) > 0$  e  $a_0 = \frac{160}{3}(r-1) > 0$ . Verificaremos agora a condição  $a_2a_1 > a_0$ .

$$a_2a_1 > a_0 \iff \frac{41}{3} \left[ \frac{8}{3}(r+10) \right] > \frac{160}{3}(r-1) \quad (106)$$

$$\iff r < \frac{3760}{152} \cong 24,737. \quad (107)$$

Logo, pelo **Teorema Routh–Hurwitz** a equação (104) terá raízes com parte real negativa se, e somente se,  $r < 24,737$ . Portanto, pelo Teorema 6  $P_2$  é assintoticamente estável se  $1 < r < 24,737$ .

Dessa forma, as soluções da equação (104) dependem de  $r$  da seguinte maneira:

- Para  $1 < r < r_1 \cong 1,3456$ , existem três autovalores reais negativos, ou seja,  $P_2$  é assintoticamente estável. Por exemplo, quando  $r = 1,1$ , os autovalores são:

$$\lambda_1 \cong -0.198, \quad \lambda_2 \cong -2.442, \quad \lambda_3 \cong -11.025. \quad (108)$$

- Para  $r_1 < r < r_2 \cong 24,737$ , existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real negativa. Assim,  $P_2$  é assintoticamente estável. Por exemplo, quando  $r = 21$ , os autovalores são:

$$\lambda_1 \cong -13.426, \quad \lambda_2 \cong \frac{-0,72 - 53,474i}{2}, \quad \lambda_3 \cong \frac{-0,72 + 53,474i}{2}. \quad (109)$$

- Para  $r_2 < r$ , existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real positiva, portanto  $P_2$  é instável. Por exemplo, quando  $r = 28$ , os autova-

lores são:

$$\lambda_1 \cong -13.854, \quad \lambda_2 \cong \frac{0,563 - 61,167i}{2}, \quad \lambda_3 \cong \frac{0,563 + 61,167i}{2}. \quad (110)$$

Para o ponto  $P_3 = \left( -\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, -\sqrt{\frac{8}{3}(r-1)}, r-1 \right)$ , os mesmos resultados de  $P_2$  são obtidos. Isso porque, o sistema (86) é simétrico em relação ao eixo  $Z$  e, portanto, para estudarmos a estabilidade de  $P_3$  basta estudarmos a estabilidade de  $P_2$ . De fato, vamos definir a seguir uma função, que nada mais é do que uma reflexão em torno do eixo  $Z$  em  $\mathbb{R}^3$ . Alternativamente, podemos escrever o sistema de Lorenz como  $X' = F(X, r)$ , onde,  $F(X, r) = (-10X + 10Y, rX - Y - ZX, XY - 8/3Z)$ . Seja,  $\varphi(X, Y, Z) = (-X, -Y, Z)$  e observar que

$$\begin{aligned} \varphi(F(X, r)) &= (-(-10X + 10Y), -(rX - Y - ZX), XY - 8/3Z) \\ &= (-10(-X) + 10(-Y), r(-X) - (-Y) - (-X)Z, XY - 8/3Z) \quad (111) \\ &= F(\varphi(X, Y, Z)). \end{aligned}$$

Sendo assim, se  $(X, Y, Z)$  são soluções do sistema de Lorenz, então  $(-X, -Y, Z)$  também é solução desse sistema. Logo essas soluções são simétricas.

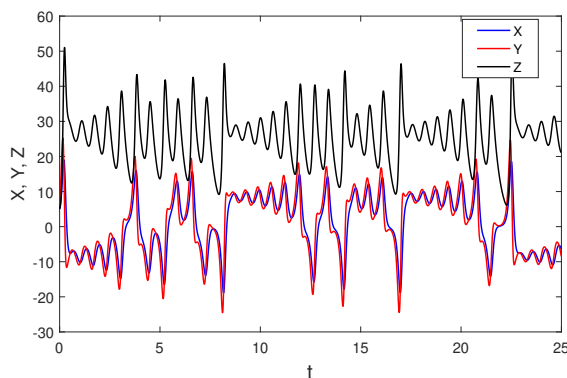
- Para  $1 < r < r_1$ , os pontos críticos  $P_2$  e  $P_3$  são assintoticamente estáveis e  $P_1$  é instável;
- Para  $r_1 < r < r_2$ , os pontos críticos  $P_2$  e  $P_3$  são assintoticamente estáveis e  $P_1$  é instável;
- Para  $r_2 < r$ , os pontos críticos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são instáveis.

## 5.2 O Caos e o Atrator Estranho

Se considerarmos soluções para  $r > r_2$ , neste caso  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são instáveis. Como nenhum dos pontos críticos é estável, é razoável pensar que a maioria das trajetórias tendesse ao infinito quando  $t$  for suficientemente grande. Porém, veremos na Figura 8, que as soluções  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  permanecem limitadas e parecem estar tendendo a um determinado conjunto de pontos.

Além disso, as soluções do sistema de Lorenz para  $r = 28$  são, extremamente sensíveis à perturbações nas condições iniciais. A Figura 10 mostra os gráficos de  $X(t)$ ,

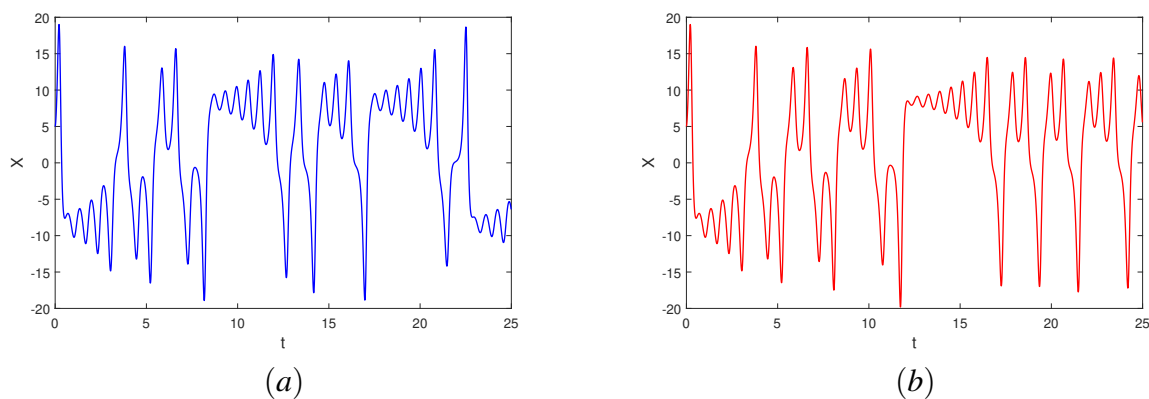
Figura 8 – Gráfico  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  com  $r = 28$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ .



Fonte: Autor (2021).

para duas condições iniciais próximas. As duas soluções permanecem próximas até  $t$  chegar próximo a 10, quando elas se tornam totalmente opostas. Esta propriedade é que chamou a atenção de Lorenz em seu estudo e fez o mesmo concluir que previsões do tempo a longo prazo, provavelmente, são impossíveis. O termo **Caótico** é usado para descrever soluções como as ilustradas na Figura 9.

Figura 9 – (a) Gráfico  $X(t)$  com  $r = 28$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ ; (b) Gráfico  $X(t)$  com  $r = 28$  e condição inicial  $(5, 01; 5; 5)$ .

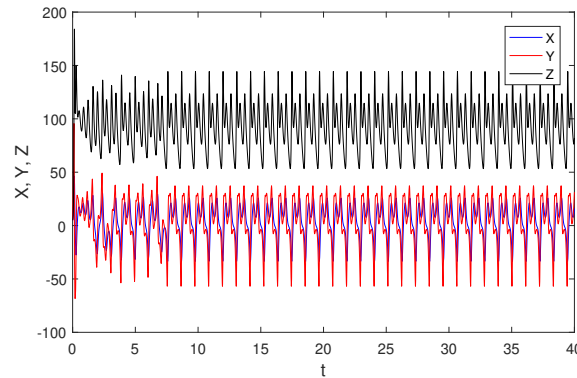


Fonte: Autor (2021).

Para outros intervalos do parâmetro  $r$  o sistema apresenta soluções que exibem comportamentos bastante interessantes. Por exemplo, para  $r = 100$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ , como apresentado na Figura 10, após os transientes, as soluções apresentam comportamento periódico.

Na Figura 11, apresentamos soluções do sistema de Lorenz que começam próximas a três condições iniciais diferentes e com um valor menor para  $r$ . Essa análise para

Figura 10 – Soluções  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  para  $r = 100$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ .

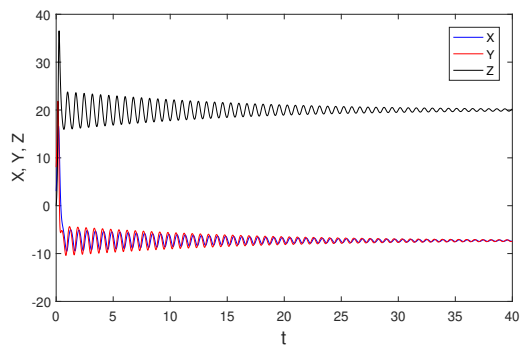


Fonte: Autor (2021).

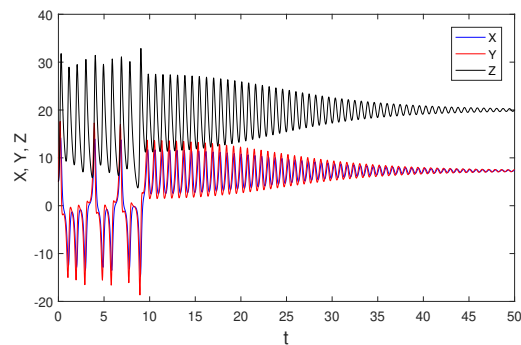
valores de  $r < 24,737$  são convenientes para determinar como e porque o atrator estranho é criado. Para  $r = 21$ , e a condição inicial  $(3, 8, 0)$ , apresentamos as soluções no gráfico (a) e observamos que as soluções  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  convergem para  $P_3$ , quase que de maneira imediata. No gráfico (b), com a condição inicial  $(5, 5, 5)$ , existe um intervalo curto de comportamento transiente em relação as outras condições iniciais, depois as soluções convergem para  $P_2$ . Para a terceira condição inicial  $(5, 5, 10)$ , no gráfico (c), observamos que existe um intervalo muito maior de tempo de comportamento transiente antes de convergirem para  $P_3$ .

As trajetórias do sistema de Lorenz, podem ser representadas no espaço de fase tridimensional, ou as projeções podem ser representadas em diversos planos, conforme descrito. As Figuras 12 e 13, ilustram as projeções no plano  $XY$  e  $XZ$  respectivamente. Observe que para essa trajetória com  $r = 28$  todos os pontos são instáveis. Entretanto, as soluções permanecem limitadas e atraídas para um certo conjunto atrator, chamado **Atrator Estranho**.

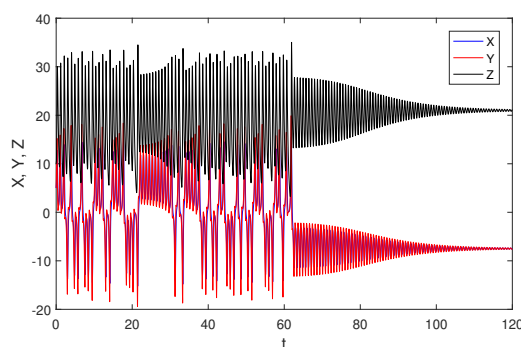
Figura 11 – (a) Gráfico  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  com  $r = 21$  e condição inicial  $(3, 8, 0)$ ; (b) Gráfico  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  com  $r = 21$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ ; (c) Gráfico  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  com  $r = 21$  e condição inicial  $(5, 5, 10)$ .



(a)



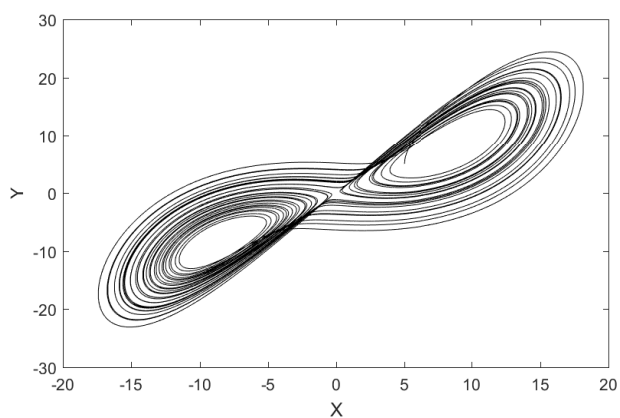
(b)



(c)

Fonte: Autor (2021).

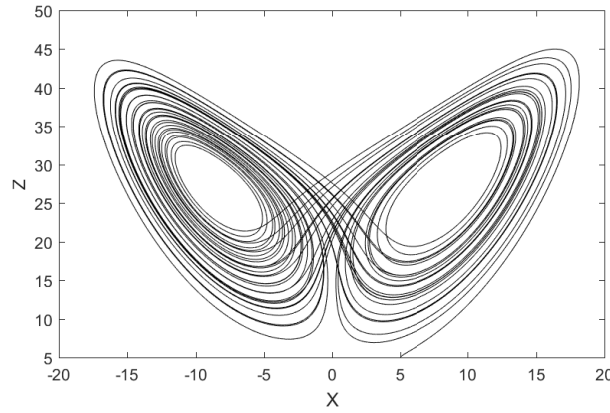
Figura 12 – Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz com  $r = 28$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ , no plano  $XY$ .



Fonte: Autor (2021).



Figura 13 – Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz com  $r = 28$  e condição inicial  $(5, 5, 5)$ , no plano  $XZ$ .



Fonte: Autor (2021).

### 5.3 Estabilidade Global na Origem ( $r < 1$ )

Para análise da estabilidade global de  $P_1 = (0, 0, 0)$ , será utilizada a função candidata de Lyapunov proposta por Strogatz (1994):

$$L(X, Y, Z) = \frac{X^2}{\sigma} + Y^2 + Z^2. \quad (112)$$

Pelas definições apresentadas na Seção 3.2, a função de Lyapunov é positiva definida, pois,  $L(X, Y, Z) > 0 \forall (X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$  e  $L(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow (X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ . A ideia é mostrar se  $r < 1$  e  $(X, Y, Z) \neq 0$ , então  $L' < 0$  ao longo das trajetórias do sistema de Lorenz (85). Aplicando a derivada em  $L(X, Y, Z)$  em relação ao sistema (86) obtemos

$$\begin{aligned} L' &= L_X F(X, Y, Z) + L_Y G(X, Y, Z) + L_Z H(X, Y, Z) \\ &= \frac{2}{\sigma} X(-\sigma X + \sigma Y) + 2Y(rX - Y - XZ) + 2Z(XY - bZ) \\ &= -2X^2 - 2Y^2 - 2bZ^2 + 2XY(r+1). \end{aligned} \quad (113)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (113) por  $\frac{1}{2}$  e adicionando ao lado direito  $\pm \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 Y^2$  obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{L'}{2} &= -X^2 - Y^2 - bZ^2 + XY(r+1) + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 Y^2 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 Y^2 \\ &= -\left[X^2 - XY(r+1) + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 Y^2\right] - \left[Y^2 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 Y^2\right] - bZ^2 \end{aligned} \quad (114)$$

Utilizando o método de completar quadrados, a equação (114) escrita em termos de produtos notáveis é dada por

$$\frac{L'}{2} = - \left[ X - \frac{r+1}{2}Y \right]^2 - \left[ 1 - \left( \frac{r+1}{2} \right)^2 \right] Y^2 - bZ^2. \quad (115)$$

Lembrando que  $\sigma$  e  $b$  são números positivos, afirmamos que o lado direito é estritamente negativo se  $r < 1$  e  $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ . Certamente não é positivo, pois, a soma dos quadrados é negativa. Mas poderia  $L' = 0$ ? Isso exigiria que cada um dos termos direitos desaparecesse separadamente. Portanto se,  $Y = 0, Z = 0$ , os segundos dois termos do lado direito desapareceriam (devido à suposição de  $r < 1$  o coeficiente de  $Y^2$  é diferente de zero). Assim, o primeiro termo se reduz a  $-X^2$ , que só desaparece se  $X = 0$ . A conclusão é que  $L' = 0 \Rightarrow (X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ . Caso contrário,  $L' < 0$ . Portanto, pelo Teorema 6 a origem é globalmente estável para  $r < 1$ .

#### 5.4 Limitação das soluções no sistema de Lorenz ( $\sigma > 0, r > 1, b > 0$ )

Se  $r > 1$  é possível demonstrar que as soluções do sistema de Lorenz são limitadas. Para isso, considere agora o elipsóide indicado por Boyce & Diprima (2010):

$$L_1(X, Y, Z) = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(Z - 2r)^2 = c > 0. \quad (116)$$

Calculando a derivada  $L'_1$  em relação ao sistema de Lorenz (85), temos

$$\begin{aligned} L'_1 &= L_{1X}F(X, Y, Z) + L_{1Y}G(X, Y, Z) + L_{1Z}H(X, Y, Z) \\ &= 2rX(-\sigma X + \sigma Y) + 2\sigma Y(rX - Y - XZ) + 2\sigma(Z - 2r)(XY - bZ) \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - 2rbZ). \end{aligned} \quad (117)$$

Definiremos  $B$  como a região onde  $L'_1 > 0$ , e note que

$$-2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - 2rbZ) > 0 \Rightarrow rX^2 + Y^2 + bZ^2 < 2rbZ. \quad (118)$$

Logo a região onde  $L'_1 > 0$  é dada por

$$B = \{(X, Y, Z) : rX^2 + Y^2 + bZ^2 < 2rbZ\}. \quad (119)$$

Considere a fronteira desta região como sendo

$$B_1 = \{(X, Y, Z) : rX^2 + Y^2 + bZ^2 = 2rbZ\}. \quad (120)$$

Assim se,  $(X, Y, Z) \in B \Rightarrow L'_1 > 0$  e se  $(X, Y, Z) \in B_1 \Rightarrow L'_1 = 0$ . Agora, defina a região  $D$  como

$$D = \{(X, Y, Z) : X^2 + Y^2 + (Z - r - \sigma)^2 \leq p^2\}. \quad (121)$$

Escolha  $p$  grande o suficiente para que  $B$  esteja contido em  $D$ . Agora, se um ponto  $X(0) \notin D$ , então  $X(0) \notin B$ . Portanto,  $L'_1[X(0)] < 0$ . Então, alguma trajetória começando em  $X(0)$ , diminui com o tempo e dentro de um tempo finito entra em  $D$ . Além disso, temos que  $L'_1(D) \leq 0 \forall (X, Y, Z) \in D/\{B\}$ , logo, uma vez que uma trajetória cruza  $D$ , ela não pode deixá-la. Com isso mostramos que, para quaisquer parâmetros  $\sigma, r$  e  $b$  maiores que zero, o retrato de fase é limitado.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscou-se a descrição qualitativa do comportamento das soluções do sistema de Lorenz (86), próximas aos seus pontos de equilíbrio. Para isso, foram usados os métodos de Lyapunov para o tratamento da estabilidade desses pontos. Com o uso de recurso computacional, foi feita a descrição das variáveis de estado e de trajetórias no espaço fase.

Conforme já mostrado, o sistema de Lorenz possui três parâmetros reais maiores que zero  $\sigma, r$  e  $b$ . Fixamos  $\sigma = 10$  e  $b = \frac{8}{3}$ , valores usados por Lorenz em seu artigo. O parâmetro  $r$  número de Rayleigh, foi analisado na perspectiva de como sua variação influencia na evolução do sistema.

Nota-se que o divergente do sistema não depende do parâmetro  $r$ . Dessa forma, como  $\sigma, b > 0$  a dissipatividade é garantida, logo a existência do atrator estranho pode ser buscada quando há instabilidade de todos os pontos de equilíbrio, isto é, quando possuem pelo menos um autovalor com parte real positiva.

O sistema de Lorenz possui três pontos de equilíbrio  $P_1, P_2$  e  $P_3$ . Destes,  $P_1$  é o único ponto que existe para qualquer valor de  $r$  e o único para  $r < 1$ . Para  $r < 1$ ,  $P_1$  é assintoticamente estável, se  $r \geq 1$ ,  $P_1$  é instável. Se considerarmos  $r = 1$  então,  $P_1 = P_2 = P_3$ . Os pontos  $P_2$  e  $P_3$  só existem para  $r > 1$ . Neste caso, para  $1 < r < 24,74$  os pontos  $P_2$  e  $P_3$  são assintoticamente estáveis. O número Rayleigh crítico para a instabilidade é  $r = 24,74$ . Assim, para  $r > 24,74$ , os pontos de equilíbrio  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são instáveis.

Escolhendo  $r = 28$ , observou-se o comportamento aperiódico e também que as soluções são extremamente sensíveis à perturbações nas condições iniciais. Esse comportamento é definido como caótico, chamado por Lorenz também como efeito borboleta. Outra característica importante é que, mesmo  $P_1, P_2$  e  $P_3$  instáveis, as trajetórias no espaço de fase permanecem limitadas e atraídas para o chamado atrator estranho. Para  $r = 100$ , foram encontradas soluções que após o comportamento transiente (caótico), apresentam comportamento periódico.

Por fim, a sensibilidade nas condições iniciais tem implicações, também, nos cálculos numéricos realizados. Isso porque, tamanhos de passos diferentes, algoritmos numéricos diferentes, vão introduzindo pequenas diferenças na solução numérica, o que acarreta grandes diferenças na solução calculada. Contudo, a aparência geral da solução e a estrutura do atrator estranho independem desses fatos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASSANEZI, R. C; FERREIRA JR, W. C. **Equações Diferenciais Ordinárias com Aplicações**. São Paulo: Harbra Ltda, 1988.
- BESSA, G. R. **Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- COELHO, S, F. **Estudo da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf em um Sistema Tipo Lorenz**. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2008.
- FELICIO, C. C. **A Dinâmica de Modelos de Lorenz 5D e 6D**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2018.
- FIEDLER-FERRARA, N; DO PRADO, C, P, C. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Blucher, 1994.
- GLEICK, J. **Caos: a criação de uma nova ciência**. 4a edição. Rio de Janeiro: Campus, 1991.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES**, v. 20, p. 130–141, 1962.
- MONTEIRO, L.H.A. **Sistemas Dinâmicos**. 3a edição. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- PALIS, J. **Dinâmica não-linear, sistemas caóticos e aplicações**. Estudos Avançados, [S. l.], v. 8, n. 20, p. 22-23, 1994. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/9641>. Acesso em: 14 jan. 2021.
- SANTOS, R, J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2020.
- SOUZA, G, H. **Bifurcação de Hopf em sistemas de equações diferenciais com simetria**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Maringá, Maringá, 2015.

STEWART, J. **Cálculo, volume 2.** São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.** Addison-Wesley, 1994.

VIANA, Marcelo. **Atratores Estranhos de Lorenz.** Disponível em: <http://w3.impa.br/~viana/out/ael.pdf>/ Acesso em: 20 de março de 2021.