UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

CASSIO DOS SANTOS SCHWAAB

UMA REVISÃO TEÓRICA SOBRE O PROBLEMA CLÁSSICO DO CAIXEIRO VIAJANTE E SUAS APLICAÇÕES

Bagé
2019

CASSIO DOS SANTOS SCHWAAB

UMA REVISÃO TEÓRICA SOBRE O PROBLEMA CLÁSSICO DO CAIXEIRO VIAJANTE E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elizangela Dias Pereira

Bagé
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo autor através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

S398r Schwaab, Cassio dos Santos
Uma revisão teórica sobre o problema clássico do caixeiro viajante e suas aplicações / Cassio dos Santos Schwaab.
38 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação) – Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2019.
"Orientação: Elizangela Dias Pereira".

1. Problema do Caixeiro Viajante. 2. Revisão bibliográfica. 3. Teoria dos Grafos. I. Título.

CASSIO DOS SANTOS SCHWAAB

UMA REVISÃO TEÓRICA SOBRE O PROBLEMA CLÁSSICO DO CAIXEIRO VIAJANTE E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 05 dezembro de 2019.

Banca examinadora:

Elizangela Dias Pereira

Profa. Dra. Elizangela Dias Pereira
Orientadora
UNIPAMPA

Francieli Aparecida Vaz

Profa. Dra. Francieli Aparecida Vaz
UNIPAMPA

Fábio Ronei Rodrigues Padilha

Prof. Dr. Fábio Ronei Rodrigues Padilha
UNIPAMPA

AGRADECIMENTO

Agradeço a minha família por sempre me apoiar, aos amigos e colegas pelas ajudas e contribuições das mais diversas possíveis.

Agradeço a todos da UNIPAMPA, professores, servidores e funcionários, que são responsáveis por toda a estrutura que deu a oportunidade de estar concluindo este trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o clássico Problema do Caixeiro Viajante, através da realização de uma revisão bibliográfica, revisando a teoria e suas mais diversas aplicações. Faz parte do trabalho um breve resumo de alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos, que são importantes para a compreensão do problema central de estudo, bem como uma revisão da literatura referente ao Problema do Caixeiro Viajante com a sua definição e modelo matemático. Também é apresentada a resolução de um exemplo do Problema do Caixeiro Viajante para explorar o modelo matemático. Para a solução do exemplo apresentado, foi utilizado planilhas eletrônicas para demonstrar a aplicabilidade do modelo. Também foi abordado alguns problemas correlatos do Problema do Caixeiro Viajante que se mostraram relevantes em trabalhos encontrados na literatura analisada. No capítulo final, é apresentada uma breve análise dos trabalhos analisados e considerações sobre a produção de conhecimento na área e sugestões para trabalhos futuros.

Palavras-Chave: Problema do Caixeiro Viajante. Revisão bibliográfica. Teoria dos Grafos.

ABSTRACT

This work presents a study about the classic Traveling Salesman Problem, through a bibliographical review, revising the theory and its most diverse applications. The work is a brief summary of basic concepts of Graph Theory, important for understanding the central problem of the study, as well as a review of the literature on the Traveling Salesman Problem with its definition and mathematical model. We also present the resolution of an example of the Traveling Salesman Problem to explore the mathematical model. For the solution of the example presented, spreadsheets were used to demonstrate the applicability of the model. Some related problems of the Traveling Salesman Problem that were relevant in studies found in the analyzed literature were also addressed. The final section presents a brief analysis of the selected works and considerations on knowledge production in the area and suggestions for future work.

Keywords: Traveling Salesman Problem. Bibliographical review. Graph Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

n. – número

p. – página

f. – folha

v. – volume

LISTA DE SIGLAS

ACO - *Ant Colony Optimization*

ALSP - *Adaptive Local Search Procedure*

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

GENI - *Generalized insertion*

GRASP - *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*

IALSP - Iterated Adaptive Local Search Procedure

ILS - *Iterated Local Search*

LINGO - *Language for Intective General Optimizer*

PCA - Problema do Caixeiro Alugador

PCV - Problema do Caixeiro Viajante

PCVCE - Problema do Caixeiro Viajante com coleta e entrega

PCVCP - Problema do Caixeiro Viajante com coleta de prêmios

PCVCPJT - Problema do Caixeiro Viajante com coleta de prêmios e janela de tempo

PCVD - Problema do Caixeiro Viajante Dinâmico

PCVG - Problema do Caixeiro Viajante com Grupamentos

PCVJT - Problema do Caixeiro Viajante com janela de tempo

PCV-MPQ - Problema do Caixeiro Viajante com Múltiplos Passageiros e Quota

ScA - *Scientific Algorithms*

TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional

US - *Unstringing ans Stringing*

VND - *Variable Neighborhood Descent*

VNRD - *Variable Neighborhood Random Descent*

VNS - *Variable Neighborhood Search*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso aborda o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), que é um problema clássico da Teoria dos Grafos, essa teoria essa se originou através do problema das sete pontes de Königsberg resolvido pelo matemático Leonard Euler.

O problema das sete pontes de Königsberg consistia em conseguir um caminho no qual fosse possível atravessar cada uma das sete pontes uma única vez, tendo que passar por todas e retornar a origem. Euler chegou à conclusão e demonstrou que era impossível resolver o problema. No entanto, conseguiu determinar quais seriam as condições necessárias para resolver este tipo de problema.

O PCV é um dos mais estudados dentro da Teoria dos Grafos. Resumidamente, o problema pode ser descrito em como encontrar a melhor rota que passe por um conjunto de cidades, visitando apenas uma vez cada cidade, assim a distância entre as cidades fica sendo representada pelo comprimento das arestas de um grafo e, dessa forma, a melhor rota do PCV representa um ciclo Hamiltoniano.

Este problema tem inúmeras aplicações desde rotas de entrega de produtos até o desenvolvimento de micro-chips, isso ocorre por ser uma ferramenta eficaz de modelagem, o que ajuda a mostrar como pode ser útil sua aplicação matemática para solução de problemas sociais práticos e relevantes.

O Problema do Caixeiro Viajante é um conceito simples, quase intuitivo no primeiro contato, mas com um estudo um pouco mais aprofundado percebe-se o quanto ele pode ser desafiador e instigante, tanto que até o momento não foi encontrado nenhum algoritmo eficiente que resolva esse problema.

O interesse em realizar um estudo com foco na Teoria dos Grafos tem a intenção de demonstrar a sua relevância dentro da Matemática, através da investigação de um de seus problemas clássicos, o Problema do Caixeiro Viajante, apresentando sua teoria e o modelo conceitual e matemático, bem como suas mais diversas aplicações em diferentes problemas sociais.

Assim, espera-se com este estudo despertar a curiosidade sobre o Problema do Caixeiro Viajante e dar maior visibilidade para o tema, que além de interessante, tem vasta aplicação na modelagem de problemas tanto em ciências sociais quanto em ciências exatas.

O principal objetivo que dá origem a este estudo é a busca pela compreensão do Problema do Caixeiro Viajante e algumas de suas variantes. Também, de que forma este problema vem sendo tratado nas mais diversas pesquisas relacionadas.

Buscando um melhor entendimento sobre o tema, o objetivo geral deste trabalho é apresentar uma revisão bibliográfica de um problema clássico da Teoria dos Grafos, o Problema do Caixeiro Viajante, suas aplicações e algumas de suas relações com outros modelos.

Para alcançar o objetivo proposto são traçados como objetivos específicos:

a) Apresentar alguns conceitos relevantes acerca da Teoria dos Grafos.

b) Apresentar modelo conceitual e matemático do Problema do Caixeiro Viajante.

c) Fazer uma revisão bibliográfica em trabalhos recentes publicados em periódicos nacionais.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, incluindo esta introdução. No Capítulo 2 é apresentada uma breve introdução sobre a Teoria dos Grafos com alguns conceitos importantes, seguida de uma revisão a respeito do Problema do Caixeiro Viajante, com a descrição do modelo matemático e alguns problemas correlatos, destacando os mais relevantes encontrados nos trabalhos analisados. O Capítulo 3 traz a metodologia empregada na pesquisa e, a apresentação da pesquisa e análise dos resultados faz parte do Capítulo 4. Finalizando, no Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais sobre o estudo realizado.

2 CONCEITOS GERAIS E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

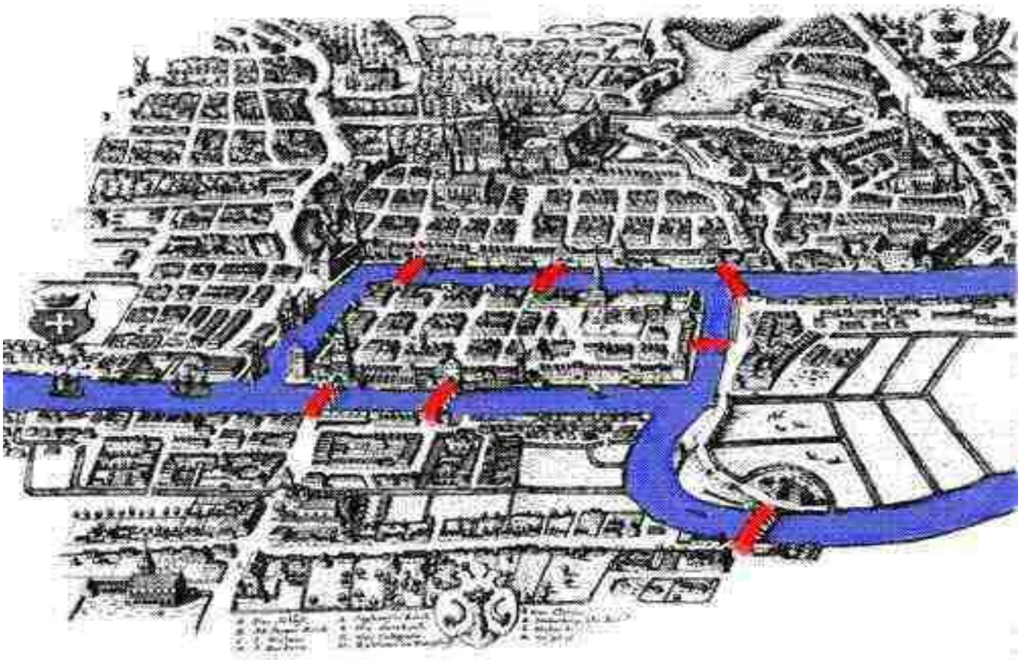
Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos e uma revisão bibliográfica referente ao Problema do Caixeiro Viajante, necessários para o devido entendimento do problema, objeto de estudo deste trabalho.

2.1 Teoria dos Grafos

O fato mais importante dado ao surgimento da Teoria dos Grafos foi através do Matemático Leonard Euler, que chegou à resolução do problema das Pontes de Königsberg no ano de 1735, usando grafos. O problema, hoje conhecido como As Sete Pontes de Königsberg ilustrado na Figura 1, consiste em saber se existe a possibilidade de entrar e sair de uma cidade atravessando apenas uma vez todas as sete pontes. Leonard Euler desenvolveu e apresentou a primeira demonstração da impossibilidade de resolução do referido problema (Guimarães, 2015). O esquema utilizado para representar o problema é apresentado na Figura 2.

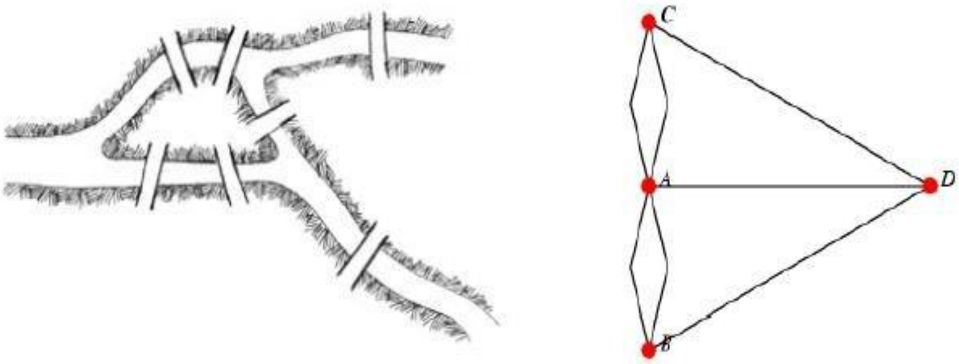
Assim, Euler contribuiu com a criação de uma nova área da Matemática, denominada Topologia, dando o início aos estudos sobre Teoria dos Grafos.

Figura 1 - Pontes de Königsberg.



Fonte: http://www.mat.uc.pt/~picado/combinatoria/Konigsberg.jpg

Figura 2 - Primeiro esquema das Pontes de Königsberg



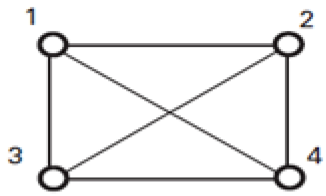
Fonte: www.Researchgate.net

Como parte inicial este capítulo introduz alguns conceitos básicos e definições sobre a Teoria dos Grafos, buscando assim, um conhecimento prévio da teoria que será necessária para o entendimento do problema a ser estudado (Morais, 2010).

Definição de Grafo - um grafo é uma estrutura de abstração que representa um conjunto de elementos denominados vértices (ou nós) e suas relações de interdependência ou arestas, ou seja, um grafo G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto de vértices, $E(G)$ é um conjunto de arestas, e uma função de incidência $\psi(G)$que associa cada aresta $e \in E(G)$a um par de vértices u, $v \in V(G)$ que são denominados os extremos de e.

Definição de Grafo Completo - um grafo completo é um grafo simples $G(V, E)$ tal que $\forall\, u, v \in V(G)$, $u \neq v$,$\exists\, (u, v) \in E$. Na Figura 3 é apresentado um exemplo de grafo completo.

Figura 3 - Grafo completo.



Fonte: Goldbarg e Luna (2005. p. 486)

Definição de Grafo Conexo - um grafo $G(V, E)$ é conexo se é possível chegar a qualquer vértice $v \in V$ a partir de um vértice inicial qualquer v_i, passando pelas arestas de E.

Definição de Subgrafo - dado um grafo $G(V, E)$, $H(V', E')$ é um subgrafo de G se H é um grafo e $V' \sqsubseteq V$ e $E' \sqsubseteq E$.

Definição de Passeio - dado um grafo $\mathrm{G(V, E)}$, um passeio em G, é uma sequência alternada de vértices e arestas.

Definição de Trilha - uma trilha é um passeio no qual não há repetições de arestas.

Definição de Caminho - um caminho é uma trilha na qual não há repetição de vértices.

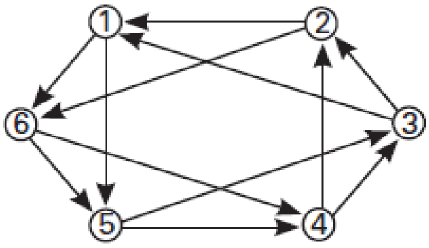
Definição de Ponte - dado um grafo conexo $\mathrm{G(V, E)}$, uma ponte é uma aresta $\mathrm{e} \in \mathrm{E}$ que torna o grafo desconexo caso seja retirada de E.

Definição de Ciclo - dado um grafo $\mathrm{G(V, E)}$, um ciclo é uma sequência de vértices $(v_1, \dots\dots, v_n)$ tal que $(v_1, v_{i+n})$$\in \mathrm{E}$ e $(v_n, v_1) \in \mathrm{E}$.

Definição de Circuito - quando o grafo G é orientado, alguns autores denominam por circuito a sequência distinta de arcos que repete.

Definição de Ciclo Euleriano - dado um grafo $G(V, E)$, um ciclo Euleriano é um ciclo que passa por todas as arestas de E uma única vez. Um exemplo de um ciclo Euleriano é mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Ciclo Euleriano.

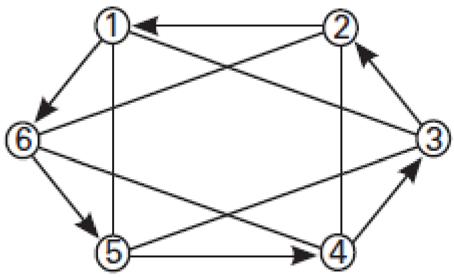


Fonte: Goldbarg e Luna (2005. p. 493)

Definição de Grafo Euleriano - um grafo $G(V, E)$é Euleriano se possui um ciclo Euleriano.

Definição de Circuito Hamiltoniano - trata-se de um circuito que passa por todos os nós de G. Um circuito Hamiltoniano é representado na Figura 5.

Figura 5 - Ciclo Hamiltoniano.



Fonte: Goldbarg e Luna (2005. p. 493)

Definição de Árvore - Uma árvore é um grafo conexo e acíclico.

Definição de Árvore Geradora-$T(V', E')$ é uma árvore geradora de $G(V, E)$ se $V' = V, E' \sqsubseteq E$ e T é uma árvore.

Definição de Floresta - é uma coleção de árvores F em um grafo $G(V,E)$sem ciclos.

2.2 O Problema do Caixeiro Viajante

O PCV é definido por um conjunto de n cidades e uma matriz de distância entre elas, tendo o seguinte objetivo: o caixeiro-viajante deve sair de uma cidade chamada origem, visitar cada uma das $n-1$cidades restantes, apenas uma única vez e retornar à cidade origem percorrendo a menor distância possível ou incorrendo no menor custo possível.

Segundo Freitas (2009), sobre o PCV

> Este é um problema que tem várias aplicações desde planejamento e logística até o desenvolvimento de micro-chips. Podem também ser usadas metáforas, onde as cidades do PCV podem representar clientes, pontos de solda ou fragmentos de DNA e o conceito de distância pode representar o tempo de viagem, o custo ou a similaridade entre Fragmentos de DNA (FREITAS, 2009, p. 09.)

Nota-se que, ainda que o conceito do PCV pareça simples, ele representa um problema de maior complexidade dado a quantidade de aplicações que se pode encontrar, além do que, conforme o tamanho do problema modelado, a solução do PCV torna-se mais difícil de ser encontrada.

2.2.1 Modelo matemático do PCV

O PCV pode ser modelado como um problema de programação linear que consta, basicamente, de uma função objetivo que se deseja maximizar ou minimizar, sujeito a uma série de restrições de acordo com o problema modelado.

Goldbarg e Luna (2005), apresentaram uma formulação do PCV de Dantzig, Fulkerson e Johson, que segundos os autores o PCV pode ser modelado como um problema de programação binária sobre um grafo $G=(V,A)$, como se segue:

Minimizar $z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$ (1)

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall\, j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall\, i \in V \quad (3)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall\, S \subset V \qquad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall\, i,j \in V \qquad (5)$$

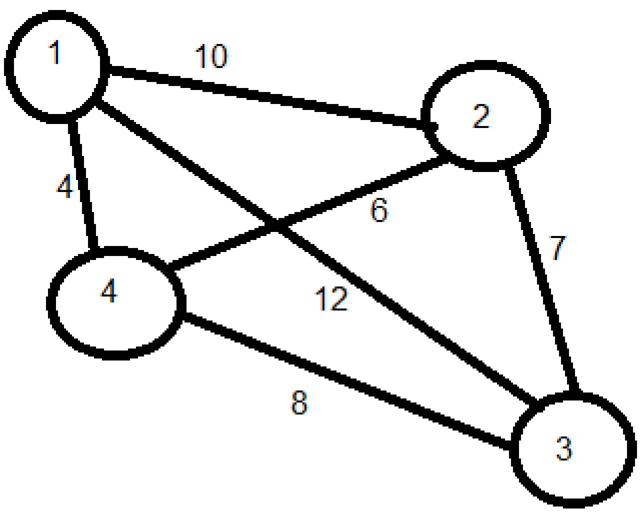
Onde a c_{ij} representa o custo para percorrer o arco (i,j); a variável binária x_{ij} e assume valor igual a 1, se o arco $(i,j) \in A$ for escolhido para integrar a solução, e assume o valor 0 em caso contrário, S é um subgrafo de G, em que $|S|$ representa o número de vértices desse subgrafo.

A restrição (2) força a chegada de exatamente um arco no vértice j e a restrição (3) força a saída de exatamente um arco do vértice i. Mas essas duas últimas restrições não impedem a formação de subciclos. O conjunto de restrições (4) determina a eliminação de subciclos. As equações em$|S|$ tornam os subcircuitos ilegais e determinam que $x_{ii} = 0$ quando $|S| = 1$. Para cada subciclo possível é necessária uma restrição do tipo (4). Por fim, a restrição (5) garante as condições binarias e de não negatividade das variáveis.

Essa formulação evidencia a natureza combinatória do PCV. Solucionar o PCV é determinar uma certa permutação legal de custo mínimo.

Assim com a ideia de explorar esse modelo matemático, será apresentado um exemplo do PCV com quatro vértices. O grafo que representa o problema a ser resolvido é apresentado na Figura 6 abaixo.

Figura 6 - PCV com quatro cidades.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O objetivo é minimizar o custo das distâncias, cuja formulação para este problema é dada a seguir.

Minimizar $z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\, x_{ij}$

Desenvolvendo o somatório acima, tem-se a seguinte equação para a função objetivo do problema:

Minimizar $z = c_{11}x_{11} + c_{21}x_{21} + c_{31}x_{31} + c_{41}x_{41} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{32}x_{32} + c_{42}x_{42} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{33}x_{33} + c_{43}x_{43} + c_{14}x_{14} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} + c_{44}x_{44}$,

onde:

c_{ij} é o custo ou comprimento do arco (i, j) e x_{ij} é o fluxo no arco (i, j).

Em relação as restrições do modelo matemático do PCV, pode-se apresentá-las desta maneira:

Restrição 2: força a chegada de exatamente um arco no vértice j, o fluxo de entrada em cada vértice deve ser exatamente 1. Assim, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1,2,3,4\},$$

ou seja,

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

Restrição 3:força a saída de exatamente um arco do vértice i, o fluxo de saída de cada vértice deve ser igual a 1. Assim, tem-se

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\},$$

ou seja,

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

Restrições 4:

a) O fluxo do vértice para ele mesmo deve ser igual a 0 para evitar laços.

$$\sum_{i,j\,\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \;\rightarrow 1 - 1 = 0$$

ou seja,

$$x_{11} = 0 \quad S = \{1\}$$
$$x_{22} = 0 \quad S = \{2\}$$
$$x_{33} = 0 \quad S = \{3\}$$
$$x_{44} = 0 \quad S = \{4\}$$

b) O ciclo deve percorrer todos os vértices do grafo, não podem ocorrer subciclos, satisfazendo uma das características do problema.

$$\sum_{i,j\,\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \;\rightarrow 2 - 1 \leq 1$$

$$x_{12} + x_{21} \leq 1 \quad S = \{1,2\}$$
$$x_{13} + x_{31} \leq 1 \quad S = \{1,3\}$$
$$x_{14} + x_{41} \leq 1 \quad S = \{1,4\}$$
$$x_{23} + x_{32} \leq 1 \quad S = \{2,3\}$$
$$x_{24} + x_{42} \leq 1 \quad S = \{2,4\}$$
$$x_{34} + x_{43} \leq 1 \quad S = \{3,4\}$$

e

$$\sum_{i,j\,\in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \;\rightarrow 3 - 1 \leq 2$$

ou seja,

$$x_{12} + x_{21} + x_{13} + x_{31} + x_{23} + x_{32} \leq 2 \quad S = \{1,2,3\}$$
$$x_{12} + x_{21} + x_{14} + x_{41} + x_{24} + x_{42} \leq 2 \quad S = \{1,2,4\}$$
$$x_{13} + x_{31} + x_{14} + x_{41} + x_{34} + x_{43} \leq 2 \quad S = \{1,3,4\}$$
$$x_{23} + x_{32} + x_{24} + x_{42} + x_{34} + x_{43} \leq 2 \quad S = \{2,3,4\}$$

Restrição 5: garante a condição binária, admitindo valor 0 ou 1. Assim:

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

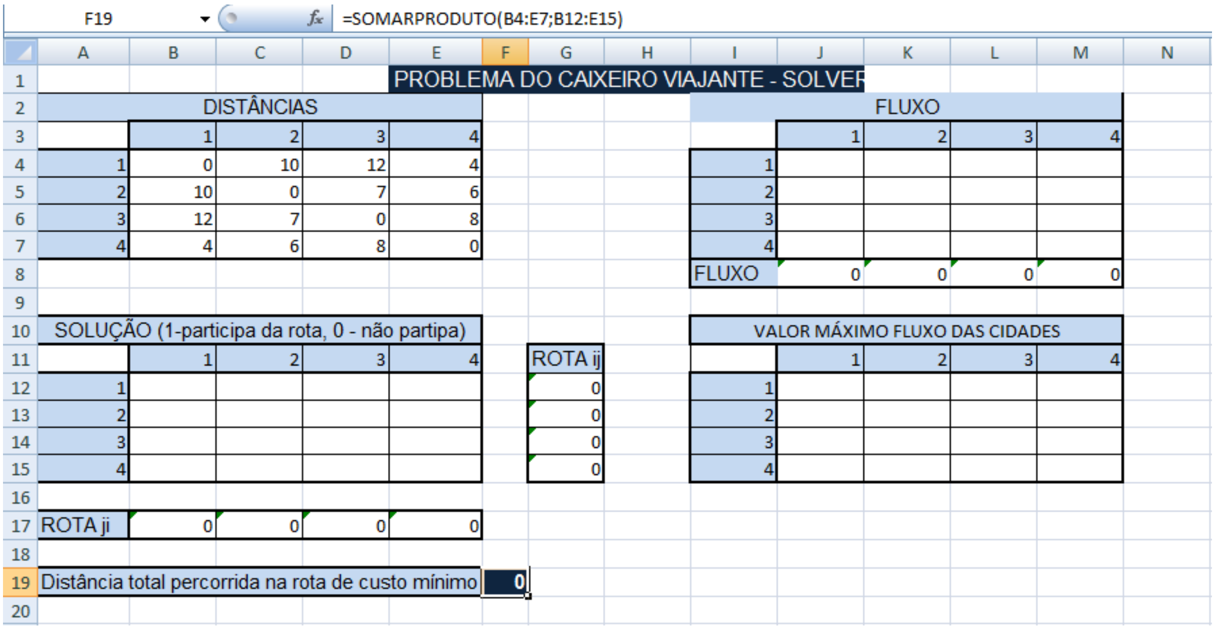
ou seja,

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \in \{0,1\}.$$

Esse modelo matemático descrito anteriormente, pode ser solucionado por meio de planilhas eletrônicas utilizando a funcionalidade chamada *Solver*. A seguir é apresentado a solução do problema proposto como exemplo, utilizando planilhas eletrônicas do *software Microsoft Office Excel* versão 2007. É importante ressaltar que o exemplo proposto representa um PCV simétrico com quatro cidades. A cidade 1 será considerada como ponto de partida, ou seja, como vértice inicial.

Abaixo, a Figura 7 apresenta as informações necessárias para a modelagem do PCV através de planilhas eletrônicas.

Figura 7- Tabelas no Excel para resolução do PCV com quatro cidades.



F19 =SOMARPRODUTO(B4:E7;B12:E15)

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE - SOLVER

DISTÂNCIAS	1	2	3	4
1	0	10	12	4
2	10	0	7	6
3	12	7	0	8
4	4	6	8	0

FLUXO	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				
FLUXO	0	0	0	0

SOLUÇÃO (1-participa da rota, 0 - não partipa)	1	2	3	4	ROTA ij
1					0
2					0
3					0
4					0
ROTA ji	0	0	0	0	

VALOR MÁXIMO FLUXO DAS CIDADES	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Distância total percorrida na rota de custo mínimo	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na tabela “FLUXO” são inseridas as restrições referentes a eliminação dos subciclos. Na tabela “VALOR MÁXIMO FLUXO DAS CIDADES”em cada célula é inserida a fórmula para apresentar o valor máximo de fluxo enviado da cidade i para a cidade j.

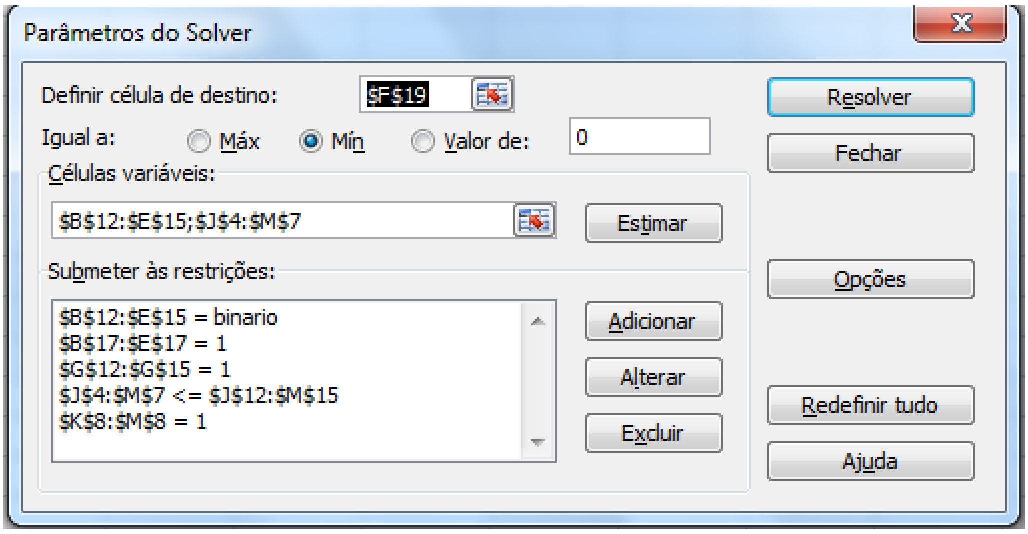
Na tabela “SOLUÇÃO” serão inseridas nas células da coluna, denominada “ROTAij” e na linha “ROTA ji”, fórmulas da soma dos valores da coluna e linha referente a cada cidade, respectivamente.

Essas fórmulas que constam nas tabelas combinadas com as restrições do *Solver*, obrigarão o caixeiro a visitar todas as cidades da rota, passando apenas uma vez por cada cidade.

Na célula “F19”, inserimos a fórmula da função objetivo que minimiza o custo total da rota do caixeiro viajante.

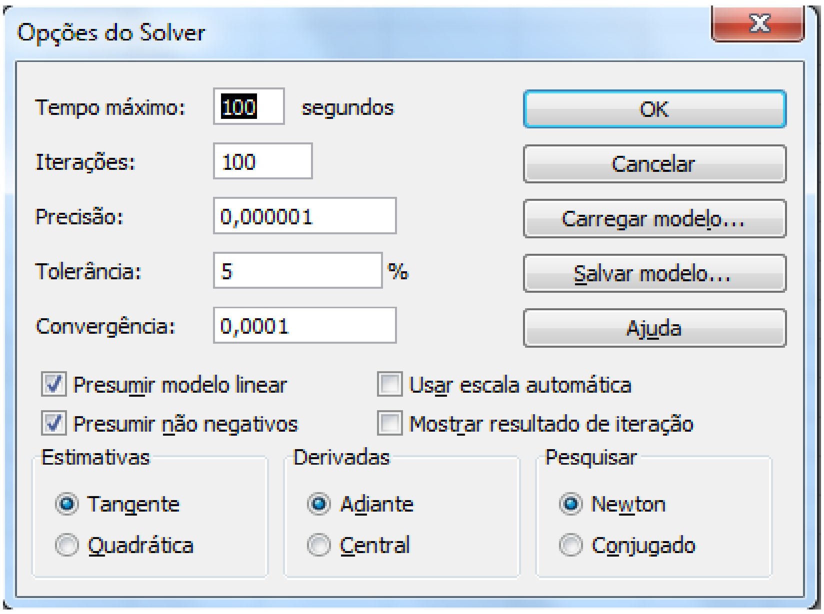
Agora a planilha está preparada para a utilização do *Solver.* As Figuras 8 e 9 mostram os parâmetros e as configurações do *Solver*, respectivamente.

Figura 8 - Definição da função objetivo e restrições no *Solver*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 - Configuração das opções do *Solver*.

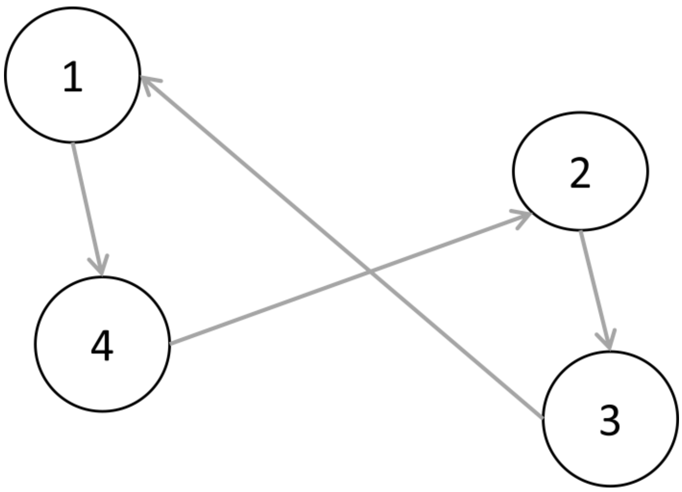


Fonte: Elaborado pelo autor.

A resolução do problema proposto é apresentada na Figura 10, cuja rota apresentada como solução pelo *Solver* é a seguinte:

Cidade 1 → cidade 4 → cidade 2 → cidade 3 → cidade 1.

Figura 10 - Rota apresentada como solução do PCV pelo Solver**.**



Fonte: Elaborado pelo autor

A distância total percorrida na rota de custo mínimo de 29 u.m.

Figura 11 - Solução do PCV no *EXCEL.*

I21 f_x

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE - SOLVER

DISTÂNCIAS	1	2	3	4
1	0	10	12	4
2	10	0	7	6
3	12	7	0	8
4	4	6	8	0

FLUXO	1	2	3	4
1	0	0	0	3
2	0	0	1	0
3	0	0	0	0
4	0	2	0	0
FLUXO	-3	1	1	1

SOLUÇÃO (1-participa da rota, 0 - não partipa)	1	2	3	4	ROTA ij
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	1	0	0	0	1
4	0	1	0	0	1
ROTA ji	1	1	1	1	

VALOR MÁXIMO FLUXO DAS CIDADES	1	2	3	4
1	0	0	0	4
2	0	0	4	0
3	4	0	0	0
4	0	4	0	0

Distância total percorrida na rota de custo mínimo	29

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o problema apresentado possui poucas cidades, ou seja, contém apenas quatro vértices, este pode ser resolvido também por exaustão, construindo todas as rotas possíveis e seus custos. E, após, verificando a rota de custo mínimo.

2.2.2 Problemas Correlatos do PCV

Os autores Goldbarg e Luna (2005), enumeram diferentes problemas correlatos do PCV. Dentre os problemas apresentados por estes, cabe aqui uma breve descrição dos que estão presentes nos trabalhos analisados.

a) **PCV com janelas de tempo** – Nesse problema correlato busca-se a redução do custo ou tempo em uma rota, minimizando o tempo total ou distância, assim,

> Se associarmos uma variável t_{ij} a cada arco do grafo $G = (N, A)$, representando a duração do percurso entre os nós i e j e assumirmos que a matriz $T = [t_{ij}]$ satisfaz à desigualdade triangular, podemos imaginar que a chegada a cada vértice de G possa estar associada a um intervalo de valores para o acúmulo do tempo gasto no deslocamento pela rota. Dessa forma, o valor acumulado do tempo de trajeto deve estar entre um certo intervalo de tempo $[a_i, b_i]$denominado de janela de tempo, para cada vértice $i \in N$.(GOLDBARG e LUNA 2005, p.338)

b) **PCV Alugador** – Nesse problema correlato do PCV, o caixeiro aluga veículos para realizar o tour e os custos dependem do tipo de veículos disponíveis para locação. O objetivo é minimizar os custos a partir da disponibilidade de veículos e das cidades da rota em que os veículos estão disponíveis.

c) **PCV com coleta e entrega**– Conforme Pacheco (2018) nessa variante do PCV, parte que o caixeiro tem que fazer coletas e entregas, partindo da cidade inicial (depósito) deve percorrer a rota respeitando a quantidade de objetos que devem ser coletados em um vértice e, posteriormente, entregues em um vértice específico, percorrendo todos os vértices uma única vez e retornando para o depósito, incorrendo na menor distancia total.

d) **PCV com coleta de prêmios** – Nessa variação do PCV, o caixeiro viajante coleta um prêmio por cada cidade visitada, e paga uma penalidade por cada cidade não visitada. O objetivo é minimizar o custo da viagem e das penalidades, incluindo um número suficiente de cidades para obter um prêmio mínimo preestabelecido, nesse problema não é necessário visitar todas as cidades segundo Chaves et al. (2007).

e) **PCV dinâmico** – Nesse problema correlato pode acontecer uma mudança no tempo para percorrer o trajeto entre as cidades ou uma mudança na topologia das cidades(locais). Segundo Souza (2018), o PCVD também pode ser apresentado como uma sequência de diferentes instâncias do PCV.

f) **PCV com grupamentos** – Essa variante do PCV é uma generalização do problema original, onde os vértices são particionados em grupos disjuntos com o objetivo de determinar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo tal que são visitados todos os vértices de cada grupo de forma contígua.

g) **PCV com múltiplos passageiros e quota** - Esse problema correlato do PCV, considera o embarque de múltiplos passageiros, limitados a capacidade dos veículos. Assim os custos são divididos entre os passageiros durante os deslocamentos, com a obrigação de coletar uma quota mínima na área de deslocamento.

3 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos propostos foi realizada uma revisão bibliográfica atualizada de forma a compreender a aplicação do Problema do Caixeiro Viajante na solução dos mais diversos problemas. A pesquisa foi feita em periódicos nacionais e no portal de teses e dissertações da CAPES.

Os periódicos nacionais pesquisados foram Bolema, Gestão e Produção, Produção, Produto e Produção, Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção, Revista Produção Online e Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA), todos na área de Matemática e/ou Engenharia de Produção. A busca foi realizada através da palavra-chave “Problema do Caixeiro Viajante”, constante no título, resumo e/ou palavras-chave dos textos.

Para essa busca nos periódicos citados, foram encontrados apenas quatro artigos com relevância para o estudo, assim distribuídos:

Bolema: nenhum artigo.

Gestão e produção: nenhum artigo.

Produção: um artigo.

Produto e produção: nenhum artigo.

Relatórios de pesquisa em Engenharia de Produção: nenhum artigo.

Revista Produção Online: dois artigos.

TEMA: um artigo.

A busca realizada no portal de teses e dissertações da CAPES com a palavra chave “Problema do Caixeiro Viajante”, gerou um resultado total de 184 trabalhos, sendo 32 teses de doutorado e 152 dissertações de mestrado, apresentando pesquisas no período de 1988 até 2018, abrangendo 27 áreas de conhecimento.

Dessa forma, devido ao grande número de trabalhos encontrados, em contrapartida com as limitações da pesquisa proposta, optou-se, em um primeiro momento, por filtrar os 184 trabalhos por ano de publicação. Utilizando o filtro para limitar ao ano de 2018, obteve-se como resultado cinco dissertações em língua portuguesa, todas na área da Computação.

Para obter pesquisas dentro das áreas da Engenharia da Produção e Matemática, foi feita uma busca nos anos de 2016 e 2017, utilizando o filtro nessas áreas, resultando em uma tese de doutorado e três dissertações de mestrado, sendo a tese na área da Engenharia da Produção e as dissertações na área da Matemática.

Nesse contexto, após a busca nos periódicos e no portal da capes, resultaram 13 trabalhos (artigos, dissertações e tese) que serão analisados conforme o objetivo do trabalho que é investigar como o Problema do Caixeiro Viajante vem sendo abordado na literatura.

No próximo capítulo, serão apresentados os principais apontamentos a respeito de cada um dos trabalhos escolhidos para a análise.

4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DA LITERATURA

No quadro 1 são apresentados os artigos, dissertações e tese cujas descrições serão comentadas na sequência deste capítulo. A organização segue a ordem apresentada nas referências bibliográficas, sendo importante observar que a abordagem destaca o PCV tratado no estudo, bem como os métodos de solução utilizados.

Quadro 1 – Trabalhos analisados

Tipo de trabalho	Autor	Abordagem
Dissertação	Carvalho (2018)	Métodos Heurísticos e Meta heurísticos para PCV-MPQ, e relação com problemas de roteamento
Artigo	Carvalho e Yamakami (2008)	Meta heurística hibrida de sistema de colônia de formigas e algoritmo genético para PCV
Artigo	Chaves et al.(2007)	Meta heurística hibrida utilizando GRASP e VNS/VDN para o PCVCP
Artigo	Mestria (2013)	Métodos Heurísticos utilizando GRASP e VDN para PCVG
Artigo	Mestria (2014)	Métodos Heurísticos utilizando VNRD e ILS para PCVG
Dissertação	Oliveira (2018)	PCVCP para definição de percurso da rede de alta velocidade GigaMossoró, utilizando meta heurística com algoritmo genético.
Dissertação	Pacheco (2018)	Resolução do PCVCE, utilizando algoritmo genético híbrido com busca em vizinhanças largas
Dissertação	Rebouças (2016)	Resolução do PCVCPJT utilizando heurística GENI e meta heurística VNS
Dissertação	Rios (2018)	Resolução do PCA utilizando hibridização, ScA+VND+IALSP, ScA +IALSP e ScA +ALSP
Tese	Silva (2017)	Aplicação da variante PCVCPP para elaboração de roteiros turísticos, utilizando meta heurística busca tabu
Dissertação	Souza (2018)	Resolução do PCVD, unido ACO com busca locais US e *Lin-Kernighan*
Dissertação	Viana (2016)	Utiliza o PCV no ensino médio através de planilhas eletrônicas
Dissertação	Vilas-Boas (2016)	O uso do PCV como estratégia de ensino

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cabe ressaltar que o presente trabalho é uma revisão da literatura sobre o Problema do Caixeiro Viajante, com o objetivo de oferecer referenciais de aplicações do PCV e não de apresentar algoritmos de solução, de modo que pesquisadores que tenham interesse na área deste estudo possam utilizar esta pesquisa como referencial para trabalhos futuros.

Carvalho e Yamakami (2008) propuseram a aplicação da meta heurística hibrida de sistema de colônia de formigas e algoritmo genético, utilizando a cooperação entre os algoritmos para resolver o PCV, buscando assim uma melhora na velocidade e qualidade da solução. O método proposto se mostrou eficaz, tendo alcançado resultado superior em todos os testes em relação aos algoritmos aplicados de forma independente e, também encontrado soluções satisfatórias em todos os testes.

Chaves et al. (2007) realizaram uma pesquisa utilizando meta heurísticas para solução aproximada do Problema do Caixeiro Viajante com coleta de prêmios (PCVCP), utilizando *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures* (GRASP) e Método de Pesquisa em Vizinhança Variável (VNS)/Método de Descida em Vizinhança Variável (VND). Também utilizaram programação matemática para verificar a validade das heurísticas propostas. Através do *solver Language for Intective General Optimizer* LINGO, foi testada a programação matemática conseguindo êxito com até 31 vértices. O modelo heurístico proposto também encontrou o ótimo global. Concluíram os autores que o método heurístico obteve sucesso em encontrar o ótimo global, em testes onde esse é conhecido. Também, a meta heurística híbrida se mostrou robusta apresentando pequenos desvios em relação a melhor solução.

Em um estudo utilizando métodos heurísticos para a solução do PCV com grupamentos (PCVG), Mestria (2013) analisa a versão do PCVG em que a sequência de visitas não é pré-fixada, sendo a escolha da sequência feita através de algoritmo. Foram utilizados seis métodos heurísticos, baseados no GRASP, sendo uma versão do GRASP tradicional e as demais versões utiliza o GRASP incorporando Reconexão de Caminhos e, em uma última versão, utiliza um método heurístico Híbrido utilizando o *Variable Neighborhood Descent* (VDN). Segundo o autor, os seis métodos geraram soluções de qualidade e com tempo computacional aceitável. Os métodos que apresentaram melhor desempenho utilizaram Reconexão de Caminhos, e sendo o método híbrido o mais eficiente entre todos os métodos.

Mestria (2014) apresentou um estudo para a solução do PCVG através de métodos heurísticos usando busca local aleatória em vizinhança variável. Esse método é denominado Método de Descida Aleatória em Vizinhança Variável (*Variable Neighborhood Random Descent* - VNRD). Assim dois novos métodos heurísticos baseados no *Iterated Local Search* (ILS) e no VNRD foram apresentados no trabalho. Os dois métodos utilizam um algoritmo construtivo, onde o primeiro utiliza um método que penaliza as arestas intragrupo, e o segundo que não penaliza, ambos têm como base a heurística de Inserção Mais Próxima. Os resultados computacionais conduziram o autor a concluir que as heurísticas trabalhadas obtêm soluções de boa qualidade, em tempo computacional viável, tanto para instâncias de pequeno porte como para as de grande porte. Comparando com os demais trabalhos analisados, conclui-se que os métodos propostos tiveram desempenho superior. Assim, podem ser utilizados para solucionar o PCVG e ainda serem estendidos para outros problemas na área de combinatória.

Carvalho (2018) apresentou um estudo sobre a área dos transportes alternativos, especificamente o transporte solidário que vem crescendo muito com o uso de aplicativos, utilizando uma variante do PCV, o PCV com múltiplos passageiros e quota (PCV-MPQ). O estudo apresenta o PCV-MPQ e suas relações com outros problemas de roteamento (*Ridesharing*, *Carpooling* e *Pickup and Delivery*). A abordagem para a solução do problema foi através de 10 métodos de solução, entre heurísticas (Heurística ad hoc) e meta-heurísticas (GRASP/*Lin-Kernighan*, GRASP/*Path-Relinking*, GRASP/*Variable Neighborhood Descending with Perturbation* (VNDP), *Ant Colony Optimization*(ACO)-OR, ACO-AL, ACO-OR/VNDP, ACO-AL/VNDP, ACO/GRASP/VNDP, algoritmo construtivo aleatório e algoritmo busca local aleatória.). Todos os métodos de solução foram validados. O melhor algoritmo detectado foi aquele baseado em otimização de colônia de formigas.

Oliveira (2018) realizou uma pesquisa com objetivo de otimizar a rota de instalação da rede de alta velocidade GigaMossoró, utilizando o PCVCP e a resolução através de meta heurística com algoritmo genético. O estudo tem sua importante visto que não foram encontradas metodologias para a escolha dos percursos da rede na literatura atual, fato esse que é crucial para o sucesso da rede. Foi utilizado o software IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* para solução e validação do modelo matemático utilizado. A pesquisa obteve sucesso com resultados satisfatórios para o modelo e a meta heurística escolhida. Sendo assim esse modelo matemático, pode ser utilizado para definição de caminhos de rede de alta velocidade.

Souza (2018) apresentou uma pesquisa para uma otimização heurística para a resolução do Problema do Caixeiro Viajante Dinâmico (PCVD) utilizando hibridização, unindo ACO com buscas locais *Unstringing ans Stringing* (US) e ACO com *Lin-Kernighan*, cujo foco foi a solução apenas do PCVD simétrico. Foi realizada uma comparação entre as heurísticas em uma instancia com 318 cidades, ressalta que não foi encontrada uma solução ótima, mas que a meta heurística ACO com busca local *Lin-Kernighan* alcançou um *gap* próximo ao ótimo. Em uma segunda análise, utilizando uma instância com 51 cidades, o resultado também foi superior na combinação ACO com *Lin-Kernighan*. Após foi realizada análise em três instâncias, com 100, 150 e 200 cidades, onde novamente a busca local *Lin-Kernighan* foi superior. Conclui-se que existe uma superioridade no algoritmo ACO com *Lin-Kernighan*, considerando instâncias até 150 cidades. A solução é ótima ou muito próxima ao ótimo, onde nas instâncias grandes ocorre perda de qualidade nas soluções.

Viana (2016) realizou uma pesquisa sobre Teoria dos Grafos, especificamente sobre dois problemas de otimização combinatória, o problema do caminho mais curto e o PCV, com foco na área da educação, utilizando planilhas eletrônicas para aplicações em atividades no ensino médio. Para as atividades relacionadas aos problemas de otimização combinatória, foi utilizado o *solver do EXCEL* para resolver os problemas. Os autores consideraram que a proposta de estudo pode servir de referência para utilização por profissionais da educação, com objetivo de mostrar a importância do tema.

Em uma pesquisa sobre a Teoria dos Grafos e suas aplicações, Vilas-Boas (2016) descreve os conceitos e alguns problemas clássicos, entre eles, o PCV. O estudo busca desenvolver material de apoio sobre o tema, com a intenção de ser utilizado no ensino básico. Os problemas são utilizados conforme suas aplicações no cotidiano, servindo como motivador para o estudo. São sugeridos alguns problemas para serem utilizados em atividades em sala de aula, sendo uma delas a resolução de um PCV.

Silva (2017) apresentou em sua tese, uma pesquisa relacionada a aplicação do PCV no setor turístico, através da combinação de duas variantes, o PCV com coleta de prêmios e o PCV com prêmios de prioridade, visando otimizar a elaboração e formatação de roteiros turísticos na cidade de Belém no estado do Pará. Para a solução do PCV, foram utilizados métodos exatos e a meta heurística de busca tabu. Foram coletados dados e informações numa amostra de turistas, para identificar preferências por rotas turísticas e valores dos pontos turísticos e, bem como roteiros definidos pelos operadores de turismo da região. O autor conclui que o modelo proposto tem condições de apresentar soluções ótimas até 30 nós, levando em conta as preferências das classes de turistas, o que é um resultado plausível, visto que o número de nós dificilmente é superior a 30 em situações reais de roteiro turísticos.

Pacheco (2018) realizou um estudo com o objetivo de resolver o PCV com coleta e entrega utilizando um algoritmo genético híbrido com buscas eficientes em vizinhanças largas. O método proposto gerou resultados de alta qualidade e superou os estudos anteriores, através dos experimentos computacionais apresentados no trabalho.

Rios (2018) apresenta em sua dissertação a solução de um problema correlato do PCV, o Problema do Caixeiro Alugador através de hibridização, através das metaheurísticas e métodos de programação linear. As combinações utilizadas no estudo foram *scientific algorithm* (ScA) + *adaptive local search procedure* (ALSP), ScA + *iterated adaptive local search procedure* (IALSP) e ScA + *variable neighborhood descente* (VND) + IALSP. O algoritmo que produz melhor solução foi o ScA + VND + IALSP. Deve se ressaltar que somente em instâncias não euclidianas os algoritmos apresentaram resultados satisfatórios.

Rebouças (2016) realizou uma pesquisa com o objetivo de apresentar técnicas heurísticas para resolução do Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Prêmio e Janelas de Tempo (PCVCPJT). O autor abordou o problema em duas fases, primeiro utilizando a heurística *Generalized insertion* (GENI) e na segunda fase a meta heurística VNS. Os experimentos computacionais comprovaram a capacidade de solução superior do método utilizado comparando com *software General Public License Linear Programming Kit*, encontrando soluções em tempo hábil até mesmo onde o software não foi capaz de encontrar.

Pode ser observado, após a análise dos textos selecionados para este trabalho, uma intensa pesquisa com foco em desenvolvimento de soluções para o PCV e seus problemas correlatos, através de heurísticas e meta heurísticas, também se percebe uma forte produção acadêmica da área da computação.

Existe uma clara evolução nos métodos apresentados, visto que os trabalhos mais recentes apresentam resultados de melhor qualidade em relação a métodos experimentados em outros estudos anteriores, conforme apresentados pelos autores em seus trabalhos. Também pode ser percebido um foco na hibridização, com a combinação de meta heurísticas e modelos de otimização, gerando algoritmos que têm apresentado bons resultados.

O uso do PCV como ferramenta para auxiliar na solução de problemas reais também foi explorado nos trabalhos analisados, inclusive na área da educação matemática, como instrumento didático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar um estudo aprofundado de um problema clássico da Teoria dos Grafos denominado Problema do Caixeiro Viajante, através de aplicações e relações com outros modelos. Para isso, foi apresentado uma breve revisão da Teoria dos Grafos, resgatando o problema clássico das Sete Pontes de Königsberg e alguns conceitos acerca da teoria.

Assim, teve-se a oportunidade de apresentar o PCV e seu modelo matemático, bem como alguns problemas correlatos do PCV que se destacam em pesquisas atuais na área.

Na literatura foi encontrada uma grande produção de estudos feitos por pesquisadores da área da computação, desenvolvendo novos algoritmos com um ganho de qualidade nas soluções do PCV, embora nenhum algoritmo eficiente tenha sido encontrado até o momento, é nítido o grande avanço em termos de capacidade computacional e qualidade das soluções apresentadas pelos pesquisadores.

A aplicação do PCV em problemas reais foi explorada nas pesquisas analisadas, sendo este utilizado como ferramenta para otimizar a instalação de rede de alta velocidade e elaboração de circuitos turísticos. Também, como estratégia de ensino para estudantes da educação básica, visto de seu caráter quase que intuitivo e a possibilidade de utilização de tecnologias de fácil acesso, como planilhas eletrônicas, para auxiliar na resolução de problemas.

Por fim, sugere-se como possibilidade de trabalhos futuros uma revisão aprofundada na literatura internacional, buscando autores brasileiros que tenham suas publicações em periódicos renomados fora do Brasil. Sugere-se também que sejam feitas abordagens no ensino básico e superior, uma vez que o tema pode ser de fácil entendimento e grande aplicabilidade em diversos problemas.

.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, Allan Vilar. **O Problema do Caixeiro Viajante com Múltiplos Passageiros e Quota.** Dissertação (Mestrado em Sistema e Computação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação. Natal, 2018.

CARVALHO, M. B., YAMAKAMI, A. **Meta-heurística Híbrida de Sistema de Colônia de Formigas e Algoritmo Genético para o Problema do Caixeiro Viajante.** TEMA, v. 9, n. 1, p. 31-40, 2008.

CHAVES, Antonio Augusto et al. **Metaheurísticas híbridas para resolução do problema do caixeiro viajante com coleta de prêmios.** Produção, v. 17, n. 2, p. 263-272, Maio/Ago. 2007.

FREITAS, Alan Robert Resende de. **Resolvendo o Problema do Caixeiro Viajante via Procedimento de Busca Adaptativa Aleatória Gulosa com Construção Baseada em Redes Neurais Auto-Organizáveis.** 2009. Monografia (Bacharel Ciência da Computação) – Universidade Federal de Ouro Preto, Curso de Ciência da Computação, Ouro Preto, 2009.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. 2 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GUIMARÃES, Ana Cláudia Gomes. **Alguns tópicos da teoria dos grafos e aplicações.** 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Curso de Licenciatura em Matemática, Campina Grande, 2015.

MESTRIA, Mario. **Métodos Heurísticos Usando GRASP, Reconexão de Caminhos e Busca em Vizinhança Variável para o Problema Do Caixeiro Viajante com Grupamentos.** Revista Produção Online, Florianópolis, SC, v.13, n. 3, p. 1002-1033, jul./set. 2013.

MESTRIA, Mario. **Métodos Heurísticos Usando Busca Local Aleatória em Vizinhança Variável para o Problema do Caixeiro Viajante com Grupamentos.** Revista Produção Online, Florianópolis, SC, v.14, n. 4, p. 1511-1536, out/dez. 2014.

MORAIS, Jose Luiz Machado. **Problema do Caixeiro Viajante Aplicado ao Roteamento de Veículos numa Malha Viária.** 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel Ciência da Computação) – Universidade Federal de São Paulo, Curso de Ciência da Computação, São Jose dos Campos, 2010.

OLIVEIRA, Charles Miller de Góis. **Modelo e Método de Resolução Para Rede de Alta Velocidade, Uma Abordagem do Problema do Caixeiro Viajante com Coleta De Prêmios.** Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Mossoró, 2018.

PACHECO, Toni Tiago da Silva. **Buscas Eficientes em Vizinhanças Largas para o Problema do Caixeiro Viajante com Coleta e Entrega.** Dissertação (Mestrado em Informática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação de Informática, Rio de Janeiro, 2018.

Pontes de konigsberg. 2019. Disponível em www.mat.uc.pt/~picado/combinatoria/konigsberg.jpg. Acesso em: 28 de maio de 2019.

Primeiro esquema das pontes de konigsberg. 2019. Disponível em www.Researchgate.net. Acesso em: 28 de maio de 2019.

REBOUÇAS, Ramom Santana. **Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Prêmios e Janelas de Tempo.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação, Campinas, 2016.

RIOS, Brenner Humberto Ojeda. **Hibridização de Meta-Heurísticas com Métodos Baseados em Programação Linear para o Problema do Caixeiro Alugador.** Dissertação (Mestrado em Sistemas e Computação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação. Natal, 2018.

SILVA, Admilson Alcantara. **Abordagens de Otimização para apoiar a Elaboração e Análise de Roteiros Turísticos.** 2017. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2017.

SOUZA, Matheus Ricalde. **Algoritmo Híbrido Para o Problema do Caixeiro Viajante Dinâmico: Otimização Por Colônia de Formigas + Buscas Locais.** Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Universidade Federal de Santa Maria. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Santa Maria, 2018.

VIANA, Anderson Oliveira. **Algoritmos em Grafos e o Problema do Caixeiro Viajante: uma abordagem no Ensino Médio utilizando planilhas eletrônicas.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de São João Del-Rei. Sociedade Brasileira de Matemática, São João Del-Rei, 2016.

VILAS-BOAS, Clóvis Rodrigues. **Introdução ao Estudo de Grafos: Origem e Aplicações.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação, Campinas, 2016.