

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

ANDREY CARVALHO NUNES

**ANÁLISE DINÂMICA ATRAVÉS DA CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL E
NUMÉRICA DE UMA ESTRUTURA ESBELTA**

Alegrete

2019

ANDREY CARVALHO NUNES

**ANÁLISE DINÂMICA ATRAVÉS DA CARACTERIZAÇÃO
EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DE UMA ESTRUTURA ESBELTA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Vicente Bergamini Puglia

Alegrete

2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

N972a Nunes, Andrey Carvalho

Análise dinâmica através da caracterização
experimental e numérica de uma estrutura esbelta /
Andrey Carvalho Nunes.

47 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)--
Universidade Federal do Pampa, ENGENHARIA MECÂNICA,
2019.

"Orientação: Vicente Bergamini Puglia".

1. Análise dinâmica. 2. Modos vibratórios. 3.
Plataforma vibratória. I. Título.

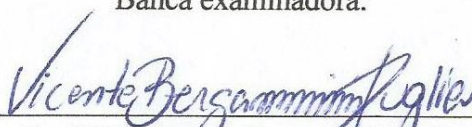
ANDREY CARVALHO NUNES

**ANÁLISE DINÂMICA ATRAVÉS DA CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL E
NUMÉRICA DE UMA ESTRUTURA ESBELTA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Engenharia Mecânica da
Universidade Federal do Pampa como requisito
parcial para obtenção do Título de Bacharel em
Engenharia Mecânica.

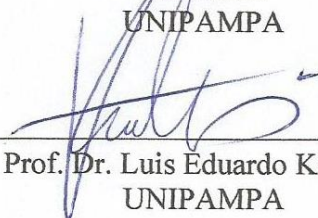
Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em 27 de novembro de 2019.

Banca examinadora:

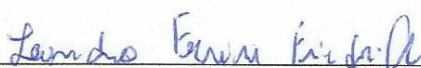


Prof. Dr. Vicente Bergamini Ruglia

Orientador
UNIPAMPA



Prof. Dr. Luis Eduardo Kostas
UNIPAMPA



Prof. Me. Leandro Ferreira Friedrich
UNIPAMPA

AGRADECIMENTO

Aos meus pais, Maristel e Flávio, e a minha avó, Celi, os quais sempre me deram apoio, tanto emocional quanto financeiro, para que eu pudesse chegar até aqui. Não foram poucas as dificuldades e os esforços para superar os obstáculos até esse momento, portanto, esse sonho é tão deles quanto meu.

Ao meu orientador, prof. Vicente Puglia, por aceitar conduzir meu projeto de pesquisa e pelo imprescindível apoio, disponibilidade, paciência e parceria neste trabalho. Fica registrado minha profunda admiração e respeito.

Aos demais professores do curso pelo aprendizado, pelo apoio e parcerias.

Aos meus amigos, que se tornaram minha segunda família, e que compartilharam dos inúmeros desafios enfrentados. Sou muito grato pelos momentos incríveis que vivenciamos nesse breve período em convívio.

Parte deste trabalho intitulado “*Análise da resposta dinâmica de uma estrutura esbelta submetida à diferentes excitações*”, fomentado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do RS (FAPERGS), foi premiado como trabalho destaque no 11º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão.

“Seja quem você for, seja qualquer posição social que você tenha na vida, do nível altíssimo ao mais baixo, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.”

Ayrton Senna

RESUMO

Estruturas e sistemas mecânicos, ainda que projetados de forma estática, estão sujeitos a carregamentos dinâmicos. As forças geradas por ventos, os movimentos oscilatórios causados por sismos, pela ação de pedestres e as vibrações geradas por máquinas rotativas são exemplos disso. Dessa maneira, é de suma importância a análise da resposta dinâmica dos sistemas afim de prevenir desconfortos, acidentes, perdas humanas e materiais.

A partir desta constatação, realizou-se a análise dinâmica de uma estrutura de dois andares sobre uma plataforma vibratória submetida a uma vibração forçada. Através do uso de acelerômetros possibilitou-se a aquisição de dados experimentais, sendo realizado a manipulação dos dados afim de obter a caracterização dinâmica da estrutura.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia de análise dinâmica e caracterização de uma estrutura esbelta. Os dados obtidos possibilitam a base para comparação e refinamento de uma análise numérica.

Palavras-chave: Análise dinâmica. Modos vibratórios. Plataforma vibratória.

ABSTRACT

Structures and mechanical systems, even if statically designed, are subject to dynamic loading. The forces generated by winds, the oscillatory movements caused by earthquakes, by the action of pedestrians and the rotary machines vibrations are examples of this. In this way, it is extremely important the systems dynamic response analysis in order to prevent discomforts, accidents, human and material losses.

From this observation, was carried out the dynamic analysis of a two-floor structure on a vibratory platform subjected to a forced vibration. Using accelerometers, it was possible acquire experimental data, manipulating them in order to obtain the structure dynamic characterization.

The objective of this work is to create a dynamic analysis methodology and characterize a slender structure. analysis as function of time and frequency from the signals picked up by the accelerometers. The acquired data allow the basis for comparison and refinement of a numerical analysis.

Keywords: Dynamic analysis. Vibrating modes. Vibrating platform.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ponte de Tacoma Narrows nos EUA colapsando devido à ventos fortes	1
Figura 2 – Ciclone extratropical formado entre os estados de Santa Catarina e Rio Grande do Sul em 2004.....	5
Figura 3 – Perfil de velocidade de uma tormenta EPS	6
Figura 4 – Estrutura metálica danificada devido aos ventos do furacão Irma nos EUA.....	6
Figura 5 – Destruição causada por <i>downburst</i>	7
Figura 6 – Localização das placas tectônicas na Terra.....	8
Figura 7 – Direções das ondas P e S.....	9
Figura 8 – Causas para a ocorrência de sismos naturais.....	9
Figura 9 – Sistema massa-mola-amortecedor.....	11
Figura 10 – Vibração subamortecida com decaimento exponencial	16
Figura 11 – Resposta de um sistema no domínio do tempo	17
Figura 12 – Resposta de um sistema no domínio da frequência	17
Figura 13 – Exemplo da utilização do MAC.....	19
Figura 12– Acelerômetro piezoelétrico	20
Figura 13 – Acelerômetro utilizado.....	21
Figura 14 – Hardware <i>PHOTON+</i>	21
Figura 15 – Estrutura sobre plataforma vibratória	22
Figura 16 – Impacto forçado na estrutura.....	25
Figura 17 – Exemplo de martelo de impacto.....	27
Figura 18 – Sinal aleatório aplicado no modelo numérico real.....	28
Figura 19 – Sinal da vibração livre no andar 2.....	29
Figura 20 – Sinal da vibração livre no andar 1.....	30
Figura 21 – FFT para o andar 2	31
Figura 22 – FFT para o andar 1	32
Figura 23 – Modos de vibração da estrutura	33
Figura 24 – Martelo de impacto construído	34
Figura 25 – Resposta da estrutura em relação à diferentes sinais de entrada no andar 2.....	35
Figura 26 – Resposta da estrutura em relação à diferentes sinais de entrada no andar 1.....	36
Figura 27 – Modelagem numérica da estrutura real.....	37
Figura 28 – Modelagem numérica da estrutura simplificada	38

Figura 29 – Deslocamento da estrutura no tempo ao aplicar uma força harmônica	39
Figura 30 – FFT do sinal aleatório	39
Figura 31 – Resposta do modelo numérico real ao sinal aleatório	40
Figura 32 – FFT da resposta ao sinal aleatório.....	40
Figura 33 – Comparação modelo numérico e experimental.....	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características da estrutura	22
Tabela 2 – Parâmetros de hardware	25
Tabela 3 – Dados dos materiais utilizados no modelo numérico real	27
Tabela 4 – Propriedades do sistema	31
Tabela 5 – Modos de vibração do modelo numérico.....	38

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Aceleração
c	Amortecimento
D	Matriz dinâmica
E	Energia
F	Força
F_n	Frequência natural
k	Rigidez
K	Matriz rigidez
I	Matriz inversa
m	Massa
M	Matriz massa
n_c	Número de ciclos
t	Tempo
T	Período
T_d	Período amortecido
x	Deslocamento
\dot{x}	Velocidade
\ddot{x}	Aceleração
β	Razão de frequências
δ	Decremento logarítmico
δ_{st}	Deflexão da massa
ξ	Razão de amortecimento
φ	Ângulo entre vetores
φ_i	Representação vetor deslocamento
Φ	Matriz modal
\emptyset	Ângulo de fase do deslocamento
ω	Frequência angular
ω_d	Frequência natural amortecida
ω_n	Frequência natural

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Justificativa	2
1.2 Objetivos	2
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
2.1 Efeitos dinâmicos em estruturas	3
2.2 Modelagem matemática	10
2.3 Análise modal	11
2.4 Análise harmônica	13
2.5 Amortecimento	15
2.6 Resposta no domínio do tempo e da frequência	16
2.7 MAC	18
2.8 Instrumentação	20
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	23
4. METODOLOGIA	25
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	29
5.1 Resposta no domínio do tempo.....	29
5.2 Caracterização da estrutura	30
5.3 Resposta no domínio da frequência	31
5.4 Resposta para diferentes sinais de entrada.....	33
5.5 Simulação numérica.....	37
5.6 Comparação modelo experimental e numérico	41
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
REFERÊNCIAS	43
ANEXOS	46

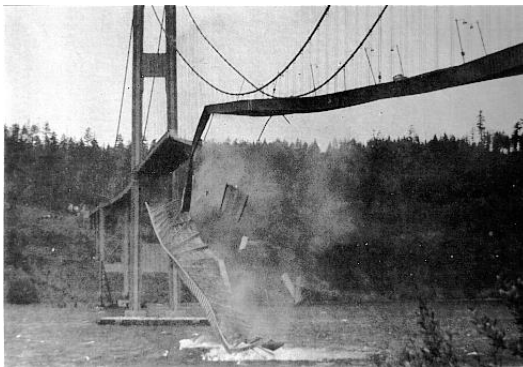
1. INTRODUÇÃO

A engenharia, no contexto geral, é desenvolvida dentro de uma concepção de projeto estático. Esse fator tem levado a ignorar um importante quesito de projeto: o tempo, ou seja, nada permanece como está. A análise da resposta dinâmica de estruturas leva em consideração o efeito da passagem do tempo e suas influências sobre as estruturas, como, por exemplo, a impossibilidade de negligenciar os efeitos da velocidade do vento e suas causas, além dos efeitos em estruturas esbeltas.

O ponto de maior interesse são as vibrações ou pequenos movimento cíclicos e harmônicos entorno de uma referência estática ou neutra. Dificilmente um projeto de engenharia é colocado num estado limite devido às cargas dinâmicas, exceto em situações específicas sob a ação da natureza, como ventos e sismos. O mais comum é a consideração do estado limite de serviço em que pequenas excitações possam tornar a estrutura inadequada à sua finalidade. Um exemplo é o desconforto transmitido aos ocupantes de edificações/estruturas devido a vibrações de suas bases ou outras excitações.

Os movimentos oscilatórios podem levar a reações e a esforços internos maiores que seus limites determinados estaticamente. Estes movimentos podem afetar o funcionamento de equipamentos, como a comunicação entre antenas de telefonia celular e redes de transmissão de energia elétrica. Características básicas da análise dinâmica de estruturas como carregamentos, esforços internos, deslocamentos, velocidades e acelerações são variantes no tempo. A resposta destas análises é obtida por meio de um histórico no domínio do tempo ou da frequência.

Figura 1 – Ponte de Tacoma Narrows nos EUA colapsando devido à ventos fortes



Fonte: Blog da Engenharia¹

¹ Disponível em: <<https://blogdaengenharia.com/ponte-tacoma-narrows-aeroelasticidade-ou-ressonancia/>>. Acesso em set. 18

O estudo da resposta dinâmica de estruturas passa pela criação de uma série de modelos que permitam converter uma estrutura real em um modelo físico/conceitual, idealizando e/ou simplificando elementos como barras, placas, apoios, materiais, etc. Em seguida é construído um modelo matemático que se aproxima ao máximo da estrutura real ou do modelo simplificado, onde ambos têm um comportamento no domínio do tempo ou da frequência próximo ao comportamento da estrutura real.

Desta maneira, é possível estimar as respostas das estruturas e sistemas mecânicos submetidas à diferentes excitações.

1.1 Justificativa

A justificativa para a elaboração deste trabalho se dá pela importância da análise dinâmica em estruturas e sistemas mecânicos, negligenciada em muitos casos. A falta de um estudo aprofundado na área de vibrações pode gerar desconfortos, acidentes e até mesmo mortes, além de grandes perdas econômicas.

1.2 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia para análise dinâmica de uma estrutura esbelta, obtendo suas características por meio de forma experimental e numérica.

Para isso, definiu-se os seguintes objetivos específicos:

- Modelagem da estrutura através de uma versão simplificada e uma completa em elementos finitos;
- Obtenção das características estruturais a partir da análise numérica;
- Aplicação de um método de correlação, a fim de validar os resultados obtidos da modelagem numérica com os resultados experimentais;
- Análise harmônica da resposta da estrutura real e do modelo numérico;

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com RAO (2008) qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado vibração ou oscilação. O simples balançar de um pêndulo ou a trepidação causada pelo acionamento de um motor à combustão são exemplos de vibração. A teoria de vibração trata do estudo de movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas a eles.

RAO (2008) ainda define o procedimento de análise de vibrações em 4 etapas:

1 - Modelagem matemática: representação do sistema analisado para obtenção de equações matemáticas (ou analíticas) que descrevem o comportamento do mesmo.

2 – Derivação das equações governantes: as equações de movimento que governam um sistema vibratório são, normalmente, equações diferenciais ordinárias para um sistema discreto e equações parciais para um sistema contínuo.

3 – Solução das equações governantes: as equações devem ser resolvidas afim de obter a resposta do sistema vibratório.

4 – Interpretação dos resultados: com a obtenção dos resultados de deslocamentos, velocidades e acelerações das massas do sistema, os dados devem ser interpretados de acordo com a finalidade da análise.

2.1 Efeitos dinâmicos em estruturas

Qualquer sistema mecânico ou estrutural está sujeito a diferentes efeitos dinâmicos. Sendo assim, é necessário conhecê-lo e estimá-lo afim de evitar acidentes que possam ocorrer. As propriedades dinâmicas como frequência natural, fator de amortecimento e modos de vibração são fatores importantes que não podem ser negligenciados durante um projeto.

Nas últimas décadas, com o desenvolvimento e aprimoramento computacional tornou-se viável simulações de modelos para representação de processos físicos, até então difíceis de serem realizados.

A ação de ventos em torres de sustentação de aerogeradores, os efeitos de sismos em prédios, vibrações ocasionadas por máquinas e ação de pedestres em pontes e passarelas são alguns exemplos de efeitos dinâmicos que são comumente estudados.

2.1.1 Ventos

Os ventos podem ser descritos como o movimento do ar. Os ventos naturais são formados por diferenças de pressão na atmosfera, causados pela variação de temperatura do ar. Essa variação está relacionada à radiação solar e por consequência, ao aquecimento ou resfriamento das massas de ar.

Quando uma estrutura é colocada no caminho do fluxo do vento são geradas forças aerodinâmicas de magnitude e direção variável que atuam sobre a estrutura. Esse fluxo possui uma certa quantidade de energia cinética, e caso haja um obstáculo no caminho desse deslocamento de massa de ar, parte de sua energia cinética é transformada em força que atua perpendicularmente à superfície da estrutura, gerando um carregamento que pode variar em função da velocidade do vento.

Em virtude da grande variabilidade do carregamento proveniente da ação de vento, o estudo das respostas destas ações torna-se complexo. Dessa maneira, usualmente, adota-se uma simplificação importante de cálculo com adoção de carregamentos estáticos equivalentes, considerando-se uma velocidade característica de vento (BRASIL e SILVA, 2015).

No caso de estruturas esbeltas com frequências fundamentais próximo de 1 Hz, as respostas dinâmicas do vento tornam-se importantes na caracterização e dimensionamento da estrutura, no entanto, a consideração dos esforços do ponto de vista estático gera uma aproximação grosseira. Sob este ponto de vista, a NBR 6123: 1988, descreve a importância do estudo dos efeitos dinâmicos em seu texto, onde ela ressalta, em edificações com período fundamental superior a 1 s, em particular aquelas fracamente amortecidas, podem apresentar importante resposta flutuante na direção do vento médio.

Excitações de fontes naturais como ventos, sismos, ondas do mar, não são passíveis de descrição por meio determinístico, e sim de forma estatística. Isto é, utilizando valores médios, desvio padrão e distribuições probabilísticas. Em outras palavras, os carregamentos de vento são de natureza aleatória.

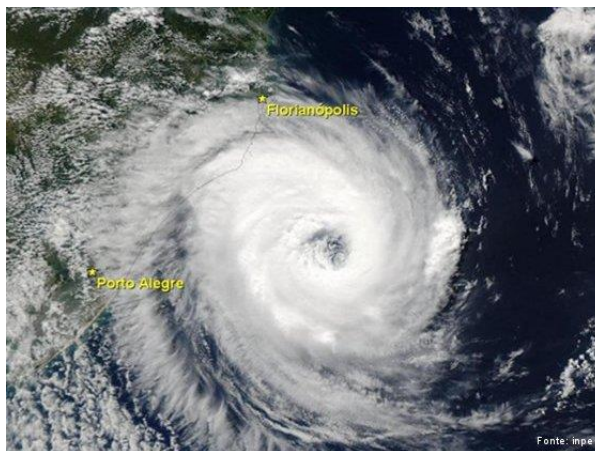
Conforme JÚNIOR (2005), até uma determinada altura da camada atmosférica, a velocidade do vento é influenciada pela rugosidade do terreno e pela variação da temperatura na direção vertical. A rugosidade superficial é determinada pela topografia, forma, dimensões e distribuição dos obstáculos naturais e artificiais da região. O atrito do ar com esta rugosidade, além da variação da temperatura, gera uma turbulência adicional no fluxo de ar.

Para análise dinâmica se destacam os ventos fortes, visto seu maior potencial para eventuais danos. Basicamente podem ser definidas duas tormentas que possuem ventos fortes bem caracterizados: as tormentas extratropicais ou tormentas EPS (*Extended Pressure System*) ou tormentas TS (*Thunderstorm*).

2.1.1.1 Tormentas EPS

Uma tormenta extratropical caracteriza-se por uma rotação de uma grande massa de ar quente e úmido em torno de centros de baixa pressão. Denotam-se por uma atmosfera verticalmente estável, com uma velocidade média razoavelmente constante ao longo da duração do evento. A tormenta pode variar de horas até dias, atingindo grandes dimensões (PUGLIA, 2009).

Figura 2 – Ciclone extratropical formado entre os estados de Santa Catarina e Rio Grande do Sul em 2004



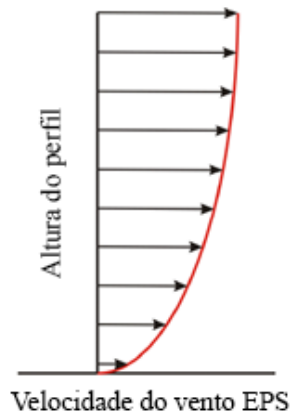
Fonte: Secretaria de Educação do Estado do Paraná²

São necessárias três condições para a formação de um ciclone tropical (IAEA SG N° 50, 1984):

- A água do mar precisa estar quente, com temperatura da superfície acima de 27°C.
- O ar deve, a baixas alturas, convergir para o interior da área do ciclone.
- O fluxo de ar a grandes alturas precisa estar em expansão para que a circulação de ar seja sustentável.

² Disponível em: <<http://www.geografia.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=265>>. Acesso em set. 18.

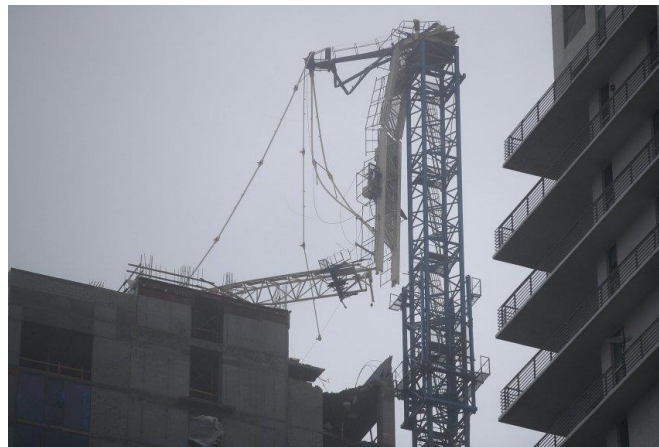
Figura 3 – Perfil de velocidade de uma tormenta EPS



Fonte: extraído de PUGLIA (2009)

Alguns ciclones tropicais podem atingir o estágio de furacão, os quais possuem ventos de superfícies acima de 120 km/h, porém na maioria dos casos ocorre dissipação antes de atingir essa condição.

Figura 4 – Estrutura metálica danificada devido aos ventos do furacão Irma nos EUA



Fonte: Extraído da página do Jornal NH ³

2.1.1.2 Tormentas TS

As tormentas *thunderstorm*, também chamadas de *downburst* caracterizam-se por ventos violentos, súbitos, que se deslocam como um forte jato de ar, descendo verticalmente e que, ao chegar próximo ao solo, é desviado em todas as direções (BLESSMANN, 2005).

³ Disponível em: <<https://www.jornalnh.com.br/2017/09/noticias/mundo/2169642-veja-fotos-furacao-irma-deixa-rastro-de-destruicao-pelos-lugares-onde-passa.html>>. Acesso em nov. 19.

Quando o escoamento atinge o solo, o jato de ar é convertido em um fluxo horizontal denominado *wind shear* ou vento cisalhante. O vento cisalhante é o responsável pelas mudanças abruptas nas direções do vento, podendo ser um fator de risco em pousos e decolagens de aeronaves e para a estabilidade estrutural, principalmente em linhas e torres de transmissão (JÚNIOR, 2005).

FUJITA (1978) classifica o *downburst* em duas categorias:

- *Microburst*: pequenos *downburst* que possuem o diâmetro do anel de vórtices inferior a 4 km e picos de velocidade de vento que duram de 2 a 4 minutos. As velocidades do vento nestes fenômenos podem atingir os 270 km/h.

- *Macroburst*: grandes *downburst* com diâmetros superiores a 4 km, podendo chegar a 10 km. Duram de 4 a 30 min e os ventos máximos atingem até 200 km/h.

Na Figura (5) é possível observar o tipo de destruição causada por um *downburst*. Devido aos ventos cisalhantes, árvores foram completamente arrancadas em uma determinada extensão de campo. Nota-se por meio das árvores intactas no fundo da imagem, que esse tipo de evento ocorre de forma localizada.

Figura 5 – Destruição causada por *downburst*



Fonte: Extraído do twitter da MetSul Meteorologia⁴

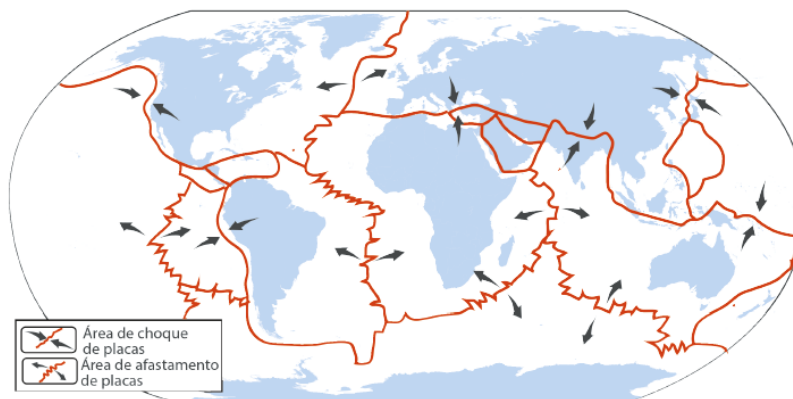
2.1.2 Sismos

Sismos é o resultado de uma grande liberação de energia criando ondas sísmicas que se propagam em uma determinada região provocando uma movimentação na área afetada.

⁴ Disponível em: < <https://twitter.com/metsul/status/872991637093449733?lang=en>>. Acesso em nov. 19.

Existem dois tipos de sismos: os de origem natural, chamados de sismos tectônicos, e os sismos induzidos, causados por ação humana.

Figura 6 – Localização das placas tectônicas na Terra



Fonte: site Curso Dois Pontos⁵

O tipo mais comum são os sismos naturais provocados pela movimentação das placas tectônicas, seja um afastamento, colisão ou deslizamento de uma placa pela outra. Neste momento ocorre uma grande liberação de energia até que as placas possam atingir o equilíbrio novamente. Essa energia se propaga por meio de ondas de deformação que geram deslocamentos da superfície.

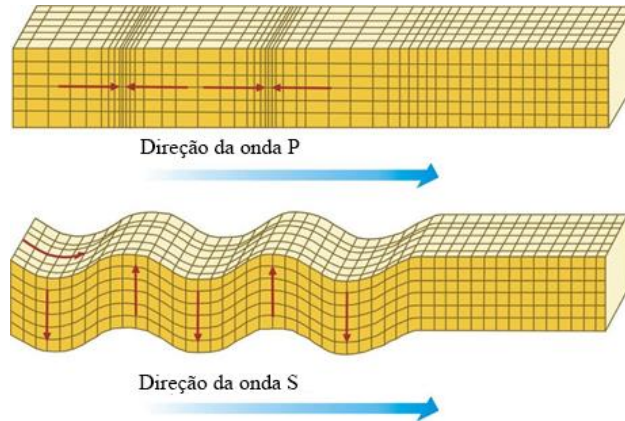
As ondas sísmicas podem ser divididas, basicamente, em dois tipos: ondas P e ondas S. As ondas do tipo P (primárias) se propagam no sentido horizontal, com as partículas do meio descrevendo um movimento de vai e vem, observado na Figura (7), de forma que o meio é constantemente comprimido e distendido. Este tipo de onda são as primeiras a serem registradas quando ocorre um sismo, sendo por isso, chamadas de ondas primárias. Além disso, propagam-se tanto em meios sólidos quanto em fluidos, pois são meios compressíveis.

Ondas do tipo S se espalham por movimentos ondulatórios para cima e para baixo (ondas de corte) alterando a forma dos elementos e se desenvolvem somente no solo.

Nas ondas do tipo S (secundárias) o movimento se dá perpendicularmente à direção de propagação da onda. As ondas transversais são mais lentas que as ondas longitudinais, portanto são registradas depois, dessa forma são chamadas de ondas secundárias.

⁵ Disponível em: < <http://cursodoisPontos.com/placas-tectonicas/>>. Acesso em out. 18.

Figura 7 – Direções das ondas P e S

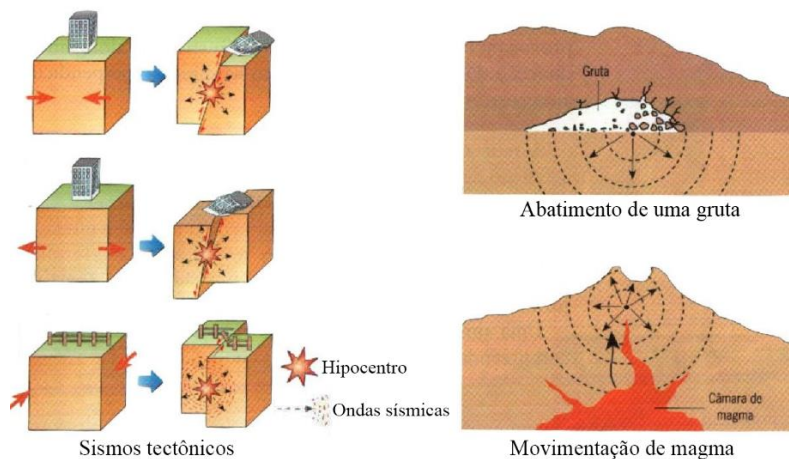


Fonte: adaptado de NC Arquitectura⁶

O ponto do interior da Terra onde se origina o terremoto chama-se de hipocentro, já o ponto da superfície terrestre onde se alcança a maior intensidade, epicentro. Caso o epicentro se dê no mar, formam-se *tsunamis*, nome japonês dado aos maremotos.

Outras causas para sismos naturais são deslocamento de gases no interior da Terra e atividades vulcânicas.

Figura 8 – Causas para a ocorrência de sismos naturais



Fonte: adaptado do blog Biologia e Geologia⁷

Os sismos induzidos podem ser causados pela extração de minerais, construções subterrâneas, que podem gerar deslocamento de rochas no subsolo, e até mesmo grandes explosões.

⁶ Disponível em: <<https://ncarquitectura.com/que-es-un-terremoto/>>. Acesso em out. 18.

⁷ Disponível em: <http://ruibiogeo.blogspot.com/2013/02/sismologia_12.html>. Acesso em out. 18.

Os efeitos dos sismos são variados: podem gerar fissuras no solo, destruição parcial ou total de edificações e grandes alagamentos (no caso de maremotos).

É de conhecimento geral que os sismos no Brasil ocorrem com rara frequência, baixa intensidade e conseqüentemente, pouco poder destrutivo. Porém, com efeito da globalização, o engenheiro estrutural deve ter plena capacidade técnica de exercer suas funções em outros países da América Latina, principalmente aqueles situados ao longo da costa do Oceano Pacífico, onde os efeitos sísmicos são de importância fundamental. No Brasil também surgem, esporadicamente, problemas de sismos induzidos por detonações de explosivos utilizados na mineração e extração de rochas.

Deve-se observar que no Brasil, apesar de estar situado em grande parte na região central de uma placa tectônica, em geral menos suscetível a sismos, existem os chamados “terremotos intraplaca”.

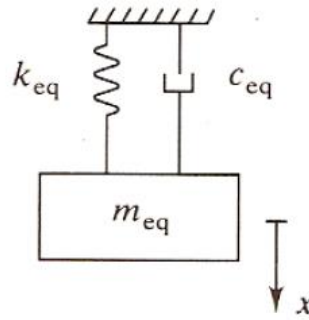
Atualmente foram localizadas 38 falhas sísmicas ativas no território nacional, sendo que apenas a falha de Samambaia (situada na região nordeste) foi parcialmente medida. Essas falhas ocorrem desde o norte até o sul do país, onde se localiza a falha de Pelotas (RS), conforme apresentado por NALLAR (2006).

O objetivo fundamental de um projeto que leve em conta a perturbação por sismos é, necessariamente, reduzir danos e preservar a vida, mesmo nos casos mais severos. No Brasil, desde outubro de 2006, está em vigor a primeira normalização com prescrições de procedimento para projeto de estruturas resistentes a sismos, a NBR 15421.

2.2 Modelagem matemática

Um sistema vibratório é baseado nas características da estrutura como: rigidez (k), massa (m) e amortecimento (c). A forma mais simples de modelar um sistema linear de 1 grau de liberdade (GDL) com amortecimento viscoso é através de um sistema massa-mola-amortecedor, conforme Figura (9).

Figura 9 – Sistema massa-mola-amortecedor



Fonte: extraído de SILVA (2009)

Para obter a equação do movimento do sistema, um método indicado é a construção de um diagrama de corpo livre em um instante qualquer, descrevendo todas as forças atuantes em termos de coordenadas generalizadas.

Para um corpo rígido o movimento oscilatório pode ser descrito pela segunda lei do movimento de Newton, conforme Equação (1).

$$\sum F = ma \quad (1)$$

Considerando que a massa sofra a ação de uma força $F(t)$, a equação do movimento para esse sistema é dada pela equação (3).

$$F(t) - kx(t) - c\dot{x}(t) = m\ddot{x} \quad (2)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3)$$

Através da equação diferencial encontrada é possível obter os coeficientes que descrevem os elementos do sistema, além do deslocamento $x(t)$, da velocidade $\dot{x}(t)$ e da aceleração $\ddot{x}(t)$.

2.3 Análise modal

Por meio da análise modal é possível obter as características da estrutura, as frequências naturais e os modos de vibração do sistema.

Segundo SOEIRO (2001) as frequências naturais e as respectivas formas modais que estão associadas a estas frequências são específicos de cada estrutura. Basicamente, são características que dependem da inércia e da rigidez.

A obtenção destas características pode ser realizada pela equação de equilíbrio dinâmico simplificada e da análise modal de um sistema livre e sem amortecimento. Sendo assim, a Equação (4) descreve o sistema.

$$M\ddot{x}+Kx=0 \quad (4)$$

Onde M e K são as matrizes de massa e rigidez, respectivamente. A primeira é uma matriz quadrada $n \times n$, sendo n graus de liberdade. A segunda é uma matriz quadrada $n \times n$, descrita pelo índice K_{ij} determinada ao medir a força resultante i ao se impor um deslocamento unitário j . As duas matrizes podem ser expressas da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Da mesma forma, em sistemas com amortecimento, a representação é pela matriz C.

O deslocamento do sistema é descrito como um vetor de dimensão $n \times 1$, representado na Equação (7). Realizando a primeira e segunda derivadas desta equação, obtém-se a Equação (8) da velocidade e (9) da aceleração, respectivamente.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{sen}(\omega t + \varnothing) \quad (7)$$

$$\vec{\dot{x}}(t) = \omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{cos}(\omega t + \varnothing) \quad (8)$$

$$\vec{\ddot{x}}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{sen}(\omega t + \varnothing) \quad (9)$$

Representando o vetor deslocamento como φ_i e aplicando as Equações (7) e (9) na equação de movimento (4), tem-se:

$$-\omega^2 M \vec{\varphi}_n \text{sen}(\omega t + \varnothing) + K \vec{\varphi}_n \text{sen}(\omega t + \varnothing) = 0 \quad (10)$$

Dividindo a Equação (10) por $\text{sen}(\omega t + \varnothing)$, visto que $\neq 0$ para todo tempo, obtém-se:

$$(-\omega^2 M + K)\vec{\varphi}_n = 0 \quad (11)$$

Afim de se obter a solução não trivial do sistema, deve-se ter:

$$\det[-\omega^2 M + K] = 0 \quad (12)$$

Ao multiplicar a Equação (12) de frequências do sistema pela matriz inversa da massa, tem-se:

$$[-\omega^2 I + D] = 0 \quad (13)$$

Onde a matriz dinâmica (D) é definida como:

$$D = M^{-1}K \quad (14)$$

Assumindo que $\lambda = \omega^2$, a expressão resulta em:

$$|D - \lambda I| = 0 \quad (15)$$

Para cada frequência natural, haverá um φ_i que caracteriza um modo vibratório. Ao calcular os autovalores (frequência naturais) pela Equação (12) de frequências do sistema e os autovetores (modos de vibração) da matriz dinâmica D, é possível montar a matriz modal Φ , representada na Equação (16).

$$\Phi_{nn} = [\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n] \quad (16)$$

2.4 Análise harmônica

Ao fornecer uma energia externa à um sistema durante uma vibração, diz-se que um sistema, tanto mecânico quanto estrutural, sofre vibração forçada. Essa vibração forçada pode ser harmônica ou não-harmônica.

Conforme DIMAROGONAS (1995) a resposta à excitação harmônica pode ser encontrada para sistemas lineares com análise matemática muito simples, e é fundamental para a compreensão da vibração mecânica.

Uma massa sob excitação harmônica da forma $F(t) = F_0 \cos \omega t$ em um sistema não amortecido, a equação do movimento reduz-se a:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (17)$$

A solução homogênea da Equação (17) é dada por:

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (18)$$

Visto que a força excitadora $F(t)$ é harmônica, a solução particular também é harmônica, possuindo a mesma frequência ω .

$$x_p(t) = X \cos \omega t \quad (19)$$

Onde X é uma constante que representa a maior amplitude de $x_p(t)$.

Substituindo a Equação (19) em (17) e resolvendo para X, obtém-se:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (20)$$

Onde $\delta_{st} = F_0/k$ é a deflexão da massa estática sob uma força F_0 .

Assim, a solução total da Equação (17) é:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (21)$$

Onde C1 e C2 são constantes. Utilizando as condições iniciais $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, tem-se:

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (22)$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (23)$$

Sendo assim:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right) \cos \omega t \quad (24)$$

E a máxima amplitude X pode ser expressa como:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (25)$$

Para o caso de amortecimento, a amplitude da resposta e o ângulo de fase podem ser calculados pelas Equações (26) e (27).

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (26)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \right) \quad (27)$$

Onde $\beta = \omega/\omega_n$ é a razão de frequências e $\zeta = c/c_c$ é a razão de amortecimento.

2.5 Amortecimento

Para modelagem de sistemas na prática e de forma empírica é muito comum a utilização do amortecimento proporcional. Dessa maneira pode-se obter o parâmetro de amortecimento por meio da relação proporcional com a rigidez equivalente e a massa do sistema, conforme Equação (28).

$$c = \alpha_c m + \beta_c k \quad (28)$$

Sendo α_c e β_c coeficientes de proporcionalidade obtidos experimentalmente.

Sendo assim, a matriz de amortecimento pode ser obtida por meio do método de Rayleigh.

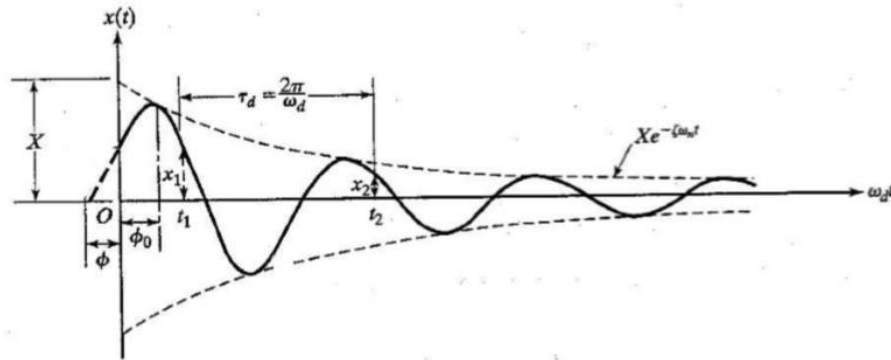
Este tipo de amortecimento é muito empregado em softwares de elementos finitos comerciais para modelar amortecimento em estruturas complexas, uma vez que não existem modelos de elementos FEM para amortecimento (SILVA, 2009).

O fator de amortecimento para sistemas com amortecimento proporcional é descrito em função das constantes α_c e β_c :

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\alpha_c \omega_n + \frac{\beta_c}{\omega_n} \right) \quad (29)$$

Quando a estrutura está submetida a efeito viscoso, este consome as amplitudes de vibração até a estrutura estar em seu ponto de equilíbrio. Este fenômeno de decaimento das oscilações é de forma exponencial.

Figura 10 – Vibração subamortecida com decaimento exponencial



Fonte: adaptado de RAO (2008)

Conforme a Figura (10), a curva pontilhada representa o decaimento devido ao amortecimento viscoso. Ao aplicar os fenômenos vibratórios aos limites desta curva, obtém-se a Equação (30).

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi_0) \quad (30)$$

Segundo RAO (2008), o decremento logarítmico (δ) representa a taxa de redução da amplitude, que, por definição, é o logaritmo natural entre a razão de duas amplitudes sucessivas, conforme Equação (31).

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n t_d \quad (31)$$

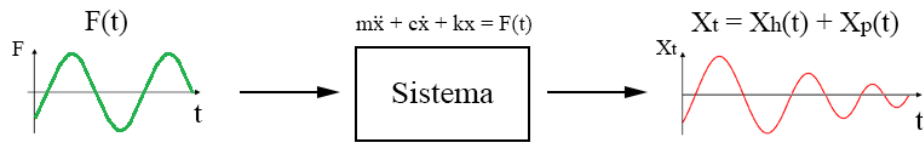
2.6 Resposta no domínio do tempo e da frequência

A resposta da estrutura pode ser analisada de duas formas: no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A análise no domínio do tempo permite representar a forma de onda em função de sinais obtidos de instante a instante. A partir da análise do sinal determina-se algumas características vibratórias que não são visíveis no domínio da frequência, como a ocorrência de impactos e sua taxa de repetição (PUGLIA, 2009).

Como mostrado na Figura (11), ao submeter um sistema à uma força harmônica e deixá-lo vibrar, a estrutura terá um determinado comportamento ao longo do tempo.

Figura 11 – Resposta de um sistema no domínio do tempo



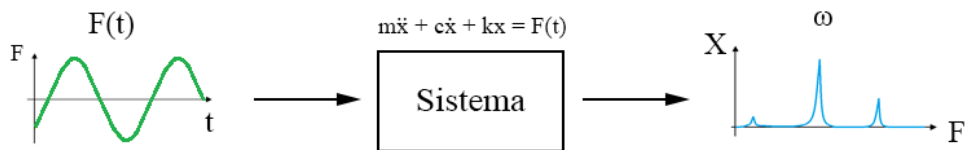
Fonte: o autor

A análise no domínio da frequência permite obter a resposta permanente de uma estrutura linear sob a ação de uma excitação no domínio do tempo, desprezando as vibrações transientes que ocorrem no início.

Quando a estrutura ou sistema linear é submetido a uma excitação periódica ou cíclica, a resposta também será cíclica e com a mesma frequência de excitação (Figura 12). Assim, a análise no domínio da frequência prediz o comportamento dinâmico de uma estrutura, permitindo a verificação da existência de ressonância numa determinada faixa de frequência de excitação em que a estrutura trabalhe (PUGLIA, 2009).

A Transformada de Fourier (FFT) é uma importante ferramenta numérica para transformar o sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência. Um conceito inicial sobre a Transformada de Fourier é que ela permite analisar as funções não periódicas e é muito útil em determinadas aplicações relacionadas com problemas de comunicação e processamento de sinais (SANTOS *et al*, 2016).

Figura 12 – Resposta de um sistema no domínio da frequência



Fonte: o autor

De acordo com RAO (2008), embora o movimento harmônico seja mais simples de ser tratado, nem todos os sistemas vibratórios são desta maneira. Porém, em muitos casos as vibrações são periódicas e as funções periódicas de tempo podem ser representadas por série de Fourier.

Desta maneira, se $x(t)$ é uma função periódica com período τ , sua representação é dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (32)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (33)$$

Onde $\omega = 2\pi/\tau$ é a frequência fundamental e $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ são coeficientes constantes.

Para determinar os coeficientes a_n e b_n , multiplica-se a Equação (33) por $\cos n\omega t$ e $\sin n\omega t$, respectivamente e após, integra-se sobre um período de 0 a $\tau = 2\pi/\omega$, assim obtém-se:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) dt \quad (34)$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t dt \quad (35)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t dt \quad (36)$$

As funções harmônicas $a_n \cos n\omega t$ ou $b_n \sin n\omega t$ são denominadas as harmônicas de ordem n da função periódica $x(t)$. A harmônica de ordem n tem período τ/n .

Para realização de análise transiente de sistemas estruturais e mecânicos pode ser utilizado a Função de Resposta ao Impulso (IRF). A IRF tem a forma da resposta às condições iniciais do caso homogêneo. Em muitos casos, os sistemas mecânicos são excitados por carregamentos que são aplicados em um tempo curto (SILVA, 2009).

Do ponto de vista experimental se utiliza a Transformada de Fourier. Sendo assim, conhecendo a excitação de entrada no domínio do tempo $F(t)$ e considerando um mapeamento da função de transferência $H(s)$ em $s = j\omega$, sendo ω uma frequência variante no tempo, obtém-se a Função de Resposta em Frequência (FRF) $H(j\omega) = H(\omega)$.

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + c j\omega + k} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + c j\omega} \quad (37)$$

A FRF $H(\omega)$ pode ser descrita como a aplicação da Transformada de Fourier na IRF no domínio contínuo.

2.7 MAC

O *Modal Assurance Criterion* (MAC) é uma técnica usada para estimar o grau de correlação entre métodos diferentes, através dos modos de vibração obtidos. Mesmo com a

existência de outros critérios, este é o mais conhecido e utilizado, pois é de fácil implementação e requer uma estimativa de um sistema de matrizes. O MAC entre o modo de vibração de referência (Φ_{ref}) e o modo de vibração calculado (Φ_{cal}) é definido como (FRISWELL e MOTTERSHEAD, 1995):

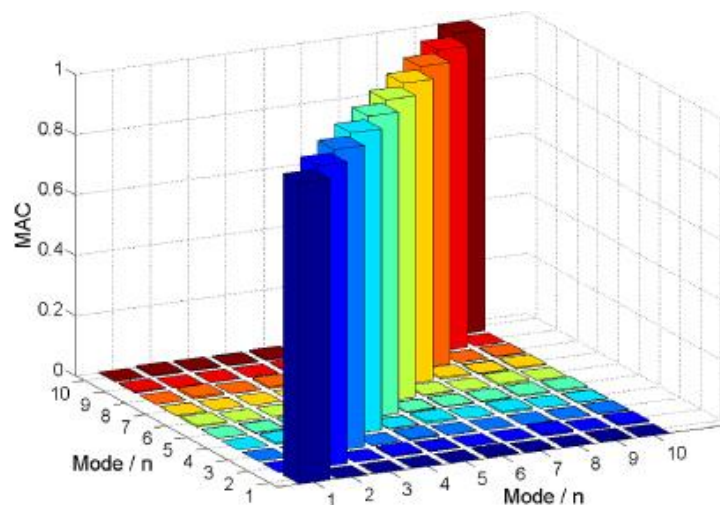
$$MAC = \frac{|\Phi_{ref}^T \Phi_{cal}|^2}{(\Phi_{cal}^T \Phi_{cal})(\Phi_{ref}^T \Phi_{ref})} \quad (38)$$

A tarefa de se extrair os modos de vibrar de forma experimental pode se tornar bastante complexa dependendo do tipo de estrutura/sistema mecânico que se irá analisar. Do ponto de vista da frequência, o conhecimento da matriz de FRF, quando a resposta medida é o deslocamento expandida em uma série de frações parciais onde o denominador é formado por funções de 2ª ordem na frequência de excitação ω , traz uma informação importante nos resíduos que são associados diretamente com os modos de vibrar do sistema. Matematicamente, pode ser calculado por:

$$\Phi_{cal}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{[\Phi_r \Phi_r^T]_{ij}}{(\omega_{nr}^2 + 2j\zeta_r \omega_{nr} \omega - \omega^2)} \quad (39)$$

O valor do MAC é entre 0 e 1. Quanto mais o valor se aproxima de 1, melhor a correlação entre os modos de vibração. Quando dois modelos em estudo estão perfeitamente correlacionados, a diagonal principal da matriz MAC se aproxima de 1 e os demais números tendem a 0.

Figura 13 – Exemplo da utilização do MAC



Fonte: extraído de <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/21/10/105033>>

2.8 Instrumentação

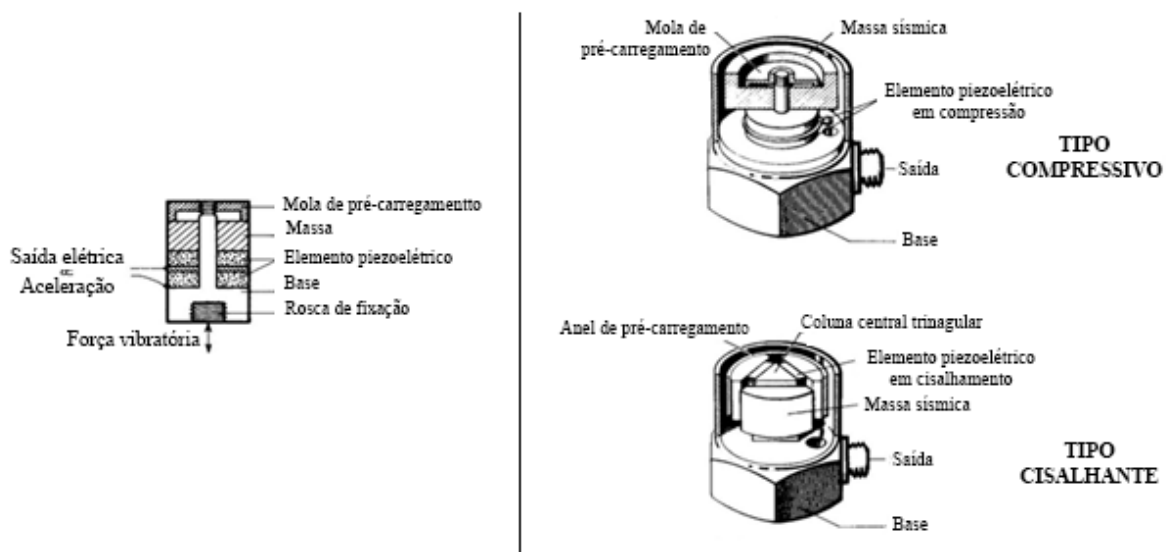
Em diversas áreas e aplicações a necessidade da medição de vibrações é de vital importância. Portanto, todos os processos utilizados como instrumentação, processamento de sinais e estimativa de parâmetros devem fornecer dados adequados para a correta análise, seja através da medição em campo ou de medições em laboratórios.

2.8.1 Acelerômetro e hardware para captação de sinais

De acordo com FERNANDES (2000), o transdutor universalmente usado na captação de uma vibração é o acelerômetro piezoelétrico, que se caracteriza por ter uma banda dinâmica maior, com boa linearidade. Além disso, os acelerômetros piezoelétricos são altos geradores de sinal, não necessitando de fonte de potência. Não possuem partes móveis e geram um sinal proporcional à aceleração, que pode ser integrado, obtendo-se a velocidade e o deslocamento do sinal.

A essência de um acelerômetro piezoelétrico é o material piezoelétrico, usualmente uma cerâmica ferro-elétrica artificialmente polarizada. Quando ela é mecanicamente tensionada, proporcionalmente à força aplicada, é gerado uma carga elétrica que polariza suas faces (FERNANDES, 2000).

Figura 12– Acelerômetro piezoelétrico



Fonte: adaptado de FERNANDES (2000)

Os acelerômetros utilizados são da empresa *PCB Piezotronics*, modelo 352c03. Para captura e processamento dos sinais se faz necessário o uso de um hardware dedicado. O hardware utilizado foi o *PHOTON© Sistema de Análise de Sinais Dinâmicos*. Com esse equipamento é possível uma análise em tempo real de vibrações e ruídos, adequando o sinal através de amplificadores e filtros.

Figura 13 – Acelerômetro utilizado



Fonte: o autor

Figura 14 – Hardware *PHOTON+*



Fonte: catálogo Brüel & Kjær.

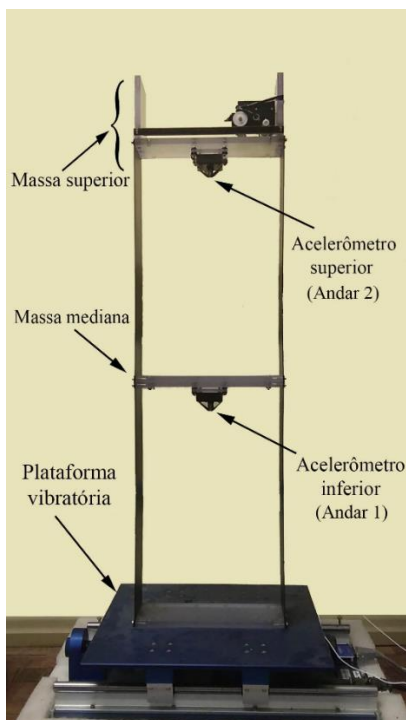
2.8.2 Plataforma vibratória

A estrutura utilizada é a Quanser© *Shake Table II* com AMD-2, composta por dois andares, sendo um modelo de bancada em escala com a finalidade de simular um edifício submetido a um amortecedor de massa ativa, localizado no topo da estrutura.

O amortecedor de massa ativa consiste num carro composto de deslocamento linear através de uma cremalheira por meio de um mecanismo com pinhão. A estrutura das paredes é fabricada de aço e é flexível ao longo de sua seção de fachada (seção mais larga).

Sob o sistema está uma plataforma vibratória a qual se desloca linearmente, podendo ser configurado diferentes tipos de excitações. É possível a simulação de sismos e ondas senoidais, quadradas e do tipo rampa de diferentes frequências e amplitudes.

Figura 15 – Estrutura sobre plataforma vibratória



Fonte: o autor

Algumas características da estrutura podem ser visualizadas na Tabela (1).

Tabela 1 – Características da estrutura

Característica	Valor	Unidade (SI)
Massa da estrutura	3,70	kg
Altura total	1,00	m
Comprimento	0,32	m
Profundidade	0,11	m

Fonte: o autor

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nessa seção são abordados estudos relativos à área de análise dinâmica e modelagens numéricas, servindo de base para este trabalho.

BALTHAZAR (2003) analisa as interações entre diferentes tipos de vibrações de um modelo físico que consiste em uma mola não linear com rigidez variável do tipo Mathieu e um amortecimento não linear descrito pelo termo de Rayleigh. São comparadas as diferenças do sistema forçado por uma força harmônica (sistema ideal) e por uma fonte não ideal, representada por um motor de corrente contínua. Realizando a análise de dois modelos alternativos, sendo um modelo clássico simplificado e um modelo eletromecânico completo, observou-se que o modelo simplificado atenua a dinâmica do sistema realista. A situação oposta não foi observada.

FELINI (2000) desenvolveu uma modelagem matemática para sistemas dinâmicos chamados estruturas flexíveis de rastreamento com abordagem de sistema ideal e não ideal. Técnicas de perturbação foram utilizadas para obter as soluções analíticas das equações que regem o movimento, obtidas através do Princípio Estendido de Hamilton. Além disso, simulações numéricas são utilizadas para comparar os modelos propostos. Como resultados apresenta-se um método de ajuste de modelo para um motor CC através da identificação de alguns parâmetros e início da obtenção da solução analítica para as equações governantes, utilizando a modelagem matemática desenvolvida.

ROSSATO (2017) realizou estudos em estruturas submetidas à carregamentos dinâmicos. Por meio de simulações numéricas, foi proposto um método para otimizar parâmetros de amortecedores de massa sintonizado (AMS) quando instalados em edifícios que sofrem com excitação sísmica, a fim de reduzir as respostas da estrutura. Com a utilização do método de integração direta das equações de Newmark obteve a resposta dinâmica do sistema. A partir do método proposto, conseguiu-se otimizar o AMS, reduzindo consideravelmente as respostas da estrutura após a instalação do mesmo, mostrando ser possível projetar esse tipo de amortecedor de forma econômica e eficaz.

DOMENECH (2017) realizou estudos para substituição de uma passarela para pedestres. Através da modelagem em elementos finitos, foi feita uma análise linear e não linear do modelo. Foi feita uma análise dinâmica para casos de cargas causadas por um pedestre e por uma multidão. Por meio dos modelos realizados, obteve-se as frequências naturais e os modos

de vibração para cada caso. As respostas dinâmicas obtidas mostram que existem diferenças importantes entre os diferentes modelos de carga de uma multidão.

NUNES (2013) analisou o comportamento dinâmico de estruturas submetidas à sismos. Através de métodos numéricos, realizou a comparação das respostas dinâmicas obtidas do sistema antes e após o uso de amortecedores por atrito para controle de vibrações, observando reduções de até 60% do deslocamento máximo no topo da estrutura com o uso de amortecedores.

PUGLIA (2012) desenvolveu um programa no software MATLAB a fim de obter a resposta dinâmica de estruturas, modos de vibração e frequências naturais. Foi utilizado o método de Newmark para a solução do sistema de equações que regem o sistema. Fez-se a comparação dos dados obtidos com a solução analítica para sistemas de um grau de liberdade e treliças de 10 e 11 barras. O programa desenvolvido mostrou-se estável e capaz de determinar as respostas dinâmicas.

CHIESA e BOTTEGA (2014) realizaram estudos de análise de vibrações que ocorrem em torres de sustentação de aerogeradores submetidos a carregamento harmônico. Com o uso do Método de Elementos Finitos e análise modal, obteve-se dados da resposta de vibração.

CORTELINI (2014) analisou as respostas dinâmicas de torres eólicas por meio de simulações de modelos numéricos e por meio da análise de um modelo experimental composta por uma torre, um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado e um amortecedor do tipo MRTLCD. Nos casos analisados, com o uso do amortecedor, as amplitudes de oscilação foram reduzidas quando comparado ao sistema não amortecido.

BELATO (2001) realizou estudos de um sistema dinâmico não ideal com o uso de simulações numéricas, a fim de compreender os movimentos caóticos que ocorrem próximos da região de ressonância.

LEME (2014) realizou a análise modal para uma barra de aço ASTM A36, comparando os resultados com as soluções analítica e numérica por meio do método dos elementos finitos. Os modos de vibração de estrutura foram comparados por meio do MAC, obtendo resultados satisfatórios para o primeiro e terceiros modos vibracionais.

4. METODOLOGIA

Primeiramente, para a realização do processo experimental, foram instalados um acelerômetro em cada andar da estrutura, conforme mostrado na Figura (16). Ambos foram fixados no centro geométrico das massas mediana e superior da estrutura.

Para realizar a excitação do sistema e por consequência, dos acelerômetros, aplicou-se uma carga impulsiva na parte superior da plataforma, a fim de obter os sinais da sua oscilação livre. Os sinais foram obtidos no domínio do tempo, através do software de aquisição de dados, onde os acelerômetros foram previamente calibrados. Os parâmetros de hardware são descritos na Tabela (2).

Figura 16 – Impacto forçado na estrutura



Fonte: o autor

Tabela 2 – Parâmetros de hardware

PARÂMETROS	
Frequência de aquisição	1024 Hz
Nº de pontos	25600
Canal de resposta	Aceleração
Formato do sinal	ASCII
Tipo de janela	Hanning

Fonte: o autor

Por meio da implementação de um algoritmo no software *MATLAB*®, exibido no Anexo A, foram plotados os dados obtidos pelo software de aquisição. Os dados foram captados num intervalo de 20 s, porém foram descartados os pontos da região transiente do sinal, visto que para a posterior análise e aplicação da FFT deve-se considerar somente a parte permanente.

Por se tratar de um sinal de vibração subamortecida, o registro capturado pode ser manipulado como descrito na seção 2.5. Uma vez que o decremento logarítmico é conhecido, conforme Equação (31), é obtido o fator de amortecimento adimensional por meio de manipulações algébricas da mesma equação. Por meio da captura destes dados iniciais, pode-se realizar a caracterização da estrutura.

Através da análise do sinal se obtém o incremento de tempo, ou seja, o período de oscilação (T) e conseqüentemente, a frequência angular natural (ω_n), conforme Equação (40).

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \quad (40)$$

Com a frequência angular natural, pode-se calcular a frequência angular natural amortecida do sistema (ω_d), descrita na equação (41).

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (41)$$

Através do decremento logarítmico, é possível obter a razão de amortecimento do sistema e, por conseqüência, os coeficientes de amortecimento, pela Equação (42).

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi n_c)^2 + \delta^2}} \quad (42)$$

A partir dos dados obtidos, é definida a rigidez equivalente para a estrutura, equação (43).

$$k_{eq} = m_{eq} \omega_n^2 \quad (43)$$

Para a aplicação da FRF, comumente utiliza-se um martelo de impacto, visto na Figura (17), o qual é conectado à acelerômetros. A partir dos sinais captados da força impulsiva causada pelo martelo, é possível identificar o comportamento de resposta da estrutura, assim como suas frequências naturais. Dessa forma, se fez necessário a construção de um martelo de impacto para execução desse método.

Figura 17 – Exemplo de martelo de impacto



Fonte: National Instruments⁸

Para a modelagem numérica da estrutura utilizou-se o software *SAP2000 v20*, que realiza análises através do método de elementos finitos. Foram construídos dois modelos diferentes para a mesma estrutura: um modelo equivalente, com características simplificadas, e um modelo real, levando em conta todos os parâmetros da estrutura real.

O modelo equivalente foi construído como uma viga de secção transversal circular de diâmetro 0,01 m. Este modelo foi realizado com dois elementos, restringido na base para translação e rotação nos 3 eixos. Na parte central e no topo da viga houve restrição para rotação nos 3 eixos.

O modelo numérico real foi construído utilizando dados genéricos para os materiais que compõem a estrutura real, com as suas devidas geometrias. Os dados dos materiais utilizados nessa simulação são mostrados na Tabela (3). Este modelo foi realizado utilizando 22 elementos para representar as chapas de aço e as placas de acrílico na região central. A secção transversal das chapas de aço que compõem a lateral da estrutura é de 0,00135 m x 0,108 m. A secção transversal das chapas de acrílico que compõem os andares da estrutura é de 0,0254 m x 0,108 m.

Tabela 3 – Dados dos materiais utilizados no modelo numérico real

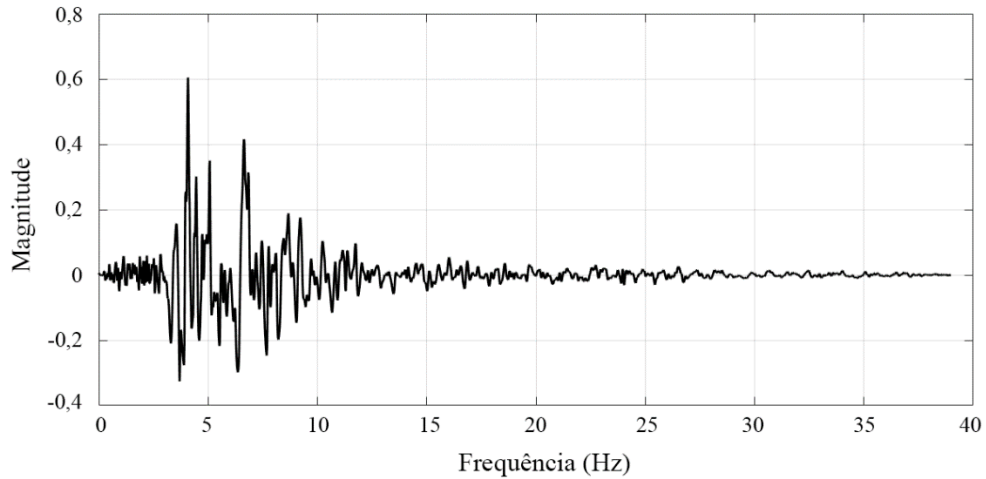
Componente da estrutura	Laterais	Andar 1	Andar 2
Material	Aço	Acrílico	Acrílico
Peso por unidade de volume	77000 N/m ³	25000 N/m ³	35000 N/m ³
Módulo de elasticidade (E)	2E+11	3E+20	3E+20
Coefficiente de Poisson (U)	0,3	0,3	0,3
Coefficiente de expansão térmica (A)	1,17E-05	1,17E-05	1,17E-05
Módulo de cisalhamento (G)	7,692E+10	1,154E+20	1,154E+20

Fonte: o autor

⁸ Disponível em: <<http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/pt/nid/213180>>. Acesso em nov. 19.

Além da obtenção das formas modais numéricas, excitou-se o modelo real com dois sinais diferentes, sendo o primeiro um sinal com mesmo período do seu primeiro modo de vibração e o segundo um sinal aleatório, mostrado na Figura (18).

Figura 18 – Sinal aleatório aplicado no modelo numérico real



Fonte: o autor

A partir da teoria de correlação do MAC, desenvolveu-se uma forma simples de comparar e validar os resultados da modelagem numérica com o processo experimental. Através das frequências naturais obtidas pela função de resposta em frequência e pelas simulações, comparou-se os valores por meio da Equação (44).

$$\text{Porcentagem de correlação} = \frac{F_{1_{ij}}}{F_{2_{ij}}} \quad (44)$$

Onde F_1 e F_2 denotam as frequências naturais experimentais e numéricas a serem comparadas, sendo que sempre o número de maior valor deve ir no denominador, afim de se obter uma correlação de 0 a 1. Os coeficientes i e j representam a posição do valor na matriz de correlação, indicando as frequências comparadas.

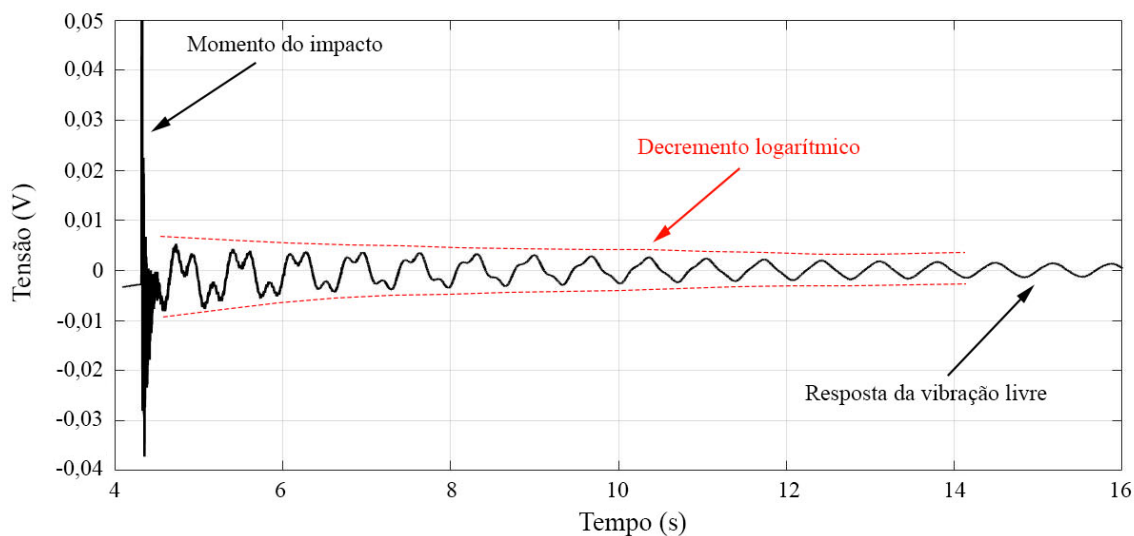
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são expostos os resultados encontrados através do processo experimental e da modelagem numérica e estão divididos em 7 subseções: resposta no domínio do tempo, caracterização da estrutura, resposta no domínio da frequência, resposta para diferentes sinais de entrada, simulação numérica, aplicação de forças harmônicas no modelo numérico e comparação dos valores experimentais e numéricos.

5.1 Resposta no domínio do tempo

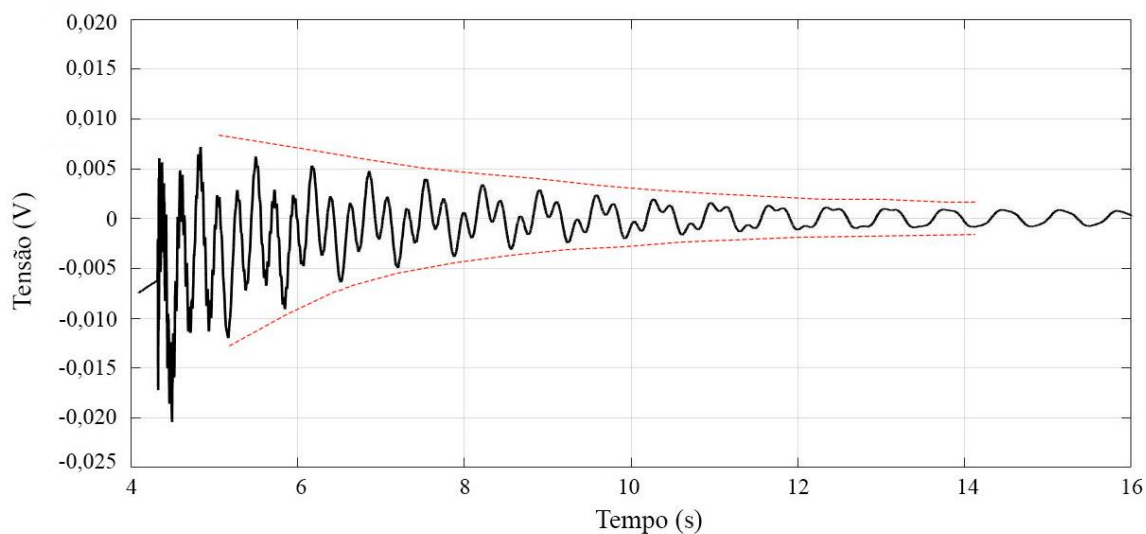
Conforme descrito na metodologia, após a aplicação de uma carga impulsiva no topo da estrutura, capturou-se a resposta no domínio do tempo. As Figuras (19) e (20) apresentam os sinais causados pela vibração livre obtidos nos dois andares da estrutura.

Figura 19 – Sinal da vibração livre no andar 2



Fonte: o autor

Figura 20 – Sinal da vibração livre no andar 1



Fonte: o autor

Percebe-se na Figura (19) a grande amplitude na parte inicial do sinal, indicando o momento do impacto na torre, assim como o posterior amortecimento. Nos períodos iniciais após a aplicação da força impulsiva, é possível ver a oscilação do sinal senoidal da resposta, indicando outras formas modais da estrutura, portanto, outras frequências naturais.

5.2 Caracterização da estrutura

A partir dos dados obtidos na resposta no domínio do tempo, obteve-se algumas características da estrutura por meio das Equações (38) e (52) a (55), conforme indicado na metodologia. Na Tabela (4) são mostrados os resultados encontrados.

Tabela 4 – Propriedades do sistema

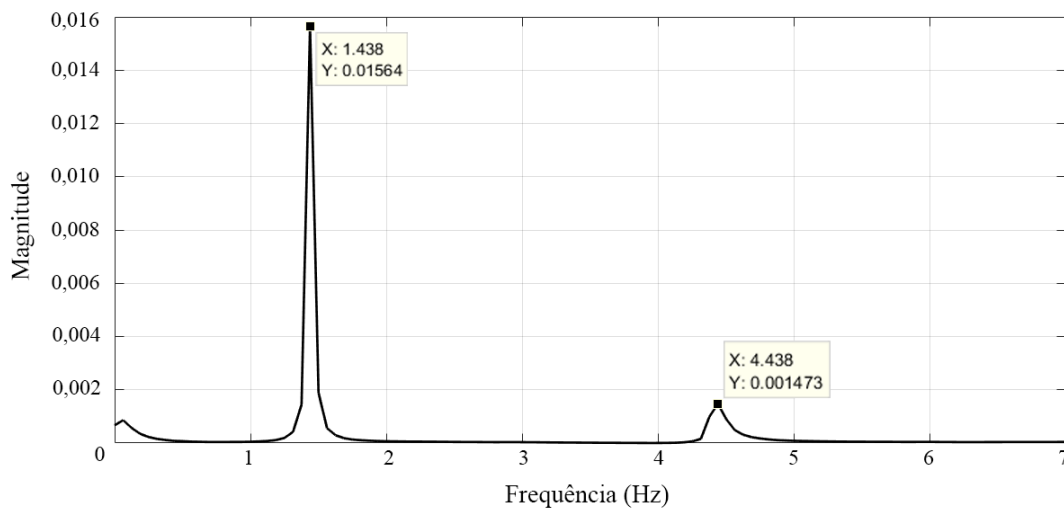
Características	Nomenclatura	Valores	Unidades (SI)
Frequência angular natural amortecida	ω_d	9,1	rad/s
Decremento logarítmico	δ	0,62	-
Razão de amortecimento	ζ	0,0102	-
Frequência angular natural	ω_n	9,11	rad/s
Frequência natural	F_n	1,449	Hz
Período	T	0,69	s
Coefficiente de amortecimento crítico	c_c	67,41	Kg/s
Coefficiente de amortecimento	c	0,6149	Kg/s
Rigidez da estrutura	k	307,07	N/m

Fonte: o autor

5.3 Resposta no domínio da frequência

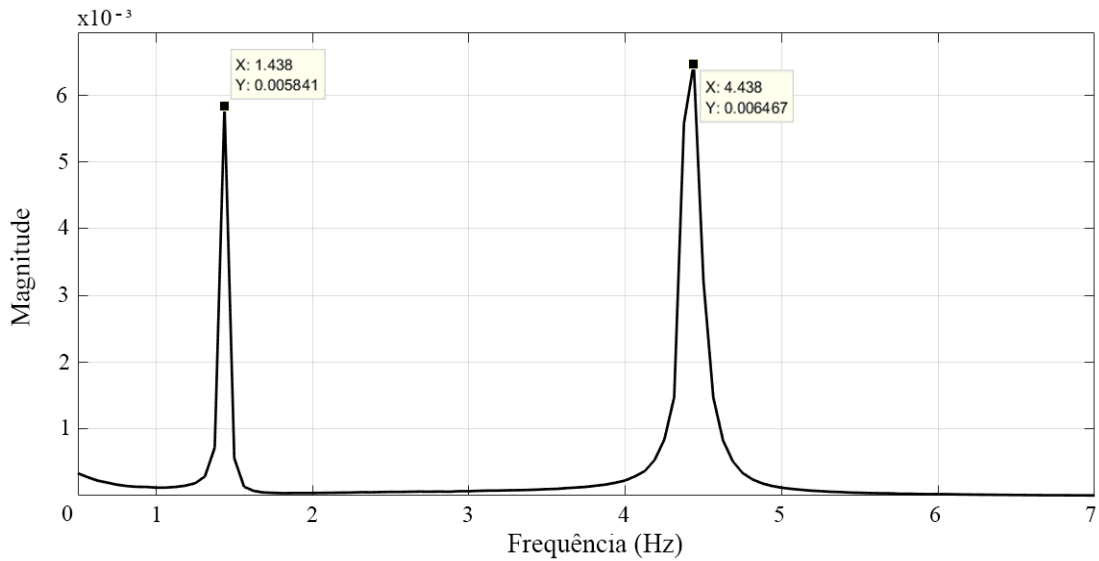
Através da Transformada de Fourier visto na seção 2.8, são mostrados nas Figuras (21) e (22) as respostas no domínio da frequência em cada um dos andares da estrutura.

Figura 21 – FFT para o andar 2



Fonte: o autor

Figura 22 – FFT para o andar 1



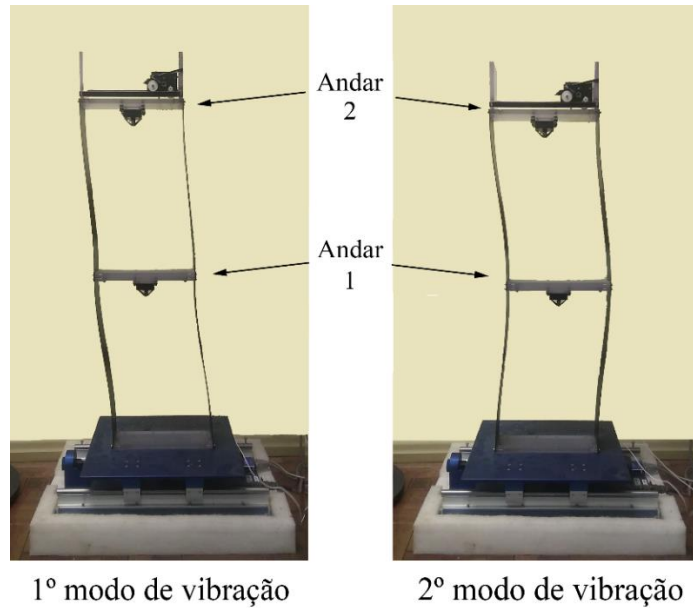
Fonte: o autor

Em ambas figuras é possível visualizar duas frequências com quantidade de energia significativa. Na Figura (21) o espectro de potência tem uma elevada quantidade de energia contida na frequência de 1,438 Hz, comparada à frequência de 4,438 Hz. Por ser a primeira frequência obtida, esta caracteriza o primeiro modo de vibração da estrutura, o qual faz ter uma maior amplitude na parte superior, capturada pelo acelerômetro do andar 2. Na Figura (22), a FFT registra uma amplitude maior na frequência de 4,438 Hz que denota o segundo modo de vibração, onde o maior deslocamento se dá no andar 1.

Ao realizar a FFT para o todo o sinal encontrado, observa-se ainda outras frequências naturais na faixa de 30 Hz e 80 Hz. Porém, pela limitação da plataforma vibratória, a qual possibilita vibrações de até 10 Hz, analisa-se com maior ênfase os dois primeiros modos de vibração.

A Figura (23) expõe o comportamento da estrutura ao ser submetida às frequências dos seus dois primeiros modos de vibração.

Figura 23 – Modos de vibração da estrutura



Fonte: o autor

5.4 Resposta para diferentes sinais de entrada

Por meio da Função de Resposta em Frequência (FRF) foi possível identificar o comportamento do sistema através da aplicação de diferentes sinais de entrada.

Inicialmente foi desenvolvido um martelo de impacto, por meio da conexão de um acelerômetro em um pequeno martelo metálico, como mostrado na Figura (24). Foram realizados vários testes afim de obter a resposta da estrutura mediante à diferentes impactos, porém não houve êxito na aplicação deste método, já que, por meio do software dos acelerômetros, não se obteve uma FRF com frequências bem definidas.

Figura 24 – Martelo de impacto construído

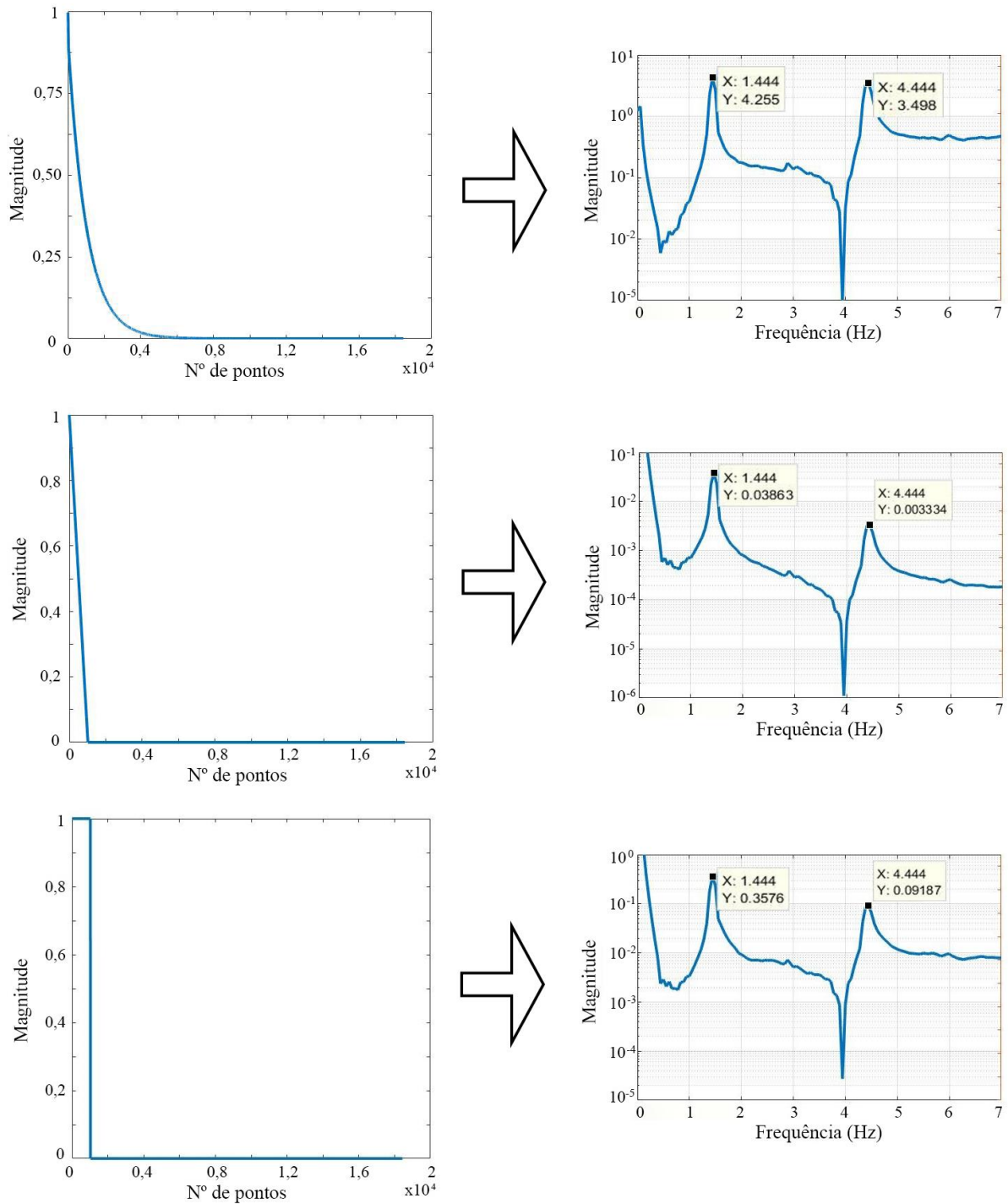


Fonte: o autor

Desta forma, para demonstrar o comportamento do sistema mediante à sinais de entrada diferentes, foram executados por meio do software *MATLAB*® três forças impulsivas: de comportamento logarítmico, sinal triangular e sinal quadrado, todos com amplitude igual a 1. No Anexo A é mostrado o algoritmo de execução deste método.

Nas Figuras (25) e (26) observa-se a resposta da estrutura com relação ao sinal de entrada respectivo para os andares 2 e 1, respectivamente.

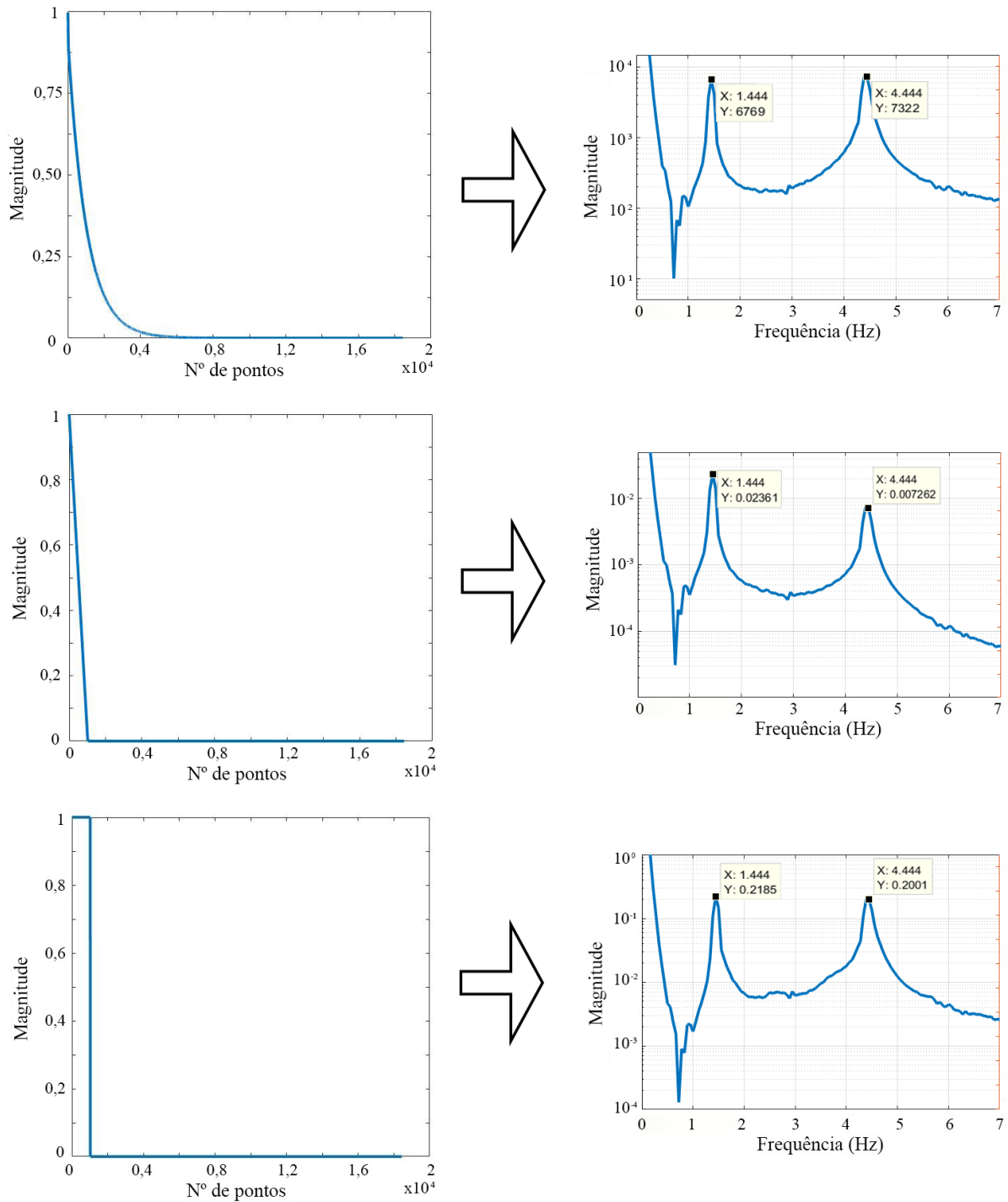
Figura 25 – Resposta da estrutura em relação à diferentes sinais de entrada no andar 2



Fonte: o autor

A aplicação da FRF permite, também, encontrar as frequências naturais da estrutura, confirmando os mesmos valores já encontrados pela FFT do sinal capturado.

Figura 26 – Resposta da estrutura em relação à diferentes sinais de entrada no andar 1



Fonte: o autor

Ainda que os sinais de entrada aplicados fossem totalmente diferentes, o comportamento do sinal de resposta da estrutura permanece o mesmo, alterando apenas a magnitude do ganho nas frequências de 1,44 Hz e 4,44 Hz, em ambos andares.

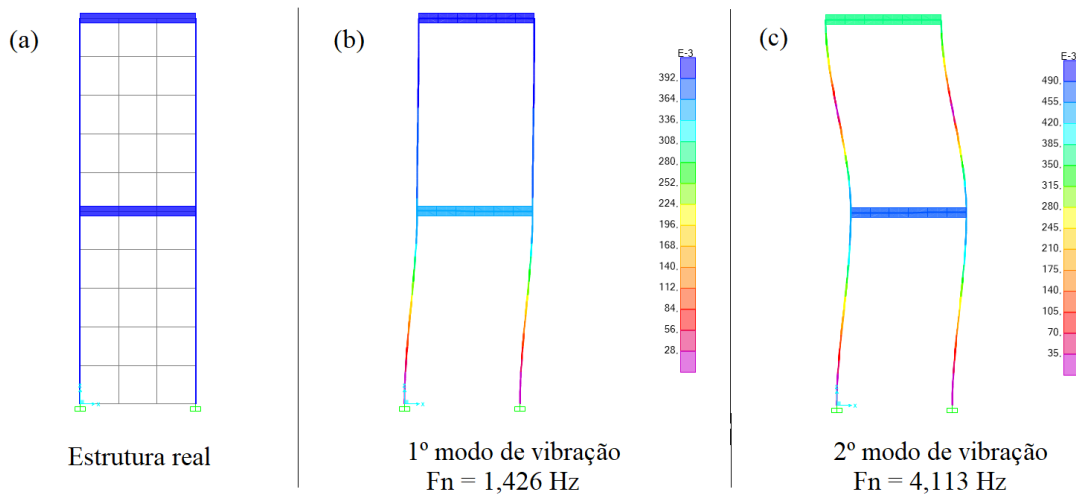
5.5 Simulação numérica

Conforme metodologia supracitada, são mostrados os resultados da análise da estrutura através do método de elementos finitos para versão real e equivalente.

5.5.1 Estrutura real

O modelo da estrutura real e as simulações para os dois primeiros modos de vibração são mostrados na Figura (27). Os deslocamentos são indicados pelo diagrama de cores.

Figura 27 – Modelagem numérica da estrutura real



Fonte: o autor

A fim de possibilitar uma comparação mais completa com o procedimento experimental, determinou-se cinco modos vibratórios da estrutura no modelo numérico, os quais podem ser vistos na Tabela (5). Com relação ao comportamento quando submetida a tais frequências, é mostrado somente os dois primeiros modos (Figura 27), já que são os modos com maior densidade de energia e os únicos que podem ser vistos experimentalmente.

Tabela 5 – Modos de vibração do modelo numérico

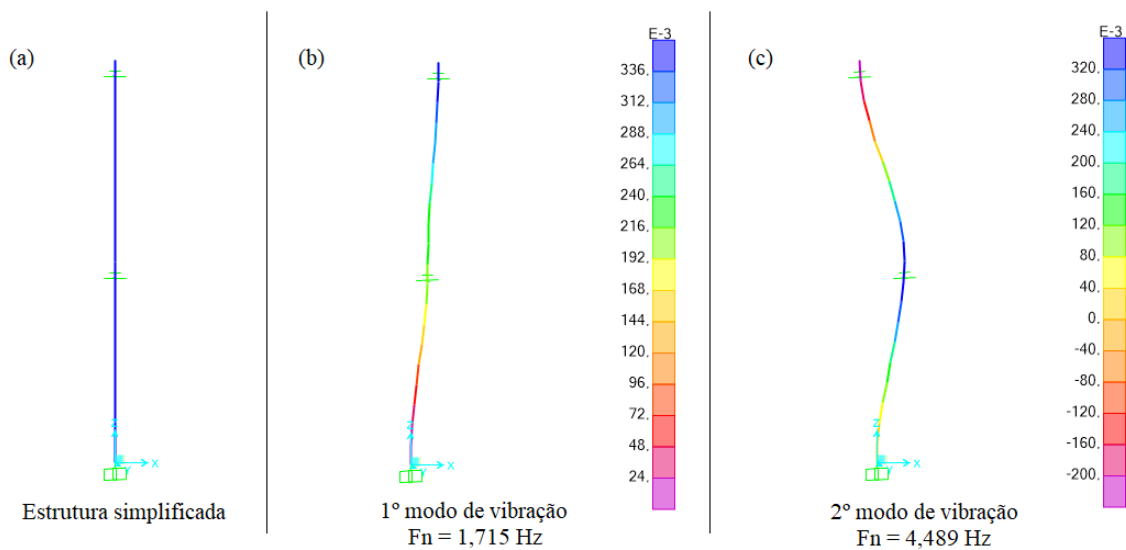
Modo de vibração	Frequência (Hz)
1	1,426
2	4,113
3	28,38
4	30,89
5	83,54

Fonte: o autor

5.5.2 Estrutura equivalente

A versão equivalente da estrutura é mostrada na Figura 28a. Devido a sua simplicidade de construção, essa estrutura possui apenas dois modos de vibração, porém o suficiente para calibração do modelo com o experimental. As simulações são exibidas na Figura 28b e 28c. Os deslocamentos causados no modelo são indicados pelo diagrama de cores.

Figura 28 – Modelagem numérica da estrutura simplificada

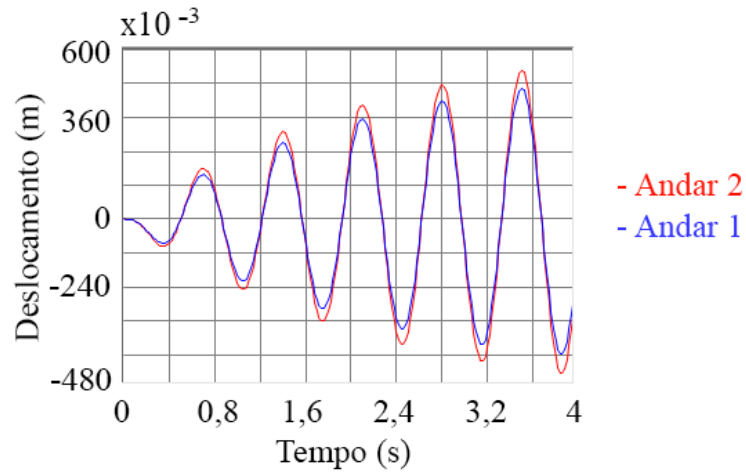


Fonte: o autor

5.5.3 Aplicação de forças harmônicas no modelo numérico

Tendo em vista as frequências naturais obtidas do modelo real na simulação numérica, obteve-se a resposta da estrutura com relação ao seu deslocamento, conforme Figura (29), quando aplicada uma força harmônica senoidal de 5 N e mesmo período do primeiro modo vibratório, 0,7 s.

Figura 29 – Deslocamento da estrutura no tempo ao aplicar uma força harmônica

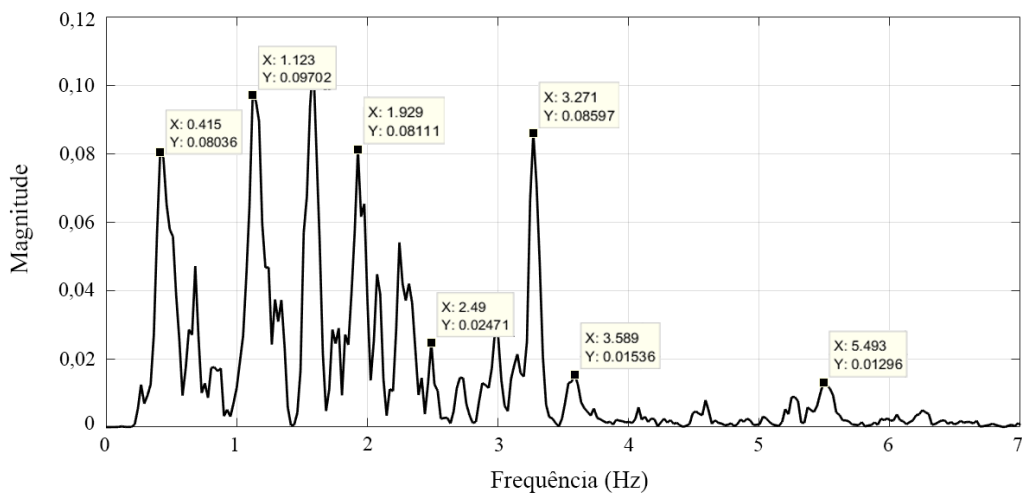


Fonte: o autor

O resultado da aplicação desta força harmônica é o efeito de ressonância na estrutura, ou seja, tanto o sinal de resposta da estrutura quanto o da força harmônica possuem o mesmo período de oscilação, fazendo com que as amplitudes se somem ao longo do tempo.

Aplicou-se também um sinal aleatório como visto na Figura (18), sendo que seu FFT é mostrado na Figura (30).

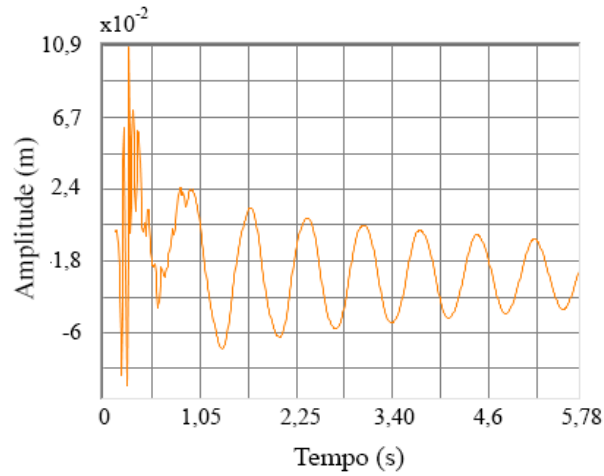
Figura 30 – FFT do sinal aleatório



Fonte: o autor

Foi registrada a resposta da estrutura, mediante ao impulso desse sinal, no andar 2, já que é o ponto de maior magnitude de resposta, e pode ser visto na Figura (31).

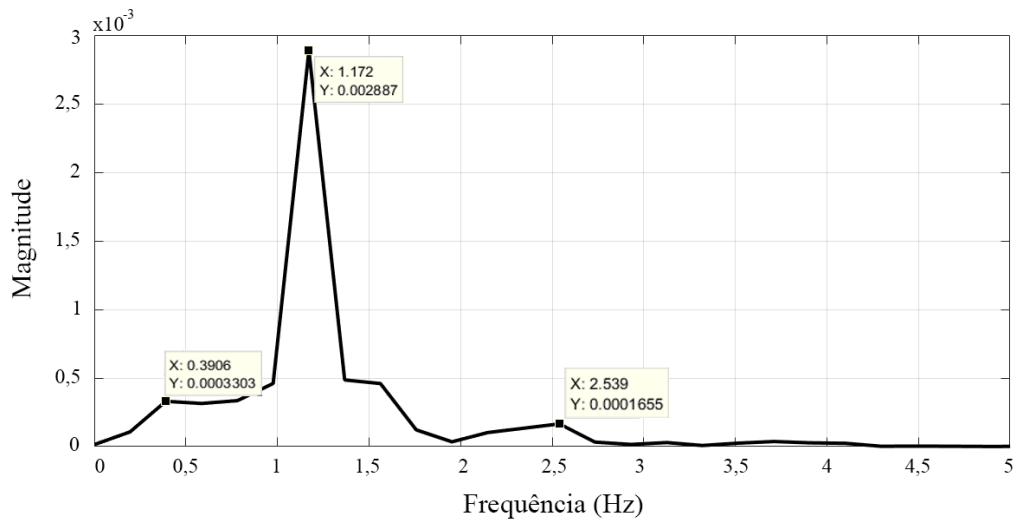
Figura 31 – Resposta do modelo numérico real ao sinal aleatório



Fonte: o autor

A FFT com as frequências de resposta do modelo numérico é mostrada na Figura (32).

Figura 32 – FFT da resposta ao sinal aleatório



Fonte: o autor

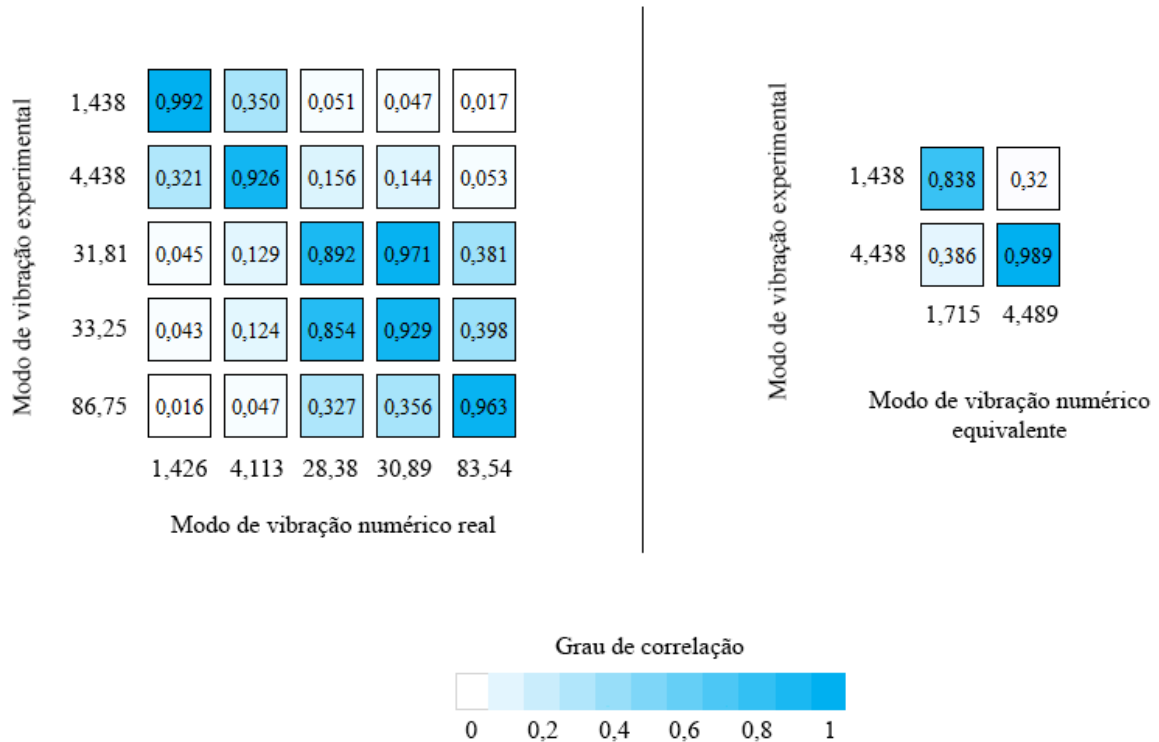
Por ser um sinal aleatório, a estrutura é excitada com diferentes frequências. Observa-se na Figura (32) que o sistema respondeu com frequências próximas de algumas frequências excitadas.

Na Figura (31), a resposta da estrutura ao longo do tempo demonstrou duas formas diferentes de comportamento, uma transiente, no início do impulso, e uma permanente, a qual há um ciclo bem definido de oscilação e amortecimento.

5.6 Comparação modelo experimental e numérico

Utilizando a Equação (44) descrita na metodologia, fez-se a comparação dos valores de frequência natural obtidas de forma experimental com os do modelo numérico real e equivalente. Sendo assim, a Figura (28) apresenta a comparação em forma de matriz para ambos os casos.

Figura 33 – Comparação modelo numérico e experimental



Fonte: o autor

A taxa mínima de correlação utilizada, afim de validação dos dados numéricos, foi de 85%. Observa-se que todas as frequências naturais da comparação com o modelo numérico real possuem alta taxa de correlação, com ênfase nos dois primeiros modos de vibração. No caso do modelo equivalente, o resultado do primeiro modo vibratório foi de 83,8%, porém, considerando a grande simplificação do modelo comparado ao modelo real, é possível dizer que há uma boa correlação com os valores obtidos experimentalmente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se neste trabalho uma metodologia para análise dinâmica de estruturas esbeltas. A partir dos sinais captados pelos acelerômetros nos dois andares, foi possível obter dados para caracterização da estrutura, assim como a obtenção das frequências naturais por meio do estudo da resposta no domínio da frequência.

Ainda que o método de captação do FRF utilizando o martelo de impacto não tenha sido realizado com sucesso, conseguiu-se desenvolver uma metodologia alternativa. Observou-se que independente do sinal impulsivo de entrada, o comportamento da estrutura permanece o mesmo, alterando somente a magnitude a resposta, mas mantendo as mesmas frequências naturais vistas durante todos os procedimentos.

Por meio do método de elementos finitos, fez-se a simulação numérica da torre, mostrando o mesmo comportamento do processo experimental.

Pode-se realizar a comparação e a validação dos resultados da análise numérica com os experimentais, chegando a resultados concisos, com alta taxa de correlação. Ainda que o primeiro modo de vibração do modelo numérico equivalente tenha ficado um pouco abaixo da correlação mínima estipulada, deve-se considerar um bom resultado, tendo em vista a grande simplificação da estrutura.

Como sugestão de trabalhos futuros, tem-se:

- Dar continuidade na análise numérica, afim de refinar os modelos;
- Utilizar este trabalho como base e procedimento para estudo de estruturas reais;
- Aprimorar os resultados da caracterização da estrutura;
- Explorar um estudo mais aprofundado do fenômeno de ressonância tanto experimentalmente quanto numericamente;
- Aprimorar o martelo de impacto construído afim de obter a FRF;
- Encontrar as formas modais de forma experimental, afim de implementar o Modal Assurance Criterion.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO JÚNIOR, M. C. “**Avaliação experimental da sincronização por densificação de grupos de pedestres em passarelas**”. Universidade Federal da Paraíba, dissertação de mestrado, 2008.

BACHMANN, H., AMMANN, W. J., DEISCHL, F., EISENMANN, J., FLOEGL, I., HIRSCH, G. H., KLEIN, G. K., LANDE, G. J., MAHRENHOLTZ, O., NATKE, H. G., NUSSBAUMER, H., PRETLOVE, A., RAINER, J. H., SAEMANN, E., STEIBEISSER, L. “**Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines**”. Springer Science & Business Media, 1995.

BALTHAZAR, J.M., WARMINSKI, J. “**Vibrations of a Parametrically and Self Excited System with Ideal and Non-Ideal Energy Sources**”. J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. 2003, Vol. XXV, 4/413.

BELATO, D., WEBER, H. I., BALTHAZAR, J. M., MOOK, D. T. “**Chaotic vibration of a nonideal electro-mechanical system**”. International Journal of Solids and Structures 38 (2001) 1699-1706.

BLESSMANN, J. “**O vento na engenharia estrutural**”. Porto Alegre: Ed. UFRGS, 1995.

BRASIL, R. M. L.R. F., SILVA, M. A. “**Introdução à Dinâmica das Estruturas: Para a Engenharia Civil**”. 2ª ed. revista, Blucher, 2015.

BUTZ, C., FELDMAN, M., HEINEMEYER, C., CHABROLIN, B., LEMAIRE, A., LUKIC, M., MARTIN, P. O., CAETANO, E., CUNHA, A., GOLDACK, A., KEIL, A., SCHLAICH, M. “**Advanced load models for synchronous pedestrian excitation and optimised design guidelines for steel footbridges – SYNPEX**”. European Commission – Directorate-General for Research; EUR 23318; ISBN 978-92-79-08303-7, ISSN 1018-5593, 2008.

CHIESA, D. D., BOTTEGA, V. “**Análise de Vibrações Induzidas na Torre de Um Aero gerador**”. XX EREMAT, p. 35–45, 2014.

CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. “**Dinamics of structures, Berkeley**”. Computers & Structures, 1995.

CORTELINI, E. M. “**Resposta e controle das vibrações de uma torre eólica usando MRTLCD (Magneto Reológica – amortecedor de coluna líquida sintonizada)**”. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pampa, 2014.

DIMAROGONAS, A. D. “**Vibration for Engineers**”. 2ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

DOMENCH, L., SEVERI, M., BAÑO, V., MORQUIO, A. A. “**Análisis dinámico de un puente peatonal arco biarticulado de madera laminada encolada**”. Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo, v. 14, n. 3, p. 01-31, 2017.

EDER, T. “**Sismologia**”. Disponível em: <http://www.iag.usp.br/~eder/ensinarcompesquisa/Sismologia_f.pdf>. Acesso em 6 de novembro de 2018.

FELINI, A. “**Modelagem matemática e análise dos comportamentos ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento**”. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Tese de doutorado, 2000.

FERNANDES, H. M. B. “**Comportamento dinâmico de passarelas modeladas como vigas sujeitas a vibrações na direção vertical induzidas por pedestres**”. Universidade Federal da Paraíba, tese de mestrado, 2007.

FERNANDES, J. C. “**Segurança nas vibrações no corpo humano**”. Disponível em: <www.feb.unesp.br/jcandido/vib/Apostila.doc>. Acessado em 19 de outubro de 2018.

FRISWELL, M. I., MOTTERSHEAD, J. E. “**Finite Element Model Updating in Structure Dynamics**”, edição ilustrada – reimpressão, Springer Science & Business Media, 1995.

FUJITA, T. T. **Manual of downburst identification for Project NIMROD**. United States: Chicago University, 1978.

IAEA, International Atomic Energy Agency, “**Design basis tropical cyclone for nuclear power plants**”, Safety series, N° 50 SG-S11B, Vienna, 1984.

JÚNIOR, J. P. “**Modelagem e simulação do campo de velocidades do vento em tormentas elétricas**”. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, tese de doutorado, 2005.

LEME, L. M. M. “**Estudo comparativo de técnicas de análise modal experimental no domínio da frequência em uma barra na condição de contorno livre-livre**”. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, 2014.

MARTINS, J. F. S. “**Optimização do comportamento dinâmico de um componente estrutural de um auto-rádio**”. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade do Minho, Minho, 2011.

NALLAR, A. “**Amortecedor de massa sintonizados (AMS) em edifícios submetidos a cargas sísmicas**”. Exame de qualificação para Mestrado em Engenharia Civil – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

NEWLAND, D. E.; “**An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis**”, 2ª ed, Longman, New York, 1987.

NUNES, M. T. “**Controle de vibrações de estruturas utilizando amortecedores de vibração por atrito**”. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

PARISENTI, R. “**Estudo de análise dinâmica e métodos da NBR 15421 para projetos de edifícios submetidos a sismos**”. Universidade Federal de Santa Catarina, dissertação de mestrado, 2011.

PUGLIA, V. B. “**Análise de alguns aspectos no estudo de torres estaiadas**”. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, dissertação de mestrado, 2009.

PUGLIA, F. P. “**Desenvolvimento de uma rotina computacional para determinação da resposta dinâmica de estruturas**”. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

RAO, S. S. “**Vibrações Mecânicas**”. 4ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

ROSSATO, L.V. “**Otimização de amortecedores de massa sintonizados em estruturas submetidas a um processo estacionário**”. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, dissertação de mestrado, 2017.

SANTOS, E. G. D., CONRADO, B. A., SILVA, C. A. S. “**A utilização da Transformada de Fourier para análise de vibração de máquinas elétricas**”. Revista TechnoENG, vol. 1, nº 13, pág. 2358-2369, jan-dez/2016.

SILVA, S. “**Vibrações Mecânicas**”. Disponível em: <http://www.academia.edu/9088620/Universidade_Estadual_do_Oeste_do_Paran%C3%A1_Vibra%C3%A7%C3%B5es_Mec%C3%A2nicas>. Acesso em 10 de outubro de 2018.

SOEIRO, N. S. “**Análise Modal Experimental**”. Universidade Federal do Pará, 2001.

WILLFORD, M. “**Dynamic Actions and Reactions of Pedestrians**”. Footbridge 2002 – Design and Dynamic Behaviour of Footbridges, Paris, 2002.

ANEXOS

Anexo A – Algoritmo utilizado na metodologia

```
clear all
close all
clc

% FRF SINAIS ENTRADA/SAÍDA
t=1:9.765625e-004:19; % tempo (define a qtd de pontos)
T=0.1; % inclinação da reta (pulso unitário)
w=hanning(18433); % janelamento p/FRF

%%
% SINAIS DE ENTRADA
% Pulso Unitário
y1=exp(-t/T)/T;

figure(1)
plot(y1)

% Pulso Retangular
y2=rectangularPulse(0.5,2,t);

figure(2)
plot(y2)

% Pulso Triangular
y3=triangularPulse(0,1,2,t);

figure(3)
plot(y3)

%%
% SINAL DE SAÍDA
[tempo2,sinal2]=textread('50cm.txt','%f %f');

DT=tempo2(3)-tempo2(2);
Fs = 1/DT;

Comp_sinal=length(sinal2);
minimo =1/DT; %INTERVALO PARA GRAFICAR AS ACELERAÇÕES
maximo =19/DT;

num_linha = maximo-minimo;

Tf = maximo;
Ti = minimo;
tempo2 = tempo2(minimo:maximo);
sinal2 = sinal2(minimo:maximo);

figure(5)
plot(tempo2,sinal2,'b.-');
xlabel('Tempo [s]','FontName','Times New Roman','FontSize',12,'Rotation',0)
ylabel('Aceleração','FontName','Times New Roman','FontSize',12,'Rotation',90)
grid on
```

```

%%
% FRF DOS SINAIS
figure(6)
modalfrf(y1,sinal2,1024,w);

figure(7)
modalfrf(y2,sinal2,1024,w);

figure(8)
modalfrf(y3,sinal2,1024,w);

[frf,f]=modalfrf(y1,sinal2,1024,w);
[fn,dr,ms]=modalfit(frf,f,1024,2);

%%
% FFT DOS SINAIS DE SAÍDA
length_x = length(sinal); % Tamanho do sinal
trans_comp = pow2(nextpow2(length_x)); % Tamanho da transformada
FFT_sinal = fft(sinal,trans_comp); % FFT
f = (0:trans_comp-1)*(Fs/trans_comp); % Faixa de frequência
power = FFT_sinal.*conj(FFT_sinal)/trans_comp; % Magnitude

figure(9);
plot(f(1:floor(trans_comp/2)),power(1:floor(trans_comp/2)),'k')
xlabel('Frequencia [Hz]','FontName','Times New Roman','FontSize',14,'Rotation',0)
ylabel('Power','FontName','Times New Roman','FontSize',14,'Rotation',90)
grid on

```