

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

GERUSA CAMARGO RODRIGUES

**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

Bagé

2016

GERUSA CAMARGO RODRIGUES

**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Cristiano Peres Oliveira

**Bagé
2016**

GERUSA CAMARGO RODRIGUES

**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Matemática -
Licenciatura da Universidade Federal do
Pampa, como requisito parcial para
obtenção do Título de Licenciada em
Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 12 de dezembro de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Msc. Cristiano Peres Oliveira
Orientador
UNIPAMPA

Prof.^a Me. Elizangela Dias Pereira
UNIPAMPA

Prof.^a Dr.^a Sonia Maria da Silva Junqueira
UNIPAMPA

AGRADECIMENTO

A Deus, por me guiar nessa etapa e me dar forças para superar as dificuldades.

A esta Universidade, a seu corpo docente, que me permitiram alcançar conhecimentos importantes para a vida profissional.

Ao meu orientador Prof. Msc. Cristiano Oliveira, por seus ensinamentos, compreensão e apoio na elaboração deste estudo.

À Prof. Dr.^a Sonia Junqueira, pela colaboração na definição do tema deste estudo.

À Prof.^a Me. Elizangela Pereira e à Prof.^a Aniele Torma pela disponibilidade em contribuir com este trabalho, extensivo às suas turmas.

Ao meu pai, pelo amor, incentivo, confiança e, principalmente, por sempre acreditar em mim e apoiar meus sonhos.

Às minhas amigas Ana Paula, Carla e Yasmin pela parceria, apoio, carinho e motivação.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”.

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho aborda a metodologia de resolver problemas no ensino de matemática aliada ao uso dos cenários de investigação. É apresentada uma revisão bibliográfica que perpassa conceitos sobre o que é resolver problemas, como são classificados e o que é um bom problema, além de apresentar uma breve discussão sobre problemas correlatos. Ainda no referencial teórico é discutido o papel da investigação matemática na resolução de problemas e como esse processo pode e deve ser aliado aos cenários de investigação. Para a realização da pesquisa foram definidas duas instituições de ensino como campo de investigação, uma da rede estadual com alunos do Curso Normal e outra do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa. Na execução das atividades foram realizadas observações em aula e depois, aplicado um questionário inicial com o objetivo de traçar o perfil das turmas. A partir do conhecimento da realidade das turmas e planejadas as atividades, as mesmas foram aplicadas. A avaliação da atividade pelos discentes ocorreu pela aplicação de um questionário final e, a partir desses dados é analisado o desempenho dos participantes na resolução dos problemas. Finalmente os dados qualitativos da pesquisa são apresentados, recorrendo-se à quantificação dos questionários aplicados, bem como do aproveitamento dos participantes na resolução dos problemas.

Palavras-Chave: Resolução de problema; Problema correlato; Funções; Investigação matemática; Cenários para investigação.

ABSTRACT

The present work approaches the methodology of resolving the problems in the education of mathematics allied to the use of scenarios of investigation. It is presented a bibliographic review that permeates concepts about what is to solve problems, how it is classified and what is a good problem, in addition to present a brief discussion about the related problems. Still in the theoretical framework, it is discussed the role of the mathematics investigation in the solution of problems and how this process can and should be allied to the scenarios of investigation. For the accomplishment of the research, it was defined two institutions of education as a field of investigation, one of the state network with students from the Normal Course and another from the Mathematics Course – Graduation of the Universidade Federal do Pampa. In the implementation of activities, it was accomplished observations in class and after, applied an initial questionnaire with the aim to draw the profile of the classes. According to the knowledge of reality of the classes and planned activities, they were applied. The evaluation of the activity by the students occurred by applying a final questionnaire and, from these data it is analyzed the performance of the participants in the resolution of problems. Finally the qualitative data of the research are presented, appealing to the quantification of the questionnaires applied, as well as the good use of the participants in the resolution of problems.

Keywords: Resolution of problem; Related problem; Functions; Mathematics investigation; Scenarios for investigation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Hábitos de estudo dos alunos do Ensino Médio	32
Figura 2 - Hábitos de estudo dos alunos do Ensino Superior	33
Figura 3 - Métodos de estudo utilizados pelos alunos do Ensino Médio	34
Figura 4 - Métodos de estudo utilizados pelos alunos do Ensino Superior	34
Figura 5 - Problema A: Ensino Médio.....	36
Figura 6 - Problema A: Ensino Superior.....	36
Figura 7 - Problema B: Ensino Médio.....	38
Figura 8 - Problema B: Ensino Superior.....	39
Figura 9 - Problema C: Ensino Médio	40
Figura 10 - Problema C: Ensino Superior.....	41
Figura 11 - Problema D: Ensino Médio	43
Figura 12 - Problema D: Ensino Superior.....	44
Figura 13 – Gráfico sobre a avaliação da atividade	45
Figura 14 – Gráfico relativo à dificuldade durante a resolução dos problemas	46
Figura 15 - Problema mais fácil para os alunos do Ensino Médio	46
Figura 16 - Problema mais difícil para os alunos do Ensino Médio	47
Figura 17 - Problema mais fácil para os alunos do Ensino Superior	48
Figura 18 - Problema mais difícil para os alunos do Ensino Superior	48
Figura 19 - Maior dificuldade encontrada pelos alunos do Ensino Médio na resolução dos problemas.....	49
Figura 20 - Maior dificuldade encontrada pelos alunos do Ensino Superior na resolução dos problemas	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ambientes de aprendizagem.....	25
Tabela 2 - Ambientes de aprendizagem.....	26

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MRP – Metodologia de Resolução de Problemas

TEF – Teoria Elementar das Funções

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	14
2.1 O que é resolver problemas?	16
2.2 O que é um bom problema?.....	20
2.3 Problemas correlatos.....	21
2.4 A investigação matemática e a resolução de problemas	22
2.5 Cenários para investigação	24
3 METODOLOGIA	27
3.1 Campos de investigação.....	27
3.2 Aplicações das atividades.....	28
3.3 Análise e avaliação dos resultados	30
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	32
4.1 Questionário inicial	32
4.2 Aplicações dos problemas.....	35
4.2.1 Problema A.....	35
4.2.2 Problema B.....	37
4.2.3 Problema C.....	40
4.2.4 Problema D.....	42
4.3 Questionário final	45
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
6 TRABALHOS FUTUROS	56
REFERÊNCIAS	57
APÊNDICE A – Questionário inicial (Ensino Médio)	60
APÊNDICE B – Questionário final (Ensino Médio)	61
APÊNDICE C – Questionário inicial (Ensino Superior)	62
APÊNDICE D – Questionário final (Ensino Superior)	63
ANEXO A – Resolução do problema A	64
ANEXO B – Resolução do problema B	65
ANEXO C – Resolução do problema C	66
ANEXO D – Resolução do problema D	68

1 INTRODUÇÃO

No contexto atual da educação brasileira, percebe-se uma necessidade iminente de adequação das práticas pedagógicas à sociedade contemporânea, em que os processos de contextualização e de significação dos conteúdos são fundamentais para que se obtenha êxito ao ensinar.

Tendo em vista que os processos de ensino e aprendizagem despertam na comunidade científica as motivações para que os estudos relativos ao tema cresçam exponencialmente ano após ano, na Educação Matemática, diversas iniciativas surgem como ferramentas que buscam tornar o ensino da matemática mais significativo e próximo do cotidiano do aluno.

Em consonância com essa tendência se encontra a Metodologia de Resolução de Problemas – MRP, que tem por característica permitir que o aluno coloque-se à frente das situações propostas e a partir de questionamentos desenvolva o raciocínio lógico-matemático.

Nessa metodologia não há mecanismos pré-determinados para ensinar e há uma busca constante por uma produção de significados, professores e alunos constroem o conhecimento aliado à criatividade e à autonomia. Portanto, a resolução de problemas constitui-se como uma importante estratégia didática para o desenvolvimento intelectual dos estudantes e para o ensino da matemática.

O desenvolvimento deste trabalho teve como principal objetivo desenvolver o raciocínio lógico-matemático a partir da resolução de problemas, apoiada na criação de cenários de investigação capazes de fazer com que o aluno reflita sobre as possíveis soluções, definindo hipóteses e determinando teses para os problemas propostos.

Entretanto, para atingir o objetivo proposto nesta pesquisa, o presente estudo apresenta também uma breve análise do atual cenário da educação matemática, especialmente nos campos de investigação do trabalho, e a partir dessas informações foi proposto um conjunto de atividades relacionadas ao conteúdo de funções, que procurou estabelecer uma relação entre a realidade dos educandos e o conteúdo abordado, perfazendo assim uma aproximação entre a teoria e a prática. Esse processo esteve pautado na utilização de métodos investigativos.

Em conformidade com esse cenário, o presente trabalho traz a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva da resolução de problemas aliada à

investigação matemática, buscando responder à questão: A resolução de problemas auxilia no entendimento da matemática?

Reconhecendo a importância do desenvolvimento integral do educando, tanto no aspecto intelectual quanto na formação cidadã e consciente, este trabalho apresenta uma pesquisa intervencionista de caráter qualitativo a fim de analisar como os impactos da resolução de problemas refletem no desempenho dos alunos em conteúdos matemáticos.

A metodologia deste trabalho consistiu na escolha dos campos de investigação – uma turma de primeiro ano do Ensino Médio do Curso Normal de uma Escola Estadual e uma turma do componente curricular Teoria Elementar das Funções – TEF da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA). Na execução das atividades, foram feitas observações nessas turmas e a aplicação de um questionário de sondagem a respeito de hábitos escolares e os métodos de estudo adotados pelos estudantes. Logo após essa etapa, foram propostos problemas que deveriam ser resolvidos pelos discentes e, posteriormente, propôs-se a realização de um questionário de avaliação em que os alunos responderam a respeito das facilidades e dificuldades encontradas durante as atividades.

Pretendeu-se que o conjunto de atividades proposto fosse capaz de despertar nos discentes o interesse pela Matemática, tendo em vista que o cenário encontrado entre os mesmos, geralmente, retrata uma desmotivação em aprender Matemática. Portanto, através dos problemas propostos, o envolvimento dos alunos na busca por soluções auxilia na construção do processo de aprendizagem, estimulando a leitura e os métodos investigativos, além de propiciar o desenvolvimento de atitudes intelectuais e cidadãs, tornando-os capazes de lidar com novas situações.

Este trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica sobre a resolução de problemas, além de discussões acerca do tema como, por exemplo, o que é resolver problemas e o que caracteriza um bom problema. Destaca-se, também, a relação existente entre a resolução de problemas e a investigação matemática.

Em seguida, é apresentada a metodologia utilizada na pesquisa. São evidenciadas as três etapas de desenvolvimento, sendo elas: campos de investigação, aplicação das atividades e, por último, análise e avaliação dos resultados.

Por fim, apresentam-se os resultados e as discussões tanto dos questionários como do desempenho dos participantes da pesquisa durante a resolução dos problemas propostos e as considerações finais do estudo desenvolvido.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas vem se constituindo ao longo da história da matemática, por ancorar o surgimento da Matemática, afinal uma ciência surge e se desenvolve a partir de problemas.

Diante dos desafios encontrados no Ensino da Matemática, a dificuldade e a insatisfação em aprender a disciplina são evidenciadas quando perguntas como “Para que serve isso?” surgem em sala de aula. A compreensão de conceitos contrapõe aos métodos que desvinculam o conhecimento matemático do cotidiano dos estudantes, afinal os “Porquês...?”, “Para que...?” traduzem uma ânsia por aprender e, mais ainda, compreender.

Um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular, na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas. [...] as idéias matemáticas aparecem em todas as atividades humanas, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D`AMBROSIO, 1999, p. 97).

A resolução de problemas surge como uma atividade mobilizadora dos processos de ensino e aprendizagem. Esta estratégia de ensino estimula o professor a buscar alternativas para tornar o aprendizado significativo e oferece ao aluno outro olhar sobre a matemática.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática abordam a resolução de problemas de acordo com alguns princípios, entre eles cabe destacar que:

O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada (BRASIL, 1998, p. 41).

Como visto acima, ao abordar problemas matemáticos surge de imediato o termo exercício, método rotineiro nas aulas de matemática. Afinal, muitos professores ministram suas aulas de maneira tradicional, os conceitos são trabalhados a partir de definições e exemplos, é feita uma exposição oral do conteúdo e, em seguida, a aula transcorre com a resolução de exercícios. Dessa

maneira, o aluno repete métodos e decora o passo-a-passo para obter um resultado satisfatório nas avaliações, entretanto, quando é preciso aplicar os conceitos ou propriedades já estudados em conteúdos mais avançados há um bloqueio, pois o conteúdo programático é dividido em tópicos e esses tópicos não são unificados ao longo das aulas.

[...] não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras (BRASIL, 1997, p.43).

Percebe-se que por vezes a Matemática é trabalhada com base na repetição de algoritmos descontextualizados e exercícios padronizados, uma vez que os alunos apenas reproduzem os procedimentos de resolução que são passados pelo professor, sem a devida preocupação com a construção lógico formal. O que não ocorre na resolução problemas por ser uma técnica para auxiliar na desconstrução desses métodos e por ser de grande importância no desenvolvimento intelectual do aluno. Assim, é evidenciada uma grande diferença entre exercício e problema:

[...] exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida, e envolve mera aplicação de resultados teóricos; problema, necessariamente, envolve invenção e/ou criação significativa (BÚRIGO et al., 2012, p. 18).

É importante destacar que quando a MRP é inserida nas aulas de Matemática ocorre uma inversão de papéis. A partir do momento em que a prática da resolução de problemas passa a ser trabalhada em sala de aula, o professor deve assumir o papel de questionador para que os alunos possam compreender o problema e sejam instigados a pensar sobre as respostas que podem obter.

O docente será o que conduz o processo de ensino, pois virão à tona diferentes estratégias de resolução e será necessária uma socialização para que sejam expostos e comparados os caminhos que cada aluno seguiu a partir da estratégia adotada. Também, para que o processo de resolução seja discutido e avaliado, não considerando apenas se a resposta está correta ou não, pois de

acordo com Dante (2003, p. 43) na resolução de problemas “não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a solução imediata”.

2.1 O que é resolver problemas?

Para que a MRP seja abordada em sala em aula, inicialmente é preciso que se tenha clareza sobre o que é resolver problemas, bem como qual o tipo será trabalhado. Portanto para que os alunos apresentem um bom desempenho diante de tal proposta faz-se necessário que o professor saiba optar, diante de tantas variáveis, por aquela que seja mais apropriada ao conteúdo, que traga contextualizações coerentes e que respeite as condições do aluno.

Para Onuchic e Alevatto (2011, p. 81) problema é “tudo aquilo que não se sabe, mas que se está interessado em fazer” e destacam seis princípios que devem ser levados em consideração quando se aborda a resolução de problemas:

- Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*.
- Resolução de Problemas desenvolve *poder matemático* nos estudantes, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos.
- Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os estudantes são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
- Resolução de Problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os estudantes a obter sucesso com a matemática.
- Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita *tradicional*. Sentem-se gratificados com a constatação de que os estudantes desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
- A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a dar mais sentido para os alunos (Idem, 2011, p. 82).

Pode-se perceber que na metodologia de resolução de problemas o aluno pode tornar-se protagonista do seu aprendizado, o poder matemático que lhes é proporcionado permite que desenvolvam o raciocínio lógico e que sejam capazes de avaliar quais conjecturas são válidas frente à determinada situação, sendo capaz de despertar o interesse pelo conhecimento matemático.

A abordagem de conceitos matemáticos sob a perspectiva de resolução de problemas exige que os alunos façam uso de conhecimentos prévios necessários para um bom desempenho no que lhe é proposto. Polya sugere que o aluno:

Procure contatos com seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Tente pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes. Tente reconhecer alguma coisa de familiar no que examina e perceber algo de útil naquilo que reconhecer (POLYA, 2006, p. 30).

Um grande desafio para o professor, afinal é perceptível a falta de motivação dos alunos, bem como certa acomodação dos professores na busca por atrativos no que diz respeito à preparação das aulas. Conseqüentemente, parte dos estudantes demonstra aversão à Matemática e à maneira como a disciplina é ensinada. Nesse sentido, Onuchic e Alevatto (2001, p. 83-85) desenvolveram um roteiro para auxiliar os professores no planejamento de suas aulas visando que a metodologia de resolução de problemas apresente um desenvolvimento produtivo: (1) Preparação do problema; (2) Leitura individual; (3) Leitura em conjunto; (4) Resolução do problema; (5) Observar e incentivar; (6) Registro das soluções na lousa; (7) Plenária; (8) Busca do consenso; (9) Formalização do conteúdo.

Em contrapartida Polya nos diz que:

A resolução de problemas é uma habilidade prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os (POLYA, 2006, p. 4).

Para o autor, a capacidade de resolver problemas só será desenvolvida quando o professor despertar no aluno o interesse pela prática e possibilitar oportunidades de imitar e praticar. Ou seja, a arte de resolver problemas necessita de estímulos e orientações, afinal não há um método que garanta chegar à resposta correta. É preciso criar estratégias e analisá-las durante o desenvolvimento da questão. Nesse contexto, o papel do professor ganha destaque, pois com base nas ideias expostas pelo docente é que os estudantes darão os primeiros passos para definir os caminhos que utilizarão até chegar à solução. De acordo com Polya nesse processo de imitação e prática:

Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão da lista: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a

capacidade de resolver futuros problemas por si próprio (POLYA, 2016, p. 3).

Portanto, as indagações servirão como alicerce no momento de criar as conjecturas que auxiliam para a assimilação do que é preciso resolver e até onde precisará ir para chegar ao resultado. O estudante passará a ser agente ativo no processo de ensino-aprendizagem, sendo capaz de realizar naturalmente as operações mentais adequadas ao problema e, assim, não estará adquirindo apenas um breve conhecimento de um fato matemático, mas, terá o entendimento do que acabara de desenvolver, trazendo significado ao aprendizado.

Contudo, se o aluno chegar impulsivamente à solução provavelmente terá êxito apenas nesse problema, pois não terá desenvolvido uma linha de raciocínio que possa ser aplicada em outras ocasiões. Ou então, se tentar resolver sem ter compreendido o problema com cálculos aleatórios terá menos chances de obter a solução. Diante desses fatores, cabe destacar que na resolução de problemas o mais importante é o processo, não apenas o resultado. Nesse sentido, Polya define quatro fases de trabalho fundamentais que auxiliam a resolução de problemas:

Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 2006, p. 4).

Como dito anteriormente, um problema não tem maneiras fixas de resolução, uma vez que diferentes estratégias podem ser adotadas e ambas permitem que o solucionador encontre a resposta correta. Nesse sentido, Dante faz uma observação sobre etapas definidas por Polya:

É claro que essas etapas não são rígidas, fixas e infalíveis. O processo de resolução de um problema é algo mais complexo e rico, que não se limita a seguir instruções passo a passo que levarão à solução, como se fosse um algoritmo. Entretanto, de modo geral elas ajudam o solucionador a se orientar durante o processo (DANTE, 2009, p. 29).

Percebe-se que Dante (2009, p. 11) é mais flexível no que tange as etapas de resolução de um problema, pois acredita que solucionar uma situação transcende o fato de apenas “treinar” conforme se pode observar na sua definição, pois diz que

“Intuitivamente, todos nós temos uma ideia do que seja um problema. De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo”.

Constata-se que a definição abordada por Dante relativiza o que é ser um problema, pois o que é uma dificuldade para uma pessoa pode não ser para outra e é necessário que o indivíduo faça uma reflexão consciente diante da situação-problema para então solucioná-la.

O desenvolvimento da capacidade reflexiva dos educandos é uma das vantagens de se trabalhar com a MRP. Percebe-se que através desse princípio, aspectos que não são explorados em uma aula tradicional, começam a fazer parte do cotidiano escolar como, por exemplo, analisar uma solução obtida. Nesse sentido, pode-se recorrer à Grossi (1990, p.46) quando diz que: “Uma aprendizagem não é sistematizada quando ela é apenas descritiva de etapas de soluções de um problema, sem entrar na análise desta solução.”.

Defende-se nesse trabalho que os processos cognitivos partam de uma construção de hipóteses que sejam sustentadas através do raciocínio lógico-matemático e através dessa metodologia é possível construir o saber e o conhecimento, mais uma vez recorre-se à Grossi quando ela define:

Chamamos de saber o produto de aprendizagem não sistematizado, mas transformador. Um produto de aprendizagem é transformador na medida em que acrescenta ser a quem aprende, modificando-lhe em algo a maneira de viver [...] Chamamos de conhecimento um produto de aprendizagem sistematizado, mas não transformador. Uma aprendizagem não é transformadora, quando ela somente instrumentaliza teoricamente de forma desvinculada da prática (GROSSI, 1990, p. 46).

Conclui-se que o saber, dentro dessa perspectiva, é transformador, agrega ao aprendiz e influi diretamente em sua vida, pois o considera em todas as suas potencialidades, enquanto que, o conhecimento é social, ou seja, ele pode ser ou já é sistematizado e através dele o educando desenvolve o seu saber.

2.2 O que é um bom problema?

Na literatura encontramos uma série de definições sobre problemas, além de classificações de acordo com as características que apresentam. Mas afinal, quais os melhores tipos de problemas? E, o que é um bom problema?

Pereira divide os problemas matemáticos em quatro tipos:

Problemas de sondagem: para a introdução natural e intuitiva de um novo conceito;

Problemas de aprendizagem: para reforçar e familiarizar o aluno com um novo conceito;

Problemas de análise: para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos já aprendidos e mais fáceis que os problemas de sondagem; e

Problemas de revisão e aprofundamento: para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos (PEREIRA, 2002, p. 6).

Porém, é impossível distinguir qual deles é o melhor tipo, pois temos apenas uma divisão de acordo com o objetivo que se deseja alcançar através da utilização desses problemas. O mais importante é que o professor opte pelo tipo de problema que esteja mais adequado ao perfil de seus alunos, respeitando suas limitações, para que a resolução de problemas seja uma tarefa agradável. Nesse sentido, busca-se aporte teórico em Dante quando diz:

O problema deve ser desafiador, mas possível de ser resolvido pelos alunos daquela faixa etária específica. Um nível de dificuldade muito além do razoável para uma determinada faixa etária pode levar os alunos a frustrações e desânimo irreversíveis, traumatizando-os não só em relação à resolução de problemas, mas também em relação à matemática como um todo. E, às vezes, em relação a todas as atividades escolares (DANTE, 2009, p. 52).

Pereira também elenca alguns critérios que considera fundamentais para que um problema possa ser definido como bom:

Tenha enunciado acessível e de fácil compreensão; Exercite o pensar matemático do aluno; Exija criatividade na resolução; possa servir de 'trampolim' para a introdução ou consolidação de importantes idéias e/ou conceitos matemáticos; e, sobretudo, não seja muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante (PEREIRA, 2002, p. 5).

Percebe-se que as ideias de Dante e Pereira estão atreladas no que diz respeito à apresentação dos problemas. Independentemente da classificação, o

problema deve ser um desafio atraente para o aluno, visto que, se no momento da leitura do enunciado não for possível compreendê-lo, o aluno perderá a motivação. Logo, um problema dito como bom deve despertar o interesse do solucionador, despertar a vontade por aprender mais e desenvolver o raciocínio lógico-matemático.

2.3 Problemas correlatos

O processo de resolução de problemas matemáticos exige que o solucionador faça uso de algumas alternativas para que a construção de estratégias e conjecturas seja válida e auxiliem efetivamente o passo-a-passo da resolução.

Explorar conhecimentos já adquiridos para relembrar ideias, possibilidades e conceitos possibilita que novos desafios sejam resolvidos com mais facilidade. Além disso, buscar semelhanças em problemas resolvidos anteriormente, para relacionar elementos e métodos, é uma importante alternativa para criar conexões e estimular o raciocínio. Diante disso, Polya (2006, p. 41) diz que “ao resolver um problema sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo”.

O uso de problemas correlatos possibilita que, a partir de um semelhante, se tenha um plano completo para resolver o problema atual ou que esse plano seja construído a partir das ideias que surgem com base no que já fora resolvido. No entanto, esse auxílio só será efetivado se a resolução do primeiro problema foi compreendida pelo aluno, caso contrário, é provável que tenha dificuldade em assimilar os dados daquele que deseja resolver e relacioná-los com o que já foi resolvido. A partir dessa observação, cabe citar Silver e Smith quando analisam as sugestões de Polya sobre o uso de problemas correlatos:

Se um aluno aprendeu certa heurística através de um problema e deve usá-la noutro problema, ele precisa entender não apenas o que a heurística significa verdadeiramente como também, no mínimo, acreditar que ela pode de fato ajudar. Só assim poderemos esperar que os alunos usem heurísticas quando isso for cabível. É improvável ocorrer a um aluno usar uma heurística particular se não estiver convencido de sua utilidade (SILVER e SMITH, 1997, p. 211).

Portanto, compreender o problema identificando os dados e as incógnitas para estabelecer e executar o plano de resolução e, por fim, fazer o retrospecto do que

fora desenvolvido são etapas que favorecem o entendimento do problema como um todo, pois uma resolução com o máximo de detalhes faz com que o raciocínio matemático seja constituído a partir de cada informação coletada e analisada, conseqüentemente, a identificação de problemas correlatos ocorrerá de maneira natural, seja por generalização, particularização ou analogia.

2.4 A investigação matemática e a resolução de problemas

Ao introduzir a metodologia de resolução de problemas na sala de aula, os processos de investigação serão priorizados, afinal as respostas não serão encontradas através de aplicações em fórmulas, o cerne da questão estará pautado em pensar, elaborar e analisar as conjecturas, a fim de que seja possível optar pela mais adequada chegando, assim, à solução. Ponte, Brocardo e Oliveira compartilham o conceito no que diz respeito à relação existente entre problemas e investigação:

Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações (PONTE, BROCARD E OLIVEIRA, 2009, p. 16).

Por conseguinte, ao trabalhar com problemas, tanto o professor quanto o aluno tornam-se agentes questionadores e investigativos, uma vez que, ambos adotarão novas posturas.

O professor deverá abrir mão de aulas baseadas em roteiros ou planejamentos em que sempre terá o controle da situação, já que surgirão os mais diversos questionamentos e, para tal, será necessária uma preparação para que essa nova abordagem traga bons resultados. Onuchic e Allevato destacam que através da resolução de problemas se propõe uma atividade de investigação em que:

O professor deve escolher ou criar problemas adequados à construção de novo conhecimento sobre um determinado tópico do programa daquela determinada série; selecionar, entre muitas, as estratégias mais adequadas à resolução daquele problema; planejar questões-chave para conduzir os alunos na análise dos resultados apresentados e chegar ao consenso sobre os resultados obtidos; e preparar a melhor formalização dos novos conceitos e novos conteúdos construídos a partir do problema dado (ONUCHIC E ALLEVATO, 2009, p. 177).

Simultaneamente ao novo perfil que o docente necessita adotar, o aluno passará a construir seu conhecimento e, não apenas assimilar informações, ideia compartilhada por Onuchic e Allevato:

Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução (Idem, 2009, p. 177).

Dessa maneira, o conhecimento será construído em conjunto, todos contribuem ao longo do desenvolvimento e há uma cooperação mútua para que o objetivo seja alcançado, ou seja, compreender o processo de resolução. Dante (2009, p. 56) defende que “ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais complexa do que ensinar algoritmos e equações”, pois adotar essa metodologia de ensino:

É uma radical e importante mudança do método tradicional, que consiste em *mostrar e repetir*, com base na expressão *é assim que se faz*. No chamado método heurístico, o professor encoraja o aluno a pensar por si mesmo, a levantar as próprias hipóteses e testá-las, a criar as próprias estratégias, a discutir com seus colegas como e por que aquela maneira de fazer funciona. Enfim, aqui o papel do professor é manter os alunos pensando e gerando ideias produtivas (Idem, 2009, p. 56).

A partir do momento em que professor assume o papel de incentivador e moderador, os questionamentos feitos pelos alunos não terão respostas diretas, pois nesse papel o docente passa a instigar o estudante para que encontre as respostas de maneira independente. Nesse sentido, o professor passa a dar sugestões que estimule o pensamento e faz indagações que leve o aluno a enxergar as alternativas que o auxiliarão no processo de resolução do problema. Polya (2006, p. 17) defende que “as sugestões devem ser genéricas, aplicáveis não apenas ao problema presente, mas também a problemas de todos os tipos, pois só assim elas poderão desenvolver a *capacidade* do estudante e não somente uma técnica específica”.

Aos poucos a aula de matemática assumirá suas novas características, mas estas não se limitam apenas ao perfil do aluno e do professor, tampouco às interferências feitas pelo docente no momento de resolução. Faz-se necessário que todo o contexto esteja adequado a essa prática, assim, o trabalho renderá bons

resultados e o desempenho de todas as partes envolvidas contribuirá para o aprendizado do grupo como um todo. Frente a isso Ponte, Brocardo e Oliveira descreveram três fases habituais em atividades de investigação:

(i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 25).

Corroborando com Ponte; Brocardo; Oliveira (2009) cabe destacar que tais fases são muito amplas, visto que de acordo a especificidade de cada atividade é que o cenário de investigação se constituirá. Portanto, diante da multiplicidade de situações que podem ser evidenciadas em investigações matemáticas deve-se priorizar o envolvimento do aluno na aprendizagem.

2.5 Cenários para investigação

Ao aliar a resolução de problemas à investigação matemática, é inevitável recorrer aos estudos de Skovsmose (2000), pois ao desenvolver a concepção da Educação Matemática Crítica distinguiu a organização da sala de aula de matemática em dois tipos, o primeiro é o paradigma do exercício e o segundo são os cenários de investigação. Cabe destacar que é fundamental conhecer tais organizações para que seja possível permear entre elas através da resolução de problemas.

Diante de algumas observações de salas de aulas, Skovsmose destaca que a educação matemática tradicional baseia-se no paradigma do exercício que possui como premissa central uma, e somente uma resposta correta. Haja vista que os enunciados geralmente são apresentados em forma de ordem, descartando possibilidades de questionamentos.

Contrapondo o paradigma do exercício, sugere-se a abordagem da investigação, pois ainda de acordo com o Skovsmose (2000, p. 6) “um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações, [...] os alunos se envolvem no processo de exploração”. Esses cenários potencializam a interação entre docentes e discentes através do diálogo e

desenvolvem o pensamento crítico-matemático através da organização, exposição e compartilhamento de estratégias.

As aulas baseadas nos cenários para investigação admitem diversas possibilidades de significados para os conceitos matemáticos. Deste modo, compreender os diferentes tipos de referências que surgem são fundamentais para o planejamento das atividades. Para nortear o processo de transição entre o paradigma do exercício e os cenários de investigação, Skovsmose distingue três tipos de referências:

Primeiro, questões e actividades [sic] matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semi-realidade; não se trata de uma realidade que “de facto” observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático [sic] de Matemática. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real (SKOVSMOSE, 2010, p. 7).

Combinando os tipos de referências com os ambientes de aprendizagem, obtém-se a tabela:

Tabela 1 - Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose, 2000, p.8.

Perante as possibilidades que são criadas nos ambientes de aprendizagem e na busca por alternativas que relacionem a resolução de problemas a esses ambientes, encontra-se na literatura estudos acerca de reflexões e caminhos que buscam interligar tais práticas. Nessa conjuntura, se busca aporte teórico em Faustino e Passos (2013, p.71) quando dizem que “comparado a exercícios, os problemas se configuram em atividades mais abertas, por outro lado, se comparadas aos cenários para investigação os problemas são atividades um pouco mais fechadas” e, também, ao elaborarem uma nova tabela com a inserção de uma coluna referente à resolução de problemas:

Tabela 2 - Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Resolução de Problemas	Cenários para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)	(3)
Referências à semi-realidade	(4)	(5)	(6)
Referências à realidade	(7)	(8)	(9)

Fonte: Faustino e Passos, 2013, p. 71.

Diante dos objetivos dos cenários para investigação como, por exemplo, a contribuição na relação aluno-professor através do desenvolvimento do diálogo, além do entendimento de conteúdos matemáticos, o que possibilita um aprendizado efetivo da matemática pode-se evidenciar que a resolução de problemas torna-se uma alternativa para os educadores que buscam efetivar a transição do paradigma do exercício para os cenários de investigação, tal como diz Skovsmose (2008 apud FAUSTINO; PASSOS, 2013, p. 72) “propor problemas significa um passo adiante em direção aos cenários de investigação”.

3 METODOLOGIA

A pesquisa desenvolvida neste projeto possui caráter qualitativo uma vez que são analisados os impactos dos processos investigativos aliados à resolução de problemas no ensino de Matemática. Salienta-se também que a pesquisa possui caráter de intervenção, pois propõe um conjunto de atividades que foram aplicadas em sala de aula e cujos resultados foram analisados a *posteriori*, conforme a definição de Damiani *et al.* (2013):

[...] pesquisa do tipo intervenção pedagógica e [sic] definida como uma pesquisa que envolve o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações pedagógicas) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e posterior avaliação dos efeitos dessas interferências (DAMIANI et al., 2013, p. 57).

A pesquisa foi desenvolvida em três etapas que são evidenciadas nos próximos itens.

3.1 Campos de investigação

As atividades que compõe essa pesquisa foram aplicadas em duas entidades de ensino localizadas em Bagé/RS, uma escola estadual de ensino médio e a Universidade Federal do Pampa.

Na escola estadual, as atividades foram desenvolvidas com alunos do primeiro ano do ensino médio do Curso Normal. A escolha da turma aconteceu juntamente com a equipe pedagógica para que fosse possível ter, como campo de investigação, uma turma que estivesse trabalhando com o conteúdo de funções e foi motivada por ser um curso de formação de professores.

Na Universidade Federal do Pampa, a pesquisa foi aplicada com discentes do componente curricular Teoria Elementar das Funções, do Curso de Matemática – Licenciatura.

Após a determinação das entidades de ensino e suas respectivas turmas, foram realizadas observações durante as aulas a fim de conhecer o perfil dos alunos participantes da pesquisa.

3.2 Aplicações das atividades

Primeiramente, foi proposto um questionário¹ aos discentes das turmas a fim de identificar qual a familiaridade que os mesmos possuíam com a resolução de problemas e qual a relação que eles estabeleciam entre essa técnica e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Salienta-se que os questionários iniciais continham perguntas diferentes para abranger o público-alvo, considerando que as atividades foram aplicadas em turmas de níveis de ensino diferentes.

O desenvolvimento das atividades consistiu na proposição de problemas que necessitem de técnicas de investigação para a sua resolução. O conteúdo dos mesmos perpassa o conhecimento de Funções. Para realizar a atividade, foi solicitado aos alunos que se organizassem em grupos de até três membros e ao final de cada problema, houve uma discussão sobre as estratégias de resolução adotadas e as soluções encontradas.

A seguir são apresentados os problemas que foram aplicados²:

Problema A:

(ENEM - 2014) Ao alugar um carro, o locatário precisa pagar R\$ 60,00 por dia e mais R\$ 1,50 por quilômetro rodado. Para facilitar, as locadoras podem fazer uma relação entre o valor a ser pago P , em reais, em função dos quilômetros rodados, representado por x . Qual das expressões abaixo representa o valor pago pelos locatários em função dos quilômetros rodados?

- a) $P = 61,50 + 1,50x$
- b) $P = 60x + 1,50$
- c) $P = 60 + 1,50x$
- d) $P = 61,50x$
- e) $P = 1,50x$

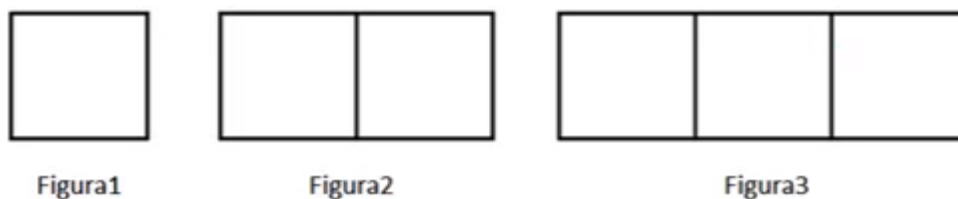
Problema B

(ENEM - 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende

¹ O questionário inicial está nos apêndices deste trabalho.

² A resolução dos problemas consta nos anexos deste trabalho.

da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



Que expressão fornece a quantidade de canudos de cada figura?

- a) $C = 4Q$
- b) $C = 3Q + 1$
- c) $C = 4Q + 1$
- d) $C = Q + 3$
- e) $C = 4Q - 2$

³Problema C

Observe a figura abaixo, que relaciona o número de palitos de fósforo com o número de triângulos: (Adaptado de AZEVEDO, R. S., 2014, p.27)



Seguindo o padrão estabelecido, complete a tabela abaixo:

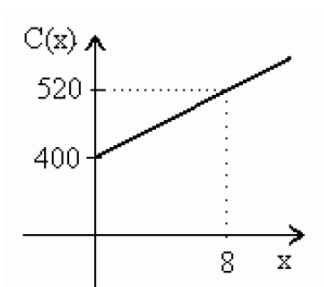
Número de triângulos (q)	Número de palitos (p)	$(q; p)$
1	3	(1; 3)
2	$1 + 2 \cdot 2$	(2; 5)
3	$1 + 3 \cdot 2$	(3; 7)
q		

³ Adaptado de AZEVEDO, R. S.

- a) Quantos palitos são necessários para formar 12 triângulos?
- b) Quantos triângulos são formados com 30 palitos?
- c) Pode-se dizer que o número de palitos depende do número de triângulos?

4Problema D

Numa fábrica, o custo C de produção de x litros de certa substância é dado pela função $C(x)$, cujo gráfico está representado abaixo. O custo de R\$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros?



Por fim, os estudantes responderam a um segundo questionário⁵ para que fosse possível evidenciar as facilidades e dificuldades encontradas durante o processo de resolução e, também, identificar a perspectiva dos discentes sobre a metodologia da resolução de problemas.

3.3 Análise e avaliação dos resultados

A avaliação das atividades tem caráter qualitativo, porém recorreu-se a uma quantificação dos questionários aplicados, a fim de produzir subsídios que pudessem ser eficientes na análise proposta. A avaliação dos resultados deu-se em três momentos.

No primeiro momento, foram analisadas as respostas do questionário inicial. Evidenciaram-se os hábitos escolares dos alunos e como esse fator reflete no aprendizado.

A segunda etapa de análise dos resultados foi realizada através do desempenho dos discentes na resolução dos problemas, considerando o

⁴ BACKES, Lucas Henrique.

⁵ O questionário final está nos apêndices deste trabalho.

entendimento do enunciado, a identificação de funções em diferentes situações-problemas, os questionamentos durante a aplicação da atividade e as discussões sobre as hipóteses de resolução antes e depois das intervenções. Salientando que a análise foi realizada com base nas observações feitas durante as aulas e em conversas com os professores das turmas envolvidas.

O outro momento de análise foi através do questionário final. Os alunos avaliaram as atividades propostas e relataram como se sentiram em relação a essas, além disso, refletiram sobre o quanto resolver problemas pode ajudar na construção do saber matemático.

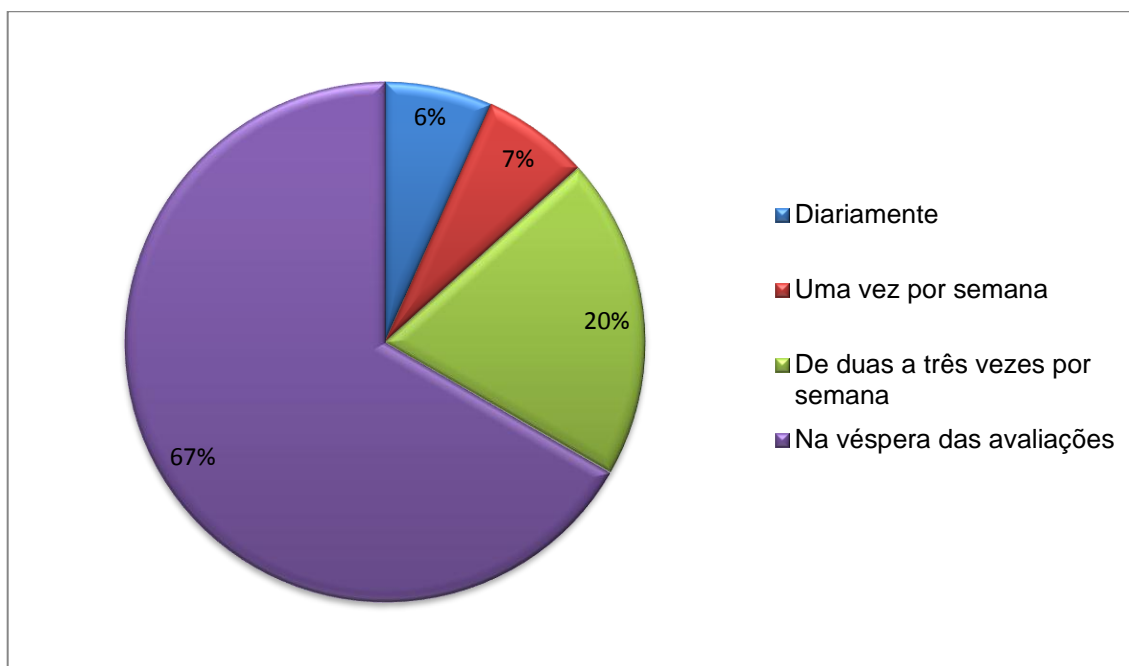
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O presente estudo teve como objetivo geral desenvolver o raciocínio lógico-matemático a partir da resolução de problemas e, portanto, propôs-se uma análise qualitativa dos resultados alcançados, contudo para que essa avaliação pudesse ser mais clara recorreu-se à quantificação dos dados obtidos, tanto na execução das atividades, quanto na aplicação dos questionários.

4.1 Questionário inicial

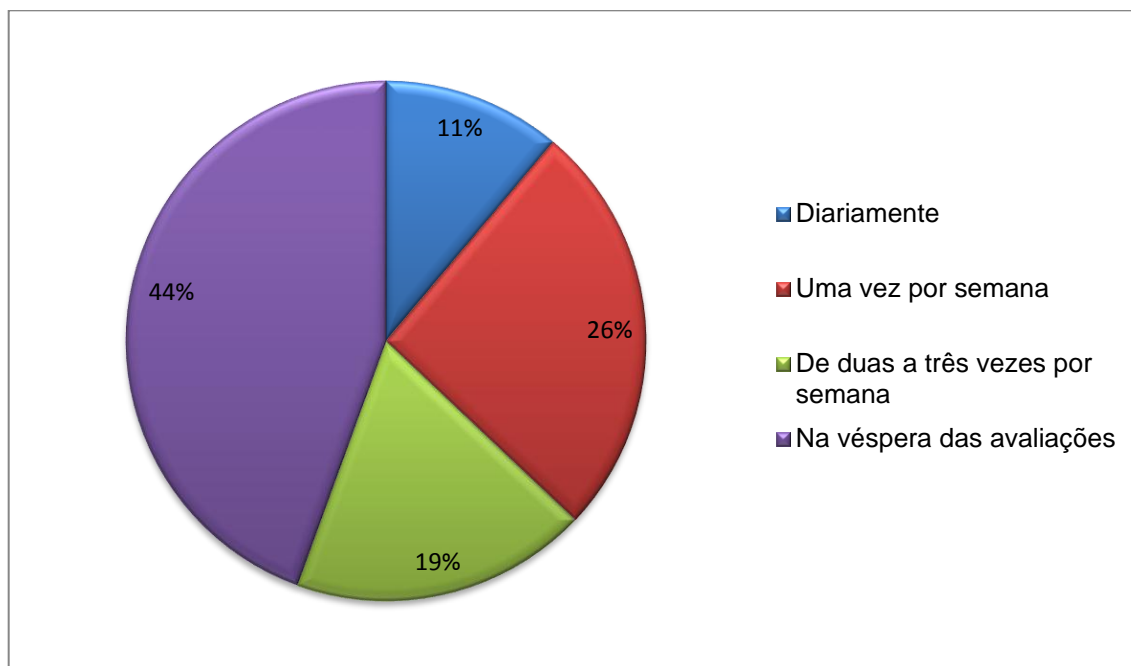
A aplicação do questionário inicial justifica-se pela necessidade de conhecer os hábitos de estudos dos participantes da pesquisa e, sobretudo, identificar se a resolução de problemas faz parte desses. Quando questionados sobre os hábitos de estudo e quais os métodos utilizados, encontramos os seguintes resultados:

Figura 1 - Hábitos de estudo dos alunos do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2 - Hábitos de estudo dos alunos do Ensino Superior



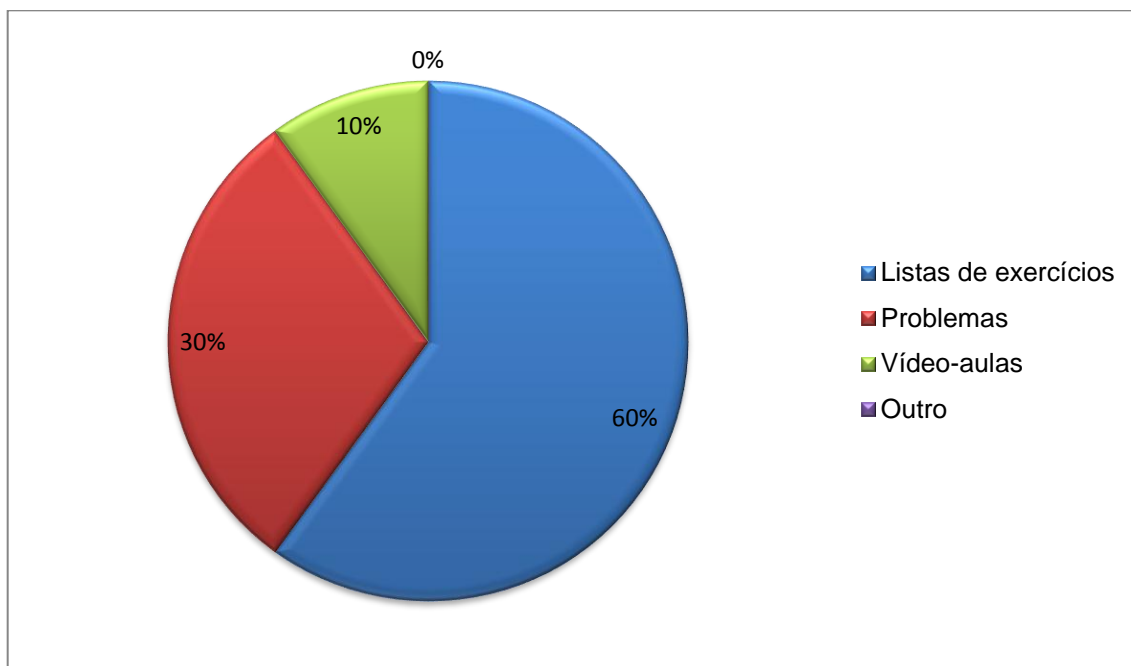
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando as Figs. 1 e 2, pode-se inferir que a maioria dos alunos estuda apenas nas vésperas das avaliações evidenciando que hábitos regulares de estudo não fazem parte da rotina dos participantes da pesquisa. Observa-se que esse número equivale a aproximadamente dois terços dos entrevistados do Ensino Médio, enquanto que 20% dos alunos têm o hábito de estudar de duas a três vezes por semana, os demais índices são relativamente baixos.

Tendo em vista que no Ensino Superior o índice de alunos que estuda na véspera das avaliações equivale a menos da metade dos entrevistados, podemos considerar que essa diferença entre os campos de investigação se dá basicamente pelo nível de exigência das avaliações. Aliás, esse fator pode ser o responsável pela homogeneidade dos números apresentados no que diz respeito aos demais hábitos de estudo.

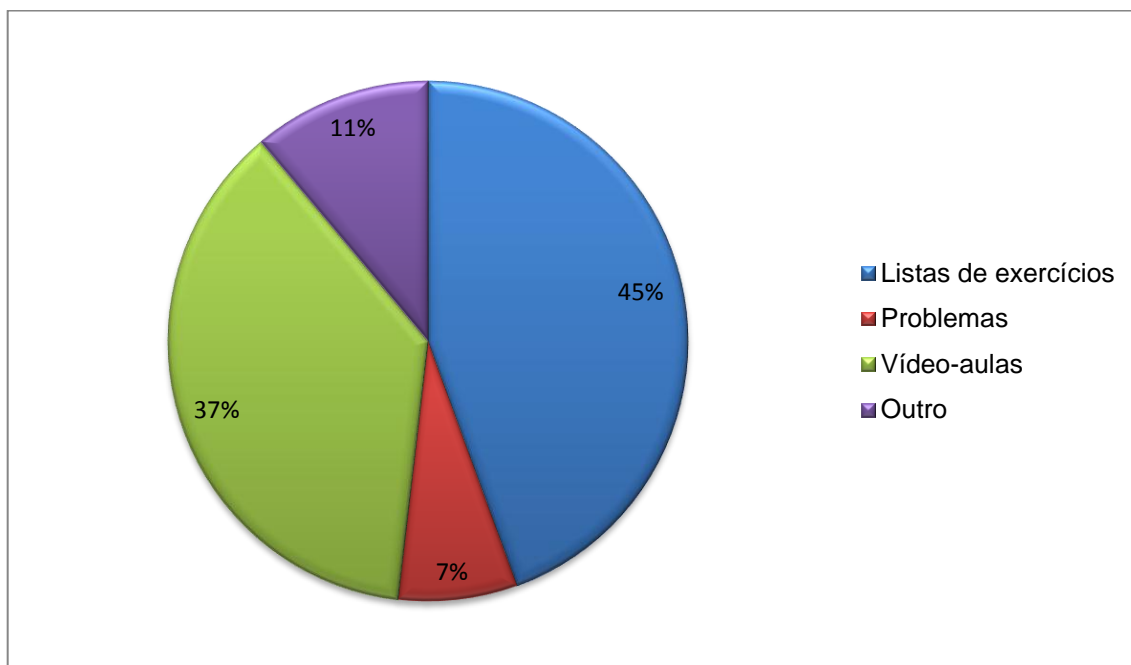
Quanto aos métodos utilizados para estudar, os discentes poderiam marcar mais de uma opção. A seguir, os resultados obtidos:

Figura 3 - Métodos de estudo utilizados pelos alunos do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4 - Métodos de estudo utilizados pelos alunos do Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em ambos os campos de investigação, o método predominante para os estudos é o uso de listas de exercícios. No Ensino Médio o índice é maior do que no

Ensino Superior, fato que vem ao encontro com o que fora discutido sobre o paradigma do exercício. Ainda assim, o segundo maior índice apresentado pelos alunos do Curso Normal é sobre o uso de problemas, enquanto que os alunos de TEF buscam por vídeo-aulas. Essa busca evidencia que quanto maior o nível de ensino maior também é a autonomia dos estudantes na busca por métodos alternativos para suprir as exigências dos componentes curriculares, essencialmente pautados no paradigma do exercício, pois buscam formas de resolver as listas propostas pelos docentes.

As perguntas relativas ao número de reprovações, bem como, as que envolviam a classificação do aprendizado em relação ao conteúdo de funções e o desempenho nas avaliações foram feitas apenas para traçar os perfis das turmas a fim de obter subsídios para o planejamento das atividades. Portanto, não serão discutidos os quantitativos referentes a estas questões.

4.2 Aplicações dos problemas

Esta etapa da pesquisa consistiu na aplicação de quatro problemas que exigiam o entendimento sobre o conteúdo de funções. Os problemas foram aplicados respeitando uma ordem crescente de dificuldade.

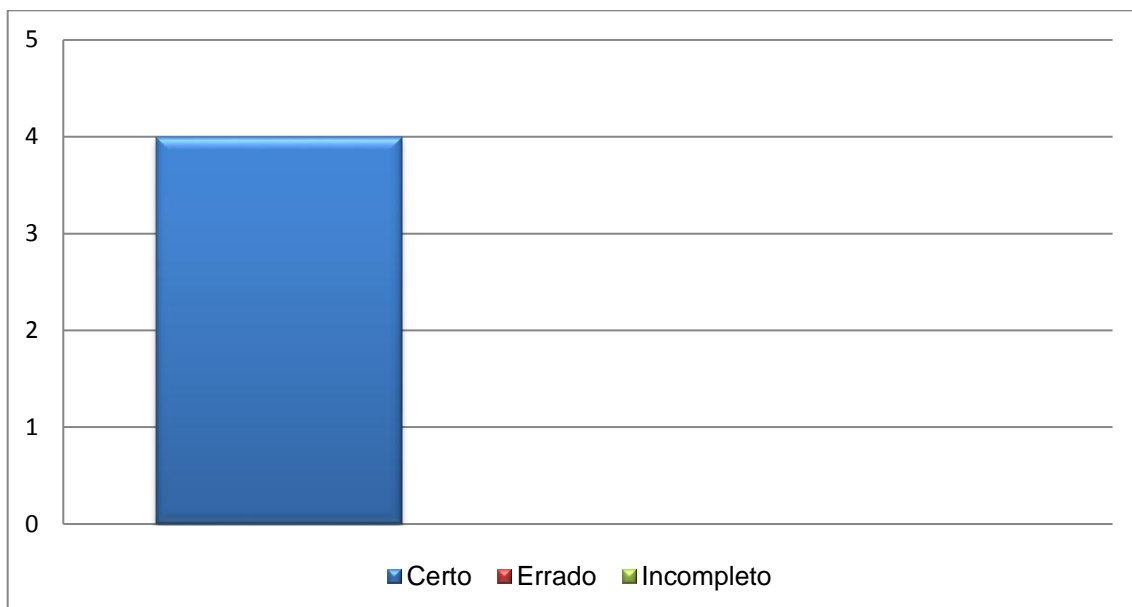
No problema A, os alunos deveriam identificar a lei da função a partir de uma situação-problema. Os problemas correlatos B e C exigiam que os alunos encontrassem a lei da função a partir de representações geométricas, enquanto que no problema D, deveria ser encontrada a partir de uma representação gráfica.

Após a resolução de cada problema, foram feitas discussões acerca das respostas encontradas e estratégias adotadas.

4.2.1 Problema A

O problema foi resolvido corretamente pela maioria dos grupos de alunos dos dois campos de investigação, como é possível observar pelos gráficos abaixo:

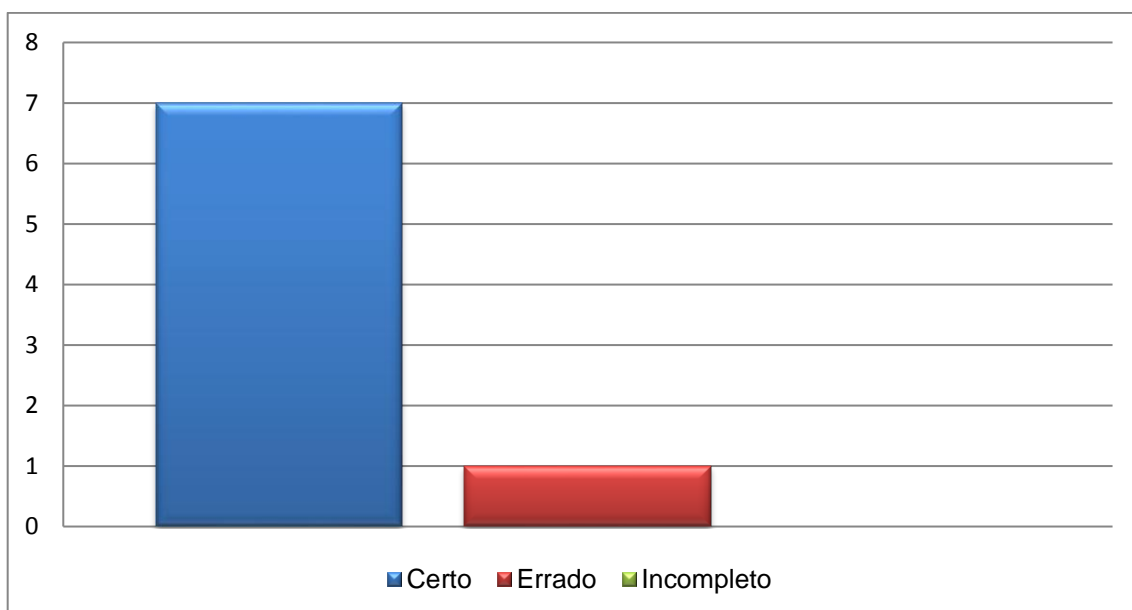
Figura 5 - Problema A: Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os alunos do ensino médio apresentaram algumas dificuldades na interpretação do problema, portanto, fez-se necessário a intervenção da pesquisadora. A partir de então, os estudantes conseguiram identificar os dados do problema e associaram os valores dados ao custo fixo e ao custo variável. Logo, chegaram à resposta facilmente.

Figura 6 - Problema A: Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

No ensino superior, este problema foi resolvido rapidamente e seis dos sete grupos resolveu de maneira correta. Pelas justificativas, pode-se observar que tiveram o mesmo raciocínio dos estudantes do Curso Normal. Ainda assim, um grupo não soube justificar como chegou à resposta, no entanto, os alunos circularam os dados do problema. Este fato evidencia que embora não tenham conseguido explicar o desenvolvimento, provavelmente, tiveram o mesmo raciocínio dos demais.

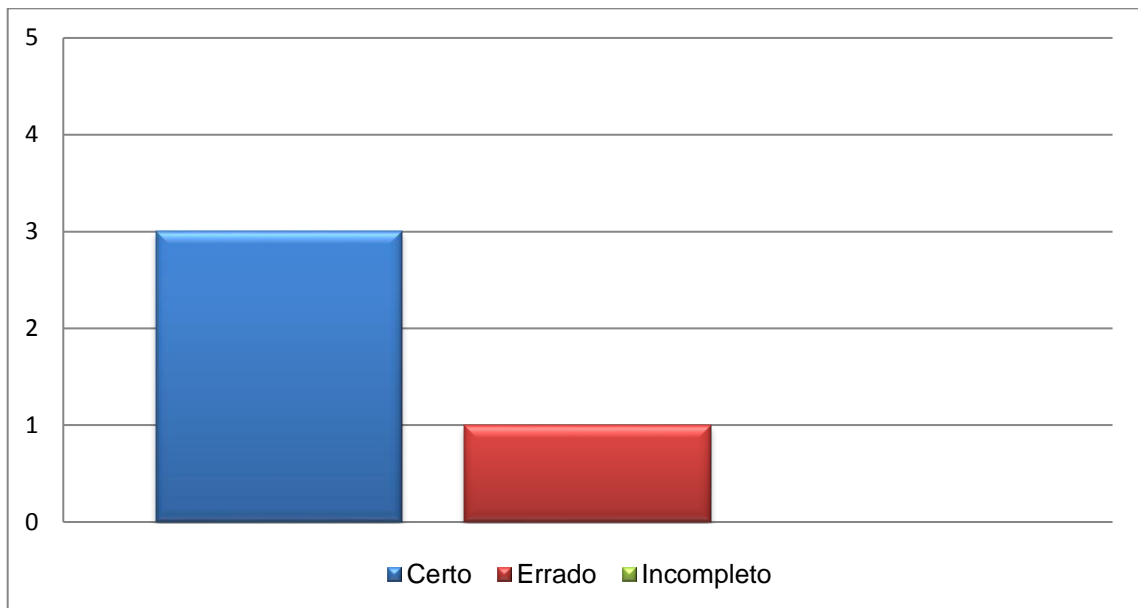
O grupo que não conseguiu encontrar a resposta correta justificou que faltavam dados no problema por não ter informações sobre o número de diárias, fazendo alusão, apenas, ao número de quilômetros rodados. Este foi um dos questionamentos dos discentes durante a aplicação da atividade e, apesar da pesquisadora ter explicado que a função dada considerava, apenas, os quilômetros rodados sem ser necessário o número de diárias, os alunos marcaram uma alternativa errada.

Entre os campos de investigação, este problema foi resolvido com muita facilidade, aliás, como se fez uso de uma situação real houve certa dificuldade em justificar a resposta, pois para a maioria dos alunos a resposta era tão óbvia que as explicações ficaram redundantes.

4.2.2 Problema B

Este problema foi resolvido com um pouco mais de dificuldade pelos alunos. E, ao contrário do problema anterior, surgiram diferentes resoluções que são discutidas a seguir:

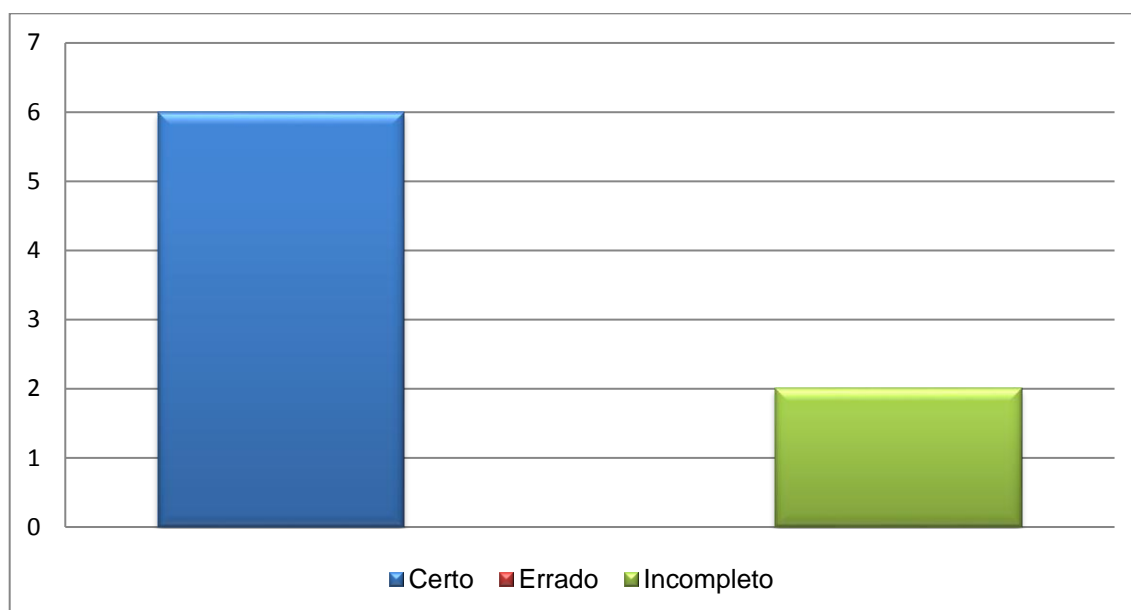
Figura 7 - Problema B: Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

No ensino médio, três dos quatro grupos acertou a resposta. Os estudantes identificaram que para cada novo quadrado era preciso três canudos, mas não conseguiram relacionar esse fato com uma expressão algébrica, o que os impulsionou à substituição do número de quadrados e/ou canudos nas alternativas do problema. Logo, o problema foi resolvido por tentativa e erro. O grupo que não encontrou a solução correta se deteve à relação dos três canudos acrescentados e associou este número a uma equação algébrica errada.

Figura 8 - Problema B: Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

No ensino superior, surgiram diversas discussões e maneiras de resolver o problema proposto.

Inicialmente, um grupo identificou um erro no enunciado, pois se pedia o número de quadrados e todas as alternativas tinham “C” (canudos) como variável dependente. Após a correção do enunciado, os alunos prosseguiram com a resolução. O grupo que identificou o erro conseguiu resolver o problema corretamente, no entanto, pensaram que o enunciado poderia estar certo em sua versão inicial e tentaram comprovar isso invertendo as expressões dadas. Logo, constataram que as respostas seriam em números racionais o que era impossível, visto que os canudos correspondem a números inteiros. A partir dessa situação, perceberam que para encontrar a função inversa era necessário fazer restrições no domínio da função.

Outro grupo encontrou a resposta correta relacionando a organização dos quadrados e o acréscimo de canudos com uma progressão aritmética de razão igual a três.

Entre os grupos que acertaram a questão, um deles fez a relação correta e justificou apenas que a variação ocorre a cada três canudos. Outros três grupos resolveram pela substituição do número de canudos nas expressões.

Quanto aos grupos que deixaram o problema incompleto, numa das situações os alunos desmembraram os quadrados e tentaram encontrar uma relação reconstruindo os quadrados separadamente, ou seja, não haveria um canudo em comum e, conseqüentemente, não seriam acrescentados três canudos. Na outra situação, os estudantes tentaram criar hipóteses, mas não conseguiram avançar a partir da coleta dos dados.

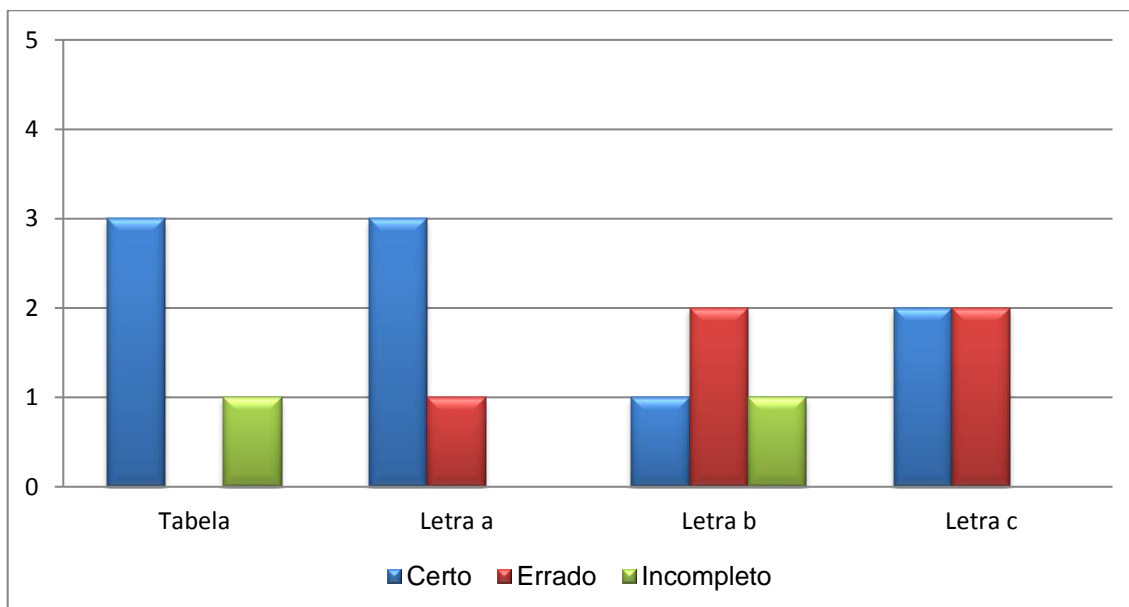
De maneira geral, em ambos os níveis de ensino, os discentes tiveram mais dificuldade na interpretação do problema e em como deveriam organizar as informações para elaborar as conjecturas. A pesquisadora fez várias intervenções com o objetivo de tentar evidenciar como deveriam sistematizar o raciocínio e passar as informações para o papel.

4.2.3 Problema C

Este problema é correlato ao problema B, porém, além de encontrar a lei da função, os discentes deveriam responder três perguntas relacionadas ao problema.

O desempenho dos participantes da pesquisa é dado abaixo:

Figura 9 - Problema C: Ensino Médio



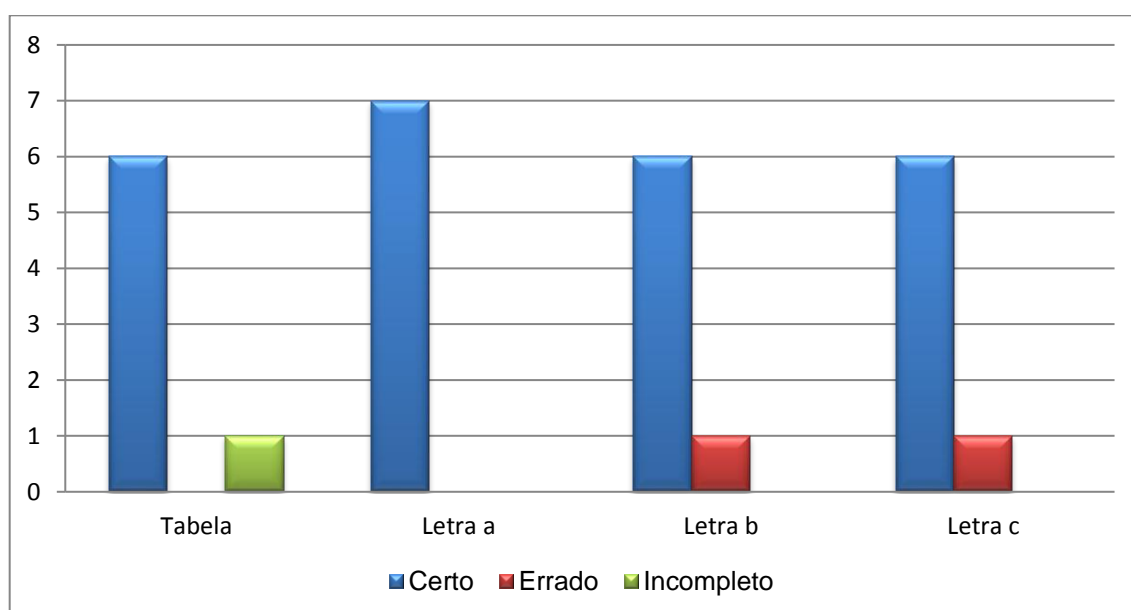
Fonte: Elaborado pelo autor.

Entre os grupos do Curso Normal, os participantes apresentaram dificuldades em encontrar a lei da função, ou seja, completar a tabela até chegar à generalização.

A pesquisadora entrevistou algumas vezes para que compreendessem quais os números que variavam na segunda coluna da tabela. Após as intervenções, todos os grupos conseguiram encontrar a expressão, contudo, um dos grupos deixou o restante da tabela incompleto.

No item (a), três dos quatro grupos acertaram a questão substituindo o valor de triângulos na expressão encontrada. O grupo que errou este item tentou desenhar os triângulos ao invés de usar a generalização. No item (b), os grupos repetiram o desempenho do item anterior, sendo que todos os que acertaram questionaram a resposta encontrada, pois, a resposta não correspondia a um número exato, já que não seria possível usar todos os palitos para construir triângulos. Os alunos que erraram o item anterior encontraram um número exato, certamente como consequência do erro cometido na construção dos triângulos. Quanto ao item (c), dois grupos responderam que o número de palitos depende do número de triângulos, pois consideraram a lei da função encontrada, enquanto que dois grupos erraram a questão por confundirem a variável dependente.

Figura 10 - Problema C: Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

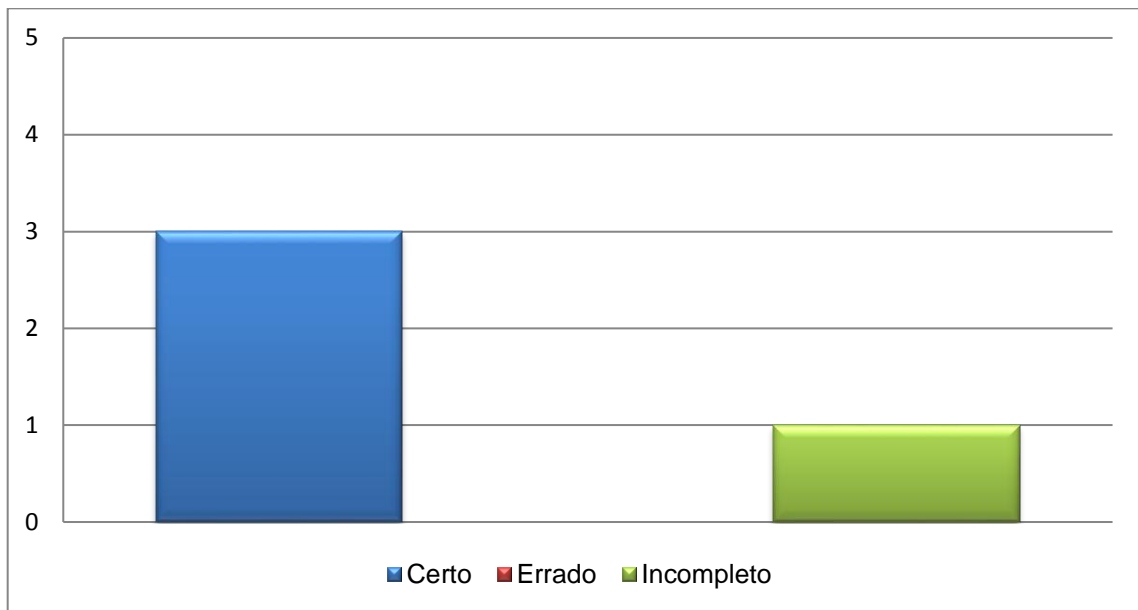
Entre os alunos de TEF, todos completaram a tabela, sendo que apenas um dos grupos não encontrou a generalização. Todos acertaram o item (a), os que encontraram a lei obtiveram o número de palitos substituindo o número de triângulos e o outro grupo fez pela relação dos pares ordenados da última coluna da tabela. Apenas o grupo que não encontrou a regra de formação da função errou o item (b), os demais encontraram a resposta também por substituição. Os questionamentos referentes à “sobra” de um palito também ocorreu nesta turma. Um fato curioso é que o grupo que não encontrou a regra da função na construção da tabela, a fez apenas no item (c), quando foi preciso analisar qual variável era dependente. Neste último item, apenas um grupo não respondeu corretamente a questão cometendo o mesmo erro dos alunos do ensino médio.

Nos dois campos de investigação, a maior dificuldade percebida foi em encontrar a lei da função. No entanto, no ensino médio essa dificuldade ficou mais evidente do que no ensino superior. Um dos fatores que pode ter desencadeado nesse resultado é que os alunos de TEF se apropriaram com mais facilidade do problema B, tanto nas estratégias adotadas como nas discussões teóricas e usaram a experiência adquirida para resolver este problema. Como os estudantes do Curso Normal resolveram o problema B por tentativa e erro, não houve o total entendimento da situação-problema, portanto, o problema correlato não serviu como base.

4.2.4 Problema D

Para resolver este problema, os discentes deveriam fazer a interpretação do gráfico, utilizar os pontos dados para encontrar um valor de x correspondente a um valor de y informado no enunciado. A execução do problema desencadeou nos seguintes resultados:

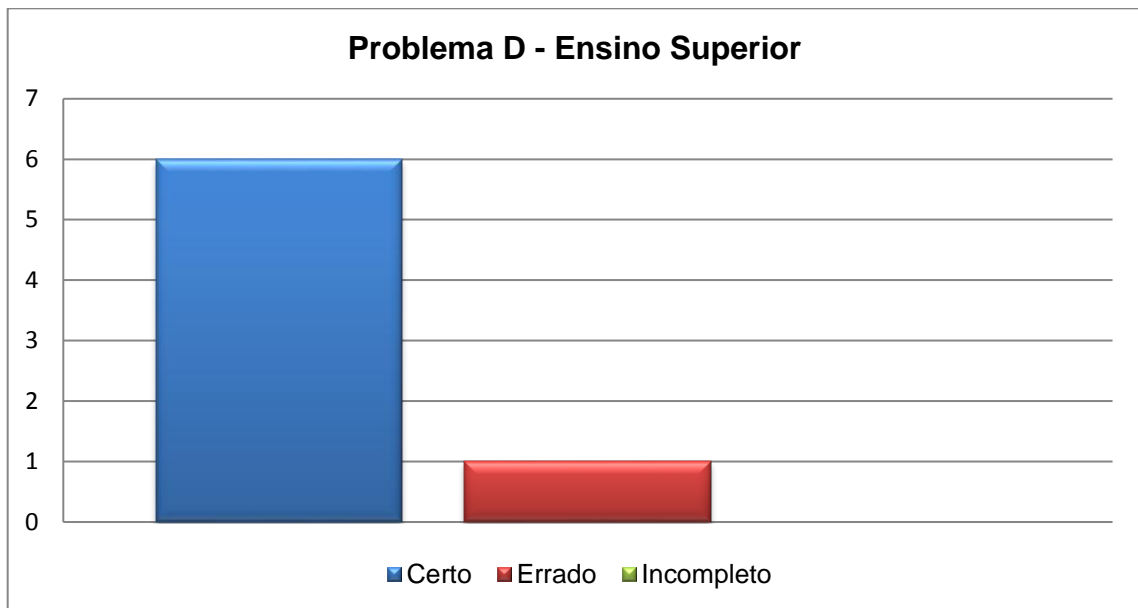
Figura 11 - Problema D: Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entre os grupos de alunos do Curso Normal, apenas um conseguiu interpretar o problema, pois identificaram rapidamente que os dados estavam nos pontos do gráfico. Diante disso, a pesquisadora viu a necessidade de instigá-los a interpretar o gráfico e relacionar os dados com a equação da reta. Sendo assim, dois grupos resolveram a partir das dicas iniciais da pesquisadora, pois apresentaram muitas dificuldades na interpretação gráfica e na relação algébrica. Um dos grupos resolveu o problema por proporcionalidade, considerando o ponto de partida da reta e a diferença dos pontos correspondentes ao eixo y . O outro grupo apresentou dificuldades nas manipulações algébricas e deixou o problema incompleto.

Figura 12 - Problema D: Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na turma de TEF, seis dos sete grupos que resolveram esse problema fizeram-no corretamente. Aliás, este problema teve diversas interpretações, entre elas, destaca-se a resolução por sistemas de equações lineares. Três grupos resolveram usando a proporcionalidade, os alunos evidenciaram a variação do custo e de litros e fizeram uso da linguagem matemática para justificar a estratégia utilizada. Dois grupos substituíram os pontos dados na equação da reta, encontrando os valores de b , a para construir a regra de formação da função e por fim encontraram o valor de x que fora solicitado. Os integrantes do último grupo tentaram resolver usando regra de três simples, no entanto, não chegaram a concluir os cálculos e partiram para outra hipótese, em que tentaram substituir aleatoriamente alguns dos pontos dados na equação da reta.

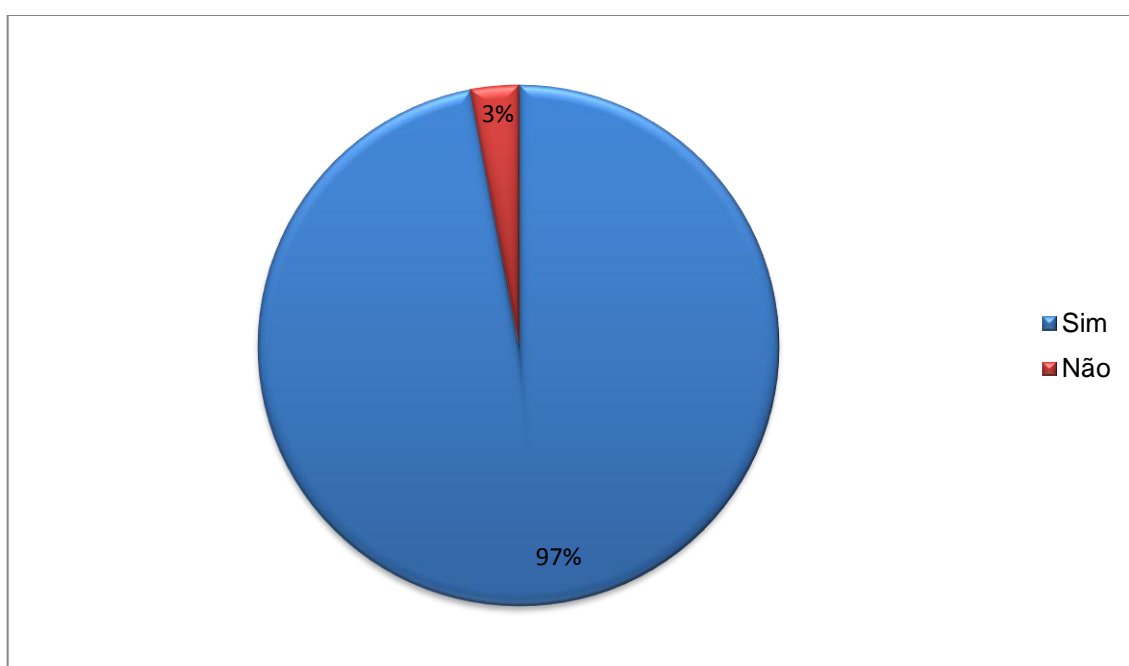
Alguns dos alunos envolvidos apresentaram dificuldades na interpretação gráfica e devido às intervenções da pesquisadora utilizaram a equação da reta durante a resolução, pois se prenderam na explicação dos pontos. Porém, aqueles que conseguiram interpretar o problema por si só usaram suas próprias estratégias.

4.3 Questionário final

O questionário final teve como objetivo avaliar a atividade proposta e identificar quais as maiores facilidades e/ou dificuldades encontradas pelos alunos. Além disso, propôs-se uma reflexão a cerca do auxílio da MRP no entendimento da Matemática.

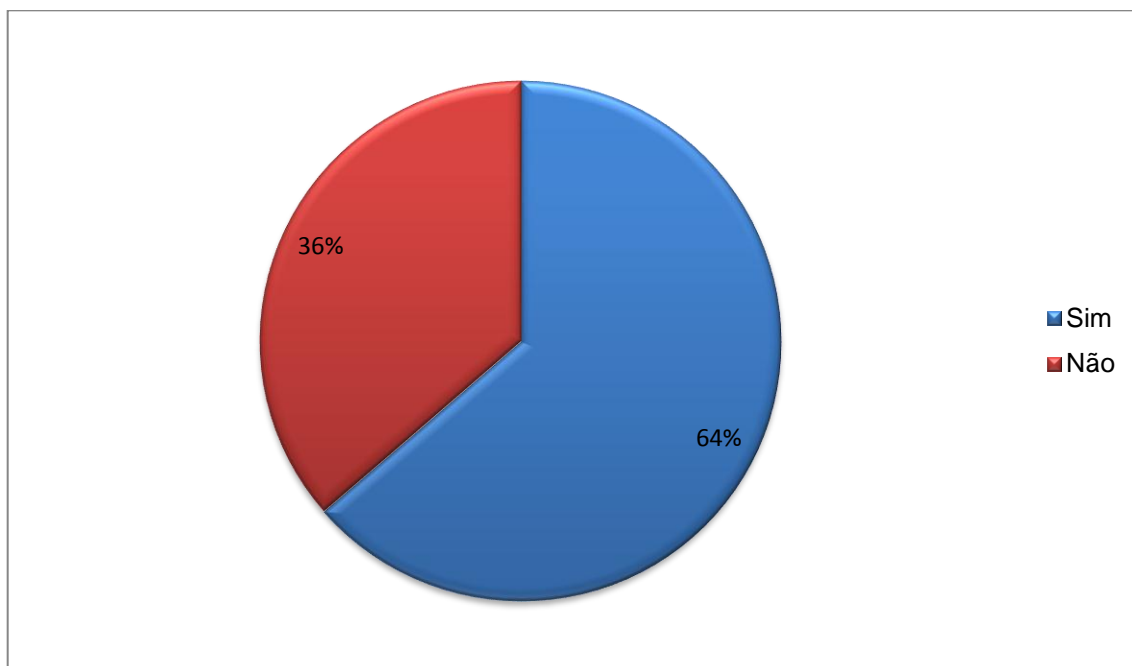
Quando questionados se gostaram da atividade, apenas 3% de todos os respondentes disseram que não (Fig. 17). Ainda assim, 64% dos participantes relataram que tiveram dificuldades durante a resolução dos problemas (Fig. 18).

Figura 13 – Gráfico sobre a avaliação da atividade



Fonte: Elaborado pelo autor.

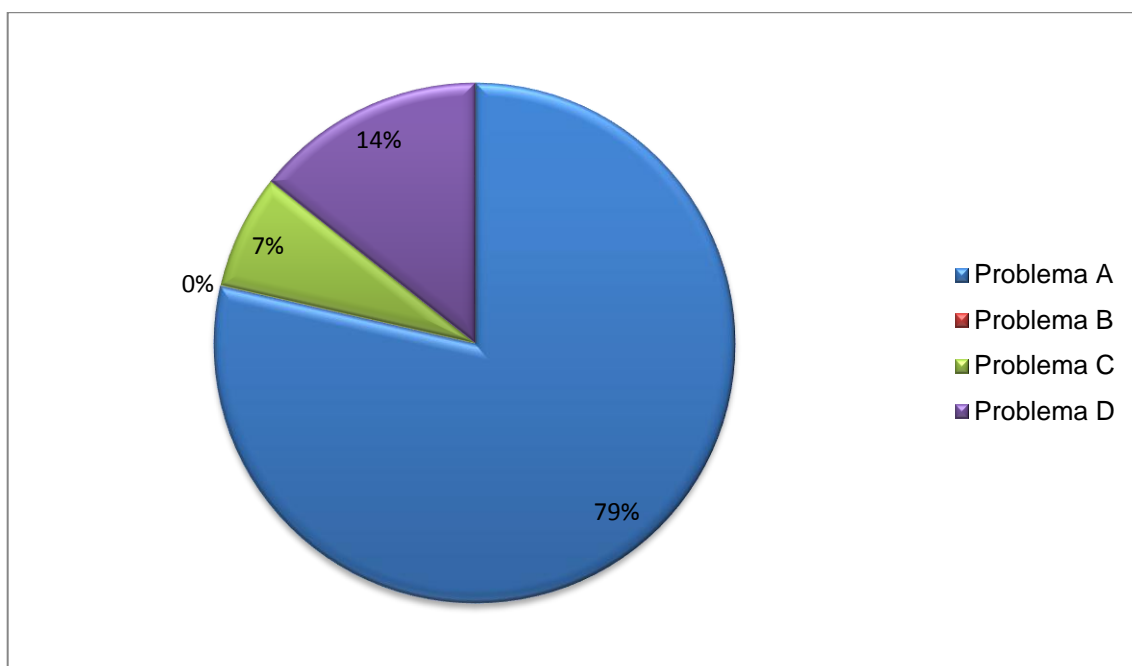
Figura 14 – Gráfico relativo à dificuldade durante a resolução dos problemas



Fonte: Elaborado pelo autor.

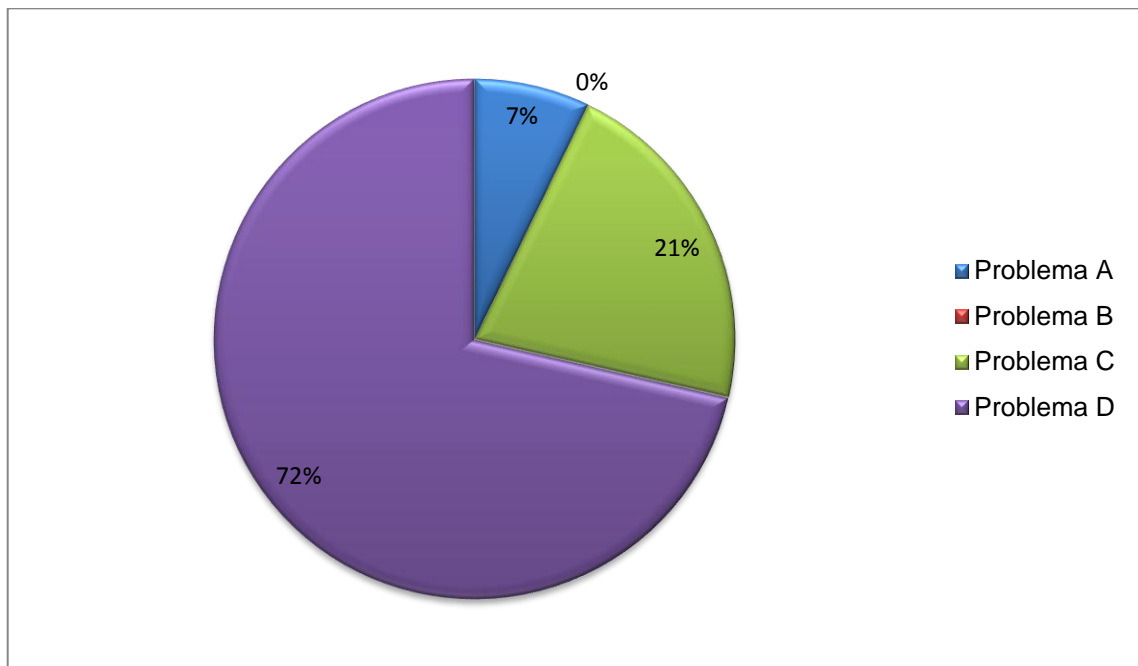
Outro questionamento foi a respeito da classificação dos problemas em níveis de facilidade e dificuldade. Vejamos:

Figura 15 - Problema mais fácil para os alunos do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 - Problema mais difícil para os alunos do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor.

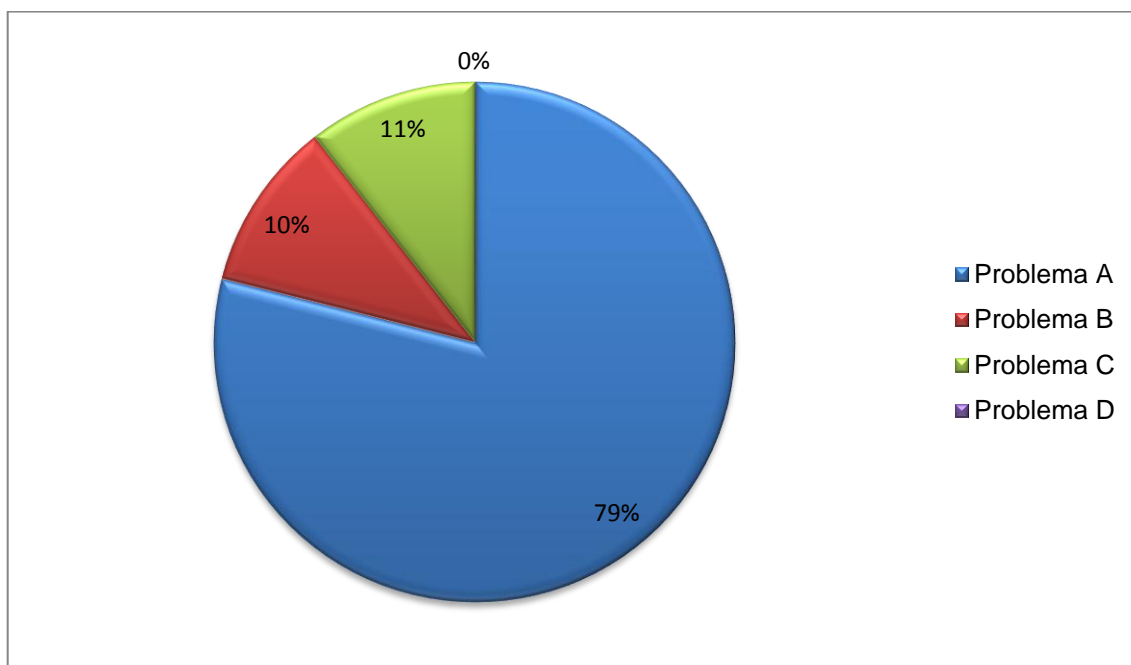
Observa-se que a maioria dos discentes declarou que o problema A foi o mais fácil, enquanto que acharam mais difícil foi o problema D. Um dado interessante é referente à dificuldade relatada por 7% dos alunos quando consideraram que o problema A foi o mais complexo. Pode-se imaginar que essa assertiva se deu por conta de ter sido o primeiro problema a ser resolvido, e como não tinham o hábito de trabalhar com essa metodologia, houve essa dificuldade inicial.

Outro aspecto que deve ser destacado é que o problema B não foi citado nem como o mais fácil e nem como o mais difícil. Inúmeros aspectos podem ter contribuído para que esse fato tenha ocorrido, entre eles, a pouca familiaridade dos discentes com a MRP, pois apesar de ser problema correlato ao C, os alunos não perceberam isso no decorrer das atividades e só compreenderam a estratégia que deveria ser adotada em ambos, quando resolveram o problema C.

Por fim, 14% dos discentes classificou o problema D como sendo o mais fácil. Acredita-se que essa “facilidade” pode ter sido reflexo das atividades que estavam sendo desenvolvidas pela professora regente e observadas durante a realização da pesquisa, pois a partir da intervenção da pesquisadora, os alunos puderam perceber a semelhança entre o que precisava ser resolvido no problema e os conteúdos comumente trabalhados em sala de aula.

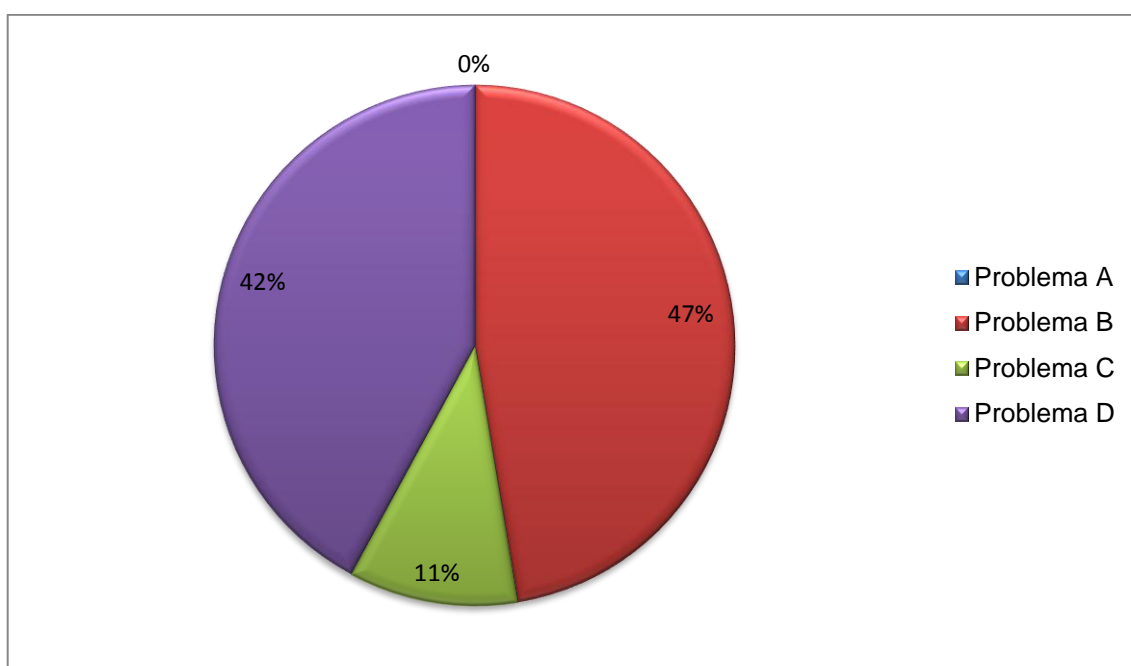
A seguir apresentam-se os gráficos com a opinião dos discentes do Ensino Superior:

Figura 17 - Problema mais fácil para os alunos do Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 - Problema mais difícil para os alunos do Ensino Superior



Fonte: Elaborado pelo autor.

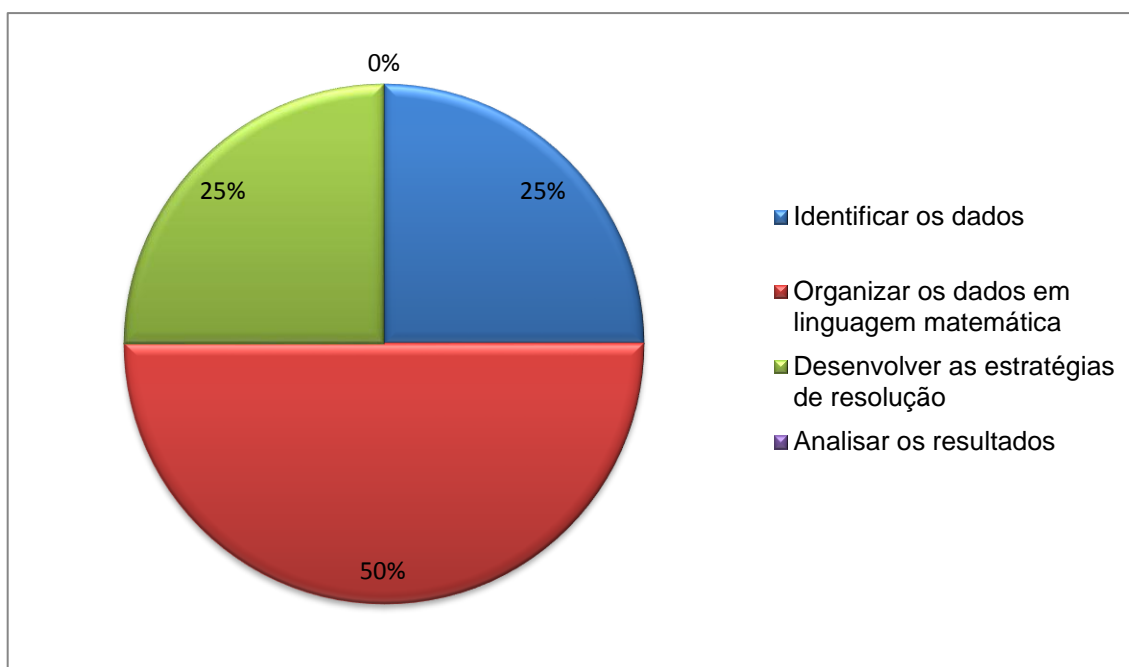
Neste campo de investigação, os participantes também classificaram o problema A como sendo o mais fácil, contudo, o problema B foi classificado como o mais difícil.

Acredita-se que essa classificação ocorreu devido ao fato dos problemas B e C serem correlatos. No entanto, o problema C foi resolvido com mais facilidade, uma vez que, o problema B serviu como base para obtenção da solução do problema seguinte.

Destaca-se que o problema D, como esperado, obteve um alto índice de estudantes que o consideraram difícil, enquanto que, entre os que foram citados como mais fáceis, os problemas B e C aparecem com um percentual de 10% e 11%, respectivamente. Esses percentuais, provavelmente, tenham sido obtidos a partir da percepção da correlação entre esses, pois foram considerados equivalentes em nível de dificuldade.

Finalmente, apresentam-se os últimos dados quantitativos relativos à maior dificuldade enfrentada pelos estudantes:

Figura 19 - Maior dificuldade encontrada pelos alunos do Ensino Médio na resolução dos problemas



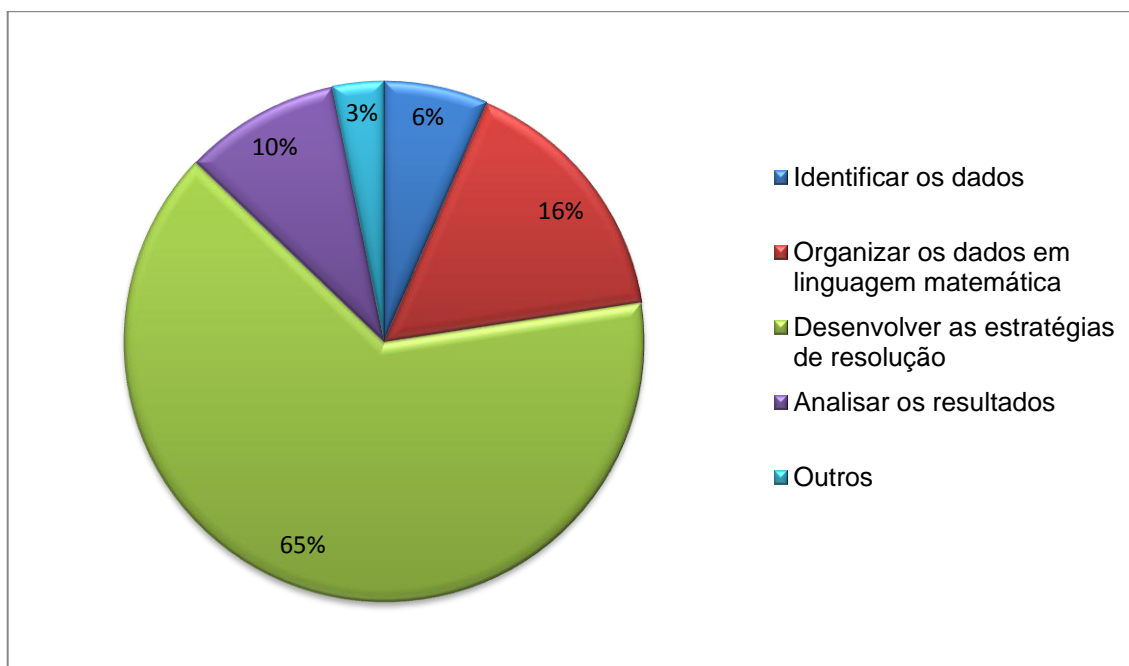
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que os alunos do ensino médio possuem uma dificuldade extremamente relevante em organizar os dados em linguagem matemática. Acredita-

se que esse entrave pode ser decorrente ao fato de estarem habituados com o paradigma do exercício, em que trabalham basicamente com os algoritmos já prontos e quando foram postos na situação de “montar” o algoritmo, apresentaram grandes dificuldades. Citam-se ainda o índice de 25% para a dificuldade em identificar os dados e desenvolver estratégias de resolução.

Abaixo mostram-se os dados dos participantes da turma de TEF:

Figura 20 - Maior dificuldade encontrada pelos alunos do Ensino Superior na resolução dos problemas



Fonte: Elaborado pelo autor.

No ensino superior, a maior dificuldade evidenciada foi com relação ao desenvolvimento de estratégias de resolução, considerando que os índices de identificação dos dados e de organização dos dados em linguagem matemática são relativamente baixos, conclui-se que as primeiras etapas da resolução dos problemas são razoavelmente fáceis, logo o maior entrave está em deliberar o que deve ser feito com os dados coletados. Por fim, a análise dos dados também apresenta um índice pequeno, evidenciando que o maior obstáculo está no desenvolvimento da resolução do problema. Os estudantes demonstraram boa capacidade interpretativa, por isso, as etapas inicial e final acabaram sendo mais fáceis.

Finalmente apresentam-se as discussões das perguntas de cunho qualitativo, para essa etapa foram escolhidos três estudantes da turma do Curso Normal denominados de Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3.

No questionário final aplicado a essa turma, os alunos foram indagados sobre a importância das intervenções da pesquisadora e se consideravam que a resolução de problemas auxilia no entendimento do conteúdo.

As respostas dos discentes foram bastante semelhantes, em relação à primeira pergunta, declararam:

Aluno 1: Sim. Pois me ajudou na área que tenho mais dificuldade, na interpretação.

Aluno 2: Sim. Pois nos ajuda a interpretar o problema.

Percebe-se a semelhança nas respostas e esse mesmo posicionamento foi declarado por ampla maioria dos participantes, no entanto, o Aluno 3 teve opinião dissonante:

Aluno 3: Porque ela tira as nossas dúvidas e nos auxilia durante os exercícios dados.

Nota-se na resposta do aluno que o mesmo identificou, nas intervenções realizadas, uma forma de orientação para a resolução dos problemas, indicando que pode ter compreendido a metodologia, pois não se limitou a compreender que o auxílio serviu para interpretar o problema, foi além, dizendo que a pesquisadora auxiliou durante a solução dos exercícios.

Esse processo de compreensão das etapas da metodologia de resolver problemas fica mais evidente quando se lê as respostas dos estudantes à segunda pergunta:

Aluno 2: Sim. Mas aprendo mais através de exercícios mais objetivos.

Aluno 3: Sim. Conseguimos entender os problemas com mais clareza e acabamos tendo uma visão melhor dos cálculos.

Pode-se perceber que os Alunos 2 e 3 tiveram compreensões diferentes sobre a atividade. Enquanto que o Aluno 2 declara que aprende mais por meio de exercícios mais objetivos, o Aluno 3 percebe que o entendimento do problema acabou facilitando a obtenção da solução.

A mesma análise foi realizada com a escolha de quatro estudantes da turma de TEF que serão chamados por Aluno A, Aluno B, Aluno C e Aluno D.

O Aluno A demonstrou que não estava acostumado ao tipo de metodologia proposta quando questionado se adotaria a metodologia de resolução de problemas, observa-se isso na resposta dada:

Aluno A: Sim, mas começaria a aula com uma breve revisão de conteúdo para nortear a aula.

Percebe-se que o estudante sentiu necessidade de uma revisão do conteúdo, provavelmente como está habituado, ou seja, baseado na sistemática conceito-explicação-exemplos-exercícios. Essa percepção sobre a expectativa do discente é reforçada quando se lê a resposta dada à pergunta sobre as intervenções da pesquisadora:

Aluno A: A ajuda é válida por mostrar caminhos para chegar em um resultado.

Nota-se que a grande preocupação do discente é realmente em chegar a uma resposta correta, não demonstra nas suas falas apreensão em compreender o desenvolvimento do processo de solução em sua totalidade. Visão compartilhada por seu colega, o Aluno D, quando responde:

Aluno D: Não entrava na minha cabeça onde colocar certos dados para chegar ao resultado.

A fala desse estudante reforça a preocupação em “chegar à resposta certa”, visão completamente oposta aos Alunos B e C que perceberam a necessidade de absorver as intervenções da pesquisadora como um fato que auxilia no desenvolvimento da resolução:

Aluno B: Estive a vontade para expor meu próprio ponto de vista. A pesquisadora levou em conta mais o modo utilizado para a resolução.

Aluno C: No desenvolvimento da questão.

A busca constante da solução final é um dilema quase sempre presente nas aulas de matemática e foi possível observar isso na realização desse trabalho, os Alunos A e D, são exemplos desse impasse e ratifica-se essa ideia quando se lê a resposta dada à pergunta: “Você considera que a resolução de problemas auxilia no entendimento do conteúdo?”:

Aluno A: Sim, se você considera a forma mecânica de aprendizagem.

Aluno D: Ajuda a gravar melhor métodos de resolução.

Em contrapartida os Alunos B e C têm uma visão oposta:

Aluno B: O exercício ajudou na organização do raciocínio.

Aluno C: Com resolução conseguimos praticar mais e assim conseguir aprender.

Acredita-se que o perfil dessa turma retrata outras turmas de matemática, ou seja, uma mescla heterogênea de alunos que buscam responder corretamente os exercícios e estudantes que procuram compreender o processo como um todo e veem a obtenção da solução como um processo natural. Nota-se isso nas respostas dos Alunos B e C quando questionados se adotariam a metodologia de resolução de problemas:

Aluno B: É notório que nós aprendemos mais algum assunto quando nos sentimos parte dele, ou seja, resolvendo e buscando soluções.

Aluno C: Faz a gente usar mais o raciocínio, e sair da zona de conforto.

O processo de compreensão desses discentes à necessidade de aliar diversas metodologias de ensino e aprendizagem constituiu em um fato bastante significativo na realização dessa pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na realização deste trabalho pode-se perceber a importância de observar e conhecer o perfil dos alunos dos campos de investigação escolhidos, pois a partir da aplicação dos problemas e da avaliação dos discentes sobre o que fora proposto, foi possível analisar os resultados e compreender o porquê de determinadas respostas e estratégias adotadas.

Os problemas propostos fazem referência à semi-realidade, portanto, se enquadram no ambiente (4) dos cenários de investigação de Skovsmose (Tab. 1). Ao considerar a resolução de problemas como um caminho intermediário entre o paradigma do exercício e os cenários de investigação, os problemas deste trabalho pertencem ao item (5) da Tab. 2. No entanto, independente da referência adotada, pode-se concluir que o conjunto de atividades desenvolvidas aproxima-se de uma atividade investigativa, principalmente, pelas intervenções da pesquisadora que foram necessárias para orientar os discentes no processo de resolução. Como os estudantes estão habituados com atividades baseadas no paradigma do exercício, a proposição de problemas faz com que a investigação matemática se constitua, uma vez que é fundamental que intervenções sejam feitas para instigar os discentes no processo de resolução, desde a interpretação dos problemas até o desenvolvimento de estratégias e análise dos resultados. Dessa maneira, o diálogo auxilia no desenvolvimento lógico-matemático e, inclusive, na tomada de decisões.

As diferentes estratégias que foram adotadas na resolução dos problemas e as discussões que surgiram, evidenciam que apesar dos problemas terem níveis de dificuldade pré-determinados, esse fator pode variar de acordo com a interpretação e o envolvimento dos sujeitos de pesquisa. As discussões em grupo durante a resolução possibilitaram que os envolvidos trocassem ideias e percebessem que diferentes métodos convergem para a mesma resposta. No entanto, quando tais discussões transcendem às noções básicas do conteúdo abordado, como os tópicos que surgiram na aplicação das atividades, contribuem positivamente para o grupo e são muito enriquecedoras. Além disso, ratificam que quando a MRP e/ou a investigação matemática é adotada, o docente deve estar preparado para uma diversidade de situações em que os questionamentos e contribuições dos alunos, muitas vezes, sairão do planejamento adotado para a aula.

Quanto às dificuldades demonstradas pelos estudantes, relatam o reflexo dos hábitos de estudo que possuem, afinal, as listas de exercícios com seus enunciados de ordem restringem o educando a aplicação de fórmulas e uso de algoritmos descontextualizados. Conseqüentemente, quando precisam coletar os dados de um problema, “construir” os algoritmos e organizar as informações em linguagem matemática as dificuldades vem à tona.

Por fim, a proposição de problemas é uma excelente ferramenta para compreender conteúdos matemáticos, uma vez que, os conhecimentos prévios e os adquiridos durante a abordagem do conteúdo que está sendo estudado, são unificados para que as conjecturas criadas sejam capazes de estabelecer um processo contínuo de aprendizagem.

A possibilidade de observar que os participantes puderam inferir que sair da zona de conforto é necessário para estabelecer novas formas de aprender foi muito relevante para esse estudo. Ficou evidente que aliar as mais diferentes metodologias é fundamental para que se possa construir um processo de ensino e aprendizagem instigante, eficiente e desafiador.

6 TRABALHOS FUTUROS

A partir da realização desse trabalho alguns estudos decorrentes desse podem ser sugeridos, como por exemplo:

- Investigar nos cursos de formação de professores qual a percepção dos futuros educadores sobre a MRP.
- Avançar o estudo para turmas do ensino fundamental anos finais.
- Aprofundar a utilização dos cenários de investigação na utilização da MRP.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, R. S. **Resolução de problemas no ensino de função afim**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2014.

BACKES, Lucas Henrique. **Resolução de problemas**: uma alternativa para o ensino de funções. 100 problemas propostos. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC / SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRESEGHELLO, Andréia Perpétua Barboza. **Resolução de problemas com aplicações em funções**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2016.

BÚRIGO, Elisabete Zardo et al. **A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

DAMIANI, Magda Floriana et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. In: **Cadernos de Educação**, FaE/PPGE/UFPel. Pelotas, n. 45, p. 57-67, maio/agosto 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2003.

_____. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. – 1 ed. – São Paulo: Ática, 2009.

EMPRESA BRASILEIRA DE COMUNICAÇÃO. **Exame Nacional do Ensino Médio.** <http://www.ebc.com.br/sites/_portalebc2014/files/atoms/files/cad_enem_2014_3aplic_dia_2_-_cinza_1.pdf> Acesso em: 25 ago. 2016.

FAUSTINO, A. C.; PASSOS, C. L. B. Cenários para Investigação e Resolução de Problemas: Reflexões para Possíveis Caminhos. **Revista Educação e Linguagens**, Campo Mourão (PR), v. 2, n. 3, p. 62-74, jul./dez. 2013.

GROSSI, Esther Pillar. A Contribuição da Psicologia na Educação. **Em Aberto**, Brasília, ano 9, n. 48, out./dez. 1990.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Enem - Provas e gabaritos.** Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_Domingo_GAB.pdf> Acesso em: 25 ago. 2016.

ONUICHIC, Lourdes de la Rosa. ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.** Recife: SBEM, 2009, p. 169-187.

_____. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PEREIRA, Antônio Luiz. **Problemas matemáticos:** caracterização, importância e estratégias de resolução. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. 2002.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução de: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência. Reimpressão, 2006.

PONTE, João Pedro da. BROCARD, Joana. OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** – 2 ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

SILVER, Edward A.; SMITH, J. Philip. Imagine um problema correlato. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 3ª reimpressão, 1997.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução de: Jonei Cerqueira Barbosa. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000.

APÊNDICE A – Questionário inicial (Ensino Médio)

- 1) Você já reprovou de ano?
() Sim () Não

- 2) Se a resposta da pergunta anterior foi sim, responda:
 - Quantas vezes você reprovou? _____
 - Em qual(is) ano(s)? _____
 - Sua reprovação foi motivada por qual(is) disciplina(s)? _____

- 3) Você estuda...
 - () Diariamente
 - () Uma vez por semana
 - () De duas a três vezes por semana
 - () Na véspera das avaliações

- 4) Como você estuda para as avaliações?
 - () Listas de exercícios
 - () Problemas
 - () Vídeo-aulas
 - () Outro: _____

- 5) Como você considera o seu aprendizado em relação ao conteúdo de funções?
() Ótimo () Bom () Satisfatório () Regular () Ruim

- 6) Considerando os resultados de avaliações, como foi seu desempenho?
() Ótimo () Bom () Satisfatório () Regular () Ruim

- 7) Qual a sua reflexão sobre seus hábitos de estudo? Se considera que possui alguma dificuldade, cite-as:

- 8) Como você classifica a sua relação com a matemática? Sente-se motivado(a) para lecionar esta disciplina?

APÊNDICE B – Questionário final (Ensino Médio)

- 1) Você gostou da atividade?
() Sim () Não
- 2) Você encontrou dificuldade em resolver os problemas?
() Sim () Não
- 3) Qual problema você achou mais fácil?
() Problema A () Problema B () Problema C () Problema D
- 4) Qual problema você achou mais difícil?
() Problema A () Problema B () Problema C () Problema D
- 5) Qual a sua maior dificuldade em resolver os problemas?
() Identificar dos dados
() Organizar os dados em linguagem matemática
() Desenvolver as estratégias de resolução
() Analisar os resultados
() Outra: _____
- 6) As intervenções da pesquisadora auxiliam durante a resolução?
() Sim () Não

Justifique: _____

- 7) Você considera que a resolução de problemas auxilia no entendimento do conteúdo?
() Sim () Não

Justifique: _____

APÊNDICE C – Questionário inicial (Ensino Superior)

- 1) Quantas vezes você já cursou este componente curricular? _____

- 2) Você estuda...
 - () Diariamente
 - () Uma vez por semana
 - () De duas a três vezes por semana
 - () Na véspera das avaliações

- 3) Como você estuda para as avaliações?
 - () Listas de exercícios
 - () Problemas
 - () Vídeo-aulas
 - () Outro: _____

- 4) Como você considera o seu aprendizado em relação ao conteúdo de funções?
 - () Ótimo () Bom () Satisfatório () Regular () Ruim

- 5) Considerando os resultados de avaliações, como foi seu desempenho?
 - () Ótimo () Bom () Satisfatório () Regular () Ruim

- 6) Qual a sua reflexão sobre seus hábitos de estudo? Se considera que possui alguma dificuldade, cite-as:
 - _____
 - _____
 - _____

APÊNDICE D – Questionário final (Ensino Superior)

1) Você gostou da atividade?

() Sim () Não

2) Você encontrou dificuldade em resolver os problemas?

() Sim () Não

3) Qual problema você achou mais fácil?

() Amarelo () Azul () Rosa () Verde

4) Qual problema você achou mais difícil?

() Amarelo () Azul () Rosa () Verde

5) Qual a sua maior dificuldade em resolver os problemas?

() Identificar dos dados

() Organizar os dados em linguagem matemática

() Desenvolver as estratégias de resolução

() Analisar os resultados

() Outra: _____

6) As intervenções da pesquisadora auxiliam durante a resolução?

() Sim () Não

Justifique: _____

7) Você considera que a resolução de problemas auxilia no entendimento do conteúdo?

() Sim () Não

Justifique: _____

8) Você adotaria a metodologia da resolução de problemas nos seus estudos?

() Sim () Não

Justifique: _____

ANEXO A – Resolução do problema A

(ENEM - 2014) Ao alugar um carro, o locatário precisa pagar R\$ 60,00 por dia e mais R\$ 1,50 por quilômetro rodado. Para facilitar, as locadoras podem fazer uma relação entre o valor a ser pago P , em reais, em função dos quilômetros rodados, representado por x . Qual das expressões abaixo representa o valor pago pelos locatários em função dos quilômetros rodados?

- a) $P = 61,50 + 1,50x$
- b) $P = 60x + 1,50$
- c) $P = 60 + 1,50x$
- d) $P = 61,50x$
- e) $P = 1,50x$

Resolução:

Aluguel = custo fixo + custo variável

Custo fixo = R\$ 60,00 por dia

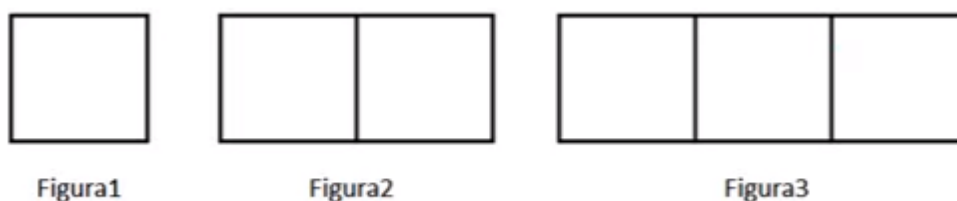
Custo variável = R\$ 1,50 por quilometro rodado (x)

Equação do aluguel: $P = 60 + 1,5x$

Resposta correta: c

ANEXO B – Resolução do problema B

(ENEM - 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



Que expressão fornece a quantidade de quadrados de cada figura?

- a) $C = 4Q$
- b) $C = 3Q + 1$
- c) $C = 4Q + 1$
- d) $C = Q + 3$
- e) $C = 4Q - 2$

Resolução:

O enunciado nos dá três situações:

I) Em um quadrado, são usados quatro canudos.

II) Para formar um segundo quadrado, é aproveitado um lado já existente, e são adicionados três novos canudos, formando o segundo quadrado.

III) Mais uma vez é aproveitado um lado já existente, e assim três novos canudos formam mais um quadrado.

Portanto serão usados 3 canudos por quadrado e mais um por causa do quadrado inicial: $C = 3Q + 1$.

Resposta correta: b

ANEXO C – Resolução do problema C

Observe a figura abaixo, que relaciona o número de palitos de fósforo com o número de triângulos:



Seguindo o padrão estabelecido, complete a tabela abaixo:

Número de triângulos (q)	Número de palitos (p)	$(q; p)$
1	3	(1; 3)
2	$1 + 2 \cdot 2$	(2; 5)
3	$1 + 3 \cdot 2$	(3; 7)
4	$1 + 4 \cdot 2$	(4; 9)
5	$1 + 5 \cdot 2$	(5; 11)
6	$1 + 6 \cdot 2$	(6; 13)
q	$1 + q \cdot 2$	$(q; 1 + q \cdot 2)$

a) Quantos palitos são necessários para formar 12 triângulos?

Dados:

$$p = ?$$

$$q = 12$$

Resolução:

$$p = 1 + q \cdot 2$$

$$p = 1 + 12 \cdot 2$$

$$p = 25$$

b) Quantos triângulos são formados com 30 palitos?

Dados:

$$p = 30$$

$$q = ?$$

Resolução:

$$30 = 1 + q \cdot 2$$

$$29 = q \cdot 2$$

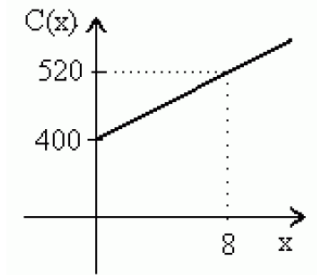
Não é possível formar um número exato de triângulos.

c) Pode-se dizer que o número de palitos depende do número de triângulos?

Sim. Como é possível observar pela expressão $p = 1 + q \cdot 2$, o número de palitos está em função do número de triângulos, ou seja, p depende de q .

ANEXO D – Resolução do problema D

Numa fábrica, o custo C de produção de x litros de certa substância é dado pela função $C(x)$, cujo gráfico está representado abaixo. O custo de R\$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros?



Dados:

$$P_1 = (0, 400)$$

$$P_2 = (8, 520)$$

$$P_3 = (x, 700)$$

Resolução:

Substituindo o ponto $(0, 400)$ na equação da reta, temos:

$$y = ax + b$$

$$400 = a \cdot 0 + b$$

$$b = 400$$

Substituindo o ponto $(8, 520)$ na equação da reta, temos:

$$y = ax + b$$

$$520 = a \cdot 8 + 400$$

$$120 = a \cdot 8$$

$$a = \frac{120}{8}$$

$$a = 15$$

Para encontrar o valor de x no ponto $(x, 700)$, substituímos os valores de a , b e y .

$$y = ax + b$$

$$700 = 15x + 400$$

$$300 = 15x$$

$$x = \frac{300}{15}$$

$$x = 20$$

Resposta: 20 litros