FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA
CAMPUS ALEGRETE

MAURÍCIO BRASIL GOMES

SOFTWARE LIVRE APLICADO AO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

ALEGRETE
2011

MAURÍCIO BRASIL GOMES

SOFTWARE LIVRE APLICADO AO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do Título de Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática.

Orientador (a): Ma. Vanessa Gindri Vieira

Co-orientador (a): Ma. Fabiane Cristina Höpner Noguti

Alegrete
2011

MAURÍCIO BRASIL GOMES

SOFTWARE LIVRE APLICADO AO ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do Título de Especialista em Tecnologia no Ensino de Matemática.

Área de concentração: Tecnologias no ensino.

Monografia defendida e aprovada em: 30 de novembro de 2011.
Banca examinadora:

Profa. Ma. Vanessa Gindri Vieira
Orientadora
UFSM

Prof. Me. Fernando Colman Tura
UNIPAMPA

Profa. Ma. Maria Cristina Graeff Wernz
UNIPAMPA

Dedicar uma conquista a alguém é demonstrar, reconhecer que eles também ajudaram de algum modo. Aos alunos, professores e direção da Escola Estadual de Ensino Médio Tancredo de Almeida Neves, aos quais muito devo. A Profª. Vanessa Gindri Vieira, por seu esforço e apoio em minha formação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, criador do universo, por possibilitar a concretização de mais um passo em minha vida.

Aos amigos Leonardo Trindade Palau e Márcia Iara da Costa Dornelles, um agradecimento especial, pelos incentivos de trilhar a caminhada na busca de sonhos e ideais.

Aos colegas, agradeço pela troca de experiências e saberes.

Aos professores do curso, em especial a professora Vanessa Gindri Vieira.

Finalmente, à direção, professores e alunos da Escola Estadual de Ensino Médio Tancredo de Almeida Neves, que com muita sabedoria e carinho abriram suas portas para que este trabalho se concretizasse.

O mais belo sentimento é o sentido do mistério. É a origem de toda ciência verdadeira. Quem jamais conheceu esta emoção, quem não possui o dom de admiração é como se estivesse morto: seus olhos estão cerrados.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho monográfico versa sobre o ensino do conteúdo matemático números complexos: suas propriedades e operações básicas. Trata-se de uma pesquisa exploratória, cujo problema foi identificar qual a contribuição que o uso de um software livre traz para o ensino de números complexos. O campo de pesquisa foi uma turma do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública da rede estadual de ensino. O estudo teve por objetivo facilitar o ensino de números complexos, com a utilização de um software de apoio. Justifica-se a escolha desse tema porque durante a realização de práticas pedagógicas e de entrevistas realizadas com alunos ingressantes nos cursos de graduação da Universidade Federal do Pampa, Campus Alegrete, verificou-se grande dificuldade no ensino aprendizagem do conteúdo em questão. A investigação caminhou em dois sentidos: inicialmente, o conteúdo foi exposto por meio da metodologia tradicional, em sala de aula. Em um segundo momento, propôs-se o ensino com auxílio da tecnologia, por meio do software livre *Números Complexos,* no laboratório de informática. Após a implementação desta proposta de ensino, constatou-se que o software utilizado viabiliza a aprendizagem significativa do conteúdo números complexos, possibilitando melhor visualização gráfica e reforçando conceitos já trabalhados em sala de aula, porém o uso da tecnologia não substitui totalmente a apresentação prévia do conteúdo em uma metodologia expositiva.

Palavras-chave: Ensino Médio. Números Complexos. Software Livre.

ABSTRACT

This monograph deals with the teaching of mathematical content complex numbers: basic properties and operations. This is an exploratory survey, whose problem was to identify what contribution the use of a free software brings to the teaching of complex numbers. The field research was a class of third year of high school in a public school. The study aimed to facilitate the teaching of complex numbers, with the use of a software support. Justifies the choice of this theme because during the course of educational practices and interviews with new students in undergraduate courses at the Federal University of Pampa, Campus Alegrete, there was great difficulty in teaching and learning of the content in question. Research walked in two senses: first, the contents were exposed through the traditional method in the classroom. In a second step, it was proposed to aid the teaching of technology, through the free software Complex Numbers in the computer lab. After implementation of the proposed school, it was found that the software used enables the meaningful learning of the content of complex numbers, enabling better visualization and graphics reinforce concepts already worked in the classroom, but the use of technology does not completely replace the prior presentation of content in a methodology exhibition.

Keywords: Secondary Education. Complex Numbers. Free Software.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em experiências como docente, durante a realização do curso superior de licenciatura em Matemática, também no contato com colegas professores, foi possível perceber que o estudo dos números complexos, muitas vezes, é visto na escola de forma isolada, sem aplicação e contextualização histórica, ocasionando um desinteresse por parte do aluno. Corroborando com estas justificativas, realizou-se uma entrevista semi estruturada, por meio eletrônico, com alunos ingressantes nos cursos de graduação da Universidade Federal do Pampa, Campus Alegrete, que confirmaram as dificuldades no processo de ensino aprendizagem desse conteúdo.

Isso posto, essa pesquisa que teve como tema *Software livre aplicado ao ensino de números complexos,* propôs-se a facilitar o ensino de números complexos com a utilização de um software livre.

Trata-se de uma pesquisa exploratória, baseada em Gil (1996), cujo problema foi identificar qual a contribuição do uso de um software livre para o ensino de números complexos.

Tendo em vista que o estudo desse conteúdo, na educação básica, normalmente é desenvolvido no 3º ano, apresentou-se como campo de pesquisa uma turma do 3º ano do ensino médio de uma escola pública da rede estadual de ensino do município de Alegrete. Tanto a turma quanto a escola foram escolhidas de forma intencional.

Para escolha de uma ferramenta de apoio para implementação da proposta de pesquisa, fez-se uma investigação na Internet com a finalidade de identificar os possíveis softwares livres que se adaptariam ao conteúdo números complexos. Dentre os softwares analisados, optou-se pelo software livre *Números Complexos,* de Leal (2005), tendo em vista que o mesmo apresenta versão em português e possui uma interface acessível aos alunos.

Para o desenvolvimento da proposta elaborou-se uma apostila com o conteúdo, conforme *apêndice B*. No primeiro momento, o conteúdo foi exposto aos alunos, na sala de aula, sendo realizadas atividades de forma tradicional, em quatro encontros. Posteriormente, fez-se uma apresentação do software livre *Números Complexos* com uso de multimídia e após desenvolveu-se atividades no laboratório de informática da escola. Os resultados apontam que o uso do software livre

Números Complexos proporcionou uma aprendizagem significativa do conteúdo, possibilitando, também, melhor visualização gráfica e reforçando conceitos já trabalhados em sala de aula.

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. No capítulo 2, expõe-se uma análise das recomendações dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), com relação ao ensino dos números complexos e dos dados obtidos através da entrevista realizada com alunos ingressantes dos cursos de graduação da Universidade Federal do Pampa.

No capítulo 3, é discutida a utilização de recursos tecnológicos no ensino, à luz do pensamento de Valente (1993), conciliando à teoria de aprendizagem significativa, baseada em Ausubel (1980).

No capítulo 4, intitulado por conjunto dos números complexos, apresenta-se a origem dos números complexos, suas propriedades e operações na forma algébrica.

A descrição da funcionalidade do software livre *Números Complexos,* a partir de suas interfaces, encontra-se no capítulo 5.

No capítulo 6, apresenta-se a análise e discussão dos resultados, a partir da implementação da proposta de ensino dos números complexos em uma turma do 3º ano do ensino médio.

No último capítulo, seguem-se as considerações finais, com um olhar reflexivo e crítico sobre o ensino e a aprendizagem dos números complexos.

Procurou-se, por intermédio dessa pesquisa, apresentar uma alternativa para o ensino de números complexos através da implementação de uma proposta de ensino que consiste na utilização do software livre *Números Complexos* como ferramenta que auxilie o educando no processo de aprendizagem.

2 O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Diante da importância da Matemática e dos problemas enfrentados em seu ensino, tal como a falta de significado dos conteúdos, surge a necessidade de reverter o ensino centrado em procedimentos mecânicos e sem significados para o aluno (PCN, 2000).

Os PCNs também sinalizam para a importância de não deixarmos que a história da Matemática fique limitada à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografia de matemáticos famosos. Em relação aos aspectos históricos dos números complexos os PCNs destacam que:

> Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$. (BRASIL, 2006, p. 71)

É preciso considerar que essa orientação didática aos professores, encontrada nos PCNs, leva à crença de que os números complexos surgiram da necessidade, puramente algébrica, de se obter uma solução para equações do tipo $x^2 + 1= 0$, causando um obstáculo metodológico encontrado em grande parte dos textos didáticos.

Nesse sentido, a história dos números complexos contribui de forma significativa para quebra desse obstáculo metodológico, além de explicar o aparecimento de termos como $\overline{}$ e *i*.

Após leitura das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN Ensino Médio, 2002), destaca-se competências que podem ser exploradas no ensino dos números complexos:

- Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas;

- Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica;

- Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o

objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística;

- Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada;

- Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia.

- Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas.

A inclusão dos números complexos nos parâmetros curriculares para o Ensino Médio e suas relações com o conteúdo de outras disciplinas como a Física, a Engenharia, os Circuitos Elétricos, a Topografia, a Informática e a Cosmologia apontam para a importância destes conteúdos na formação matemática do aluno.

Apesar da forma abstrata, a Matemática tem origem no mundo real e realmente possui aplicações em tantas outras disciplinas. Portanto, certos conteúdos, como é o caso dos números complexos, são imprescindíveis na resolução de problemas cotidianos e orientam a uma solução lógica e objetiva.

2.1 Entrevista sobre o ensino de números complexos

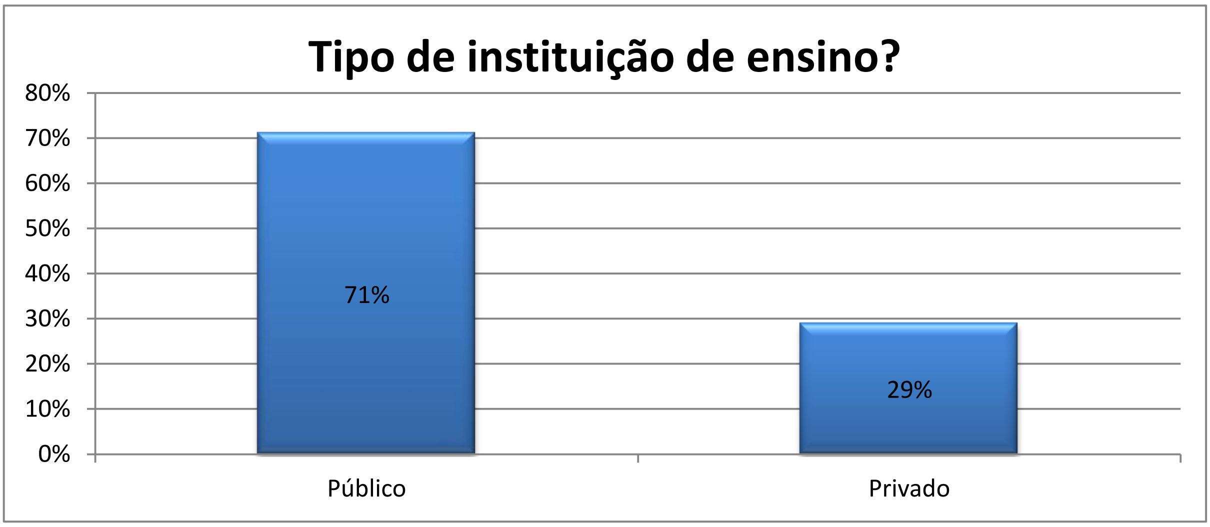
Realizou-se entrevista, semi estruturada, com alunos ingressantes, no ano de 2011, da Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA Campus Alegrete, com a finalidade de descobrir como se deu o ensino do conteúdo matemático números complexos durante a realização do ensino médio por estes alunos. A entrevista encontra-se no *Apêndice A*.

Na sequência, a análise dos resultados obtidos com a participação de 45 alunos voluntários.

A entrevista foi feita por meio de formulário do Google Docs[1], disponível através de um link enviado às listas de email dos alunos.

Ao perguntar o tipo de instituição de ensino em que cursaram o Ensino Médio aos alunos entrevistados, verificou-se que 71% dos alunos realizaram o Ensino Médio em escolas da rede pública de ensino e 29% em escolas particulares (figura 1).

Figura 1 – Tipo de instituição de ensino



Fonte: Gomes, 2011.

Os alunos da Universidade Federal do Pampa são naturais de diversas cidades do Brasil. Na figura 2, observou-se que 27% dos alunos realizaram o Ensino Médio em uma escola da cidade de Alegrete, 44% dos alunos realizaram o Ensino Médio em uma escola localizada em outro município do Estado do Rio Grande do Sul e 29% dos alunos entrevistados realizaram o Ensino Médio em uma escola localizada em outro Estado do Brasil.

---

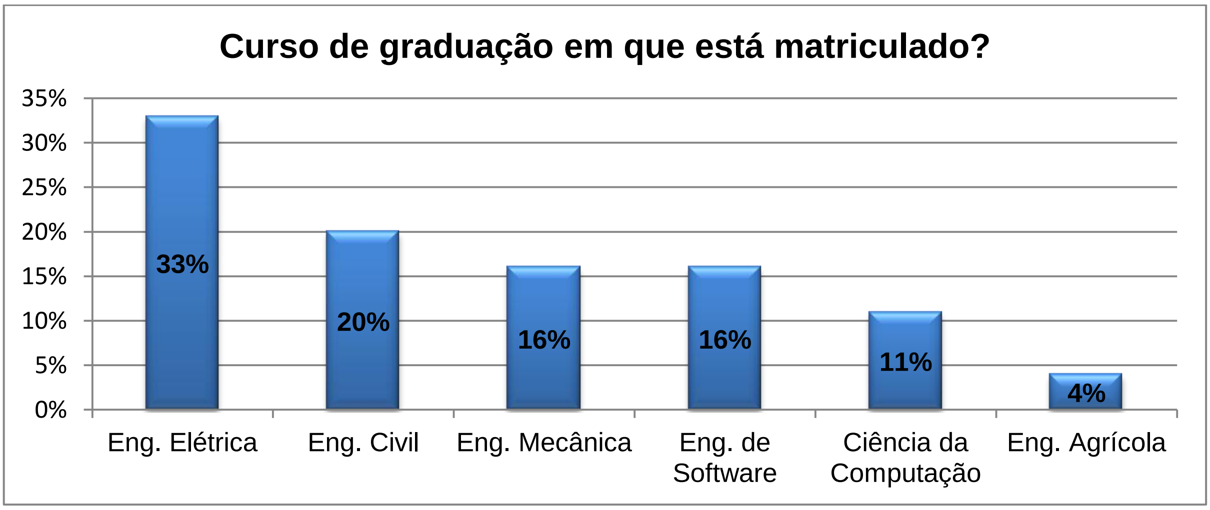
[1] O **Google Docs**, é um pacote de aplicativos do Google baseado em AJAX. Funciona totalmente on-line diretamente no navegador. Os aplicativos são compatíveis com o OpenOffice.org/BrOffice.org, KOffice e Microsoft Office, e atualmente compõe-se de um processador de texto, um editor de apresentações, um editor de planilhas e um editor de formulários, utilizado neste trabalho.

Figura 2 – Cidade em que a escola está localizada

Fonte: Gomes, 2011.

Os alunos entrevistados são ingressos dos diferentes cursos de graduação da Universidade Federal do Pampa, sendo 33% dos alunos matriculados no curso de Engenharia Elétrica, 20% no curso de Engenharia Civil, 16% no curso de Engenharia Mecânica, 16% no curso de Engenharia de Software, 11% no curso de Ciência da Computação e 4% no curso de Engenharia Agrícola, conforme figura 3.

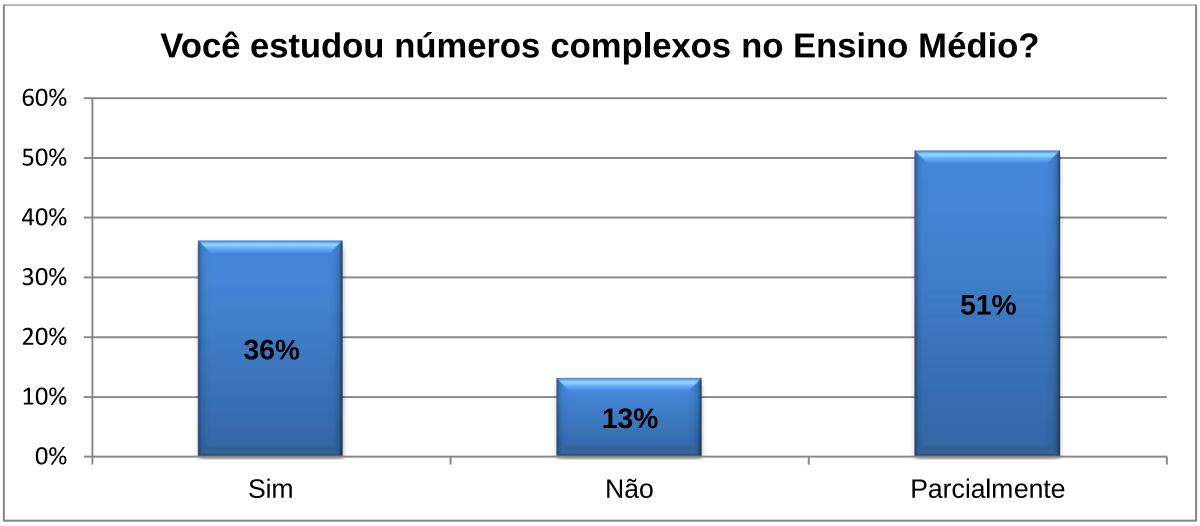
Figura 3 - Curso de graduação em que está matriculado.



Fonte: Gomes, 2011.

Ao perguntar se o aluno entrevistado estudou o conteúdo matemático números complexos durante o Ensino Médio, obtiveram-se dados que se acredita mostrar a realidade do ensino deste conteúdo no Brasil, sendo que 36% afirmaram que estudaram o conteúdo números complexos no Ensino Médio, 13% não estudaram este conteúdo e 51% de modo parcial, conforme figura 4.

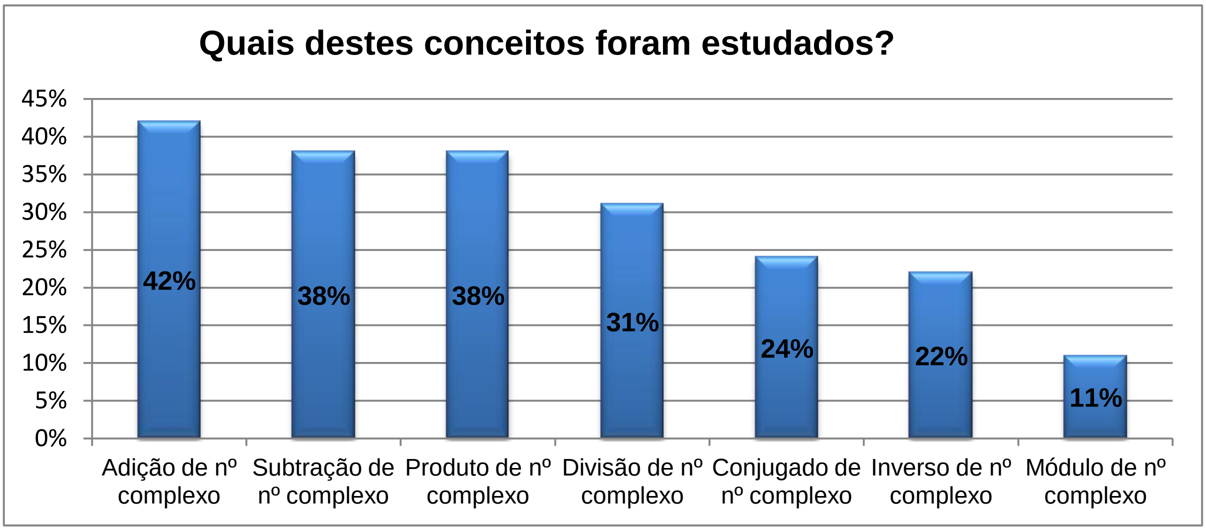
Figura 4 - Você estudou números complexos no Ensino Médio.



Fonte: Gomes, 2011.

Os alunos entrevistados apontaram alguns conceitos estudados no ensino de números complexos: 42% dos alunos estudaram adição de números complexos, 38% dos alunos estudaram subtração de números complexos, 38% dos alunos estudaram multiplicação de números complexos, 31% dos alunos estudaram divisão de números complexos, 24% dos alunos estudaram o conjugado de um número complexo, 22% dos alunos estudaram o inverso de um número complexo e 11% dos alunos estudaram o módulo de um número complexo. Ressalta-se que nesta pergunta os alunos tiveram a opção de marcar mais de uma resposta, por isso a soma dos percentuais ultrapassa o valor de cem por cento (figura 5).

Figura 5 - Quais destes conceitos foram estudados.



Fonte: Gomes, 2011.

Sabe-se que a maior parte dos alunos, por diversos fatores, apresentam dificuldades no processo de aprendizagem do conteúdo números complexos. A *figura 6* mostra que apenas 18% dos alunos entrevistados afirma ter entendido este conteúdo, 44% admitem não ter entendido e 38% dos alunos revelam ter entendido parcialmente.

Figura 6 - Você entendeu este conteúdo.

Fonte: Gomes, 2011.

Quando questionados a respeito das dificuldades encontradas no processo de aprendizagem do conteúdo, os alunos listaram:

- Muitos conceitos e poucos exercícios propostos;

- Compreensão da explicação;

- A complexidade do conteúdo;

- O conteúdo foi desenvolvido ao final do ano letivo. Pelo fato de estar aprovado não deu muita importância;

- Falta de entendimento de conteúdos anteriores, que serviriam como base para compreender números complexos;

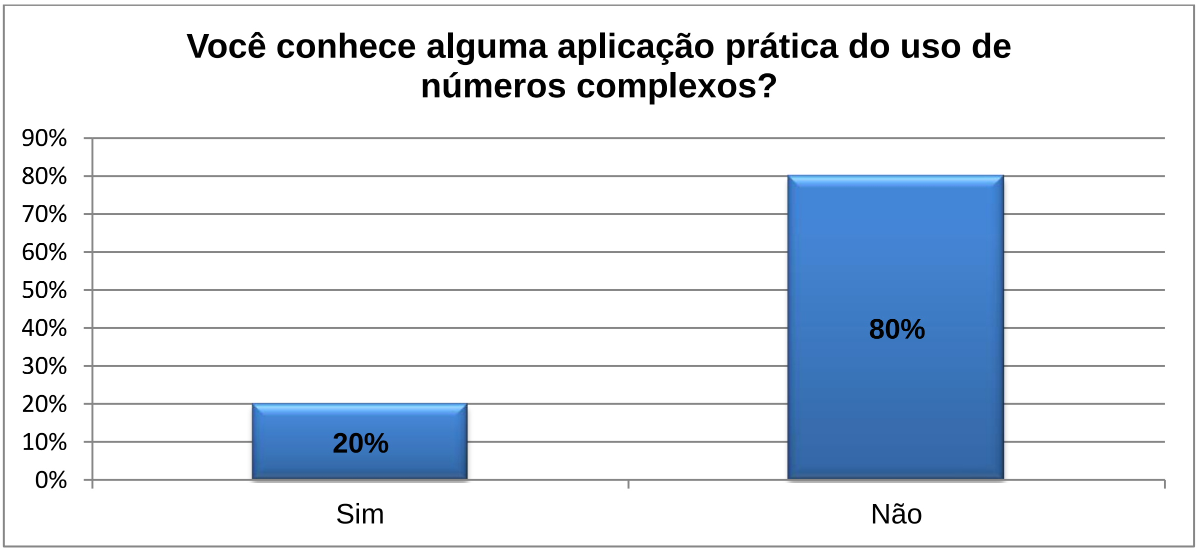
- Falta de cobrança por parte do professor;

- Desinteresse do professor em explicar este conteúdo;

- Dificuldade nas operações com números complexos.

Os números complexos possuem aplicações práticas em diversas áreas. Considera-se de suma importância no processo de aprendizagem que os alunos reconheçam a aplicabilidade destes números. Apenas 20% dos alunos entrevistados afirmam conhecer alguma aplicação prática dos números complexos. Contraposto, 80% dos alunos não conhecem uma aplicação do uso dos números complexos (figura 7).

Figura 7 - Você conhece alguma aplicação prática do conteúdo.



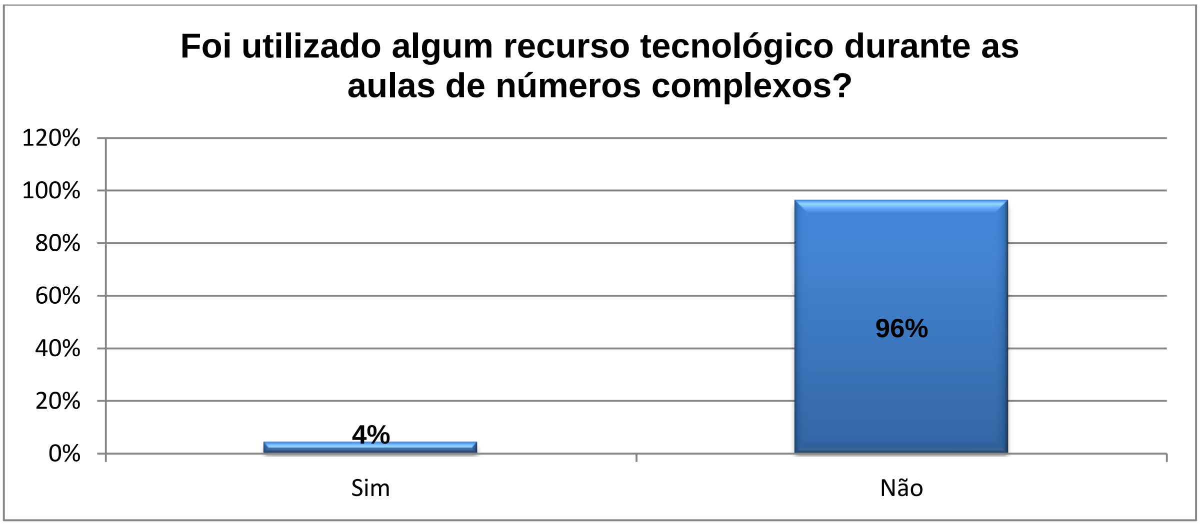
Fonte: Gomes, 2011.

Aos 20% dos alunos que afirmaram conhecer alguma aplicação dos números complexos, perguntou-se quais seriam estas aplicações. Na sequência, algumas das aplicações citadas pelos alunos:

- Fasores
- Cálculo e Física
- Análise de circuitos
- Cálculo de potências ativas e reativas
- Corrente elétrica
- Circuitos elétricos (03 respostas)
- Engenharia elétrica

Sabe-se da importância da utilização de recursos tecnológicos no processo ensino-aprendizagem. Questionou-se aos alunos se durante as aulas do conteúdo números complexos, o professor utilizou algum destes recursos. Apenas 4% dos alunos entrevistados responderam afirmativamente à pergunta e 96% dos alunos dizem não ter sido utilizado recursos tecnológicos como ferramenta de apoio à aprendizagem (figura 8).

Figura 8 - Foi utilizado algum recurso tecnológico nas aulas.



Fonte: Gomes, 2011.

Os recursos tecnológicos utilizados durante as aulas de números complexos, citados pelos alunos que responderam *sim* à pergunta anterior, foram:

- Datashow
- Software Matlab

3 RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO

Acredita-se que o professor precisa criar no aluno a necessidade de aprender, que essa será sua força no processo de construção do conhecimento. Sendo assim, percebe-se a importância em contextualizar o conteúdo procurando maior rendimento no aprendizado. O uso da fala, lousa e giz deixaram de ser os únicos recursos em sala de aula. Passou-se a buscar formas para permitir visualizar os exemplos. Uma nova fase veio agregar à aula recursos para auxiliar o professor. O livro, com sua importância até hoje e por muito tempo destacada, ganhou companheiros: o globo terrestre, o mapa e outros auxiliares. Com o avanço da tecnologia surgem os acetatos e os retroprojetores. As transparências passam a auxiliar na construção do conhecimento, oferecendo apresentações projetadas, preparadas com calma e antecedência, substituindo a lousa em alguns tópicos.

Lentamente o projetor de slides entrou como auxiliar ao professor, ganhando espaço nas aulas.

Recursos audiovisuais passaram a ser apoio fundamental para as aulas em classe. O videocassete, o computador e a multimídia vieram contribuir com os recursos que tornaram uma aula mais interessante.

A utilização da informática na área da educação pode ser considerada complexa, devido à diversidade dos recursos disponíveis. Com ela, é possível se comunicar, pesquisar, criar desenhos, efetuar cálculos, simular fenômenos, e muitas outras ações. Nem um outro recurso didático possui tantas funções, além de ser o recurso tecnológico mais utilizado em todas as áreas do mercado de trabalho.

O computador deve assumir o papel de ferramenta e não de máquina de ensinar. É a ferramenta que permite ao aluno realizar uma série de tarefas, das mais simples, como produzir uma carta, até as mais complexas, como a resolução de problemas sofisticados em matemática e ciências. Nesse sentido, o computador passa a ter uma função maior do que simplesmente passar informação. Ele é uma ferramenta que o aluno utiliza para realizar uma tarefa. Nesta situação, o aluno descreve as suas ideias para a máquina (na forma de um programa), a máquina executa “essa ideia” e o resultado pode ser analisado. Se o resultado não é o esperado, certamente o aluno será instigado a refletir sobre o seu trabalho. Do mesmo modo, o professor, através do trabalho do aluno, terá mais recursos para entender o que o aluno sabe e o que não sabe sobre um determinado assunto, conhecer o estilo de trabalho do aluno, bem como seus interesses e frustrações. Valente (1993).

A utilização de recursos tecnológicos no ensino pode proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa por meio da interação e da comunicação.

Ressalta-se que a simples utilização desses recursos, sem um planejamento adequado, não garantirá um ensino qualificado. Sendo assim, é de suprema importância um projeto educativo com conteúdo, método e objetivos didáticos a serem alcançados.

3.1 Aprendizagem Significativa

A aprendizagem significativa, que é o conceito central da teoria de Ausubel (1968) e que foi aprofundada pelo próprio Ausubel, Novak e Hanesian (1980), é definida como a aprendizagem que ocorre quando as idéias novas estão ligadas a informações ou conceitos já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Ou seja, a aprendizagem significativa só ocorrerá quando uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a um aspecto da base de formação conceitual do educando. Nesse processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de “conceito subsunçor” existente na estrutura cognitiva de quem aprende.

Segundo Moreira (2006), os conhecimentos âncoras ou “subsunçores” podem ser conceitos, ideias, proposições já existentes na estrutura cognitiva, capazes de servir de “ancoradouro” a um novo conhecimento de modo que este adquira, assim, significado para o aprendiz.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) defendem a idéia de que é possível desenvolver métodos que facilitem a melhoria do trabalho em sala de aula na busca de uma aprendizagem significativa. Os autores distinguem a aprendizagem significativa da aprendizagem mecânica, afirmando que tanto a aprendizagem por descoberta como a receptiva podem ser significativas. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), não há oposição entre a aprendizagem mecânica e a significativa, elas representam na verdade um *continuum.* Segundo ele, a aprendizagem mecânica é inevitável no caso de conceitos inteiramente novos para o aluno, mas posteriormente ela se transformará em significativa.

Esses mesmos autores comentam ainda que, independente do quanto uma determinada proposição é potencialmente significativa, se a intenção do aluno é memorizá-la, tanto o processo de aprendizagem como o produto da aprendizagem será automático. A retenção, neste caso de aprendizagem que não é significativa, é mais limitada e muito mais pode ser aprendido e retido se houver aprendizagem significativa.

Segundo Moreira (2006), as condições para que ocorra aprendizagem significativa são entendidas como o grau de significação que será dado pelo indivíduo ao novo conceito, de acordo com os conhecimentos prévios (subsunçores) existentes na sua estrutura cognitiva. Ou seja, é fundamental que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar, de maneira substantiva e não arbitrária, o novo material, e que este tenha o caráter de ser potencialmente significativo à estrutura cognitiva do aluno.

Pretendeu-se, com a proposta de ensino aprendizagem dos números complexos, apresentada neste estudo, que fosse possível uma aprendizagem significativa no ambiente escolar devido à forma com que o conteúdo foi apresentado aos alunos, isto é, através da realização de atividades na sala de aula e no laboratório de informática, em torno de tarefas de exploração e investigação.

4 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Ao longo da história da Matemática, de acordo com a necessidade de representar certas situações, o homem buscou símbolos capazes de satisfazer suas necessidades. A representação dos conjuntos numéricos iniciou pelo conjunto dos números naturais, representado pela letra , sendo elementos pertencentes a esse conjunto: = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}. Diante de algumas operações mais complicadas, como subtrair de um número menor uma quantidade maior, houve a necessidade da existência de outros números. Surgiu, então, o conjunto dos números inteiros, representado pela letra . Pertencem a esse conjunto: = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}. O próximo conjunto a ser criado foi o dos números escritos na forma fracionária, denominado conjunto dos números racionais, representado pela letra , sendo pertencentes a este conjunto os elementos: = {..., -3, -2, -1,5, 0, 1, 2,5, 3...}. Ao resolver a raiz de alguns números, percebe-se que as soluções encontradas são números decimais infinitos e que não obedecem a uma sequência, portanto, esses números pertencem a um novo conjunto chamado irracionais, representados pela letra . Nenhum dos outros conjuntos citados anteriormente está contido no conjunto dos irracionais. A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais forma o conjunto dos números reais, representado pela letra .

Todos estes conjuntos não satisfizeram alguns cálculos, então surgiu o conjunto dos números complexos, em geral denotado pela letra , e escrito na forma algébrica $a + bi$, onde a representa a parte real e b a parte imaginária. Considerando que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, pode-se afirmar que o conjunto dos números complexos é o maior dos conjuntos numéricos.

4.1 Origem dos números complexos

Por volta do século XVI, os matemáticos afirmavam não existir raiz quadrada de um número negativo, pois um número negativo não é quadrado de nenhum número, pensamento que foi pregado por Bhaskara, desde o século XII. Rosa, 1998.

Neste período, havia na Europa, mais especificamente na Itália, grande interesse pelo estudo da Matemática. O feito mais relevante desse período foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Por volta de 1545, Nicolau Fontana, conhecido como Tartáglia, anunciou que a solução algébrica para uma equação cúbica do tipo: $x^3 + cx = d$, se dava através da fórmula, conhecida hoje, como fórmula de Cardano — Tartaglia:

Como na época não se extraiam raízes quadradas de números negativos, a fórmula de Cardano – Tartaglia só se aplicava quando:

Nessa época o matemático italiano, Rafael Bombelli, resolvendo a equação: $x^3 - 15x = 4$ *chegou* a um impasse. Para o cálculo direto, ele verificou que o número 4 era raiz da equação, pois $4^3 - 15.4 = 64 - 60 = 4$. Tentando verificar se encontrava a raiz de 4 aplicando a fórmula de Cardano — Tartáglia chegou à expressão:

Simplificando:

Por causa, desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não teria solução, pois não é um número real. No entanto, ele sabia que 4 era uma das raízes da equação. Para superar esse problema, ele tentou encontrou regras para trabalhar com esses números, que ele denominou imaginários.

Bombelli concebe a existência de expressões da forma e que possam ser consideradas, respectivamente, como e .

Ele escreveu:

De onde vem: $2^a = 4$ então $a = 2.$ Com $a = 2$, pode-se voltar à equação:

Por comparação, constatou-se que $b = 1.$ Obteve-se assim:

e

Então:

Os matemáticos da época procuravam maneiras de se evitar o uso dos números complexos. As primeiras tentativas bem sucedidas de caracterização destes novos números foram do engenheiro italiano Rafael Bombelli, que revelou regras para se operar com a unidade imaginária, reconheceu a existência dos números complexos e demonstrou a insuficiência dos números reais:

> Este tipo de raiz quadrada tem operações aritméticas diferentes dos outros e uma denominação diferente, porque quando o cubo da terça parte das coisas é maior que o quadrado da terça parte do número, o excesso não se pode chamar-lhe 'nem mais nem menos'. Mas vou chama-lhe 'mais de menos' quando for adicionado e quando for subtraído vou chama-lhe de 'menos de menos'. (BOMBELLI, 1568, apud OLIVEIRA, 2000, p.7)

As raízes quadradas de números negativos continuaram a ser trabalhadas, não só no estudo de equações algébricas. Ressalta-se que foram as equações do 3º grau e não as do 2º que levaram à criação dos números imaginários.

O símbolo foi utilizado por Leonhard Euller em 1777, e apareceu impresso pela primeira vez em 1784, tornando-se amplamente conhecido após seu uso por Gauss em 1801.

Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637. A expressão *número complexo* foi introduzida por Carl Friedrich Gauss em 1832.

O primeiro a formular a representação gráfica foi um agrimensor norueguês chamado Caspar Wessel (1745-1818), o qual representa o número complexo $a + bi$ pelo vetor do plano com origem O (a origem dos eixos coordenados) e com extremos no ponto P de coordenadas (a, b), ou seja, da mesma forma como é feita nos dias atuais.

Finalmente a formalização dos números complexos como pares ordenados de números reais seria desenvolvida em 1833 por Wilian Rowan Hamilton (1805-1865) e em 1847 por Agustín Cauchy (1789-1857).

4.2 Aspecto algébrico dos números complexos

O conjunto dos números complexos, representado por , surgiu a partir do tratado de Álgebra, publicado em 1572, por Rafael Bombelli. Nele, seus elementos devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto , e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto devem ser as mesmas já conhecidas. Se isso não fosse possível, o conjunto não seria um subconjunto de .

Todo número complexo escrito na forma de par ordenado de números reais $z = (a, b)$ pode ser escrito na forma algébrica $z = a + bi$, sendo a e b números reais e $i^2 = -1$. Um número complexo escrito nessa forma tem duas partes, quais sejam:

a = parte real de $z = Re\ (z)$

bi = parte imaginária de $z = Im\ (z)$.

Observa-se também que, se $b = 0$, então $z = a$ identifica-se como número real; se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $z = bi$, que se denomina imaginário puro, e se $a = b = 0$, o número complexo $z = 0$, é nulo.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são mais intuitivas do que com a representação por pares ordenados. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que i^2 é um número real e vale -1.

4.2.1 Operações com números complexos na forma algébrica

Tomando-se a forma algébrica dos números complexos, com ela se pode definir as operações soma, subtração, produto, conjugado, divisão e potência.

4.2.1.1 Adição

Dados os números complexos z e w tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, define-se a soma entre tais valores da seguinte forma:

$z + w = (a + bi) + (c + di)$

$z + w = (a + c) + (b + d)i$

Associa-se a operação com números complexos à operação correspondente com pares ordenados. Assim, como $z = a + bi = (a, b)$ e $w = c + di = (c, d)$, verifica-se que:

$z + w = (a + bi) + (c + di)$

$z + w = (a, b) + (c, d)$

$z + w = (a + c, b + d)$

$z + w = (a + c) + (b + d)i$

Exemplo:

Considerando os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 1 – 4i$:

$z + w = (a + c) + (b + d)i$

$z + w = (2 + 1) + (3 - 4)i$

$z + w = (3) + (-1)i$

$z + w = 3 – 1i$

4.2.1.2 Subtração

Considerando os números complexos z e w tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, a subtração entre z e w é definida como a soma de z com o simétrico de w. Sendo assim:

$z – w = z + (- w)$

$z – w = (a + bi) + [- (c + di)]$

$z – w = (a + bi) + (- c – di)$

$z – w = [a + (- c)] + [b + (- d)]\, i$

$z – w = (a – c) + (b – d)i$

Exemplo:

Sendo os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 1 – 4i$:

$z – w = (a – c) + (b – d)i$

$z – w = (2 – 1) + (3 – (- 4))\, i$

$z – w = 1 + 7\, i$

4.2.1.3 Produto

Dados os números complexos z e w tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, define-se o produto entre tais valores da seguinte forma:

z.w = (a + bi) . (c + di)

z.w = (a, b). (c, d)

z.w = (ac – bd) + (ad + bc)i

Exemplo:

Considerando os números complexos *z = 2 + 3i* e *w = 1 – 4i:*

z.w = (ac – bd) + (ad + bc)i

z.w = (2.1 – 3.(-4)) + (2.(-4) + 3.1)i

z.w = (2 + 12) + (- 8 + 3)i

z.w = 14 - 5i

4.2.1.4 Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo *z = a + bi,* denomina-se conjugado de *z, o* número complexo que se obtém a partir de *z* trocando o sinal de sua parte imaginária. O conjugado de um número complexo é representado por . Deste modo, sendo *z = a + bi*, o conjugado de *z* é = *a – bi.*

Exemplo:

O conjugado do número complexo *z = 3 + 4i* é = *3 – 4i.*

4.2.1.5 Divisão

Considerando os números complexos *z* e *w* tais que *z = a + bi* e *w = c + di*, sendo c ≠ 0 ou d ≠ 0 e – o conjugado de *w,* define-se a divisão em da seguinte forma:

Exemplo:

Dados os números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 1 + 2i$:

4.2.1.6 Potências de *i*

Dada a unidade imaginária $i = (0, 1)$, observa-se o que ocorre com suas potências:

- Toda potência cujo expoente é *0* (zero) o resultado é 1, então $i^0 = 1$;
- Toda potência cujo expoente é *1* o resultado é a própria base, então $i^1 = i$;
- Considerando a notação de par ordenado:

$(0, 1)^2 = (0, 1). (0, 1)$

$(0,1)^2 = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0)$

$(0,1)^2 = (0 – 1, 0 + 0)$

$(0,1)^2 = (-1, 0)$

$(0,1)^2 = -1$,

então $i^2 = - 1$;

- Aplicando as propriedades de potências, $i^3 = i^2. i = -1. i = - i$;
- Novamente pelas propriedades de potências, $i^4 = i^2. i^2 = (-1). (-1) = 1.$

A partir destas observações, verifica-se que as potências de *i* se repetem em ciclos de 4. Desta forma, define-se o resultado das potências de *i* para qualquer expoente inteiro, lembrando que dado um número inteiro *n*, ele pode ser escrito como $n = 4 q + r$, em que q e r é o resto da divisão de n por 4. Assim, r {0, 1, 2, 3}. Deste modo, dado i^n segue que:

$i^n = i^{4q+r}$

$i^n = i^{4q}.i^r$

$i^n = (i^4)^q. i^r$

$i^n = 1^q. i^r$

$i^n = i^r$

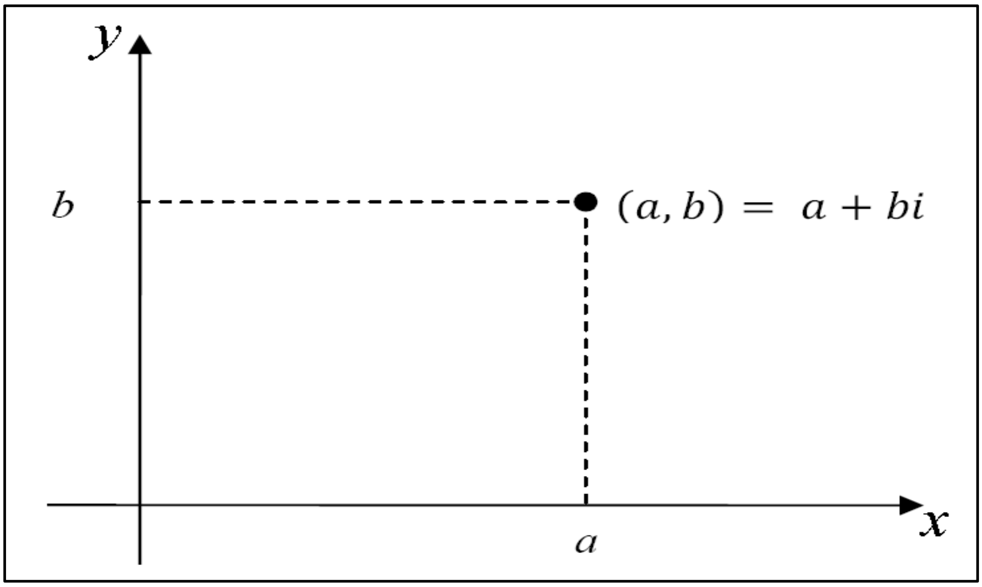
Como r {0, 1, 2, 3}, então i^r {1, i, -1, -i}

4.3 Plano de Argand-Gauss

Em fins do século XVIII e início do século XIX, trabalhando independentemente, C. F. Gauss e J. R. Argand associaram os pares ordenados do plano cartesiano a um número complexo. Desta forma, dado o par ordenado (a, b), ele seria associado ao número complexo $z = a + bi$, em que a parte real seria localizada sobre o eixo *Ox* e a parte imaginária ficaria sobre o eixo *Oy* (figura 9).

O ponto *P(a, b)* correspondente ao número complexo $z = a + bi$ é chamado *afixo* ou *imagem geométrica* de *z*. O eixo *Ox* recebe o nome de *eixo real*, enquanto que o eixo *Oy* é o *eixo imaginário*. O plano cartesiano associado aos números complexos recebe o nome de *plano de Argand-Gauss* em homenagem a estes matemáticos.

Figura 9 - Plano de Argand-Gauss



Fonte: Gomes, 2011.

4.4 Módulo de um número complexo

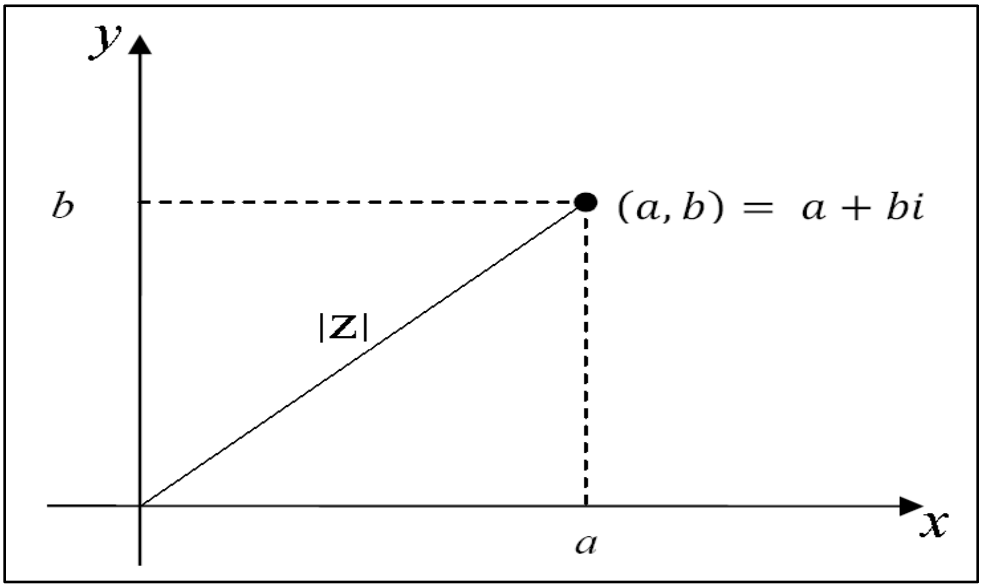
Dado um número complexo $z = a + bi$, define-se o seu módulo, representado por como sendo o valor positivo de

Exemplo:

O módulo de $z = 3 + 4i$ é:

Geometricamente, é a distância entre o afixo de *z* e o ponto (0, 0) origem do sistema de coordenadas cartesianas (figura 10).

Figura 10 – Módulo de um número complexo



Fonte: Gomes, 2011.

5 O SOFTWARE LIVRE NÚMEROS COMPLEXOS

Segundo o autor do software, Leal (2005), o programa permite fazer operações com números complexos. O usuário do software introduz os complexos na forma *a + bi*, escolhe a operação e pode ver a imagem geométrica dos complexos e do resultado da operação pretendida. Nas caixas de texto correspondentes podem introduzir-se os complexos, simplificados ou não, mas sempre na forma algébrica. Os valores digitados nas caixas de texto devem ser números inteiros. O software livre *Números Complexos* está disponível no seguinte endereço: *http://josefleal.neo.sapo.pt/numeroscomplexos.htm.* Ressalta-se que o software livre *Números Complexos* pode ser executado apenas no sistema operacional Windows.

5.1 Descrição das telas do software e suas funcionalidades

Neste capítulo, apresenta-se o software livre *Números Complexos*, com a visualização das telas e descrição de suas funcionalidades.

5.1.1 Página inicial

Ao executar o software, a tela mostrada na *figura 11* é apresentada ao usuário, sendo que a operação *Soma de Complexos* já está selecionada como padrão.

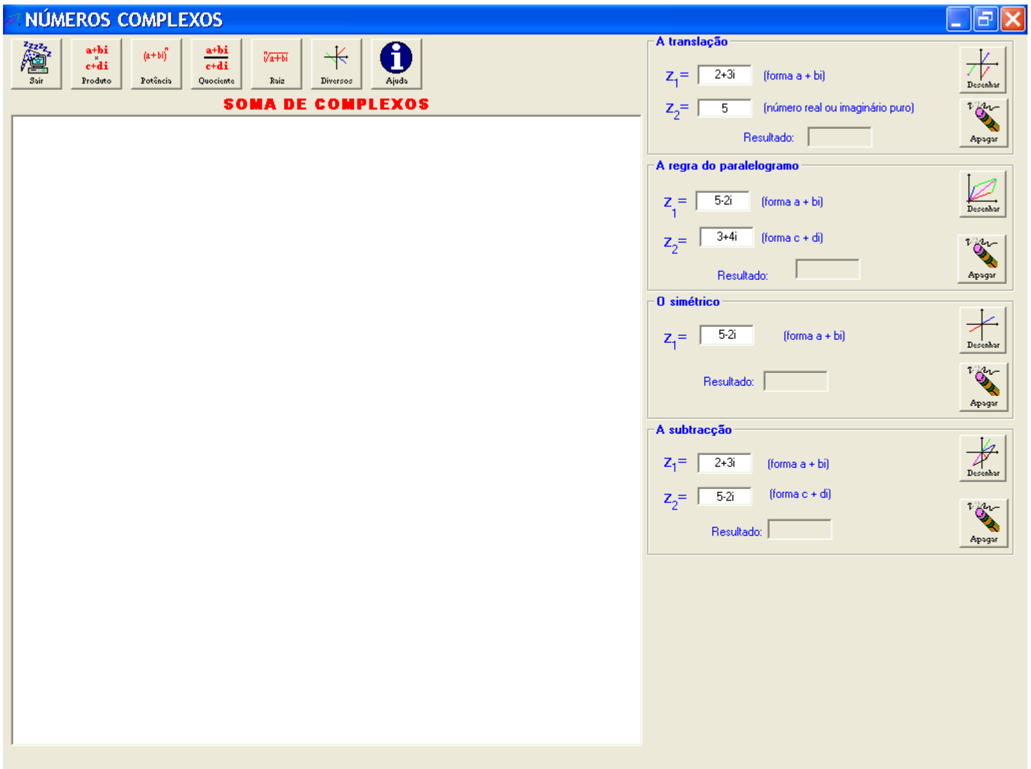
Na tela inicial existe os menus: *Sair*, que ao clicarmos o programa é fechado; *Produto*, que demonstra graficamente as operações do produto por número real, produto por unidade imaginária, produto por imaginário puro e o produto de dois complexos; *Potência*, com as potências da unidade imaginária, potências de imaginário puro e potências de número complexo; *Quociente*, onde encontramos o quociente por número real, quociente por imaginário puro, quociente por unidade imaginária e o quociente de dois complexos; *Raiz*, com as raízes da unidade imaginária, raízes de imaginários puros e as raízes de números imaginários; *Diversos*, neste menu temos o inverso e o conjugado de um número complexo;

Ajuda, que traz informações a respeito do software e dicas ao usuário quanto ao seu uso.

Abaixo do menu tem uma área branca, reservada para desenhar graficamente os números complexos.

À direita da tela são mostradas as seções pertinentes ao menu selecionado. Em cada seção existem dois botões denominados *Desenhar* e *Apagar*. Ao clicar no botão Desenhar, um gráfico aparecerá na área branca, localizada abaixo do menu e ao clicar no botão Apagar, este gráfico desaparecerá da área branca.

Figura 11 – Tela inicial do software



Fonte: Leal, 2005.

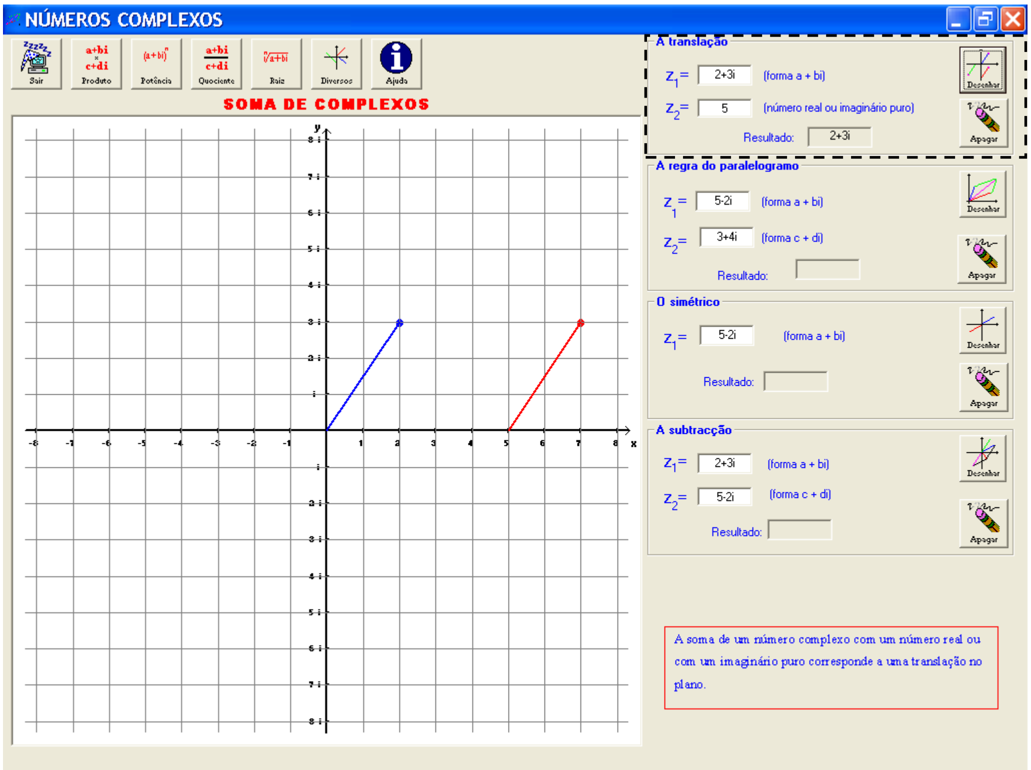
5.1.2 Menu soma

O menu Soma possui quatro seções denominadas: *A translação, A regra do paralelogramo, O simétrico e A subtração*.

5.1.2.1 A Translação

Na primeira seção, denominada *A translação*, destacada na *figura 12* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de translação de números complexos. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*), no campo Z_1, e um número real ou imaginário puro no campo Z_2, depois clicar no botão Desenhar. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de Z_1 e, em vermelho, o desenho gráfico do resultado da operação de translação.

Figura 12 – Translação



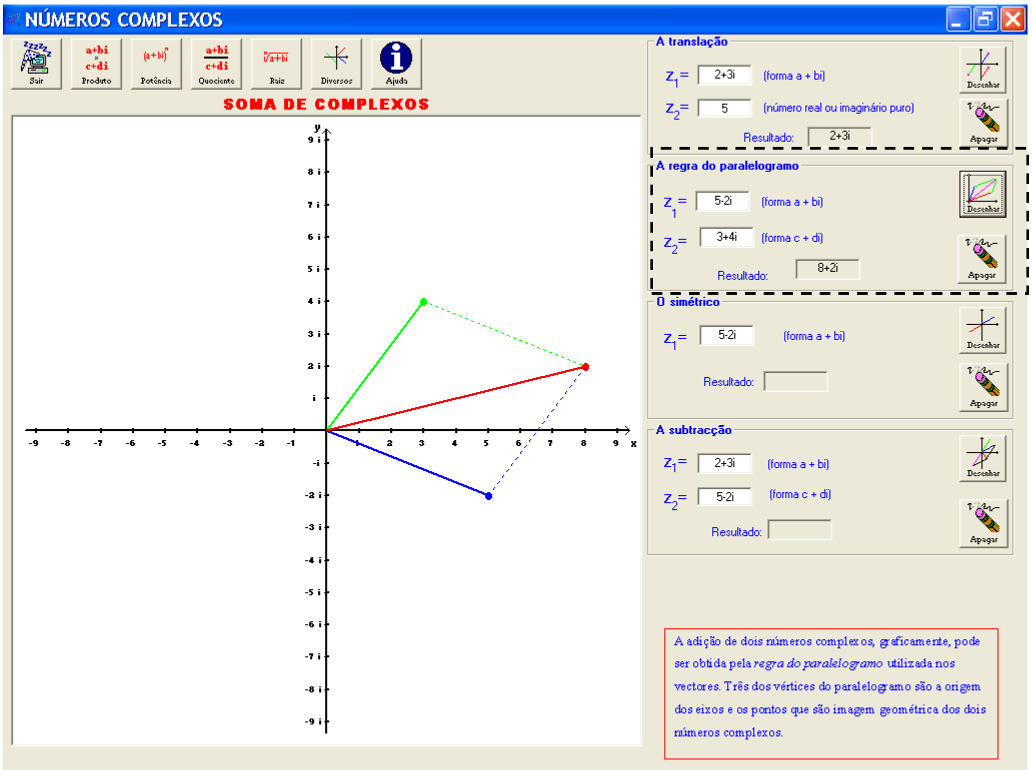
Fonte: Leal, 2005.

5.1.2.2 A regra do paralelogramo

Na segunda seção, denominada *A regra do paralelogramo*, destacada na *figura 13* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de soma de números complexos através da regra do paralelogramo, utilizada em vetores. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*), no campo

Z_1 e outro número complexo na forma algébrica (*c* + *di*) no campo Z_2, depois clicar no botão Desenhar. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de Z_1, em verde o desenho gráfico de Z_2 e em vermelho a diagonal do paralelogramo formado por Z_1 e Z_2, que representa o resultado da soma destes dois números complexos. No campo resultado aparecerá a resposta da soma do número complexo digitado no campo Z_1 com o número complexo digitado no campo Z_2, na forma *a* + *bi*.

Figura 13 – A regra do paralelogramo

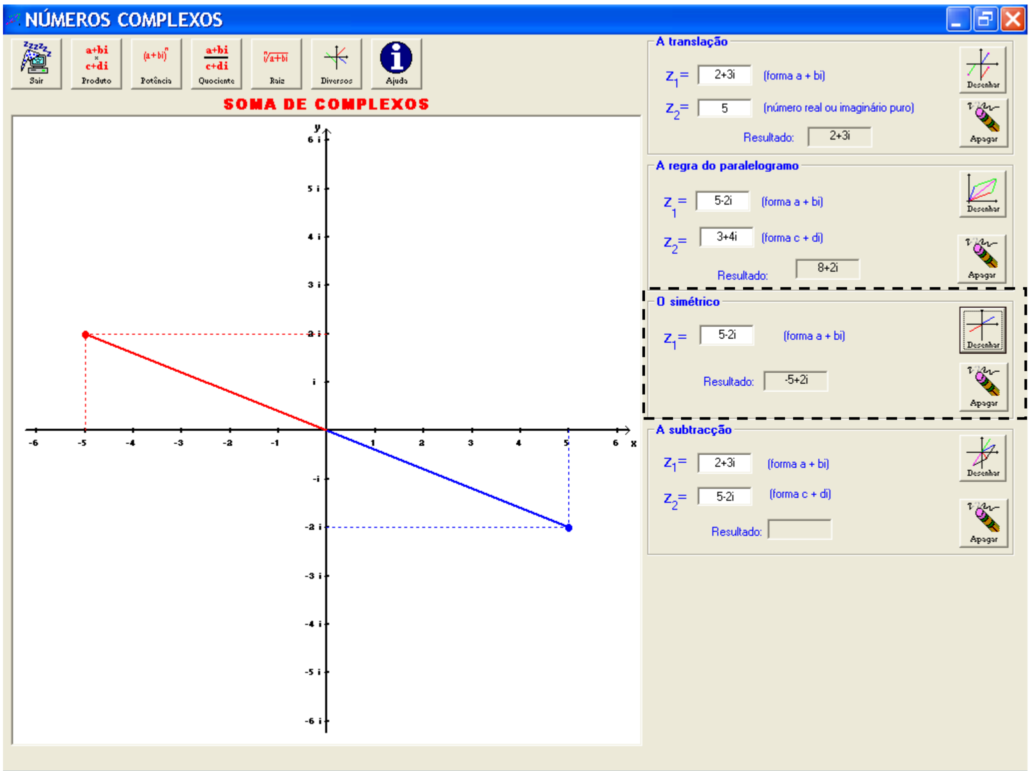


Fonte: Leal, 2005.

5.1.2.3 O simétrico

Na terceira seção, denominada *O simétrico*, destacada na *figura 14* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de simetria de números complexos. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*), no campo Z_1 e clicar no botão Desenhar. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de Z_1 e, em vermelho, o desenho gráfico do número complexo simétrico à Z_1. No campo resultado aparecerá o valor do número complexo simétrico ao número complexo digitado no campo Z_1, na forma *a* + *bi*.

Figura 14 – O simétrico

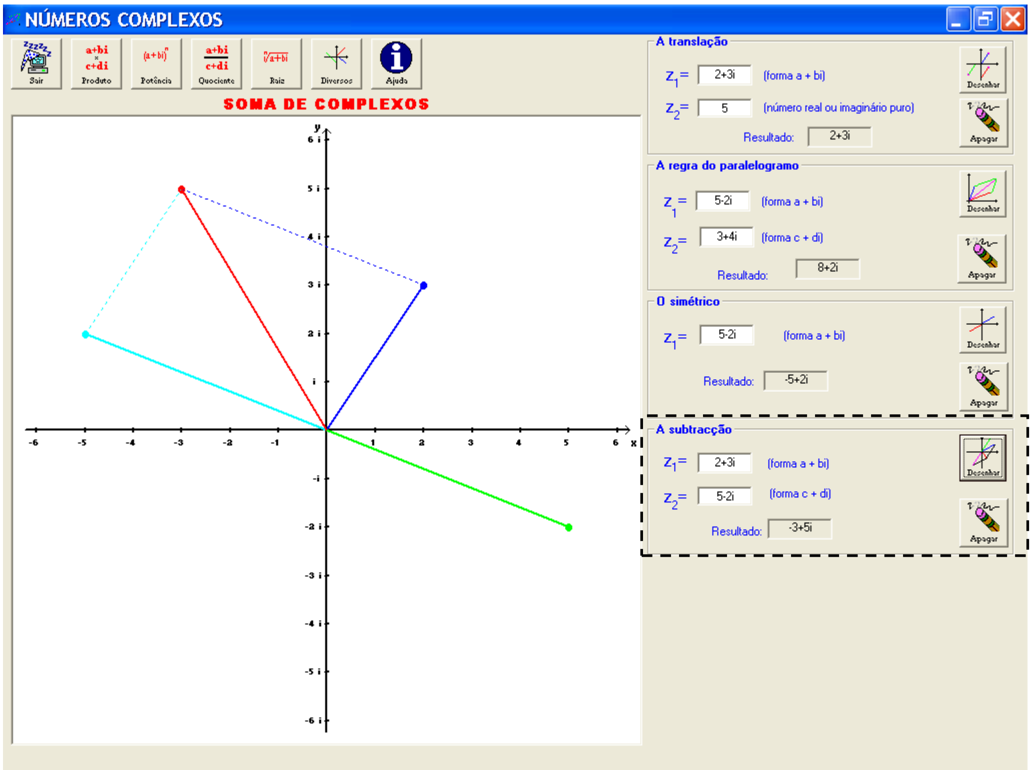


Fonte: Leal, 2005.

5.1.2.4 A subtração

Na quarta seção, denominada *A subtração*, destacada na *figura 15* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de diferença de números complexos. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*), no campo Z_1 e outro número complexo na forma algébrica (*c* + *di*) no campo Z_2, depois clicar no botão Desenhar. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de Z_1, em verde o desenho gráfico de Z_2, em anil o simétrico de Z_2 e, em vermelho, o resultado da diferença destes dois números complexos. No campo resultado aparecerá a resposta da diferença do número complexo digitado no campo Z_1 pelo número complexo digitado no campo Z_2, na forma *a* + *bi*.

Figura 15 – A subtração



Fonte: Leal, 2005.

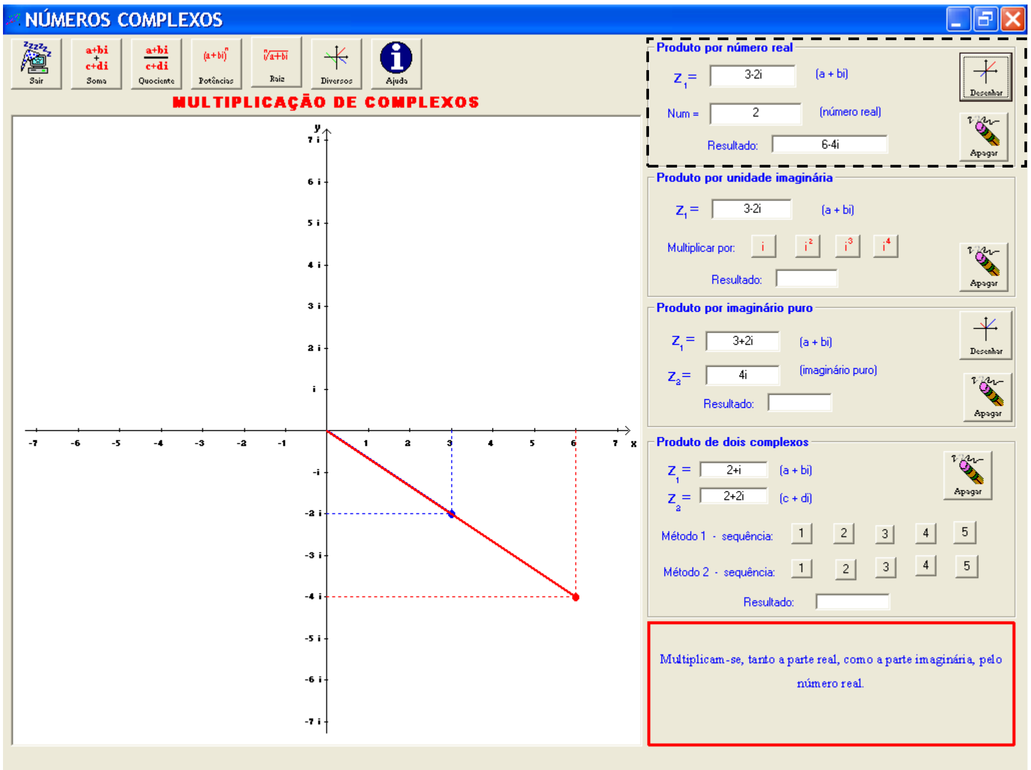
5.1.3 Menu Produto

O menu *produto* possui quatro seções denominadas *produto por número real, produto por unidade imaginária, produto por imaginário puro e produto de dois complexos.* Na prática pedagógica, priorizou-se a primeira e a quarta seção: *produto por número real* e *produto de dois complexos*, devido à quantidade de horas-aulas destinadas a este conteúdo.

5.1.3.1 Produto por número real

No menu *produto*, na primeira seção, denominada *produto por número real*, destacada na *figura 16* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de multiplicação de um número complexo por um número real. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*) no campo Z_1 e um número real no campo *Num*, depois clicar no botão Desenhar. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em linha tracejada azul o desenho gráfico de Z_1 e em linha tracejada vermelha o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo digitado no campo Z_1 pelo número real digitado no campo *Num*. No campo resultado aparecerá a resposta da multiplicação do número complexo digitado no campo Z_1 pelo número real digitado no campo *Num*, na forma *a* + *bi*.

Figura 16 – Produto por número real



Fonte: Leal, 2005.

5.1.3.2 Produto de dois complexos

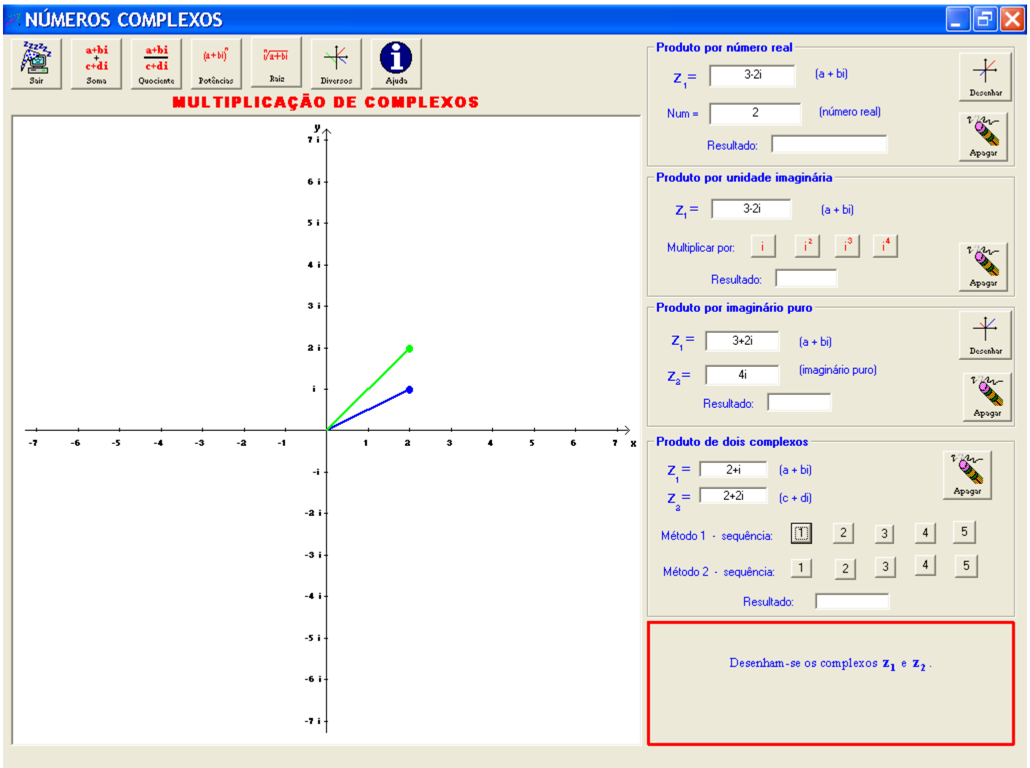
Na quarta seção, denominada *produto de dois complexos*, encontra-se a operação de multiplicação de dois números complexos. O produto de dois complexos pode ser visualizado através de dois métodos. Neste estudo apresentou-se o primeiro método.

A visualização gráfica através do *método 1* é desenvolvida em uma seqüência de cinco passos, representados na tela por botões numerados de 1 a 5.

O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*), no campo Z_1 e outro número complexo na forma algébrica (*c* + *di*) no campo Z_2, depois clicar em cada um dos botões da seqüência, seguindo a ordem crescente dos números de um a cinco.

Ao clicar no botão 1 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul e o desenho gráfico de Z_2 em verde (figura 17).

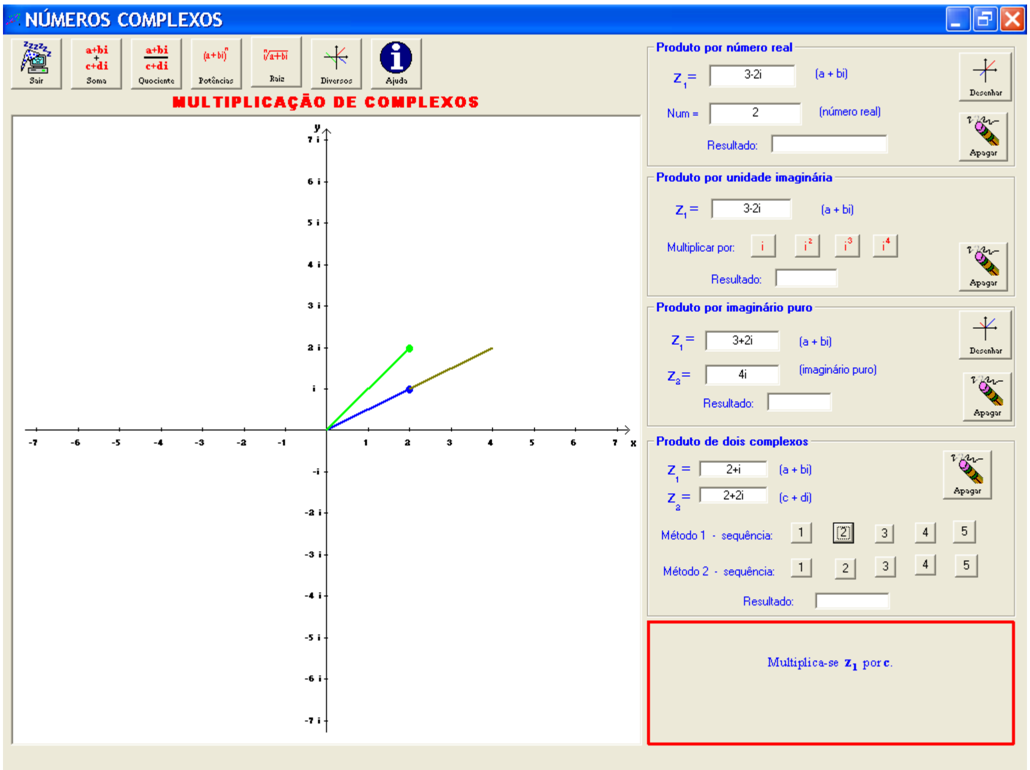
Figura 17 - Produto de dois complexos – botão 1



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 2 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde e o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo número real *C* em verde musgo (figura 18).

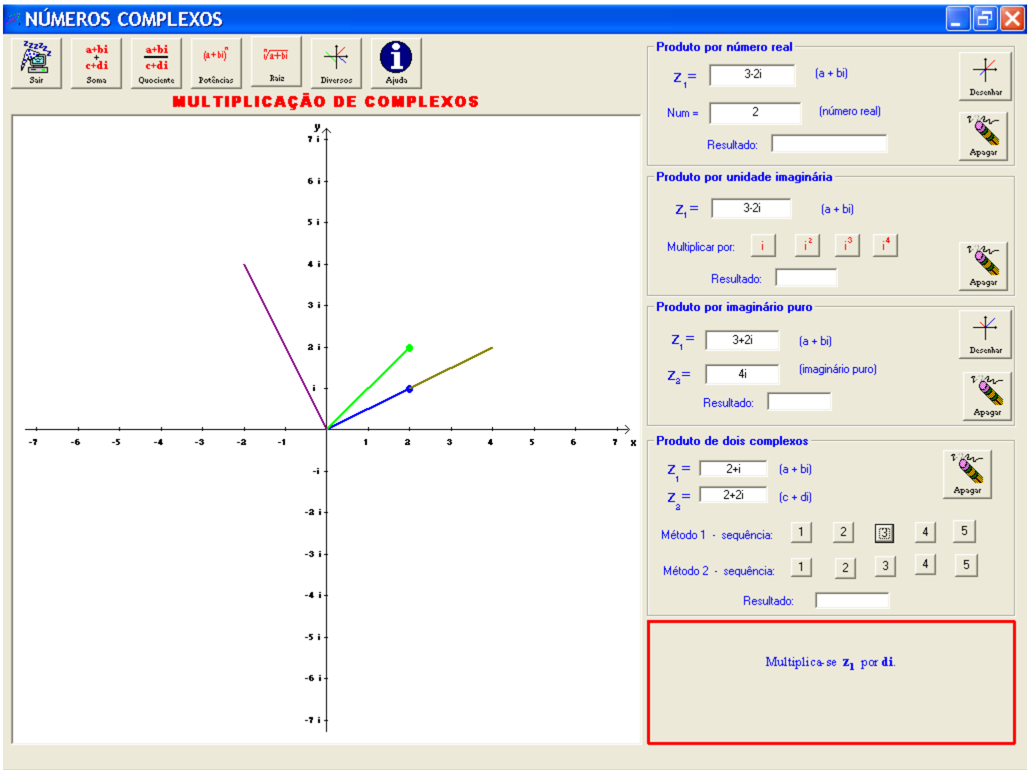
Figura 18 - Produto de dois complexos – botão 2



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 3 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde, o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo número real *C* em verde musgo e o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo imaginário puro *di* em lilás (figura 19).

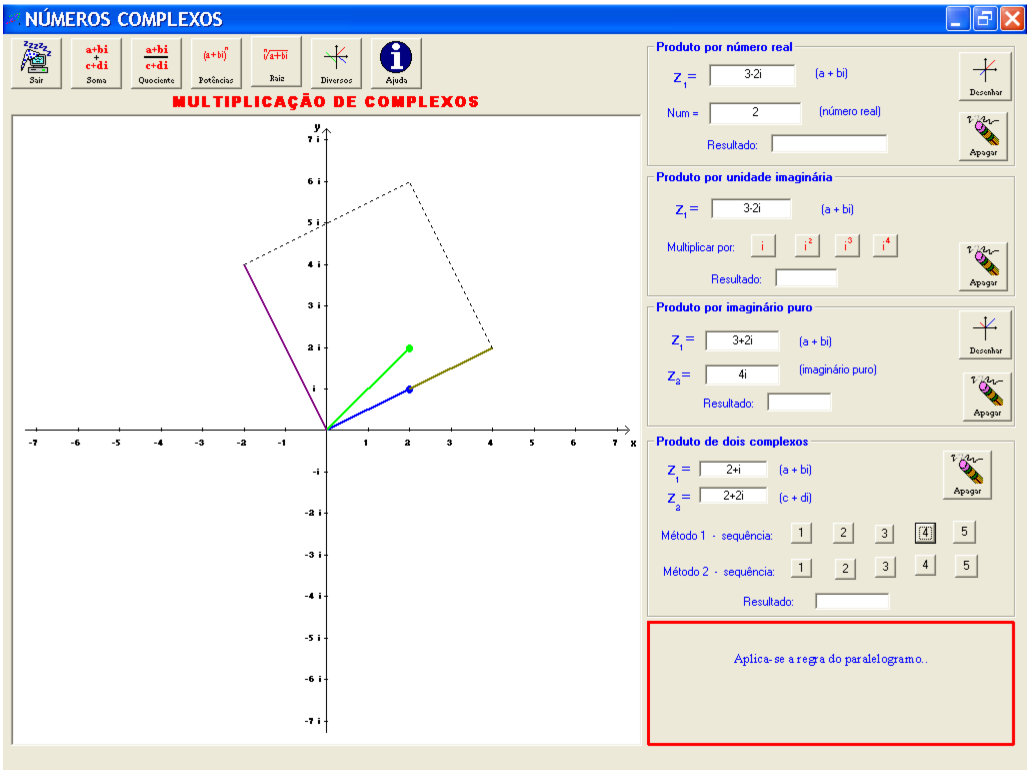
Figura 19 - Produto de dois complexos – botão 3



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 4 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde, o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo número real *C* em verde musgo, o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo imaginário puro <u>*di*</u> em lilás e o desenho gráfico da aplicação da regra do paralelogramo em linha pontilhada (figura 20).

Figura 20 - Produto de dois complexos – botão 4

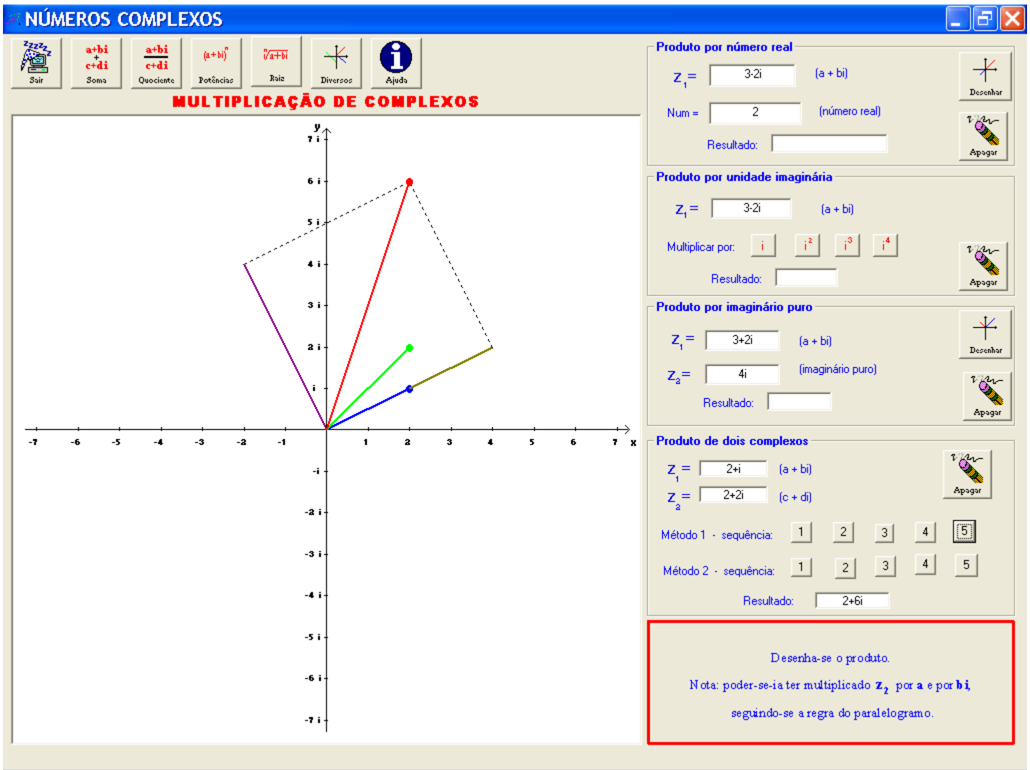


Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 5 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde, o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo número real *C* em verde musgo, o desenho gráfico do resultado da multiplicação do número complexo Z_1 pelo imaginário puro *di* em lilás e o desenho gráfico da aplicação da regra do paralelogramo em linha pontilhada e o desenho gráfico do resultado do produto de dois números complexos em vermelho.

No campo resultado aparecerá a resposta da multiplicação de dois números complexos, na forma *a* + *bi* (figura 21).

Figura 21 - Produto de dois complexos – botão 5



Fonte: Leal, 2005.

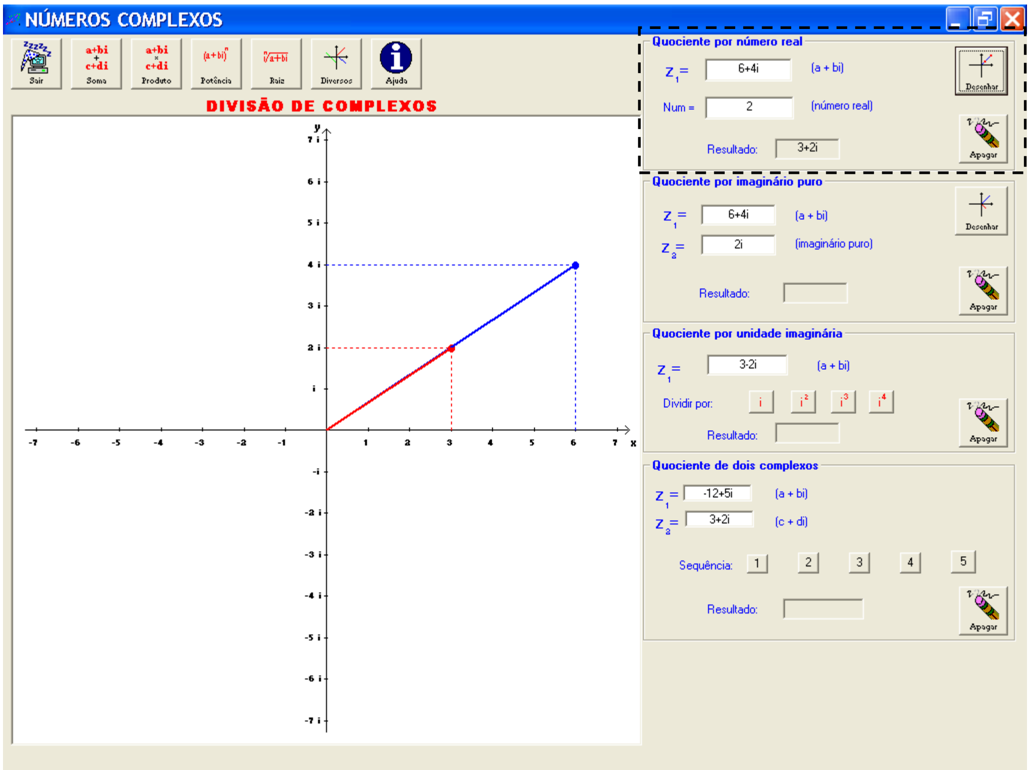
5.1.4 Menu quociente

O menu quociente possui quatro seções denominadas: *quociente por número real, quociente por unidade imaginária, quociente por imaginário puro e quociente de dois complexos.* Na prática pedagógica priorizou-se a primeira e a quarta seção: *quociente por número real* e *quociente de dois complexos*, devido à quantidade de horas-aulas destinadas a este conteúdo.

5.1.4.1 Quociente por número real

No menu *quociente*, na primeira seção, denominada *Quociente por número real*, destacada na *figura 22* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de divisão de um número complexo por um número real. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*) no campo Z_1 e um número real no campo *Num*, depois clicar no botão Desenhar. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de Z_1 e em vermelho o desenho gráfico do resultado da divisão do número complexo digitado no campo Z_1 pelo número real digitado no campo *Num*. No campo resultado aparecerá a resposta da divisão do número complexo digitado no campo Z_1 pelo número real digitado no campo *Num*, na forma *a* + *bi*.

Figura 22 - Quociente por número real



Fonte: Leal, 2005.

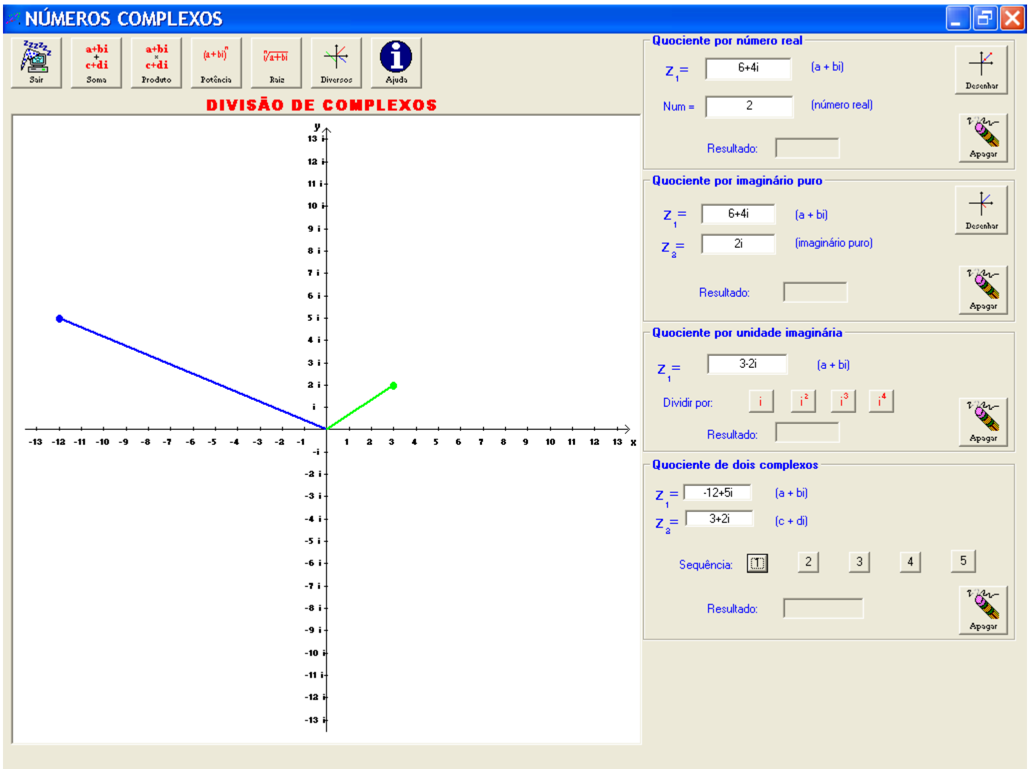
5.1.4.2 Quociente de dois complexos

Na quarta seção, denominada *Quociente de dois complexos*, encontra-se a operação de divisão de dois números complexos. A visualização gráfica da divisão de dois números complexos é desenvolvida em uma seqüência de cinco passos.

O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica (*a* + *bi*), no campo Z_1 e outro número complexo na forma algébrica (*c* + *di*) no campo Z_2, depois clicar em cada um dos botões da seqüência, seguindo a ordem crescente dos números de um a cinco.

Ao clicar no botão 1 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul e o desenho gráfico de Z_2 em verde (figura 23).

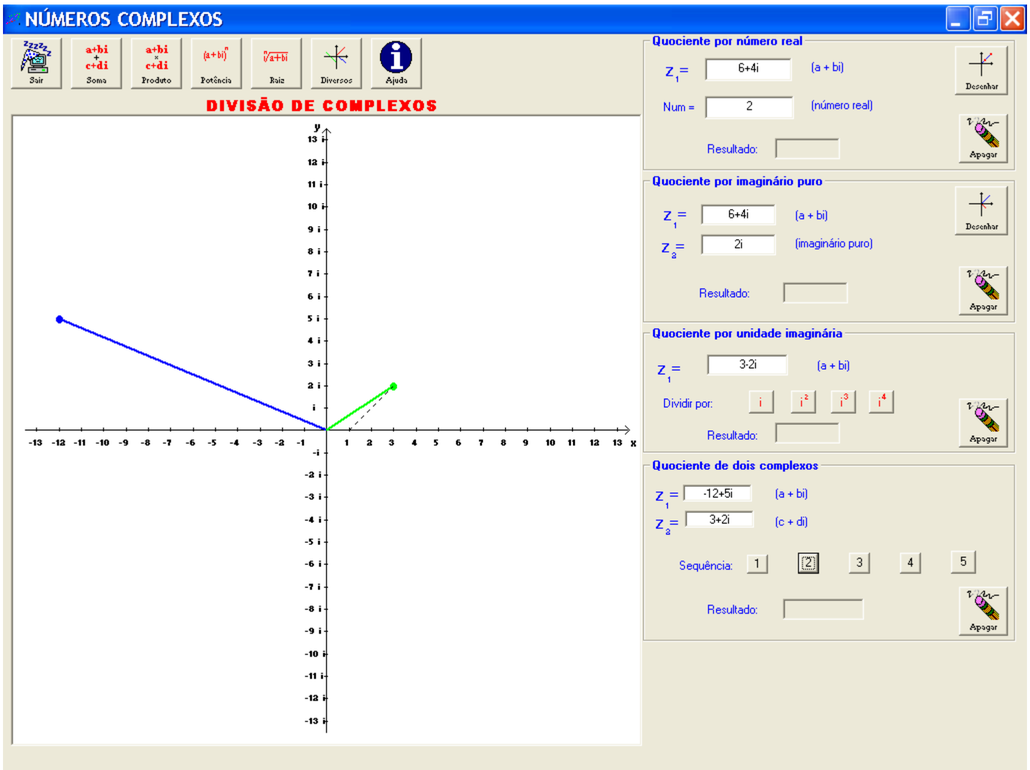
Figura 23 - Quociente de dois complexos – botão 1



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 2 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde e o desenho gráfico da distância entre o divisor Z_2 e a unidade *1* do eixo *x* em uma linha tracejada (figura 24).

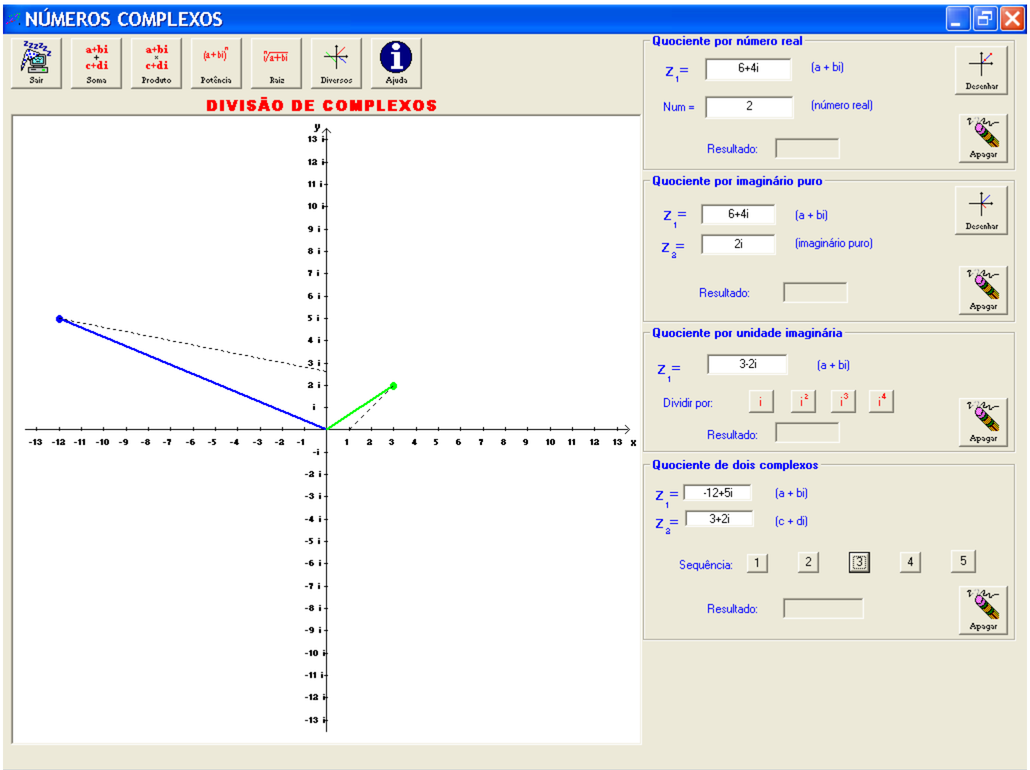
Figura 24 - Quociente de dois complexos – botão 2



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 3 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde, o desenho gráfico da distância entre o divisor Z_2 e a unidade *1* do eixo *x* em uma linha tracejada e em outra linha tracejada, a partir do ponto Z_1, um ângulo com o mesmo valor do ângulo formado do ponto Z_2 a unidade 1 do eixo x (figura 25).

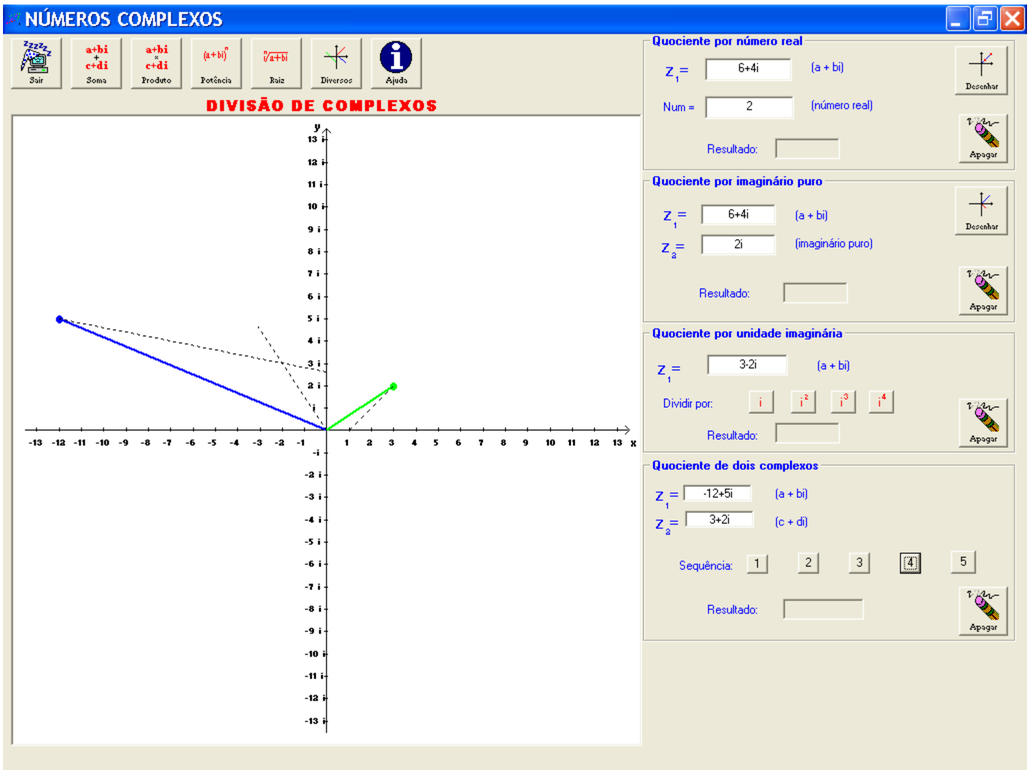
Figura 25 - Quociente de dois complexos – botão 3



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 4 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela: o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde, o desenho gráfico da distância entre o divisor Z_2 e a unidade *1* do eixo *x* em uma linha tracejada e em outra linha tracejada, a partir do ponto Z_1, um ângulo com o mesmo valor do ângulo formado do ponto Z_2 a unidade 1 do eixo x. Uma nova linha tracejada representa a transposição do ângulo formado pelo Z_1 e o eixo x, a partir da origem (figura 26).

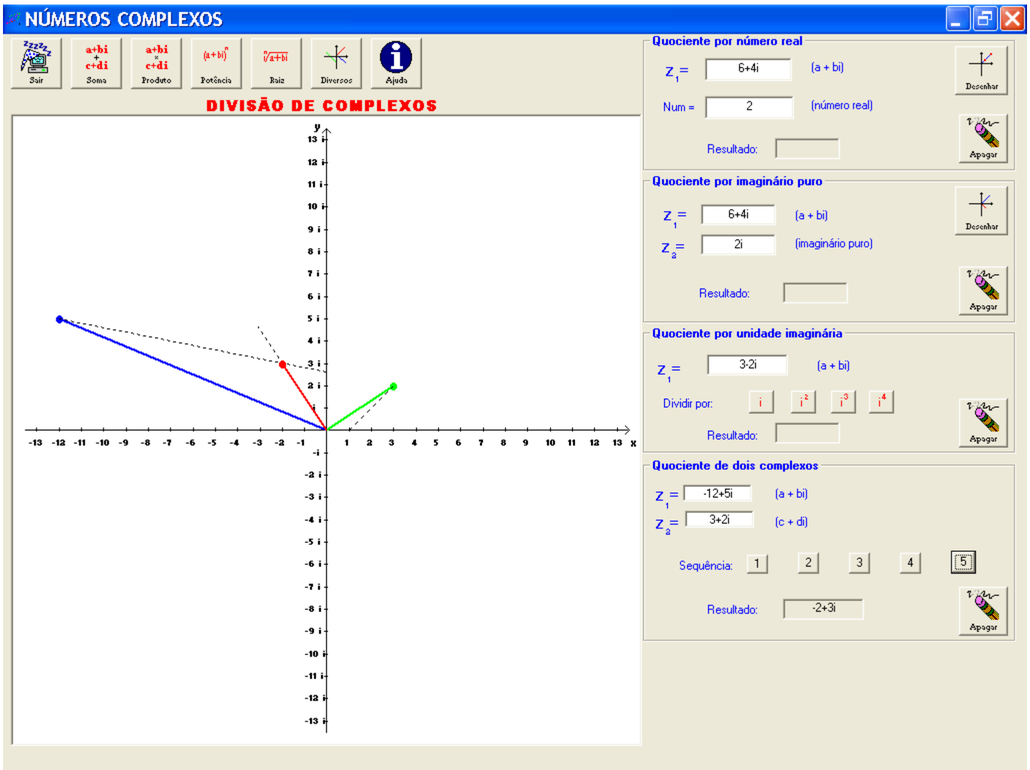
Figura 26 - Quociente de dois complexos – botão 4



Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão 5 da seqüência, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico de Z_1 em azul, o desenho gráfico de Z_2 em verde, o desenho gráfico da distância entre o divisor Z_2 e a unidade *1* do eixo *x* em uma linha tracejada e em outra linha tracejada, a partir do ponto Z_1, um ângulo com o mesmo valor do ângulo formado do ponto Z_2 a unidade *1* do eixo *x*. Uma nova linha tracejada representa a transposição do ângulo formado pelo Z_1 e o eixo *x*, a partir da origem. Em vermelho, a distância da origem ao ponto de intersecção representa o desenho gráfico do resultado da divisão de dois números complexos. No campo *resultado* aparecerá a resposta da divisão, na forma *a + bi* (figura 27).

Figura 27 - Quociente de dois complexos – botão 5



Fonte: Leal, 2005.

5.1.5 Menu potência

O menu potência possui três seções denominadas *potências da unidade imaginária, potências de imaginário puro e potências de número complexo.* Na sequência, apresenta-se de forma detalhada cada seção.

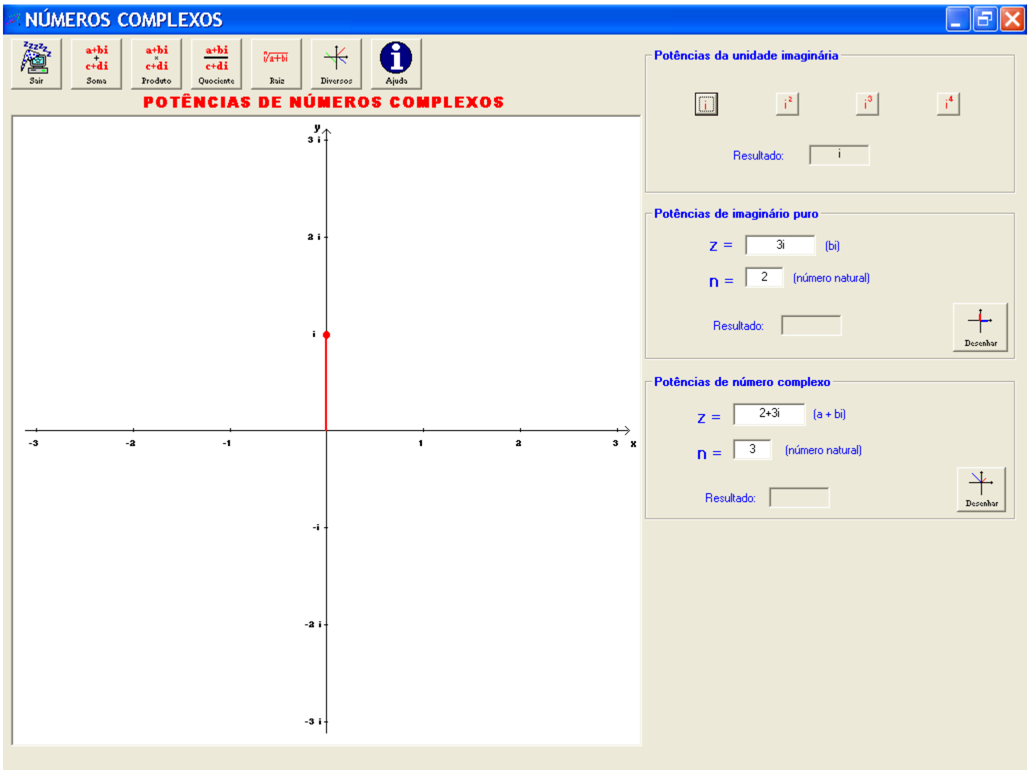
5.1.5.1 Potências da unidade imaginária

Na primeira seção, denominada *Potências da unidade imaginária*, encontra-se a operação de potenciação da unidade imaginária de um número complexo, contendo quatro botões: i, i^2, i^3 e i^4.

Ao clicar no botão *i*, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico da potência da unidade imaginária *i*, em vermelho.

No campo resultado aparecerá a potência da unidade imaginária *i* (figura 28).

Figura 28 - Potências da unidade imaginária – botão i

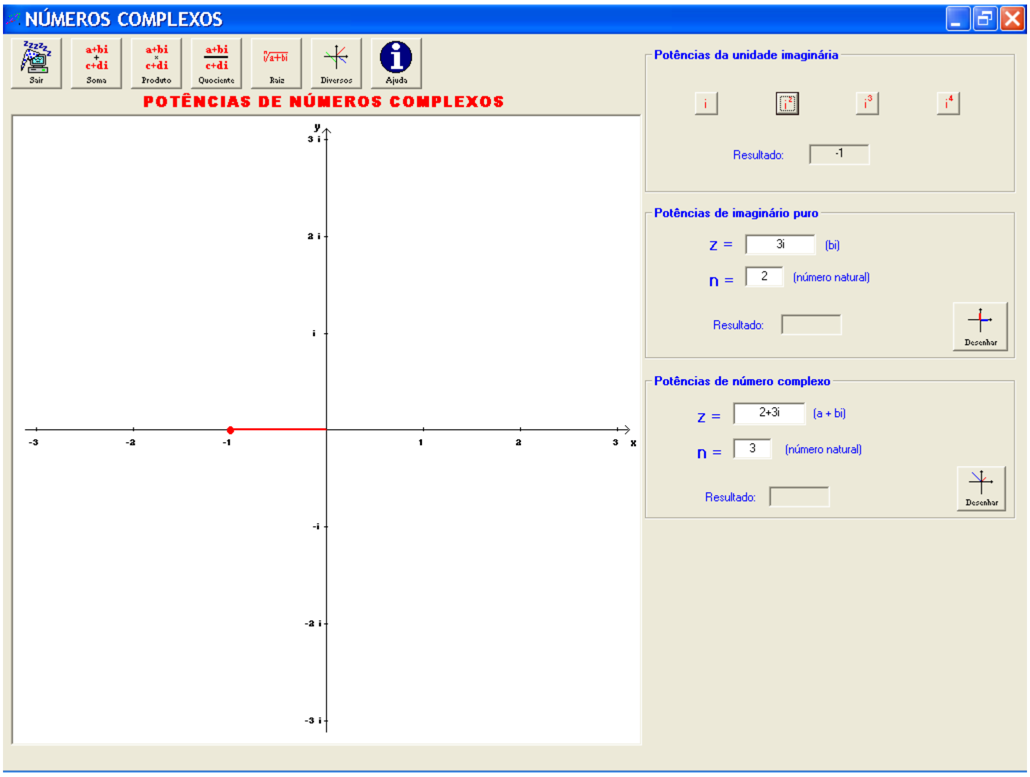


Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão i^2, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico da unidade imaginária *i* elevada ao quadrado (i^2), em vermelho.

No campo resultado aparecerá a resposta da unidade imaginária *i* elevada ao quadrado (i^2) (figura 29).

Figura 29 - Potências da unidade imaginária – botão i^2

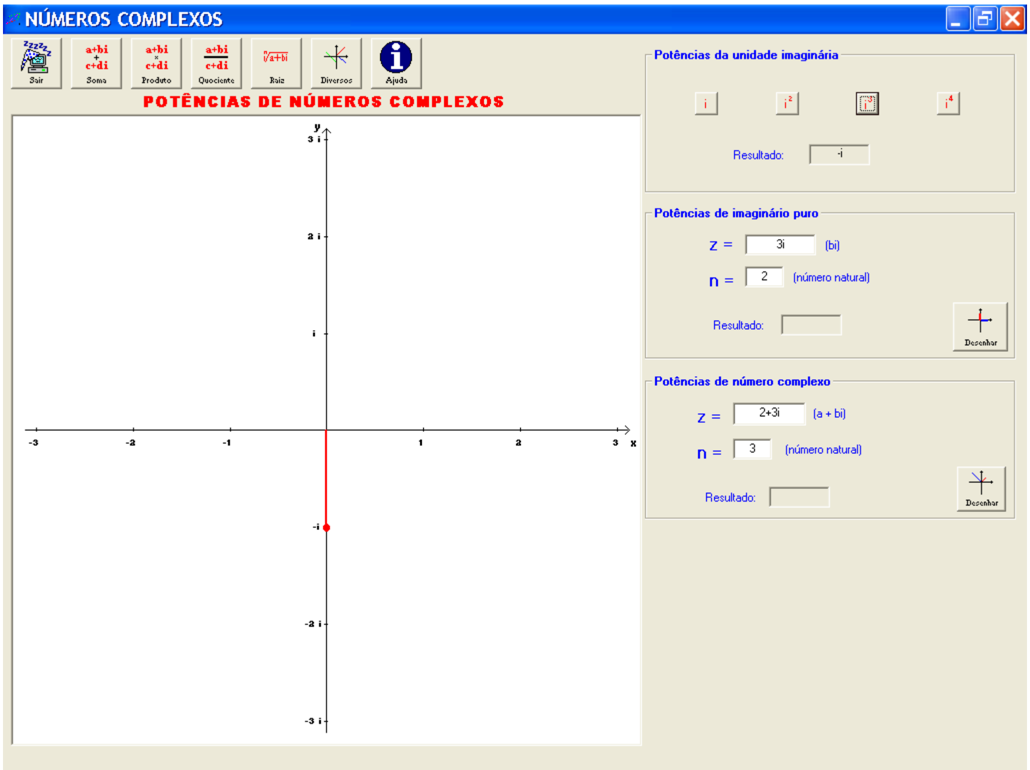


Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão i^3, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico da unidade imaginária *i* elevada ao cubo (i^3), em vermelho.

No campo *resultado* aparecerá a resposta da unidade imaginária *i* elevada ao cubo (i^3) (figura 30).

Figura 30 - Potências da unidade imaginária – botão i^3

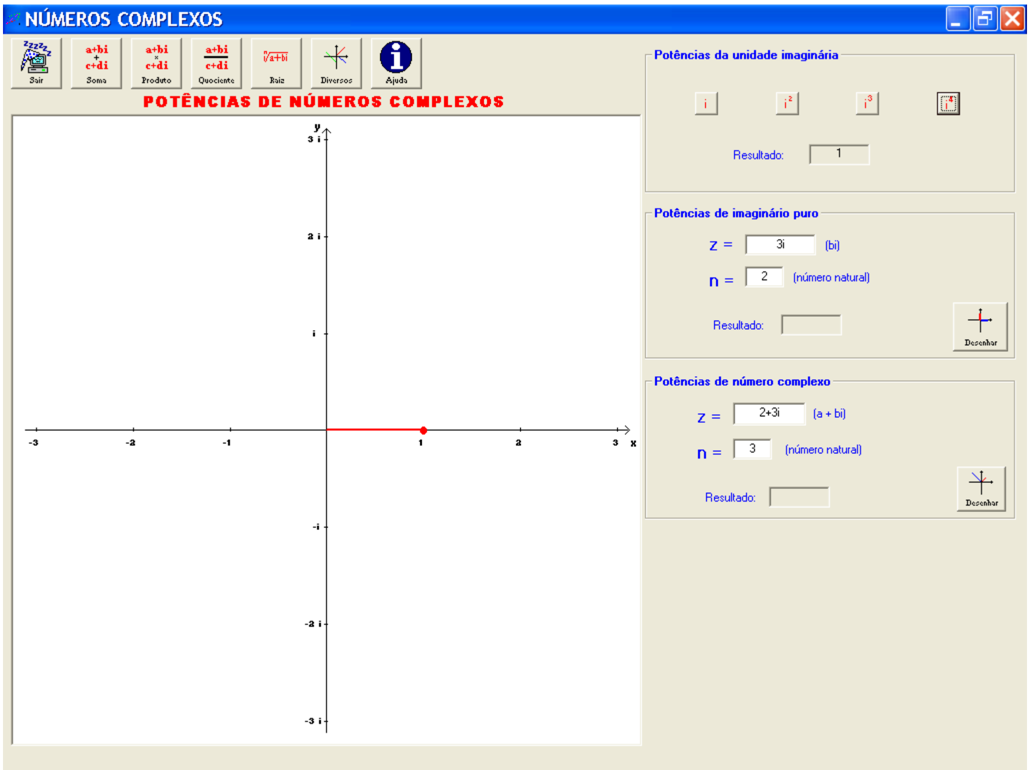


Fonte: Leal, 2005.

Ao clicar no botão i^4, aparecerá no plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, o desenho gráfico da unidade imaginária *i* elevada a quarta potência (i^4), em vermelho.

No campo *resultado* aparecerá a resposta da unidade imaginária *i* elevada a quarta potência (i^4) (figura 31).

Figura 31 - Potências da unidade imaginária – botão i^4

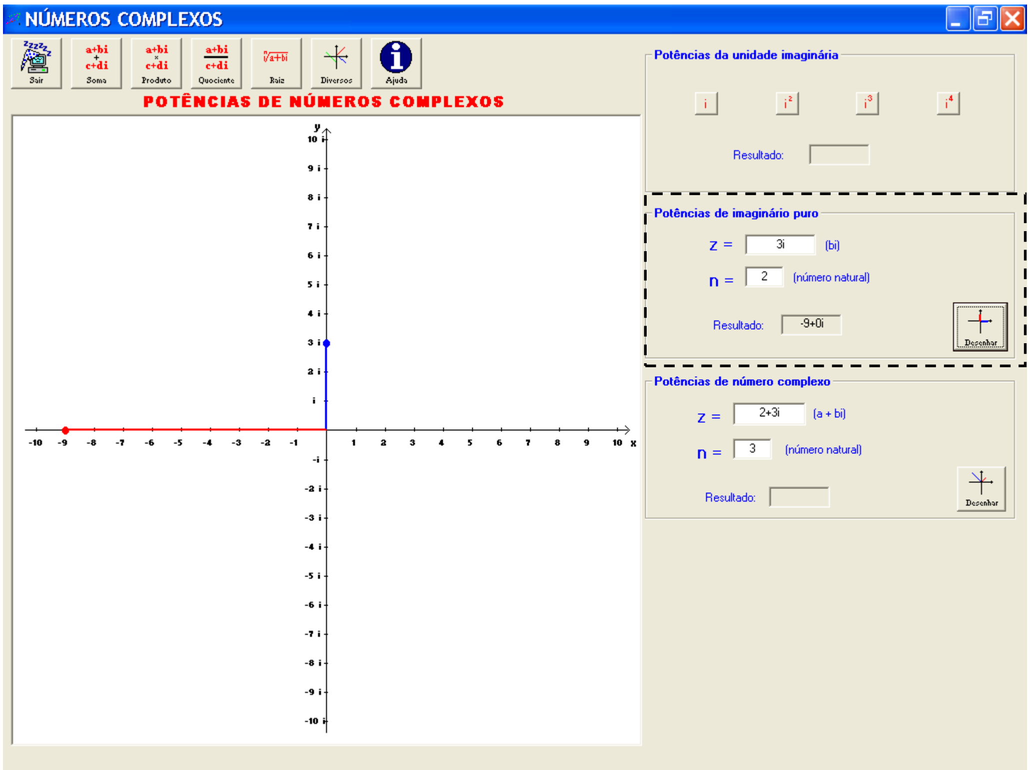


Fonte: Leal, 2005.

5.1.5.2 Potências de imaginário puro

Na segunda seção, denominada *Potências de imaginário puro*, destacada na *figura 32* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de potenciação de um imaginário puro. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica *bi* no campo *Z* e um número natural no campo *n*, depois clicar no botão *Desenhar*. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de Z_1 e, em vermelho, o desenho gráfico do resultado da potenciação do imaginário puro digitado no campo Z pelo expoente digitado no campo *n*. No campo *resultado,* aparecerá a resposta da potenciação do imaginário puro digitado no campo *Z* pelo expoente digitado no campo *n*, na forma *a* + *bi*.

Figura 32 - Potências de imaginário puro

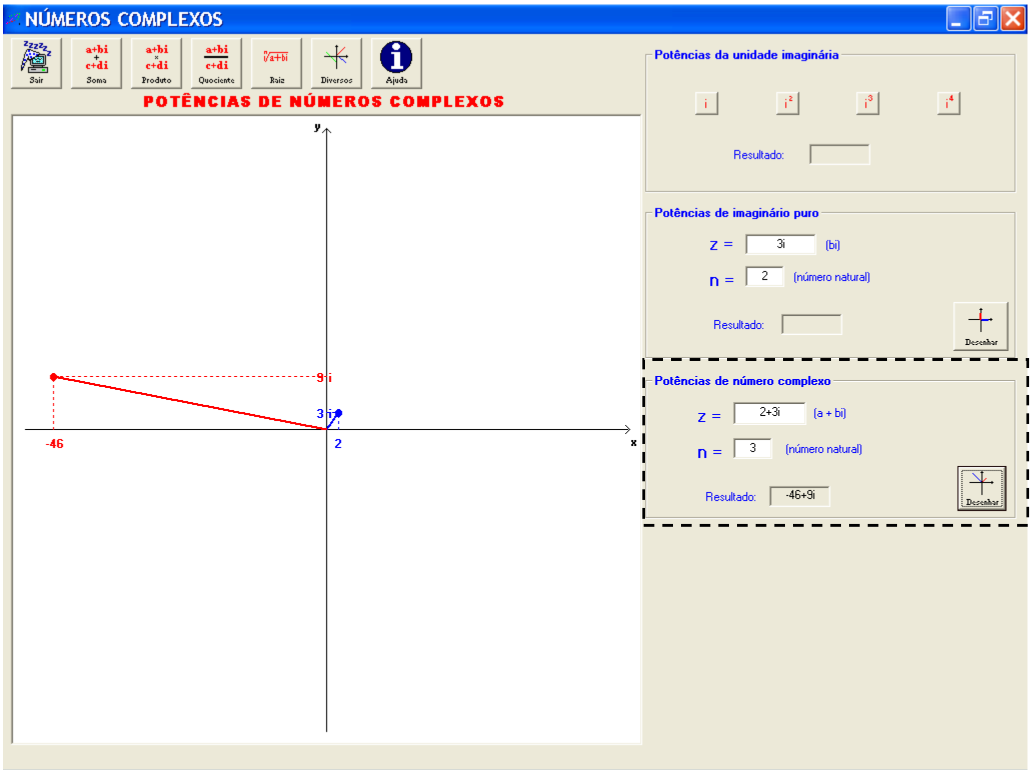


Fonte: Leal, 2005.

5.1.5.3 Potências de número complexo

Na terceira seção, denominada *Potências de número complexo*, destacada na *figura 33* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de potenciação de números complexos. O usuário do software deverá digitar um número complexo na forma algébrica *a + bi* no campo *Z* e um número natural no campo *n*, depois clicar no botão *Desenhar*. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de *Z* e em vermelho o desenho gráfico do resultado da potenciação do número complexo digitado no campo *Z* pelo expoente digitado no campo *n*. No campo *resultado,* aparecerá a resposta da potenciação do número complexo digitado no campo *Z* pelo expoente digitado no campo *n*, na forma *a + bi*.

Figura 33 - Potências de número complexo



Fonte: Leal, 2005.

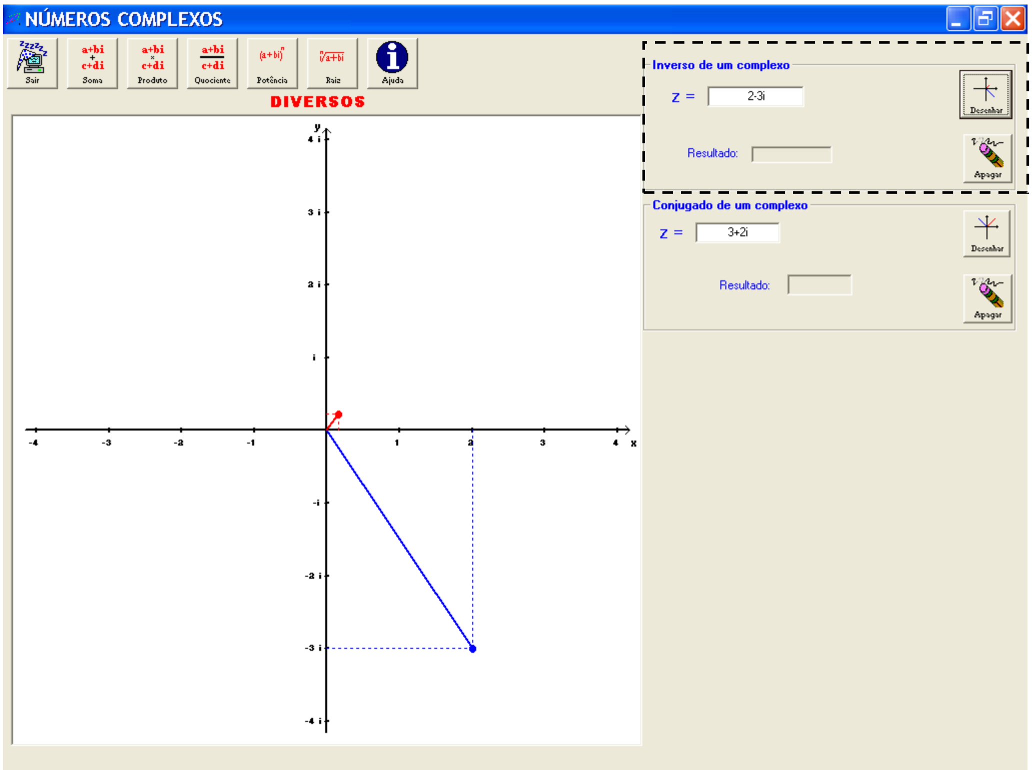
5.1.6 Menu diversos

O menu diversos possui duas seções denominadas *inverso de um complexo* e *conjugado de um complexo.*

5.1.6.1 Inverso de um complexo

Na primeira seção, denominada *Inverso de um complexo*, destacada na *figura 34* por uma linha tracejada, encontra-se a operação de inversão de um número complexo. O usuário do software deverá digitar um número complexo no campo *Z* e depois clicar no botão *Desenhar*. No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de *Z* e em vermelho o desenho gráfico do inverso do número complexo digitado no campo *Z*.

Figura 34 - Inverso de um complexo



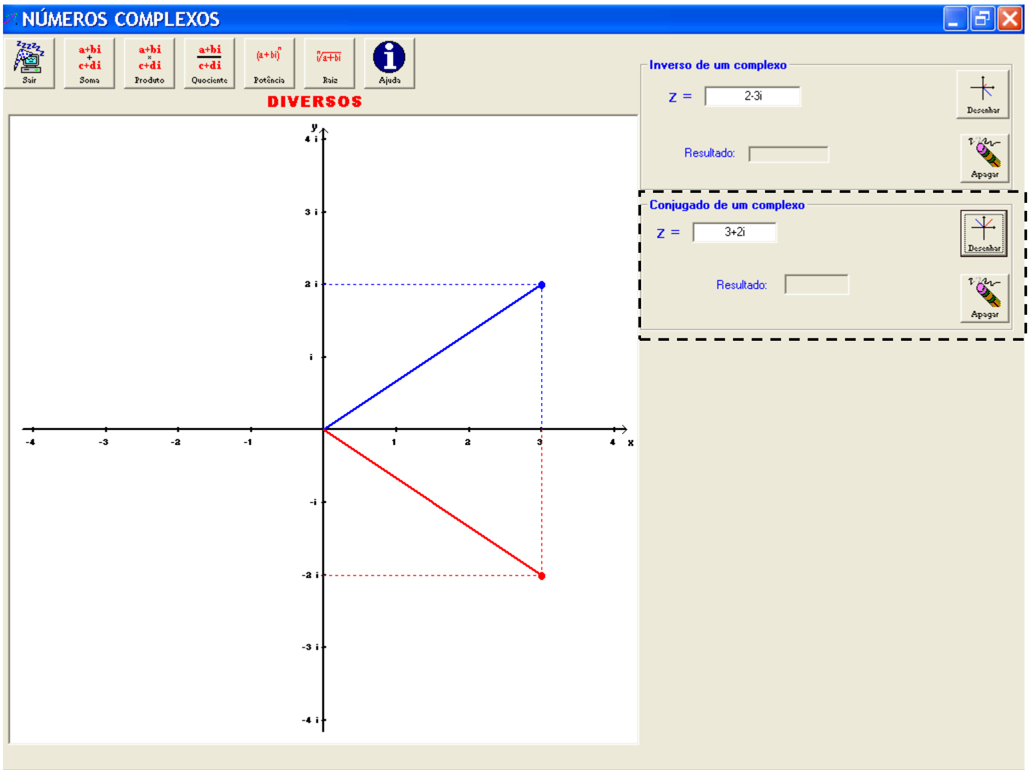
Fonte: Leal, 2005.

5.1.6.2 Conjugado de um complexo

Na segunda seção, denominada *Conjugado de um complexo,* destacada na *figura 35* por uma linha tracejada, encontra-se a operação do conjugado de números complexos. O usuário do software deverá digitar um número complexo no campo *Z* e depois clicar no botão *Desenhar.*

No plano cartesiano, apresentado no lado esquerdo da tela, aparecerá em azul o desenho gráfico de *Z* e em vermelho o desenho gráfico do conjugado do número complexo digitado no campo *Z*.

Figura 35 - Conjugado de um complexo



Fonte: Leal, 2005.

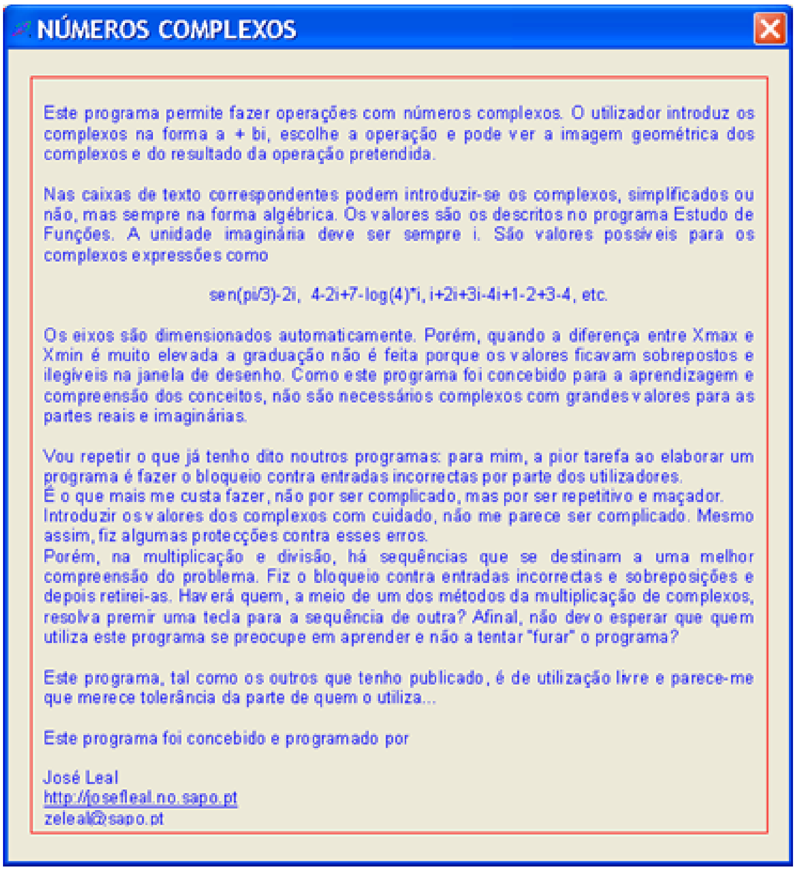
5.1.7 Menu ajuda

Ao clicar no menu *ajuda*, aparecerão em uma nova janela, informações a respeito do funcionamento do software (figura 36). As informações contidas neste menu são de autoria do criador do software, José Leal.

O autor explica o formato dos valores a serem digitados no software livre e a dimensão dos eixos no gráfico.

Além disso, expõe algumas dificuldades encontradas ao desenvolver o software livre Números Complexos.

Figura 36 – Ajuda



Fonte: Leal, 2005.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção, apresenta-se a discussão quanto à implementação da proposta de ensino dos números complexos com auxilio do software livre.

6.1 A prática pedagógica

A implementação da proposta de ensino dos números complexos através da utilização do software livre *Números Complexos,* foi desenvolvida em uma escola de ensino médio, da rede pública de ensino, localizada na cidade de Alegrete. A escola conta com duzentos e sessenta (260) alunos no ensino fundamental e duzentos e sessenta e cinco (265) alunos no ensino médio, totalizando quinhentos e vinte e cinco (525) alunos.

Tendo em vista que o estudo do conteúdo matemático números complexos, na educação básica, normalmente é desenvolvido no 3º ano, apresentou-se como campo de pesquisa uma turma do 3º ano do Ensino Médio, com 35 alunos regularmente matriculados.

No primeiro momento, o conteúdo foi exposto aos alunos de maneira tradicional, para isso utilizou-se uma apostila, conforme *Anexo B*, com os tópicos a serem desenvolvidos em sala de aula, como:

- Introdução ao conceito de números complexos;
- Origem dos números complexos;
- Representação algébrica de um número complexo;
- Potências da unidade imaginária;
- Adição de números complexos;
- Subtração de números complexos;
- Multiplicação de números complexos;
- Conjugado de um número complexo;
- Divisão de números complexos;
- Representação geométrica de um número complexo;
- Módulo de um número complexo.

O desenvolvimento desses tópicos e as atividades de fixação ocorreram em quatro encontros, na sala de aula.

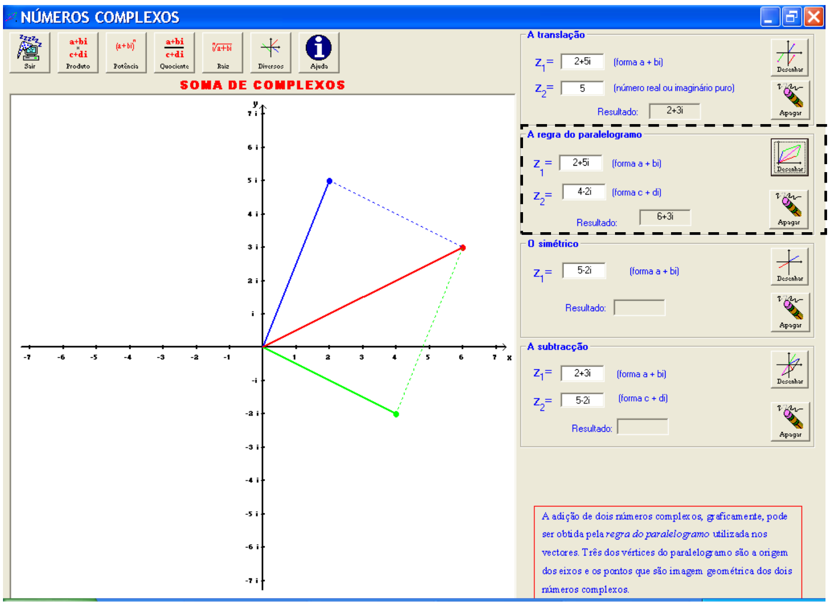
No segundo momento, foi apresentado aos alunos o software livre *Números Complexos,* na sala de audiovisual da escola, com uso de multimídia.

Após apresentação, propôs-se aos alunos o desenvolvimento de atividades no software livre *Números Complexos*, referentes aos tópicos estudados em sala de aula.

Na seqüência, as telas de algumas atividades desenvolvidas pelos alunos no software livre *Números Complexos:*

Atividade 1: A soma dos números complexos $z_1 = 2 + 5i$ e $z_2 = 4 - 2i$ (figura 37).

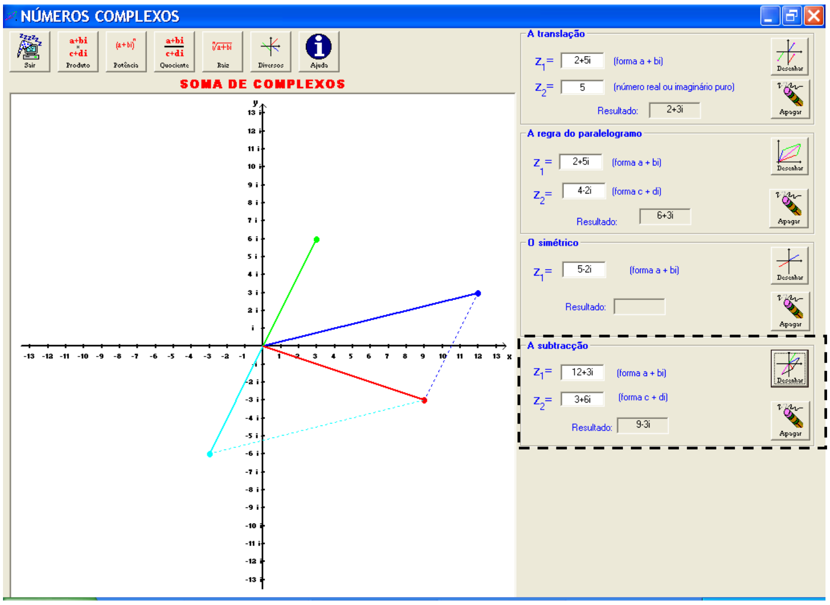
Figura 37 – Atividade 1



Fonte: Leal, 2005.

Atividade 2: A diferença entre os números complexos $z_1 = 12 + 3i$ e $z_2 = 3 + 6i$ (figura 38).

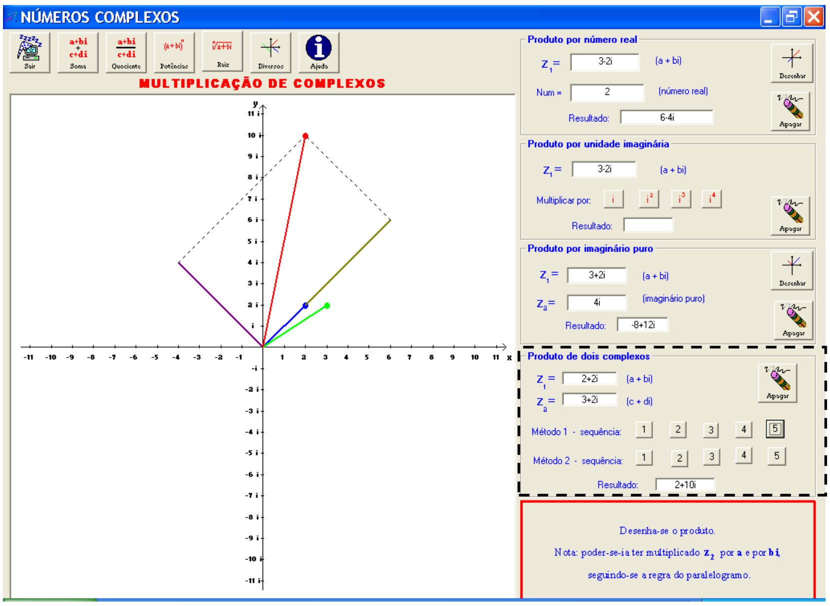
Figura 38 – Atividade 2



Fonte: Leal, 2005.

Atividade 3: O produto dos números complexos $z_1 = 2 + 2i$ e $z_2 = 3 + 2i$ (figura 39).

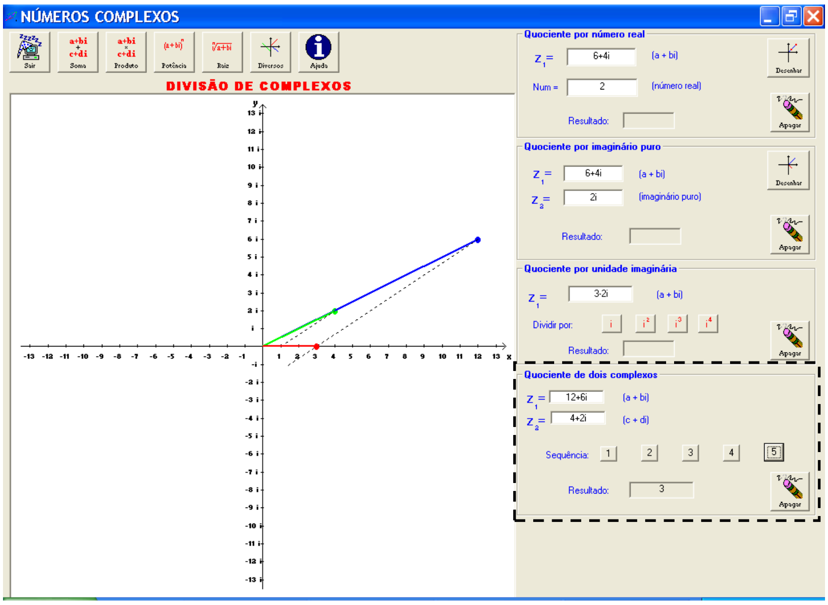
Figura 39 – Atividade 3



Fonte: Leal, 2005.

Atividade 4: O quociente entre os números complexos $z_1 = 12 + 6i$ e $z_2 = 4 + 2i$ (figura 40).

Figura 40 – Atividade 4



Fonte: Leal, 2005.

Após realização das atividades no software livre *Números Complexos,* os alunos solicitaram cópia do software para realizarem atividades de fixação do conteúdo em seus computadores pessoais. O software foi disponibilizado aos alunos através de um cd de instalação.

Com esta atitude dos alunos, percebeu-se que o software livre *Números Complexos* despertou grande interesse nos alunos. Os mesmos mostraram-se bastante curiosos e envolvidos com a realização das atividades propostas e com as funcionalidades do software, que proporcionou melhor entendimento do conteúdo, além de ser uma forma mais dinâmica e prazerosa de aprender.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A inclusão das tecnologias na vida de cada indivíduo exige habilidades que vão muito além do simples lidar com elas. O computador, que hoje é instrumento mais relevante na inclusão das tecnologias, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Assim sendo, o computador e os *softwares* devem ser mais um instrumento no auxílio do ensino-aprendizagem da Matemática. Através do uso do *software Números Complexos,* juntamente com as atividades elaboradas e desenvolvidas, temos um forte aliado para o ensino-aprendizagem dos números complexos, pois através do *software* os conceitos geométricos dão ao aluno uma visão do que estão fazendo, deixando de ser uma matéria rudimentar e sem muita importância.

Percebeu-se ainda que a proposta da utilização do software livre *Números Complexos* pode ressaltar vários aspectos pedagógicos positivos, tais como: o interesse, a atenção, o diálogo, a participação efetiva, a motivação, a interação, a integração e a aprendizagem articulada da geometria e da álgebra.

Espera-se que este trabalho promova uma reflexão dos docentes e contribua no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático números complexos.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: Ensino Médio. Brasília, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática, ensino médio. Brasília: 2002. 360 p.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

GOMES, Maurício Brasil. **Software livre aplicado ao ensino de números complexos.** 2011. 82 p. Monografia (Especialização em Tecnologia no Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Pampa, Alegrete, 2011.

LEAL, José. **Software Livre Números Complexos**. Lisboa, 2005. Disponível em: <http://josefleal.neo.sapo.pt/numeroscomplexos.htm>. Acesso em: 05 nov. 2010.

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

OLIVEIRA, Paulo. **História da matemática:** brevíssima história dos números complexos. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 2000.

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos:** uma abordagem histórica para aquisição de conceitos. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

VALENTE, José Armando. **Computadores e Conhecimento:** repensando a educação. Por que o computador na educação. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1993.

APÊNDICE A – ENTREVISTA

ENTREVISTA COM ALUNOS DA UNIPAMPA

O objetivo desta entrevista é obter algumas informações que possam me ajudar no trabalho de Especialização que venho desenvolvendo sobre o ensino de números complexos e suas aplicações. Sua colaboração e sinceridade nas respostas, com certeza serão de grande importância e desde já agradeço.

---

*Obrigatório

01 - Nome da escola onde cursou o 3º ano do Ensino Médio? *

02 - Tipo de ensino? *

- Público
- Privado

03 - Cidade em que a escola esta localizada? *

- Alegrete
- Outra no RS
- Outro Estado

04 - Curso de graduação em que está matriculado no Campus Alegrete da UNIPAMPA? *

- Ciência da Computação
- Engenharia Agricola
- Engenharia Civil
- Engenharia Elétrica
- Engenharia Mecânica
- Engenharia de Software

05 - Você estudou o conteúdo números complexos no 3º ano do ensino médio? *

- Sim
- Parcialmente
- Não

05.1 - Quais os conceitos de números complexos foram estudados?
Se você respondeu SIM ou PARCIALMENTE na questão 05, responda a questão 05.1

- [ ] Adição de números complexos
- [ ] Subtração de números complexos
- [ ] Multiplicação de números complexos

- [ ] Divisão de números complexos
- [ ] Conjugado de um número complexo
- [ ] Inverso de um número complexo
- [ ] Translação

06 - Você entendeu este conteúdo?

- ( ) Sim
- ( ) Parcialmente
- ( ) Não

07 - Quais as dificuldades que você encontrou no aprendizado?

08 - Você conhece alguma aplicação prática do uso de números complexos? *

- ( ) Sim
- ( ) Não

08.1 - Qual?
Se você respondeu SIM na questão 08, responda a questão 08.1

09 - Foi utilizado algum recurso tecnológico durante as aulas de números complexos? *

- ( ) Sim
- ( ) Não

09.1 - Qual?
Se você respondeu SIM na questão 09, responda a questão 09.1

Enviar

Tecnologia Google Docs

APÊNDICE B – APOSTILA

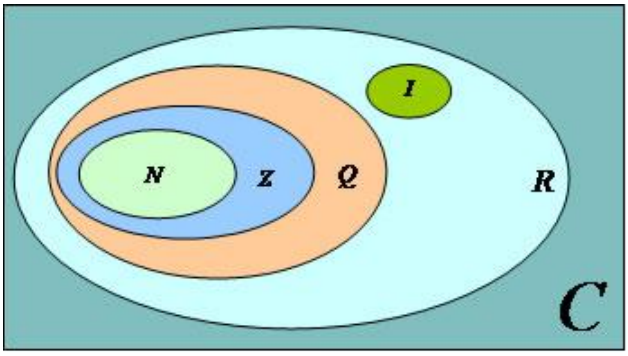
CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Em todo o ensino fundamental estudamos apenas os seguintes conjuntos numéricos:

- Conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3...}
- Conjunto dos números inteiros Z = {… -2, -1, 0, 1, 2, ...}
- Conjunto dos números racionais Q = {-1/2, 1 , 1,5 ...}
- Conjunto dos números irracionais I = {Π, √2, ...}
- Conjunto dos números reais R = é formado por todos os números racionais e irracionais.

Esses conjuntos não satisfazem alguns cálculos, então é preciso que estudemos mais um conjunto numérico, o conjunto dos números complexos, esse é um pouco diferente dos outros, pois contem em sua estrutura a letra **i** e sua representação é feita pela letra maiúscula **C**.

Os Números Complexos constituem o maior conjunto numérico existente.



N: conjunto dos números Naturais
Z: conjunto dos números Inteiros
Q: conjunto dos números Racionais
I: conjunto dos números Irracionais
R: conjunto dos números Reais
C: conjunto dos números Complexos

O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Tente resolver a equação $X^2 + 4 = 0$, aplicando o método geral de transposição de termos:

$$x^2 = -4$$
$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Observe que não podemos extrair, considerando-se o conjunto dos números Reais, a raiz quadrada de um número negativo.

Sabemos que toda equação quadrática, cujo discriminante (delta) é negativo, não possui raízes reais. Todas as raízes negativas, contudo, podem ser expressas de um mesmo modo. Observe:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \text{ X } \sqrt{-1} = 2\text{X } \sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \text{ X } \sqrt{-1} = 3\text{X } \sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-6} = \sqrt{6} \text{ X } \sqrt{-1}$$

Assim, basta dar significado à raiz quadrada de -1 para se dar significado a todas as raízes quadradas, ou de índice par, de números negativos.

A atribuição desse significado foi dada ao mesmo tempo que se criava diferentes formas de expressá-lo. Embora utilizado pelo matemático Leonhard Euler, a sua criação é atribuída a Carl Friedrich Gauss.

Para Euler, este novo número, chamado de unidade imaginária, seria representado pela letra **i**. Assim, se:

$$\sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = -1$$

Então podemos definir que:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \text{ X } \sqrt{-1} = 2i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \text{ X } \sqrt{-1} = 3i$$
$$\sqrt{-6} = \sqrt{6} \text{ X } \sqrt{-1} = \sqrt{6}\ i$$

Dessa maneira, a solução da equação $X^2 + 9 = 0$ será:

$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9}$$
$$x = \pm\sqrt{9} \times \sqrt{-1}$$
$$x = \pm 3\mathbf{i}$$

DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO

Número complexo é todo número que pode ser escrito na forma **z = a + b i** , onde **a** e **b** são números reais e **i** é a unidade imaginária. O número real **a** é a parte real do número complexo z e o número real **b** é a parte imaginária do número complexo z.

Exemplos de tais números são apresentados na tabela.

Número complexo	Parte real	Parte imaginária
2 + 3 i	2	3
2 - 3 i	2	-3
2	2	0
3 i	0	3
-3 i	0	-3
0	0	0

POTÊNCIA DE NÚMERO COMPLEXO

Os números considerados complexos são escritos acompanhados de uma parte imaginária. No complexo z = a + bi, temos que a parte imaginária é representada por bi. Considerando i a unidade imaginária, vamos determinar alguns valores de in. Veja:

Vamos observar o comportamento presente nas potências de i e determinar um padrão que será utilizado para obter qualquer potência desse número. Para isso iremos recorrer a algumas propriedades da potenciação a fim de obter certas regularidades.

Sabemos que:

$i^0 = 1$ (todo número elevado ao expoente zero equivale a 1).
$i^1 = i$ (todo número elevado ao expoente 1 é igual a ele mesmo).
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^{10} = i^9 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$
$i^{11} = i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$\vdots$

Observe que na potência de i com expoente 4 os valores começam a se repetir e o mesmo acontece nas potências com expoentes 8 e 12, caracterizando um padrão de repetição no cálculo dessas potências. Como os valores se repetem a cada quatro potências calculadas, ou seja, de 4 em 4, podemos obter o valor de qualquer potência de i utilizando o seguinte método:

Por exemplo, se desejamos calcular o valor de i^{125}.

Faremos a divisão de 125 por 4:

$$\begin{array}{r|l} 125 & \underline{\quad 4 \quad} \\ -124 & \ \ 31 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Calcular o valor de i^{125} é o mesmo que calcular o valor de i elevado ao resto da divisão de 125 por 4, ou seja, é o mesmo que calcular i^{1}.

Assim, $\mathbf{i^{125} = i^{1} = i}$

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Já vimos que todo número complexo pode ser escrito na forma a + bi, chamada de forma algébrica ou forma normal, onde a é chamado de parte real e bi, de parte imaginária. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão estão bem definidas para o conjunto dos complexos, assim como para os números reais.

Considere dois números complexos $\mathbf{z_1 = a + bi}$ e $\mathbf{z_2 = c + di}$.

Vamos analisar como se dá cada uma das operações citadas para os elementos desse conjunto.

1. ADIÇÃO

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Observe que basta somar a parte real de um com a parte real do outro e proceder da mesma forma com a parte imaginária.

Exemplo: Dados os números complexos $z_1 = 5 + 8i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2 - 3i$, calcule:

a) $z_1 + z_2 = (5 + 8i) + (1 + 2i) = (5 + 1) + (8 + 2)i = 6 + 10i$

b) $z_2 + z_3 = (1 + 2i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + (2 - 3)i = 3 - i$

2. SUBTRAÇÃO

A subtração é feita de forma análoga. Observe:

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Exemplo:

a) $(5 + 8i) - (1 + 2i) = (5 - 1) + (8 - 2)i = 4 + 6i$

b) (1 + 2i) – (2 – 3i) = (1 – 2) + [2 – (– 3)]i = – 1 + 5i

3. MULTIPLICAÇÃO

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2$$

Como sabemos, $i^2 = -1$.

Logo,

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = ac + adi + cbi - bd$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:

a) (5+8i)·(1+2i) = (5·1-8·2)+(5·2+1·8)i

(5+8i)·(1+2i) = (5-16) + (10+8)i = -11+18 i

b)(1+2i)·(2-3i) = [1·2 - 2·(-3)] + [1·(-3) + 2·2] i

(1+2i)·(2-3i) = (2+6) + (-3+4)i = 8 + i

4. DIVISÃO

Para realizar a divisão de dois números complexos precisamos introduzir o conceito de conjugado de um número complexo.

Seja z = a + bi, o conjugado de z é = a – bi.

Agora podemos definir a operação de divisão para números complexos.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)}$$

Exemplo:

$$\frac{5 + 8i}{1 + 2i} = \frac{(5 + 8i)}{(1 + 2i)} \cdot \frac{(1 - 2i)}{(1 - 2i)}$$

Vamos fazer os cálculos do numerador e do denominador separadamente:

(5 + 8i). (1 – 2i) = [5·1 - 8(-2)] + [5·(-2) + 1·8]i = 21 – 2i

Na multiplicação dos denominadores basta aplicarmos a seguinte propriedade:

z · = (a + bi) (a – bi) = $a^2 + b^2$

Assim,

(1 + 2i) (1 – 2i) = $1^2 + 2^2$ = 5

Logo,

$$\frac{5+8i}{1+2i} = \frac{(5+8i)}{(1+2i)} \cdot \frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{21-2i}{5} = \frac{21}{5} - \frac{2i}{5}$$