

JÚNIOR SANTIS VIEIRO

MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DO MOTOR *BRUSHLESS* DC

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como parte das atividades para obtenção do título de Engenheiro Eletricista, do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa, Campus Alegrete.

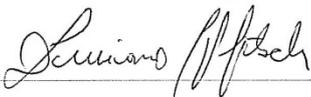
Orientador: Rodrigo Padilha Vieira

**ALEGRETE
2013**

Autoria: Junior Santis Vieiro

Título: Modelagem matemática e controle do motor brushless DC

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte das atividades para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo listados, consideram este trabalho aprovado.				
	Nome	Titulação	Assinatura	Instituição
1	Rodrigo Padilha Vieira	Dr.		Unipampa
2	Márcio Stefanello	Dr.		Unipampa
3	Luciano Lopes Pfitscher	Me.		Unipampa

Data da aprovação: 06 de março de 2013.

*“Dedico este trabalho a Deus e aos
meus pais que me deram força e apoio para
continuar esta longa caminhada”*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente à Deus, por me dar forças e vencer todas as dificuldades encontradas.

Agradeço aos meus pais, Zilmar e Maria de Lourdes, e minha namorada Tainá Francine, pelo amor, pela dedicação e pela preocupação que tiveram comigo pelo meu bem estar.

Gostaria de agradecer ao professor Dr. Rodrigo Padilha Vieira pela orientação e pelos conhecimentos compartilhados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Um agradecimento especial aos meus demais familiares e amigos, que estiveram comigo nesta jornada.

“Nossa maior glória não reside no fato de nunca cairmos, mas sim em levantarmo-nos sempre depois de cada queda.”

Confúcio

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso apresenta um método de controle vetorial aplicado à máquina *Brushless* DC. Os motores de ímãs permanentes são classificados em dois tipos, dependendo exclusivamente da sua forma de onda da Força Contra-Eletromotriz, ser senoidal ou não. Este tipo de máquina que apresenta sua Força Contra-Eletromotriz não-senoidal, trapezoidal, apresenta algumas características adicionais em relação às outras máquinas como baixa complexidade construtiva e baixa manutenção devido à ausência de comutadores e escovas, e com isso vem ganhando um grande destaque no setor industrial.

Para obter o controle vetorial da máquina *Brushless* DC inicialmente faz-se a revisão das principais máquinas elétricas, de indução, síncronas e de relutância variável. Durante o desenvolvimento desta pesquisa, ainda serão apresentadas algumas características da máquina escolhida e o seu modelo matemático desenvolvido, que tem por finalidade demonstrar o comportamento das grandezas internas da máquina. Serão demonstradas simulações do modelo apresentado no software Matlab e também no software Simulink. Logo após, são apresentados alguns tipos de controladores e o desenvolvimento da função de transferência da máquina *Brushless* DC. A partir da função de transferência pode-se realizar o projeto dos ganhos para os controladores da malha de controle da corrente e da malha de controle da velocidade rotórica. Tal projeto é validado a partir de simulações efetuadas no software Matlab. Este trabalho apresentará ainda as transformações de referenciais, dando maior ênfase para a transformada de Park estendida, a qual é adequada para utilização em máquinas não-senoidais. Além disso realiza-se o projeto de uma ação *Anti-Windup* no sistema de controle de velocidade. Para validar o sistema implementado para a máquina *Brushless* DC serão efetuadas simulações no software Simulink. Os resultados obtidos através do software Matlab/Simulink são satisfatórios, assim pode-se aplicar este sistema de controle vetorial de velocidade em acionamento para máquina *Brushless* DC.

Palavras-chave: Máquina *Brushless* DC; Controle de Velocidade; Transformação de Referencial; Transformação de Park Estendida; Controle Vetorial.

ABSTRACT

This monograph presents a vector control method applied to Brushless DC machine. The permanent magnet motors are classified into two types, depending exclusively on your waveform Counter Electromotive Force, it could be sinusoidal or not. This e machine that presents non-sinusoidal Counter Electromotive Force, for example, trapezoid, provides some additional features in relation to other machines as constructive low complexity and low maintenance due to absence of commutators and brushes.

Initially this monograph presents the revision of the main used electrical machines: induction, synchronous and variable reluctance. During the development of this research will still be present some characteristics of the machine chosen and your mathematical model, which aims demonstrate the dynamic behavior of the machine. Furthermore, simulations results carried out with Matlab/Simulink are presented. In addition, this monograph presents some types of controllers and the development of transfer function of the Brushless DC machine. The design of gains for the-controllers are projected from the transfer function. The proposed scheme is validated from simulations performed in Matlab. This work also presents the transformations of references, giving emphasis to the extended Park Transform, which is suitable to be used in non-sinusoidal machines. Furthermore, it is carried out the project of an Anti-windup action in the control system speed. The results obtained using the Matlab / Simulink software were satisfactory, and it could used in practical systems.

Keywords: *Brushless* DC Machine; Rotor Speed Control; Transformation Reference; Extended Park Transformation; Vector Control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	Representação do circuito de acionamento do motor <i>Brushless</i> DC. . .	24
Figura 2.2	Força Contra-Eletromotriz por Fase: a) Motor <i>Brushless</i> DC, b) Motor Síncrono.	25
Figura 2.3	Rotor com Ímãs na Superfície.	28
Figura 2.4	Rotor com Ímãs Inserido na Superfície.	28
Figura 2.5	Rotor com Ímãs Internos.	29
Figura 2.6	Exemplo de um estator do motor <i>Brushless</i> DC Trifásico com quatro pólos e enrolamento concentrado de duas camadas.	30
Figura 2.7	Curva característica Torque-Velocidade do motor <i>Brushless</i> DC.	33
Figura 2.8	Forças Contra-Eletromotrizes de cada Fase do motor <i>Brushless</i> DC. .	36
Figura 2.9	Tensões de fase.	40
Figura 2.10	Correntes de fase.	40
Figura 2.11	Velocidade Angular e o Torque de Carga.	41
Figura 2.12	Forças Contra-Eletromotrizes.	41
Figura 2.13	Esboço do diagrama de blocos implementado no Simulink.	42
Figura 2.14	Tensões de Fase obtidas no Simulink.	42
Figura 2.15	Correntes de Fase obtidas no Simulink.	43
Figura 2.16	Forças Contra-Eletromotrizes obtidas no Simulink.	43
Figura 3.1	Sistema em Malha Fechada.	45
Figura 3.2	Diagrama de blocos com a obtenção da função de transferência da máquina <i>Brushless</i> DC.	54
Figura 3.3	Diagrama de blocos para os controladores PI's projetados	60
Figura 3.4	Resposta do sistema projetado para o PI de Corrente.	62
Figura 3.5	Resposta do sistema projetado com aumento de Velocidade natural para o PI de Corrente	63
Figura 3.6	Lugares das raízes para o controlador de Corrente.	64
Figura 3.7	Diagrama de Bode, com os valores dos ganhos para o PI de Corrente.	65

Figura 3.8	Resposta do sistema projetado para o PI Mecânico.	66
Figura 3.9	Resposta do sistema projetado para o PI Mecânico para um novo valor de Velocidade natural do Sistema.	67
Figura 3.10	Lugares das raízes para o controlador Mecânico	68
Figura 3.11	Diagrama de Bode, com os valores dos ganhos para o PI Mecânico.	69
Figura 4.1	Estruturas Simétricas: a) Circuito Trifásico Simétrico, b) Circuito Bifásico Simétrico.	72
Figura 4.2	Decomposição vetorial em S_{α}	72
Figura 4.3	Decomposição vetorial em S_{β}	73
Figura 4.4	Transformação de Park aplicado ao Sistema de eixos.	76
Figura 4.5	Transformação de Park aplicado sobre o eixo i_{Rd}	76
Figura 4.6	Transformação de Park aplicado sobre o eixo i_{Rq}	77
Figura 4.7	Transformação de Park: a) Máquina Original, b) Máquina Transformada.	77
Figura 4.8	Ação <i>Anti-Windup</i> para um controlador PI.	80
Figura 4.9	Controle Vetorial de Velocidade implementado para a máquina <i>Brushless</i> DC.	81
Figura 4.10	Varição do ângulo do rotor com a variação do coeficiente angular (μ), obtida no Matlab.	82
Figura 4.11	Comparação da Velocidade de Referência com a Velocidade do Rotor para $\omega_n = 15 \text{ rad/s}$	83
Figura 4.12	Comparação da Velocidade de Referência com a Velocidade do Rotor para $\omega_n = 40 \text{ rad/s}$	83
Figura 4.13	Forma de onda das Correntes Trifásicas.	84
Figura 4.14	Correntes Bifásicas da máquina <i>Brushless</i> DC.	84
Figura 4.15	Varição do ângulo do rotor com a variação do coeficiente angular (μ), obtida no Simulink.	85
Figura 4.16	Formas de onda das correntes do eixo direto e de quadratura utilizando a Transformada de Park estendida.	85
Figura 4.17	Tensões Bifásicas da máquina.	86

Figura 4.18	Tensões Trifásicas da máquina.	86
Figura 4.19	Torque Eletromagnético.	87
Figura 4.20	Tensões Trifásicas com inserção de Carga.	87
Figura 4.21	Correntes Trifásicas com inserção de Carga.	88
Figura 4.22	Torque Eletromagnético com inserção de Carga.	88
Figura 4.23	Velocidade de Referência e a Velocidade do Rotor com inserção de Carga.	89
Figura 4.24	Tensões Trifásicas com uma ação <i>Anti-Windup</i> sendo conectada uma Carga.	90
Figura 4.25	Correntes Trifásicas com uma ação <i>Anti-Windup</i> sendo conectada uma Carga.	90
Figura 4.26	Velocidade de Referência e a Velocidade do Rotor com a ação <i>Anti-Windup</i> e inserção de Carga.	91

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Coefficiente de atrito viscoso (Nms)
e_a	Força Contra-Eletromotriz da Fase a (V)
e_b	Força Contra-Eletromotriz da Fase b (V)
e_c	Força Contra-Eletromotriz da Fase c (V)
$e(t)$	Sinal de erro
F	Força Magnetomotriz
f	Frequência do sistema (Hz)
$G_c(s)$	Função de transferência
$G_{cmec}(s)$	Função de transferência da velocidade
$G_p(s)$	Função de transferência da planta
i_a	Corrente de Fase a (A)
i_b	Corrente de Fase b (A)
i_c	Corrente de Fase c (A)
i_s	Corrente Estatórica (A)
i_r	Corrente Rotórica (A)
i_d	Corrente do eixo Direto (A)
i_q	Corrente do eixo de Quadratura (A)
i_{rd}	Corrente rotórica do eixo Direto (A)
i_{rq}	Corrente rotórica do eixo de Quadratura (A)
i_{sd}	Corrente estatórica do eixo Direto (A)
i_{sq}	Corrente estatórica do eixo de Quadratura (A)
J	Constante de Inércia (kgm^2)
K_S	Ganho <i>Anti-Windup</i>
K_P	Ganho Proporcional

K_I	Ganho Integral
K_D	Ganho Derivativo
K_t	Constante de Torque
$L - M, \mathbf{LM}$	Indutância equivalente (H)
L_a	Indutância própria da Fase a (H)
L_b	Indutância própria da Fase b (H)
L_c	Indutância própria da Fase c (H)
M	Indutância Mútua (H)
\mathbf{P}	Transformada de Park
p	Número de pares de Pólos
R_a	Resistência do enrolamento do estator da Fase a (Ω)
R_b	Resistência do enrolamento do estator da Fase b (Ω)
R_c	Resistência do enrolamento do estator da Fase c (Ω)
T_i	Tempo Integral
T_c	Torque de Carga (Nm)
T_e	Torque eletromagnético (Nm)
T_{mec}	Torque Mecânico (Nm)
$T_{SIS}(s)$	Função de transferência do sistema
$\mathbf{T}_{\alpha\beta}$	Transformada $\alpha\beta 0$
u	Vetor de Entrada
$u(t)$	Sinal de controle
v_a	Tensão da Fase a (V)
v_b	Tensão da Fase b (V)
v_c	Tensão da Fase c (V)
V_{dc}	Tensão de Corrente Contínua (V)
x	Vetor de Estados

Y	Conexão em Estrela
θ	Posição angular do Rotor (<i>rad</i>)
λ_a	Indutância concatenada da Fase <i>a</i> (<i>H</i>)
λ_b	Indutância concatenada da Fase <i>b</i> (<i>H</i>)
λ_c	Indutância concatenada da Fase <i>c</i> (<i>H</i>)
λ_{af}	Fluxo Mútuo Concatenado (<i>Wb</i>)
μ	Coefficiente de Variação Angular (<i>rad</i>)
ζ	Coefficiente de Amortecimento
ω_b	Largura de banda (<i>dB</i>)
ω_m	Velocidade angular de rotação (<i>rad/s</i>)
ω_n	Velocidade natural de resposta (<i>rad/s</i>)
Δ	Conexão em Delta
\mathbb{I}	Matriz Identidade

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
1.1 Motivação	17
1.2 Revisão Bibliográfica	17
1.2.1 Máquina de Indução	19
1.2.2 Máquina Síncronas	20
1.2.3 Máquinas de Relutância	22
1.3 Proposta do Trabalho	22
1.4 Organização do Trabalho	22
2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR <i>BRUSHLESS</i> DC	24
2.1 Características Construtivas.....	26
2.1.1 Ímãs Permanentes.....	26
2.1.2 Rotor.....	27
2.1.2.1 Rotor com Ímãs de Superfície	27
2.1.2.2 Rotor com Ímãs Inseridos na Superfície	28
2.1.2.3 Rotor com Ímãs Internos	29
2.1.3 Estator	29
2.1.4 Sensores Hall.....	30
2.1.5 Princípio de Funcionamento.....	31
2.1.6 Número de Fases	32
2.1.7 Característica Torque-Velocidade.....	33
2.2 Modelagem Matemática do Motor Brushless DC	34
2.3 Resultados da Simulação do Modelo Matemático.....	38
2.4 Conclusão deste capítulo	43
3. CONTROLE DE VELOCIDADE APLICADO AO MOTOR <i>BRUSHLESS</i> DC	45
3.1 Tipos de Controladores.....	46
3.1.1 Controlador P	46
3.1.2 Controlador I.....	47
3.1.3 Controlador PI.....	47
3.1.4 Controlador D.....	48
3.1.5 Controlador PD	48
3.1.6 Controlador PID	49
3.2 Função de Transferência da Máquina Brushless DC	49
3.3 Projeto dos Controladores PI de Corrente	54
3.4 Projeto dos Controladores PI da malha de Velocidade.....	58

3.5	Resultados dos Controladores.....	60
3.6	Conclusão deste capítulo	69
4.	TRANSFORMAÇÕES DE REFERENCIAL	71
4.1	Transformação de uma Máquina Simétrica Trifásica para $\alpha\beta 0$	71
4.2	Transformação de Park	75
4.3	Transformação de Park Estendida	78
4.4	Ação Anti-Windup	79
4.5	Resultados de Simulações.....	81
4.5	Conclusão deste capítulo	91
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	93
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de novos materiais e dispositivos eletrônicos resultou em melhorias nos projetos e na fabricação de máquinas elétricas, tal como em máquinas de indução, de ímãs permanentes e de relutância variável. Com o intuito de se obter aperfeiçoamento do motor de ímãs permanentes, pesquisas relacionadas aos materiais ferro magnético de alto desempenho vêm sendo desenvolvidas, sendo comumente utilizados os ímãs de terras raras, que são ligas de cobalto, e possuem os melhores desempenhos (SINGH & SWAMY, 1998). Assim, os motores de ímãs permanentes vêm se destacando por possuírem uma alta densidade de potência e facilidade de controle, sendo adequados onde se exija variação de velocidade, tornando-se bem atrativo para as indústrias (YEO, 1997).

Os motores de ímãs permanentes são classificados em dois tipos, de acordo com a forma de onda da sua Força Contra-Eletromotriz, podendo ser senoidal ou trapezoidal (SU & MCKEEVER, 2002), (YEDAMALE, 2003). Além das características mencionadas para os motores de ímãs permanentes, os motores *Brushless* DC se destacam por possuírem algumas características adicionais, como baixa complexidade construtiva e baixa manutenção devido à ausência de comutadores e escovas, sendo muito utilizado na área industrial (BARATIERI, 2011), (XIN, 2011). Os motores *Brushless* DC são alimentados por um conjunto de inversores de ponte completa, que formam uma onda quase quadrada, possuindo assim um acionamento de baixo custo e simplicidade em seu controle (SU & MCKEEVER, 2002). Várias estratégias de controle de velocidade têm sido publicadas para este motor, sendo este tipo de controle regularmente adotado para conduzir as correntes de forma adequada (ELNADY & LIU, 2007).

Este trabalho tem por finalidade apresentar um sistema de controle vetorial de velocidade aplicado a máquina *Brushless* DC. Para obter este sistema, foram apresentadas algumas características da máquina, dos controladores e das transformações de referenciais utilizadas. Descrevendo as características, bem como seu modelo matemático, foi possível obter as formas

de onda das tensões, correntes, as Forças Contra-Eletromotrizes, a variação do torque de carga e a variação angular do rotor obtidas no software Matlab. Para validar o modelo também foram realizadas algumas simulações utilizando o software Simulink. Após a demonstração das características dinâmicas da máquina com simulações, são apresentados os tipos de controladores utilizados e também o processo para obtenção da função de transferência da máquina. Com isto, foi possível projetar os controladores PI da malha de controle da corrente e da malha de controle da velocidade rotórica. Para cada valor dos PI's, se utilizou de relações dos parâmetros da máquina para determinar sua velocidade natural de resposta. Assim, pode-se determinar os valores de ganhos para cada projeto dos controladores, determinando a localidade de suas raízes, pólos e zeros, obtendo como resposta um sistema estável para os ganhos projetados.

Para simular um sistema de controle vetorial de velocidade, foram apresentadas as transformações de referenciais. Destacando que para as máquinas *Brushless* DC as transformações mais usuais não são bem definidas, tendo-se que utilizar uma extensão da transformada de Park uma ação *Anti-Windup* foi projetada e utilizada para evitar saturação na ação de controle. Finalmente, o sistema de controle proposto foi simulado com distúrbio de carga. Em todas as simulações apresentadas obteve-se um resultado satisfatório, assim este sistema de controle vetorial de velocidade pode ser implementado na prática.

1.1 Motivação

As máquinas de ímãs permanentes se destacam por apresentarem características superiores às outras máquinas convencionais, como elevada eficiência e alta densidade de potência.

A escolha do motor *Brushless* DC para obter controle vetorial de velocidade esta relacionado com as suas vantagens aos demais motores elétricos. Este tipo de motor possui uma ampla faixa de rotação de velocidade. Além disso, seu peso e volume são reduzidos devido ao uso de ímãs permanentes, possuindo a curva característica torque-velocidade linear e proporcionando pouca manutenção, devido à ausência de comutadores e escovas.

1.2 Revisão Bibliográfica

Os motores elétricos têm por finalidade converter energia elétrica em energia mecânica, sendo que o sistema de acionamento para estes tipos de motores são amplamente aplicados

como bombas, ventiladores, fábricas de papel, elevadores, veículos elétricos, eletrodomésticos e siderúrgicas. As máquinas de corrente alternada possuem uma estrutura elétrica e mecânica bem complexa. Embora estes equipamentos tenham sido introduzidos há algumas décadas atrás, o seu desenvolvimento está em contínua evolução.

Apesar da evolução das máquinas serem considerada lentas comparadas com os dispositivos eletrônicos de potência, ao se projetar um sistema de acionamento de alto desempenho, deve-se ter um profundo conhecimento do comportamento da máquina e de suas características como o modelo dinâmico e suas variações dos parâmetros.

Por alguns anos, as máquinas de corrente alternada foram preferencialmente aplicadas onde se exige velocidade constante, já as máquinas de corrente contínua, eram preferencialmente aplicadas onde a velocidade varia ao longo do tempo. Estas possuem desvantagens em relação às máquinas de corrente alternada devido ao seu custo ser elevado, possuir maior coeficiente de inércia e problemas de manutenção de seus comutadores e escovas. Já seu controle e os conversores eletrônicos utilizados para este tipo de máquina são simples comparados com as demais, apresentando assim uma resposta de torque muito rápida (BOSE, 2002).

Existem dois principais tipos de máquinas de corrente contínua, sendo divididas em máquinas de ímãs permanentes (sem escovas) e as máquinas convencionais com escovas. As máquinas de ímãs permanentes apresentam alta eficiência e relação de potência-volume elevadas, pois a presença de ímãs e ausência de cobre no enrolamento do rotor reduzem significativamente seu peso. Além disso, a utilização de ímãs dispensa a necessidade de fornecimento de energia constante para produzir os pólos magnéticos. Estes motores atingem maior eficiência do que os outros motores de corrente contínua convencionais, sendo ainda que possuem uma boa refrigeração e dissipação de calor. Este motor apresenta limitações na sua zona de potência constante devido ao enfraquecimento de seu campo e ainda a sua velocidade é limitada, não sendo suficiente para alcançar um desempenho razoável nas aplicações industriais. Para os motores convencionais de corrente contínua seu rotor é constituído por enrolamentos, havendo uma rotação livre entre os pólos do estator. A corrente elétrica é fornecida ao enrolamento por uma fonte de corrente contínua, sendo aplicada através das escovas, onde sua rotação é originada pelas interações entre o campo elétrico do rotor e o campo magnético existente entre os pólos norte e sul do estator. Para manter esta interação e a direção de rotação do rotor, é necessário inverter o sentido da corrente a cada duas vezes por ciclo de rotação, assim os motores de pequeno porte possuem dois pares de pólos já os motores de maior porte possuem entre cinco ou mais pares de pólos. Este motor possui algumas limitações como em seu volu-

me, baixo rendimento, baixa eficiência, menos confiáveis e necessidade de manutenção periódica devido a existência de comutador mecânico e escovas que se deterioram ao decorrer do tempo de funcionamento, sendo aplicado este tipo de motor onde se exija potências mais baixas (GRILO, 2010), (RAMOS, 2011), (CARUSO, 2007).

Nas últimas décadas, foram realizadas inúmeras pesquisas com intuito de variar a frequência e conseqüentemente a velocidade em técnicas de acionamento das máquinas de corrente alternada, sendo estas as vantagens deste tipo de máquina em relação às máquinas de corrente contínua (BOSE, 2002). As principais máquinas de correntes alternadas são as seguintes:

- Máquinas de Indução;
- Máquinas Síncronas;
- Máquinas de relutância variável;

1.2.1 Máquina de Indução

As máquinas de indução são utilizadas em amplas aplicações, onde exigem algumas modificações, não se detendo em apenas uma configuração. Em uma escala menor dos motores de indução, os servomotores de duas fases, são mais utilizados em posição de acoplamento de sistemas de controle. Já os motores de indução de uma única fase são amplamente utilizados como ferramentas manuais e de bancadas (KRAUSE et al., 2002).

Com uma máquina de indução trifásica, as suas conexões de seus enrolamentos podem ser tanto em estrela como em delta, mas são distribuídos de forma senoidal. O enrolamento do rotor é muito semelhante ao do estator, entretanto para uma máquina de indução com rotor gaiola de esquilo, tem-se uma estrutura de anéis na extremidade, assim seus núcleos, do estator e do rotor, são feitos de chapas de aço com lâminas ferromagnéticas, possuindo seu entreferro praticamente uniforme, não obtendo pólos salientes (BOSE, 2002).

Um dos métodos de controle mais utilizados nas máquinas de indução é baseado no princípio da orientação de campo (*FOC*). Este controle é efetuado através do desacoplamento do fluxo de torque da máquina, assim a máquina passa a se comportar como uma máquina de corrente contínua de excitação independente, não possuindo limitações em sua velocidade de operação. Com isto consegue-se alcançar velocidade entre três a cinco vezes a sua velocidade

nominal apesar de haver uma diminuição de seu rendimento para elevadas velocidades (GRILO, 2010).

As máquinas de indução são consideradas um tipo de máquina robusta, tendo um custo relativamente baixo. As técnicas de fabricação são bem estabelecidas, tendo um bom desempenho para as dinâmicas de controle de torque (ZHU & HOWE, 2007).

1.2.2 Máquina Síncronas

As máquinas síncronas, recebem este nome pela sua característica de velocidade, ou seja a sua velocidade esta relacionada exclusivamente com a sua frequência de alimentação. Esta máquina é uma grande concorrente da máquina de indução para aplicações onde se necessita uma máquina com velocidade variável.

As máquinas síncronas possuem o seu enrolamento do estator idêntico aos das máquinas de indução, mas seu enrolamento do rotor drena uma corrente contínua que produz o fluxo induzido no estator, criando assim um campo magnético que faz com que o rotor gire. A corrente contínua de campo é fornecida para o rotor através de um retificador estático alocado nos anéis coletores e escovas. A velocidade do rotor é sempre síncrona de referência dos eixos elétricos direto e de quadratura, sendo o eixo direto correspondente ao pólo norte do rotor. O torque da máquina síncrona é produzido de forma semelhante de uma máquina de indução, mas esta possui uma característica de pólo saliente, devido ao seu entreferro ser uniforme em torno do rotor, contribuindo para uma relutância assimétrica entre os eixos direto e de quadratura. A diferença entre as máquinas de pólos saliente ou não, está na forma em que se exige da máquina, sendo que para baixas velocidades deve-se usar uma máquina de pólo saliente. Já para velocidades relativamente altas deve-se utilizar uma máquina de pólo não saliente (BOSE, 2002).

Para uma máquina de ímãs permanentes, o seu enrolamento de campo de corrente contínua é substituído por ímãs, assim a maior vantagem desta substituição é a eliminação de perdas de cobre, proporcionando uma maior densidade de potência e menor inércia do rotor, apresentando uma construção bem robusta. A desvantagem destas máquinas é a perda de flexibilidade de controle de fluxo e possível efeito de desmagnetização de campo. Comparando a

máquina síncrona de ímãs permanentes com uma máquina de indução, tem-se uma eficiência elevada, mas seu custo é relativamente alto.

As máquinas síncronas que possuem sua Força Contra-Eletromotriz com forma de onda da não-senoidal, se utiliza de um controle somente em seu estado estacionário, então deve-se utilizar uma extensão da transformação de Park, obtendo assim o seu controle (GRENIER & LOUIS, 1995),(GRENIER & LOUIS, 1993).

Um dos principais problemas de implementação para a máquina que possui as formas de onda da Força Contra-Eletromotriz não-senoidal, trapezoidal, está relacionado ao modo de obter esta forma de onda. Assim é proposto utilizar uma tabela de consulta ao invés de utilizar uma função para obter esta Força Contra-Eletromotriz, assim o módulo de seu torque é obtido da mesma forma. Com isto os erros causados por serem zeros no denominador podem ser evitados, sendo um método bem benéfico (XIN, 2011).

Uma estratégia de controle utilizada por vários trabalhos para os motores que possuem a sua Força Contra-Eletromotriz trapezoidal é o controle de velocidade, PI, sendo uma estratégia de controle bem eficiente (ELNADY & LIU, 2007), (DARYABEIGI et al., 2010), (LU et al., 2005). Outra proposta é desenvolvida a partir de equações da tensão instantânea do motor *Brushless*, onde se estima uma vez a posição do rotor e então a velocidade do motor pode ser calculada, assim o motor pode ser excitado sem as posições dos sensores de velocidade, sendo proposto um algoritmo de implementação (MATSUI, 1992). Além disso, algumas pesquisas recentes tem direcionado seus esforços nas técnicas de controle de velocidade *sensorless* (YEO, 1997), (KIM et al., 2005), (MATSUI, 1992).

Apresentando algumas características da máquina *Brushless* DC, como baixa inércia, torque elevado e uma alta eficiência, utilizam este tipo de máquina desde bombeamento em lavouras, área industrial, aplicações médicas e ganhando uma atenção na utilização em veículos elétricos (SINGH & SWAMY, 1998), (XIAOBO et al., 2011), (LEE & AHN 2008).

1.2.3 Máquinas de Relutância

A máquina de relutância variável possui a característica de apresentar saliência dupla ou saliência no estator e no rotor, assim este tipo de máquina é classificada em dois tipos.

- Máquina de relutância comutada;
- Motor de passo;

A máquina de relutância comutada concorre diretamente com a máquina de indução, onde seus pólos do estator são concentrados por enrolamentos, divididos de forma a obter seu par de pólos. Já o motor de passo se move por um passo de ângulo fixo ou com um pulso digital. Os motores pequenos de passos são utilizados em aplicações de periféricos de computadores. Estas máquinas de relutância possuem a vantagem de sua simplicidade e robustez em sua construção, sendo uma máquina mais barata que outras da mesma classe, porém possuem um torque pulsante ocasionando graves problemas de ruído acústico (BOSE, 2002).

1.3 Proposta do Trabalho

É proposta deste trabalho, realizar o controle vetorial de velocidade para a máquina *Brushless* DC. Para isto, deve-se apresentar a modelagem matemática, as características deste motor, os tipos de controle e obter em seguida a sua função de transferência. Assim pode-se projetar os controladores da malha de controle da corrente e da malha de controle da velocidade rotórica. Para obter o sistema de controle vetorial de velocidade deve-se utilizar as transformações de referenciais, sendo que para este tipo de máquina as transformações mais usuais não são bem definidas. Assim foi implementada a transformada de Park estendida, sendo a mais adequada a se utilizar. Uma ação *Anti-Windup* foi projetada para operação com saturação na lei de controle.

1.4 Organização do Trabalho

O primeiro capítulo apresenta uma breve motivação para o uso deste tipo de máquina, uma revisão bibliográfica sobre publicações desenvolvidas para máquinas de indução, síncrona e de relutância, dando ênfase a alguns temas referentes às máquinas de ímãs permanentes com Força Contra-Eletromotriz não-senoidal, trapezoidal e a proposta a ser desenvolvida.

No segundo capítulo são apresentadas algumas características da máquina *Brushless* DC, bem como sua modelagem matemática. Assim mostrando resultados que validam o modelo matemático apresentado com simulações no software Matlab.

No terceiro capítulo são apresentados alguns tipos de controladores, o desenvolvimento da função de transferência da máquina e, além disso, será apresentado o projeto dos controladores PI's da malha de controle da corrente e da malha de controle da velocidade rotórica, o lugar das raízes, a resposta em frequência para os ganhos calculados através de simulações que demonstram a resposta dos controladores projetados.

As transformações de referenciais serão demonstradas no quarto capítulo. Neste capítulo serão apresentados as transformações de uma máquina simétrica para $\alpha\beta 0$, a transformação de Park, transformação de Park estendida e a ação *Anti-Windup*. Entre as transformações, dando prioridade para a transformada de Park estendida. Com base nas simulações obtidas no software Simulink, verificou-se que os controladores projetados estavam saturando, então utilizou uma técnica da ação *Anti-Windup* contra esta saturação no sistema de controle vetorial de velocidade implementado para a máquina *Brushless* DC.

E por fim, são apresentadas as conclusões gerais deste trabalho.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO MOTOR *BRUSHLESS* DC

Os motores de ímãs permanentes têm se destacado por possuírem uma elevada eficiência e alta densidade de potência. De maneira geral, são classificados em duas categorias principais, relacionados com as suas formas de onda da Força Contra-Eletromotriz. Os motores Síncronos que apresentam Força Contra-Eletromotriz senoidal recebem o nome de Motor Síncrono ou PMSM (*Permanent Magnet Synchronous Motor*) e os motores com Força Contra-Eletromotriz Trapezoidal, recebem o nome de motor *Brushless* DC ou BLDC (*Brushless Direct Current*) (SU & MCKEEVER, 2002).

O motor Síncrono é excitado por correntes trifásicas senoidais, já os motores *Brushless* DC são alimentados por um conjunto de correntes trifásicas com uma forma de onda quase quadrada. Esta alimentação é realizada por um conjunto de inversores de fonte de tensão de ponte completa, apresentando um acionamento com baixo custo e simplicidade de controle de corrente por meio de um sensor de posição do rotor. A Figura 2.1 apresenta o circuito de acionamento do motor *Brushless* DC.

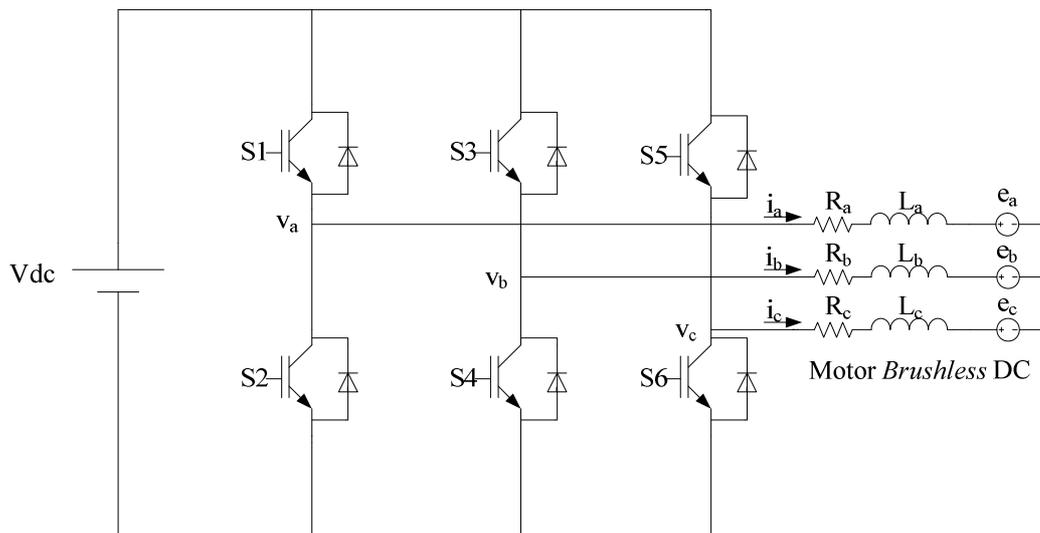


Figura 2.1. Representação do circuito de acionamento do motor *Brushless* DC.

Alguns motores de ímãs permanentes necessitam de um sensor de posição do rotor, para ocorrer à comutação da fase. E o controle da corrente, para os motores Síncronos, tem-se a necessidade de um fornecimento constante de informações de posição, assim deve-se utilizar um sensor de alta resolução, como um codificador. Já para os motores *Brushless* DC utilizam-se de seis instantes de comutação de fase por ciclo elétrico, para fazer esta comutação com baixo custo normalmente se utiliza sensores de efeito Hall. Para haver uma maior confiabilidade, os sensores de posição podem ser eliminados, assim o controle de *sensorless* se torna a única escolha para determinadas aplicações onde os sensores não podem funcionar devido ao seu ambiente de utilização ser inadequado (BARATIERI, 2011), (SU & MCKEEVER, 2002). A Figura 2.2 mostra as formas de onda da Força Contra-Eletromotriz por fase para o motor *Brushless* DC e para o motor Síncrono (YEDAMALE, 2003).

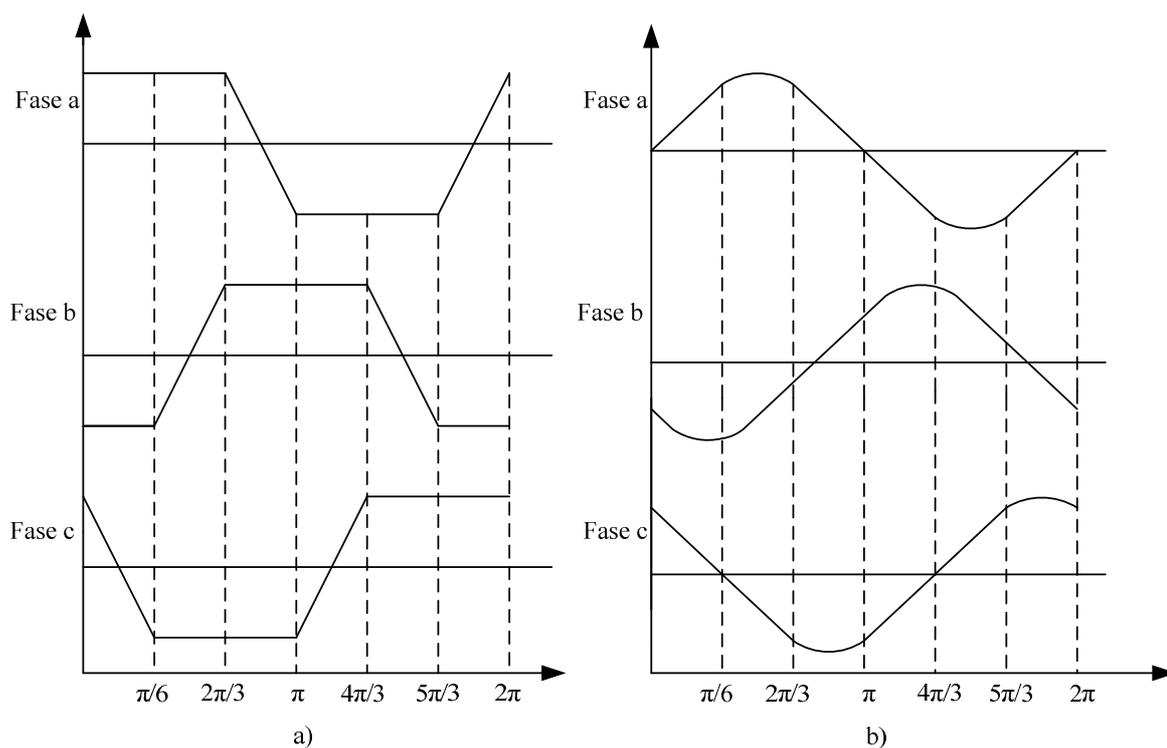


Figura 2.2. Força Contra-Eletromotriz por fase: a) Motor *Brushless* DC, b) Motor Síncrono.

2.1 Características Construtivas

Com a evolução dos ímãs permanentes, nas últimas décadas, pode-se desenvolver máquinas de corrente contínua com campos sendo excitados por ímãs. Com isto a evolução industrial fez com que as chaves semicondutoras contribuíssem para a substituição dos comutadores com escovas por comutadores eletrônicos. Para máquinas de corrente contínua clássicas, o seu controle era feito através do seu enrolamento de campo, já para máquinas de ímãs permanentes obterem um controle semelhante, é necessário utilizar técnicas por orientações de campo, sendo representados por uma base vetorial, demonstrada nos capítulos seguinte pela Transformação de Park. As principais vantagens do motor *Brushless* DC em comparação aos outros tipos de motores são:

- Larga faixa de velocidade de rotação;
- Resposta dinâmica rápida;
- Peso e volume reduzido;
- Característica linear de torque por velocidade;
- Aumento da densidade de energia;
- Pouca manutenção devido à ausência de comutadores e escovas;

A desvantagem deste tipo de motor é possuir a necessidade de um circuito eletrônico de acionamento sincronizado com a posição rotórica. O uso deste circuito eletrônico possibilita uma flexibilidade no acionamento e controle do motor (BARATIERI, 2011).

2.1.1 Ímãs Permanentes

As principais vantagens do uso de ímãs permanentes em motores elétricos estão relacionadas na melhoria de sua eficiência devido à redução das perdas por excitação; o aumento de sua densidade de energia devido à redução de seu volume; e possuir uma simples construção e manutenção.

Os principais materiais ferromagnéticos que são aplicados em máquinas elétricas com ímãs permanentes são:

- Alnico-5;
- Ferrite;
- Samarium-Cobalto
- Neodymium-Bor-Ferro

São ligas compostas por cobalto, ferro e níquel, onde apresentam propriedades características devido a sua composição e o tratamento de sua fabricação. Os ímãs são magnetizados com uma determinada orientação ou direção. A orientação influencia na distribuição da densidade magnética no entreferro, afetando indiretamente na densidade de energia para um dado agrupamento de ímãs. Cada empresa possui um processo industrial de magnetização dos ímãs, algumas magnetizam na própria máquina através do estator, enquanto outras fazem este processo de forma discreta.

Os ímãs permanentes podem ser construídos em qualquer forma e tamanho, para se obter um fluxo magnético adequado para determinado projeto. O que determina a escolha do formato do ímã é a configuração do rotor a ser utilizado, podem ser por ímãs na superfície, inseridos ou internos (BARATIERI, 2011).

2.1.2 Rotor

A escolha do tipo de rotor pode ser determinada através de qual ímã permanente será colocado no rotor, sendo que o princípio de operação não se altere nas diferentes configurações existentes. Dependendo de sua construção, haverá diferenças entre a indutância do eixo de quadratura e do eixo direto (BARATIERI, 2011).

2.1.2.1 Rotor com Ímãs de Superfície

Os ímãs são fixados na superfície por meio de uma resina epóxi, com este tipo de fixação pode comprometer a robustez mecânica da máquina impossibilitando a operação da mesma em altas rotações. A colocação dos ímãs permanentes fornece alta densidade de fluxo magnético no entreferro, assim proporcionando uma redução na variação da relutância. Com esta redução, pode-se dizer que a diferença entre as indutâncias de eixo de quadratura e eixo direto podem ser desprezíveis para este caso. Na Figura 2.3 mostra a posição no rotor dos ímãs de superfície (BARATIERI, 2011).

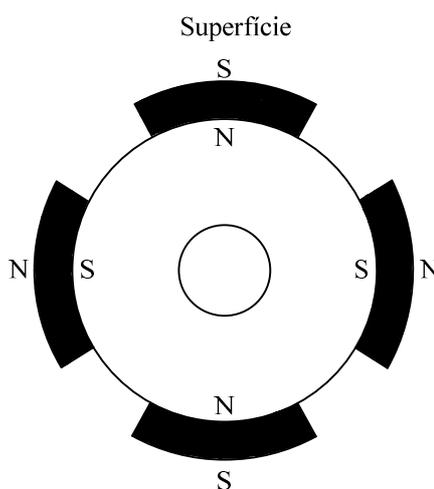


Figura 2.3. Rotor com Ímãs na Superfície.

2.1.2.2 Rotor com Ímãs Inseridos na Superfície

São inseridos ímãs em cavidades na superfície do rotor, de modo a reforçar a robustez mecânica. Assim, pode-se operar máquinas em altas rotações com este tipo de rotor. A inserção dos ímãs ocasiona um aumento na relutância e uma diferença entre as indutâncias de eixo de quadratura e de eixo direto. Conforme a Figura 2.4 ilustra a alocação dos ímãs de inserção na superfície do rotor (BARATIERI, 2011).

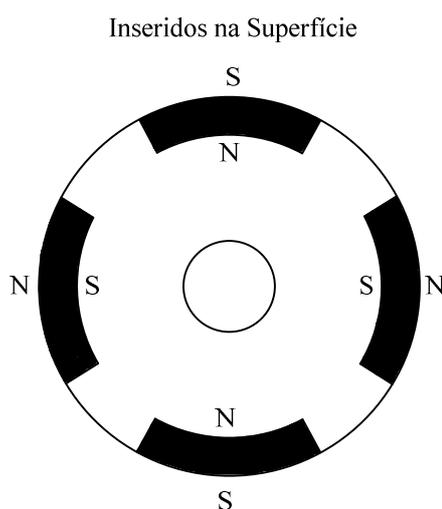


Figura 2.4. Rotor com Ímãs Inseridos na Superfície.

2.1.2.3 Rotor com Ímãs Internos

Os ímãs são inseridos no interior do rotor, assim apresenta uma maior robustez mecânica comparada aos outros tipos, sendo aplicado onde exigem altas velocidades de rotação. Com a inserção dos ímãs, ocorre um aumento na relutância e diferença entre as indutâncias de eixo de quadratura e de direto, assim tem-se um conjugado de relutância considerável, que aumentará a eficiência do motor. Este tipo de rotor é bem complexo, sendo não viável para algumas aplicações. A Figura 2.5 demonstra a alocação dos ímãs no rotor (BARATIERI, 2011).

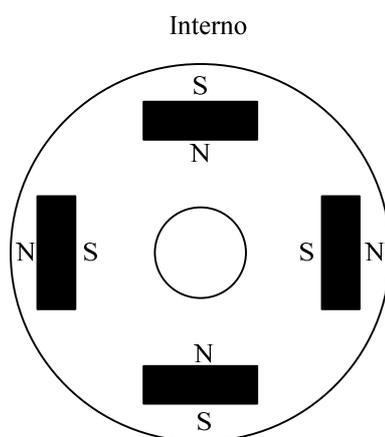


Figura 2.5. Rotor com Ímãs Internos.

2.1.3 Estator

O estator do motor *Brushless* DC é constituído de lâminas sobrepostas com as bobinas alocadas em ranhuras axialmente cortadas ao longo da circunferência interna. O estator do motor *Brushless* DC tem por finalidade obter a Força Contra-Eletromotriz trapezoidal, assim seu enrolamento estatórico é projetado para uma Força Magnetomotriz retangular, onde seu enrolamento estatórico é concentrado com camadas simples, duplas ou multi-camadas podendo ser também distribuídas ou modular.

Possuindo mais de uma bobina, a sua conexão é feita em série, assim apresentando um baixo custo de fabricação devido a sua simplicidade de construção. Cada um dos enrolamentos é distribuído na circunferência do estator para formar o número de pares de pólos.

O uso do enrolamento estatórico concentrado no motor *Brushless* reduz a utilização de cobre, tamanho axial e sua simplicidade construtiva. Assim, possui algumas desvantagens por possuir um alto torque, baixo fator de enrolamento e redução da saliência. Conforme mostra a

Figura 2.6 um exemplo de motor *Brushless* trifásico com quatro pólos e enrolamentos concentrados de duas camadas. (BARATIERY, 2011).

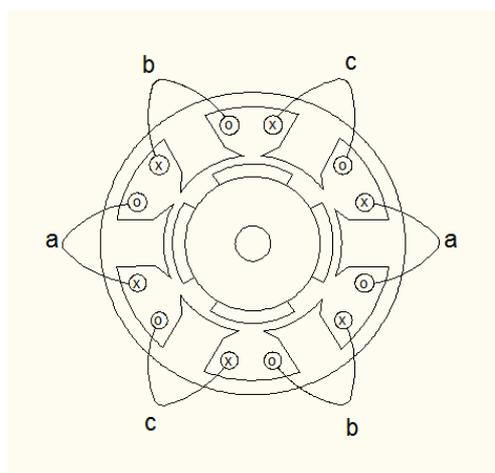


Figura 2.6. Exemplo de um estator do motor *Brushless* DC trifásico com quatro pólos e enrolamento concentrado de duas camadas.

2.1.4 Sensores Hall

A comutação de um motor *Brushless* DC é controlada eletronicamente. Para acionar este motor, os enrolamentos do estator devem ser energizados de acordo com a posição angular do rotor, seguindo uma sequência. É importante saber a posição do rotor a fim de compreender quais enrolamentos serão energizados, seguindo uma sequência de energização. A posição do rotor é determinada através de sensores de efeito Hall que são incorporados no estator do motor.

Em geral, os motores *Brushless* DC possuem três sensores Hall, assim, quando um pólo magnético passar perto de um sensor Hall, ele fornecerá um sinal digital alto ou baixo, indicando que o pólo magnético norte ou sul está passando pelo sensor. Através da combinação dos sinais dos três sensores Hall a comutação pode ser determinada (MOURA, 2010), (YEDAMALE, 2003).

A incorporação do sensor Hall é feita na parte estacionária da máquina, sendo esta incorporação um processo complexo, havendo qualquer desalinhamento nestes sensores irá gerar um erro na determinação da posição do rotor. A montagem dos sensores Hall é feita em uma placa chamada *PC*, sendo fixada na sua tampa do envoltório na extremidade, onde não há

condução, assim permitindo aos usuários ajustar o conjunto complexo dos sensores Hall alinhado com os ímãs do rotor, proporcionando um melhor desempenho da máquina.

Baseado na posição física dos sensores Hall existe duas possibilidades de defasagem angular das fases entre si em sua saída, podendo ser a 60° elétricos ou 120° elétricos. Com base nisso o fabricante da máquina define a sequência de comutação que deve ser seguida para controlar o motor (YEDAMALE, 2003).

2.1.5 Princípio de Funcionamento

O princípio de operação do Motor *Brushless* DC pode ser comparado ao funcionamento de um motor de corrente contínua com ímãs permanentes no estator. Em um motor de corrente contínua convencional, uma espira é fixada ao rotor e o campo do estator é estabelecido por ímãs. No motor convencional, o sentido da corrente que percorre a espira é controlado através do conjunto “escova-comutador”. A comutação sempre ocorre no instante em que a posição angular do rotor é tal que o fluxo magnético do rotor se alinha ao fluxo do estator, de modo que a rotação se mantenha no mesmo sentido (TRINDADE, 2009).

Para um motor *Brushless* DC, as comutações são feitas através de comutadores eletrônicos, transistores ou tiristores. Para cada comutação a ser realizada, uma das três fases é conectada ao terminal positivo da fonte, a outra fase conectada no terminal negativo e a terceira fase encontra-se em aberto. Assim, um torque é produzido devido à interação entre o campo magnético gerado nas bobinas do estator e o rotor de ímãs permanente. Seu torque será máximo quando os dois campos estiverem em 90° elétricos um do outro, e mínimo conforme os campos irem se alinhando para 0° elétricos, assim tornando a ser nulo.

Para que o motor continue em movimento, o campo magnético produzido no estator deve mudar de posição. Os sensores de efeito Hall realimentam o sistema de comutação eletrônica, que realiza a energização das bobinas na sequência correta para o funcionamento contínuo do motor.

Para um determinado sensor Hall a mudança de estado ocorre a cada 60° elétricos, logo são necessários seis passos para poder completar um ciclo elétrico. A cada 60° elétricos a sequência de energização das fases deve ser trocada. Porém um ciclo elétrico pode não corresponder a um ciclo de rotação completa do rotor (MOURA, 2010).

A determinação pelo número de ciclos elétricos necessários para se completar uma rotação mecânica completa é determinada pelo número de pares de pólos do rotor, onde, para cada par de pólos, um ciclo elétrico é realizado, assim o número de ciclos por rotação é igual ao número de pares de pólos.

Monitorando a Força Contra-Eletromotriz da fase que se encontra desconectada do barramento de alimentação, a cada passo do ciclo pode-se determinar o instante que ocorre a comutação entre as fases do motor, esta estratégia de controle é chamada de *Sensorless*, que possui uma vantagem de custo devido à eliminação dos sensores Hall de posição, porém, possui várias desvantagens como necessidade de hardware complementar, que em algumas situações inviabilizam seu uso (MOURA, 2010).

O controle das máquinas de corrente contínua convencionais podem ser realizados através dos enrolamentos de campo, mas nos motores de ímãs permanentes, para realizar este tipo de controle é necessário utilizar um controle por orientação de campo, usualmente a Transformada de Park que é empregada na mudança de base do modelo matemático (BARATIERI, 2011).

2.1.6 Número de Fases

Grande maioria dos motores *Brushless* DC possuem três fases, mas esta não é a única configuração existente para este tipo de máquina. Os motores trifásicos são mais utilizados por combinarem um torque com baixa oscilação. A Tabela 1 demonstra o desempenho dos motores *Brushless* DC para diferentes números de fases.

Tabela 1. Desempenho do motor *Brushless* para diferentes números de fases

Número de Fases	Utilização de condutores %	Número de comutadores	Oscilação do Torque %
1	50	2	100
2	50	4 ou 8	30
3	67	6 ou 3	15
4	75	8	10
6	83	12	7
12	92	24	3

Os motores trifásicos possuem outras vantagens, possuindo uma maior flexibilidade de suas bobinas conectadas em estrela, Y ou em delta, Δ , sendo operados através de três condutores e sem perda na flexibilidade de controle. Os ímãs e os enrolamentos de campo possuem uma ampla variedade de configurações, podendo ser distribuídos tanto nas formas de onda senoidal ou não senoidal, utilizando as mesmas técnicas para resfriamento dos enrolamentos desenvolvidos para motores de corrente alternada e motores convencionais de corrente contínua (TRINDADE, 2009).

2.1.7 Característica Torque-Velocidade

Existem dois parâmetros de torque a serem seguidos para o motor *Brushless* DC, o Torque de Pico e o Torque Nominal. Para operações contínuas com o motor, se caracteriza um Torque Nominal. Para a máquina, o torque permanecerá constante para uma faixa de rotação até sua velocidade nominal. O motor pode ser operado até sua velocidade máxima, que pode ser até 150% da sua velocidade nominal, mas seu torque começa a diminuir. Para aplicações que exigem partidas e paradas frequentes, e reversões de rotação com carga no motor, isto exige um torque maior que o torque nominal. Esta exigência ocorre quando o motor começa a parar durante a aceleração, onde, neste período, um torque extra é necessário para vencer a inércia da carga e do próprio rotor. O motor pode fornecer um torque máximo, até seu pico, contanto que siga a curva de Torque-Velocidade. A Figura 2.7 demonstra a curva característica de Torque-Velocidade (YEDAMALE, 2003).

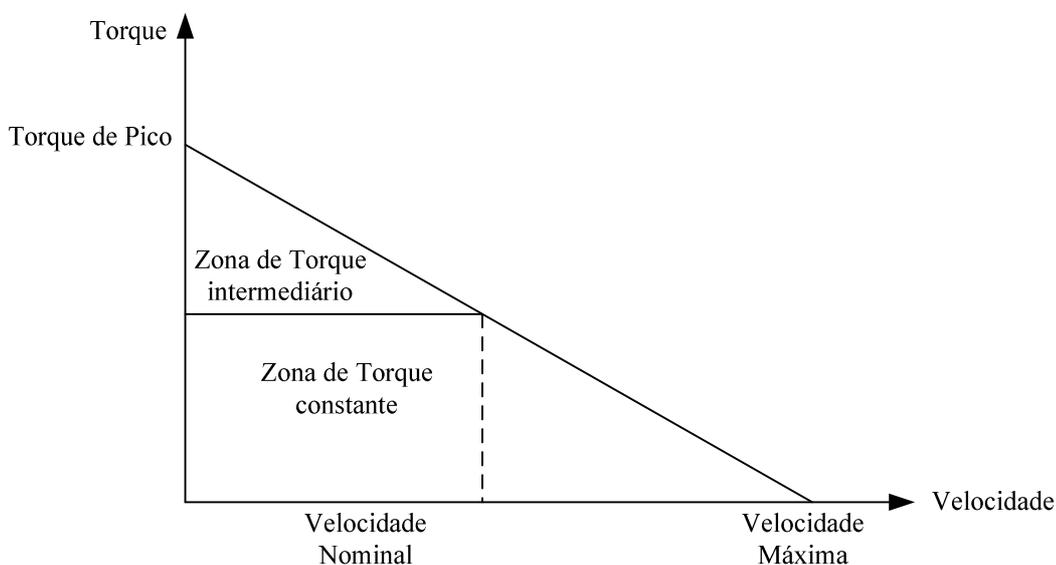


Figura 2.7. Curva característica Torque-Velocidade do motor *Brushless* DC.

2.2 Modelagem Matemática do Motor *Brushless* DC

A utilização da modelagem matemática tem por finalidade obter o comportamento das grandezas internas do motor elétrico (VIEIRA, 2008). A distribuição do fluxo nos motores *Brushless* DC de ímãs permanentes é trapezoidal, assim os eixos direto e de quadratura do rotor do modelo matemático desenvolvido para o motor Síncrono de ímãs permanentes não é aplicado neste tipo de motor. Para a distribuição de fluxo não senoidal, pode-se conduzir um modelo em variáveis de fase, sendo baseado na suposição em que as correntes induzidas do rotor e as harmônicas de campo do estator vão ser desprezadas (BARATIERI, 2011), (CAI, 2010).

Simplificando o modelo de análise, três suposições serão feitas para a modelagem matemática:

- Será ignorado o circuito magnético de saturação, assim excluindo as correntes parasitas e as perdas por histerese.
- Será considerado um enrolamento do estator trifásico, simétrico e concentrado.
- Não será considerada a reação de armadura, sendo a distribuição do campo magnético uma onda trapezoidal.

Para maior compreensão, a Figura 2.1 demonstra o circuito de acionamento do motor *Brushless*, sendo que através deste circuito é que se obtêm a modelagem matemática deste motor (BARATIERI, 2011).

Sendo a modelagem matemática do motor *Brushless* DC bem definida, será considerado o modelo matemático de um motor com três fases, mas este mesmo procedimento serve para qualquer número de fases do motor (KRISHNAN, 2001).

A Força Contra-Eletromotriz para a fase a é determinada pela Lei de *Faraday*, dado pela equação (2.1), sendo esta expressão a mesma para as demais fases do motor (BARATIERI, 2011).

$$e_a(\theta_r) = \frac{d}{dt} \lambda_{af}(\theta_r) \quad (2.1)$$

Sendo que $\lambda_{af}(\theta_r)$ o fluxo mútuo concatenado, um valor constante e θ_r é o ângulo mecânico do rotor. O fluxo magnético de cada fase do estator é determinado pela seguinte equação matricial.

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & M & M \\ M & L_b & M \\ M & M & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{ar}(\theta_r) \\ \lambda_{br}(\theta_r) \\ \lambda_{cr}(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Considerando que as indutâncias próprias de cada fase sejam L_a , L_b e L_c , onde M é a impedância mútua e i_a , i_b e i_c sendo as correntes de fase da máquina.

As resistências dos enrolamentos do estator sendo R_a , R_b e R_c e as tensões de fase v_a , v_b e v_c são expressas pela seguinte equação.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ou podendo ser expressa ainda pela seguinte equação (2.4), que esta associada aos enrolamentos do estator em termos de constantes elétricas do motor.

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & M & M \\ M & L_b & M \\ M & M & L_c \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a(\theta_r) \\ e_b(\theta_r) \\ e_c(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Como o motor *Brushless* DC possui seu enrolamento de fase simétrico pode-se adotar que $L_a = L_b = L_c$ sendo L e $R_a = R_b = R_c$ sendo R . As correntes de fase do motor são balanceadas, sendo assim $i_a = i_b = i_c = 0$. Assim a expressão matricial é descrita da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L - M) & 0 & 0 \\ 0 & (L - M) & 0 \\ 0 & 0 & (L - M) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a(\theta_r) \\ e_b(\theta_r) \\ e_c(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

A Figura 2.8 demonstra as forças contra-eletromotrizes de cada fase do motor decorrente da posição angular do rotor (BARATIERI, 2011).

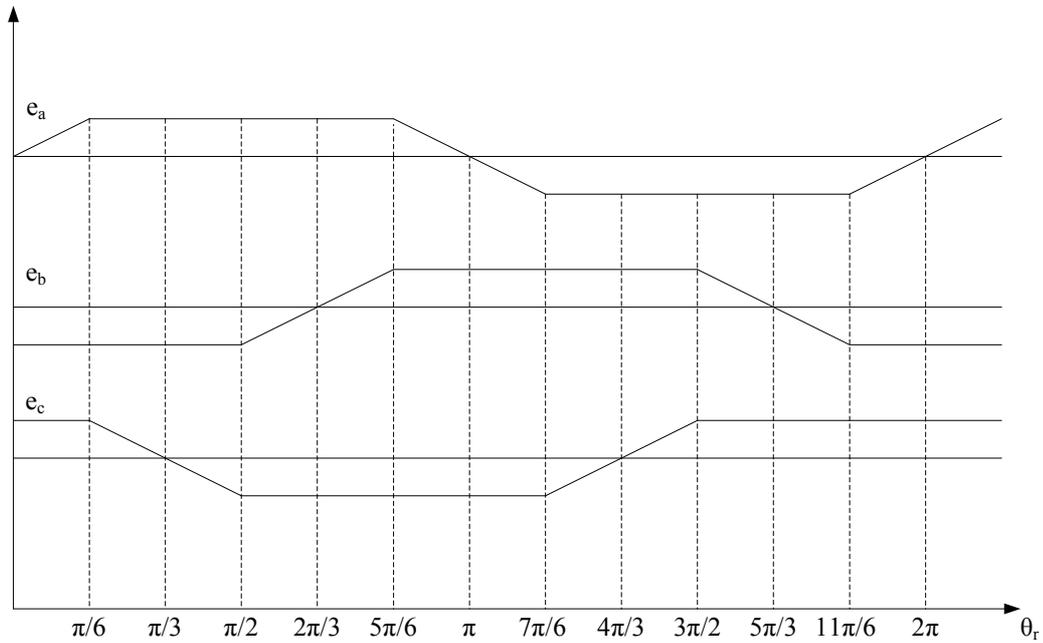


Figura 2.8. Forças Contra-Eletromotrizes de cada fase do motor *Brushless* DC.

O torque eletromagnético do motor *Brushless* DC é determinado pela seguinte equação (KRISHNAN, 2001).

$$T_e = [e_a(\theta_r)i_a + e_b(\theta_r)i_b + e_c(\theta_r)i_c] \frac{1}{\omega_m} \text{ (N.m)} \quad (2.6)$$

Sendo ω_m a velocidade angular de rotação. A equação diferencial que demonstra o comportamento mecânico do motor é dada por.

$$J \frac{d}{dt} \omega_m + B \omega_m = (T_e - T_c) \quad (2.7)$$

Sendo J a constante de inércia do motor *Brushless* DC. Reescrevendo a expressão em função da velocidade angular, tem-se a seguinte equação.

$$\frac{d}{dt} \omega_m = \frac{(T_e - T_c)}{J} - \frac{B \omega_m}{J} \quad (2.8)$$

A velocidade do rotor e a posição angular podem ser determinadas pela seguinte expressão.

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \frac{p}{2} \omega_m \quad (2.9)$$

Sendo B o coeficiente de atrito viscoso, T_c o torque de carga e p o número de pares de pólos do motor.

Através da combinação das equações (2.5), (2.8) e (2.9) pode-se expressar a seguinte equação em espaço de estados (BARATIERI, 2011).

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu \quad (2.10)$$

Assim através da equação matricial pode-se determinar a expressão de espaço de estados característica de cada corrente de fase. Corrente i_a é dada por.

$$\frac{d}{dt}i_a = \frac{v_a}{(L_a - M)} - \frac{R_a i_a}{(L_a - M)} - \frac{e_a(\theta_r)}{(L_a - M)} \quad (2.11)$$

Reescrevendo a expressão anterior na forma de espaço de estados, tem-se a seguinte equação (2.12), onde está equacionada a demonstrar as variáveis A , B , e u , respectivamente.

$$\frac{d}{dt}i_a = -\left(\frac{R_a i_a}{L_a - M}\right) + \frac{1}{(L_a - M)} (v_a - e_a(\theta_r)) \quad (2.12)$$

Para a corrente i_b , tem-se a seguinte equação.

$$\frac{d}{dt}i_b = \frac{v_b}{(L_b - M)} - \frac{R_b}{(L_b - M)} - \frac{e_b(\theta_r)}{(L_b - M)} \quad (2.13)$$

Reescrevendo a expressão anterior em espaço de estados, tem-se.

$$\frac{d}{dt}i_b = -\left(\frac{R_b i_b}{L_b - M}\right) + \frac{1}{(L_b - M)} (v_b - e_b(\theta_r)) \quad (2.14)$$

Assim, para a corrente i_c , terá a seguinte equação.

$$\frac{d}{dt}i_c = \frac{v_c}{(L_c - M)} - \frac{R_c}{(L_c - M)} - \frac{e_c(\theta_r)}{(L_c - M)} \quad (2.15)$$

Reescrevendo a expressão anterior, tem-se em espaço de estados.

$$\frac{d}{dt}i_c = -\left(\frac{R_c i_c}{L_c - M}\right) + \frac{1}{(L_c - M)} (v_c - e_c(\theta_r)) \quad (2.16)$$

Sabendo as equações das correntes de fase, velocidade angular e o ângulo mecânico do rotor, a equação do vetor de estados é representada pela seguinte equação.

$$x = [i_a \ i_b \ i_c \ \omega_m \ \theta_r]^t \quad (2.17)$$

O vetor de entrada é determinado pela seguinte expressão.

$$u = [v_a \ v_b \ v_c \ T_c]^t \quad (2.18)$$

A matriz de estados e a matriz de entrada terão seus parâmetros por fase, devido a uma maior compreensão do leitor. A matriz de estados é dada pela seguinte expressão (KRISHNAN, 2001), (BARATIERI, 2011).

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{(L_a - M)} & 0 & 0 & -\frac{e_a(\theta_r)}{(L_a - M)\omega_m} & 0 \\ 0 & -\frac{R_b}{(L_b - M)} & 0 & -\frac{e_b(\theta_r)}{(L_b - M)\omega_m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_c}{(L_c - M)} & -\frac{e_c(\theta_r)}{(L_c - M)\omega_m} & 0 \\ \frac{e_a(\theta_r)}{\omega_m} & \frac{e_b(\theta_r)}{\omega_m} & \frac{e_c(\theta_r)}{\omega_m} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

A matriz de entrada é dada pela seguinte expressão.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(L_a - M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(L_b - M)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(L_c - M)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.3 Resultados da Simulação do Modelo Matemático

Para validar o modelo matemático apresentado, foi criado um código no software Matlab utilizando as seguintes equações (2.1), (2.10), (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) de modo a obter as respectivas formas de onda das tensões, das correntes, velocidade angular da máquina, o

torque de carga e as Forças Contra-Eletromotrizes de cada fase da máquina *Brushless* DC. Este código criado será comparado com um modelo do Simulink, onde estas simulações serão feitas em malha aberta.

Para o código, foi utilizado à Tabela 2 de parâmetros da máquina para as simulações, sendo esta tabela usual para as demais simulações a serem demonstradas nos capítulos seguintes.

Tabela 2. Parâmetros da máquina.

Parâmetros	
R	2,8750 Ω
L	8,5 mH
B	4 mNms
J	0,8 mkgm ²
p	1
f	60 Hz

Considerando que R é a resistência do estator, L é a indutância do estator e f sendo a frequência do sistema. Para obter a indutância mútua da máquina tem-se a equação matricial das indutâncias demonstrada na expressão (2.5). Sabendo a seguinte relação entre as indutâncias (2.21) que irá definir o valor da indutância mútua (CHIASSON, 2005).

$$L = (7/3)M \quad (2.21)$$

Sabendo o valor da indutância do estator demonstrado na Tabela 2, desta relação (2.21) se obtém o seguinte valor de indutância mútua.

$$M = 3,6428 \text{ mH} \quad (2.22)$$

Assim, sabendo as indutâncias pode-se obter o valor da indutância equivalente sendo.

$$L - M = 4,8572 \text{ mH} \quad (2.23)$$

Para obter as tensões de cada fase da máquina, foi adota a função senoidal sendo saturada em amplitude, deste modo tem-se uma forma de onda trapezoidal adaptada. Estes valores de amplitude e de saturação foram adotados aleatoriamente, somente para comprovar na simulação o que consta na teoria. Para as fases b e c da máquina utiliza-se uma defasadas angular de 120° elétricos cada uma, assim apresentando um sistema trifásico equilibrado. A Figura 2.9

mostra as tensões de cada fase da máquina, o tempo de simulação foi adotado o mesmo para as demais Figuras deste capítulo.

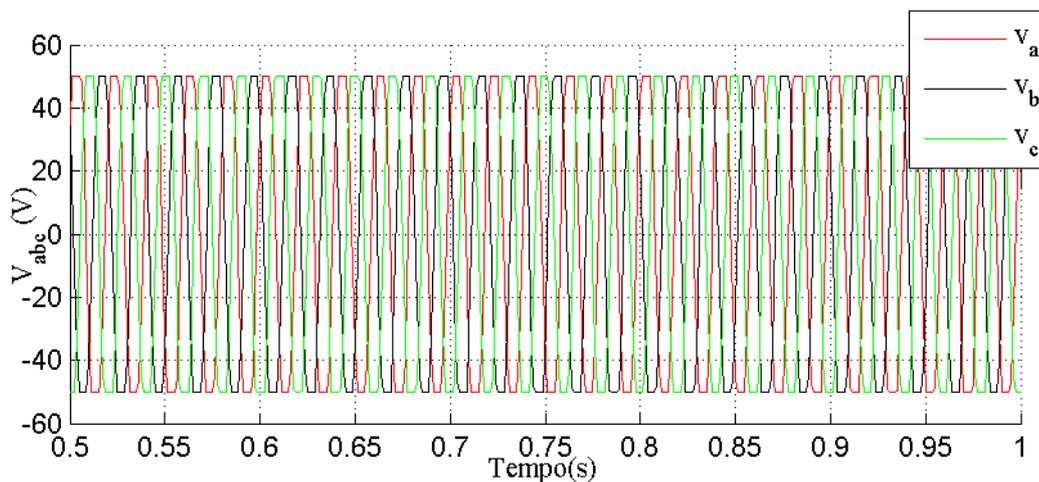


Figura 2.9. Tensões de fase.

A Figura 2.10 mostra as correntes de fase da máquina. Nota-se que as correntes de fase não se tratam de uma forma de onda trapezoidal propriamente dita, devido à escolha dos seus parâmetros, sendo que esta afirmação é comprovada, pois aumentando alguns valores dos parâmetros da máquina mencionados na Tabela 2 é possível visualizar as correntes de fase apresentando uma forma de onda tipicamente trapezoidal.

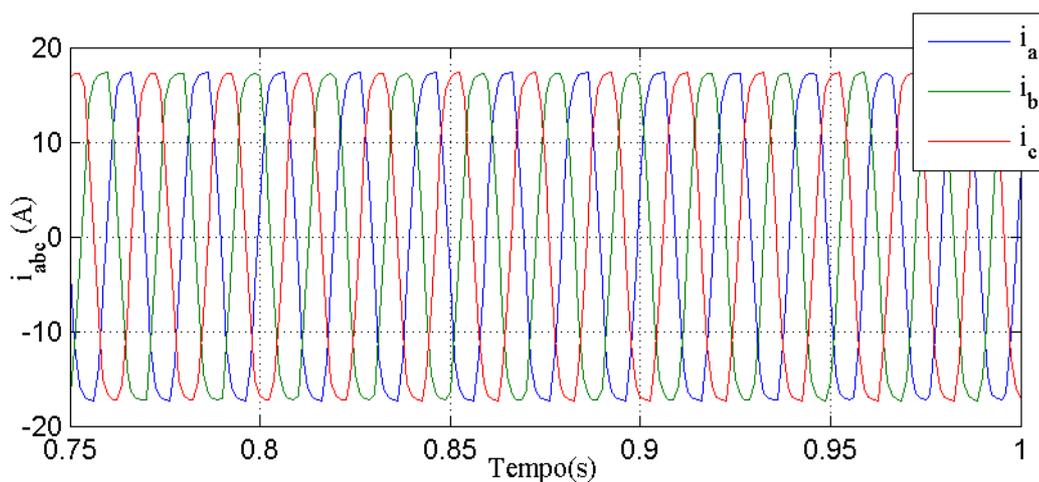


Figura 2.10. Correntes de fase.

A Figura 2.11 demonstra a velocidade angular do rotor e o torque de carga desenvolvido. Nota-se que a velocidade angular da máquina se torna um valor constante e o torque de carga da máquina aumenta ao decorrer do tempo de simulação.

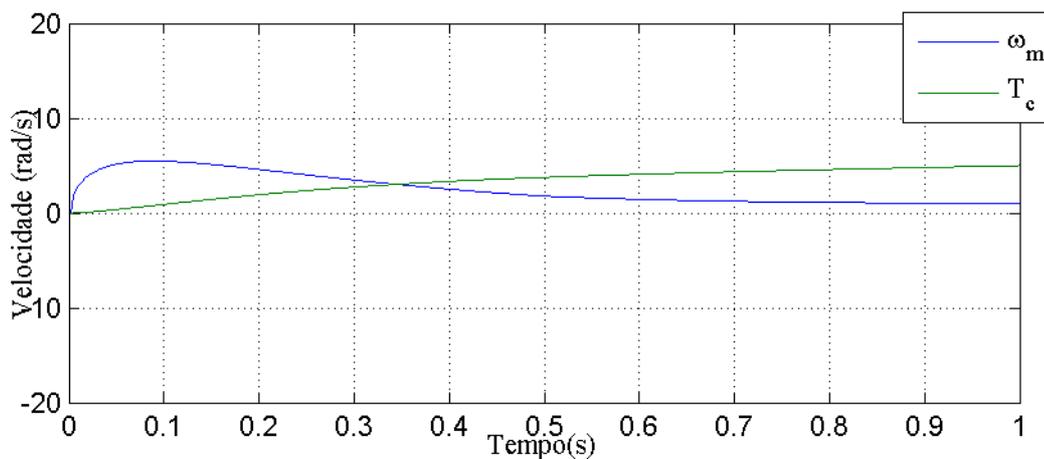


Figura 2.11. Velocidade Angular e o Torque de Carga.

A Figura 2.12 mostra as Forças Contra-Eletromotrizes da máquina, obtida com a implementação do código no Matlab, validando o modelo proposto para o motor *Brushless* DC.

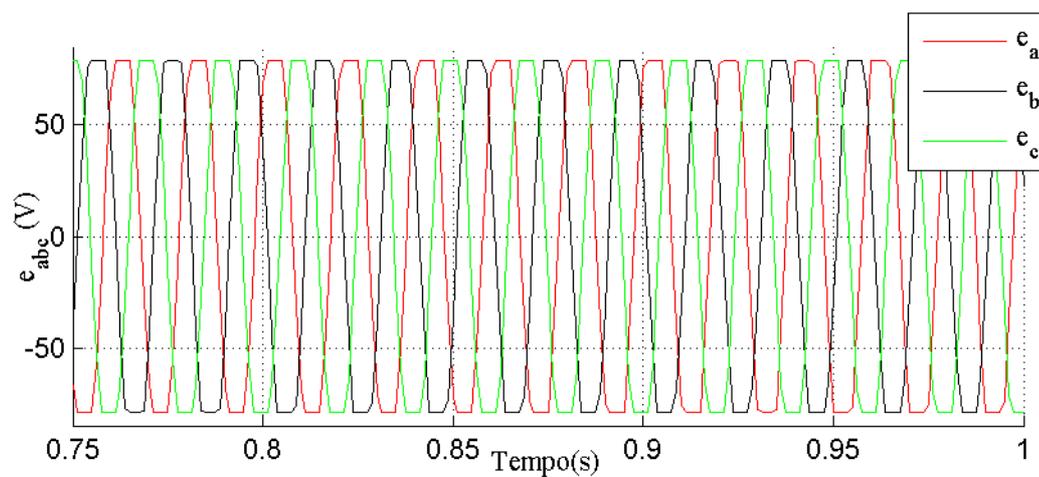


Figura 2.12. Forças Contra-Eletromotrizes.

Com o intuito de validar o sistema implementado no Matlab, foram efetuadas outras simulações em malha aberta no diagramas de blocos do Simulink, sendo que esta simulação se utiliza dos mesmos parâmetros mencionados na Tabela 2. A Figura 2.13 mostra o esboço do diagrama de blocos implementado no Simulink.

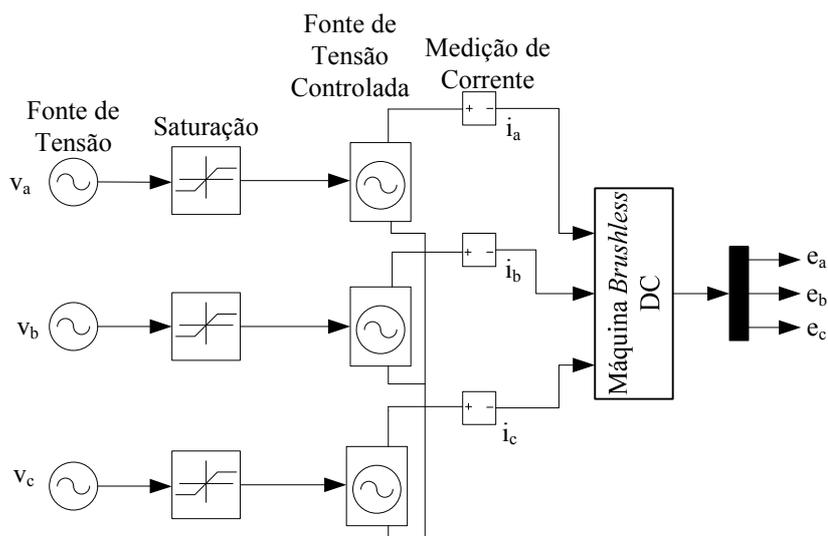


Figura 2.13. Esboço do diagrama de blocos implementado no Simulink.

A mesma lógica de programação feita para o código no Matlab foi utilizada para implementar no diagrama de blocos do Simulink, obtendo as tensões de fase, correntes de fase e as Forças Contra-Eletromotrizes da máquina *Brushless* DC. A Figura 2.14 demonstra as tensões de fase.

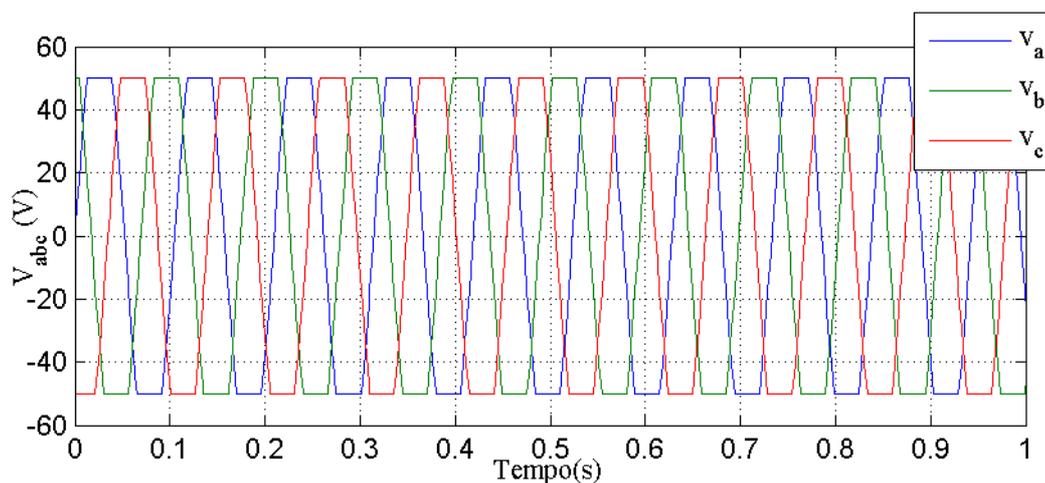


Figura 2.14. Tensões de fase obtidas no Simulink.

A Figura 2.15 mostra as correntes de fase da máquina. Como obtido no Matlab, pode-se perceber que as correntes não possuem uma forma de onda trapezoidal propriamente dita.

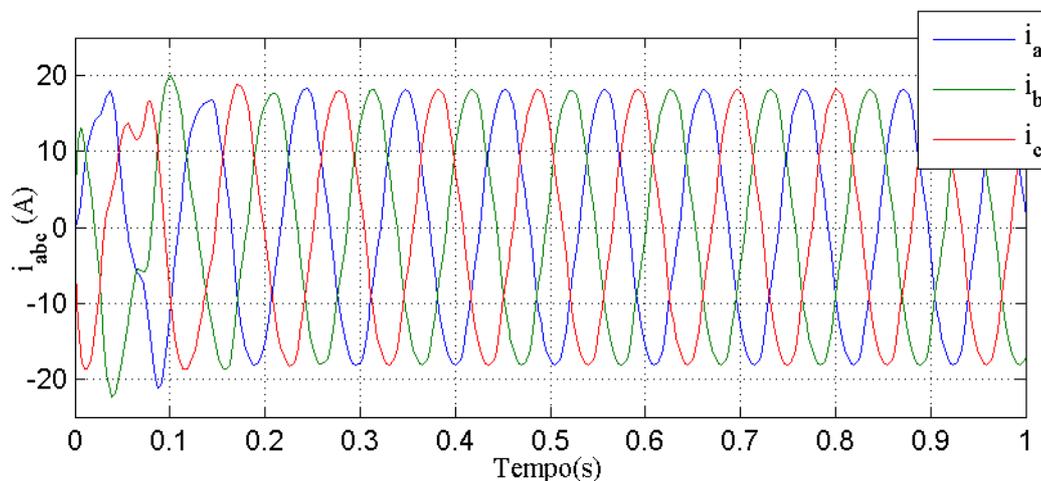


Figura 2.15. Correntes de fase obtidas no Simulink.

A Figura 2.16 demonstra as Forças Contra-Eletromotrizes do modelo simulado em diagrama de blocos do Simulink.

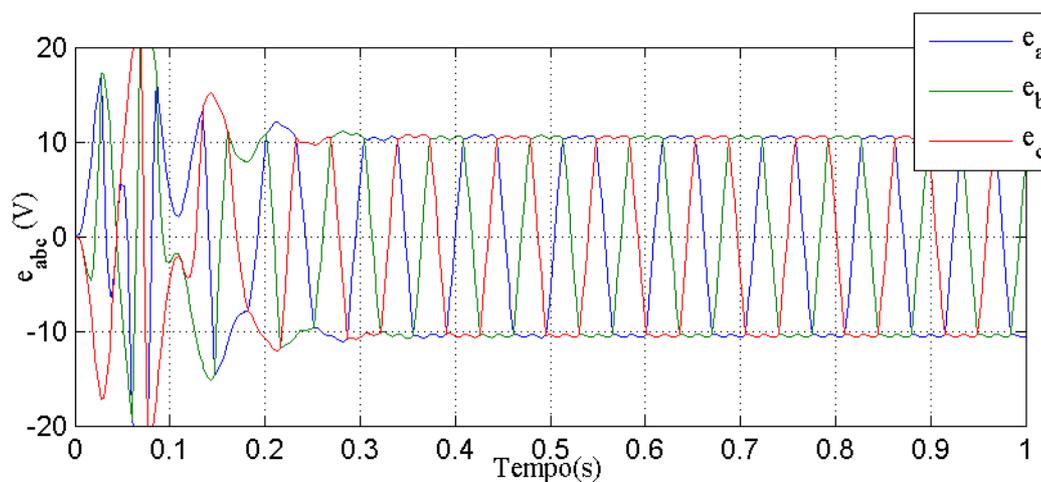


Figura 2.16. Forças Contra-Eletromotrizes obtidas no Simulink.

Com base nestas Figuras, pode-se visualizar que tanto o código utilizado no Matlab como no Simulink obtiveram respostas semelhantes, logo, comprovando o modelo matemático apresentado neste capítulo.

2.4 Conclusão deste capítulo

Neste capítulo foram apresentadas características do motor *Brushless* DC, e em seguida apresentado o modelo matemático da máquina. Com o modelo, pode-se obter as formas de

onda das tensões, correntes, variação do torque de carga, variação angular do rotor e as Forças Contra-Eletromotrizes no Software Matlab. Com isto, foi possível comparar os resultados obtidos no software Matlab utilizando o software Simulink, diagrama de blocos, onde a lógica de implementação empregada nos dois programas foi a mesma. O resultado validou o modelo apresentado.

3. CONTROLE DE VELOCIDADE APLICADO AO MOTOR *BRUSHLESS* DC

Os controladores têm por finalidade receber um sinal de erro e realizar a quantidade de cálculos necessários para alterar sua saída, reduzindo seu erro e atingindo o valor desejado de forma mais rápida possível. O sistema de controle apresentado para máquina *Brushless* DC, será desenvolvido em um sistema de malha fechada, bem como é demonstrado na Figura 3.1.

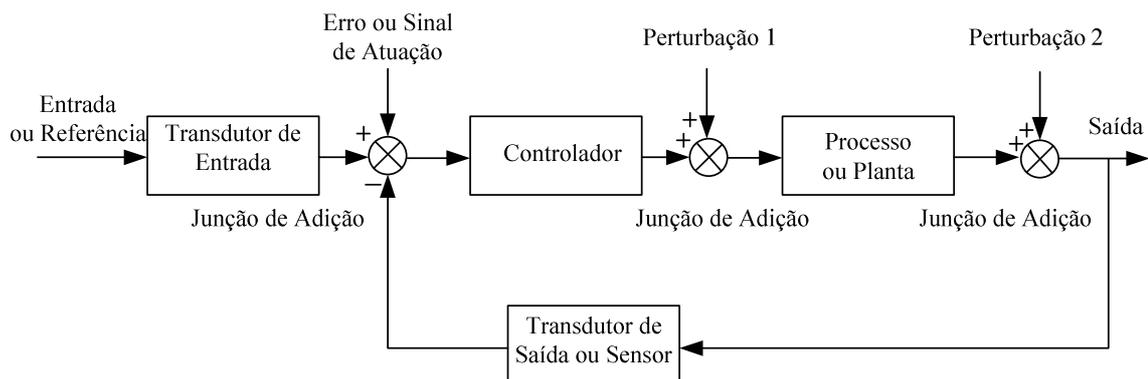


Figura 3.1. Sistema em Malha Fechada.

Para um sistema em malha fechada, o transdutor ou sinal da entrada tem por finalidade converter a forma de onda fornecida a ele em outra forma de onda que será utilizada pelo controlador. O transdutor de saída ou sensor como é definido, medirá a resposta da saída, convertendo na forma de onda utilizada pelo controlador, assim gerando um sinal que estará relacionado com a condição da variável que se deseja controlar e ainda fornecerá um sinal de realimentação para o elemento da junção de adição. Este irá comparar com o valor desejado ou de referência da variável controlada com o transdutor de saída, e determinará o sinal do erro obtido, que indicará o quanto a saída está sendo desviada do valor desejado, assim o elemento que fará a correção é o atuador.

A planta é o sistema no qual a variável está sendo controlada, onde estes tipos de controle podem ser aplicados de várias formas, como o controle de velocidade, posição e de temperatura (SANTOS, 2007), (NISE, 2009).

3.1 Tipos de Controladores

Trabalhando em aplicações em que o controle deve estar na saída do sistema implementado, devido a alterações no valor da referência ou estado, é utilizado um algoritmo de controle para gerar a resposta necessária, exemplo para tais aplicações, como controle de motores elétricos, controle de temperatura, pressão, taxa de fluxo de força variável entre outras aplicações (ASTROM & HAGGLUND, 1995).

Com os controladores PID pode-se controlar qualquer variável que se possa obter uma “medição” ou resposta, desde que esta variável seja afetada por alguma manipulação das variáveis do processo de execução do algoritmo. Os controladores PID são os tipos de controlador padrão das indústrias, devido a sua simplicidade, custo relativamente baixo, facilidade em alterar sua capacidade comportamental e garantindo um bom controle (PEREIRA & HAFFNER, 2008), (ASTROM & HAGGLUND, 1995).

3.1.1 Controlador P

O sinal de controle do controlador Proporcional esta relacionado diretamente ao sinal de erro. Determinado pela seguinte equação.

$$u(t) = K_P e(t) \quad (3.1)$$

Sendo K_P o ganho Proporcional, o controlador dependerá apenas de sua amplitude do sinal de erro, sendo que o ganho é constante. Este ganho constante existe para certa faixa de erros, denominada de banda proporcional. A função de transferência que representa a forma básica do controlador Proporcional e escrita pela equação (3.2), dependendo somente do ganho Proporcional.

$$G_c(s) = K_P \quad (3.2)$$

Com o aumento do ganho Proporcional, aumenta a velocidade de resposta do sistema de controle, e diminui seu erro consideravelmente. Mas com o aumento exagerado do seu ganho, o sistema passa oscilar, assim torna-se instável (SANTOS, 2007).

3.1.2 Controlador I

O sinal de controle de um controlador Integral está diretamente relacionado com a integral de seu erro. Determinado pela seguinte expressão.

$$u(t) = K_I \int e(t) dt \quad (3.3)$$

Sendo que K_I é o ganho Integral. A integral do erro depende diretamente de seu tempo, sendo uma integral definida, onde determinará a área sob a curva que ocorre o erro. Apresentando um sinal de erro, a sua área sobre a curva aumenta assim a saída do controlador irá proporcionalmente aumentar, isto acontecerá para qualquer instante de tempo, menos o instante de tempo zero. A função de transferência é dada por.

$$G_c(s) = \frac{K_I}{s} \quad (3.4)$$

Apresentando um ganho Integral muito pequeno, este controlador pode oscilar e ter problemas de instabilidade, sendo considerado assim um sistema não adequado (SANTOS, 2007).

3.1.3 Controlador PI

O controlador Proporcional Integral apresenta as mesmas características individuais de cada controlador citado anteriormente. O sinal de controle é determinado pela seguinte equação.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt \quad (3.5)$$

Este controlador é conhecido usualmente para controle de velocidade em máquinas elétricas. A função de transferência é descrita pela seguinte expressão (PATANÉ, 2008).

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (3.6)$$

3.1.4 Controlador D

O controlador Derivativo é diretamente relacionado com a derivada de seu erro em função do tempo. O sinal de controle é descrito por.

$$u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (3.7)$$

Sendo K_D o ganho Derivativo. A saída do controlador Derivativo é proporcional a taxa de variação do sinal de erro, e não exatamente ao erro, podendo assim fornecer uma ação corretiva antes que o sinal de erro ocorra. Se o erro for uma constante, pode não existir uma ação de correção, mesmo que o erro seja muito grande. A função de transferência que descreve o controlador Derivativo é descrito pela seguinte equação.

$$G_c(s) = K_D s \quad (3.8)$$

O controlador Derivativo não será sensível para erros constantes ou com variações lentas, assim não sendo usual sozinho, mas sim combinado com outros tipos de controladores. O ganho Derivativo deve ser muito pequeno na prática, pois a resposta da derivada é muito sensível a ruídos do sinal, onde se quer obter uma respectiva resposta (SANTOS, 2007).

3.1.5 Controlador PD

Para determinar o sinal de controle do controlador Proporcional Derivativo, depende das características individuais destes controladores. O sinal do controlador é determinado pelo seguinte expressão.

$$u(t) = (K_P + K_D)e(t) \quad (3.9)$$

A função de transferência do controlador é determinada por (SRIDOKBUAP, 2007).

$$G_c(s) = K_P + K_D s \quad (3.10)$$

Sabendo que a utilização do controlador Derivativo na prática não pode ser aplicada sozinha, assim sendo o controlador Proporcional o mais usual para ser empregado com o controle Derivativo (PATANÉ, 2008).

3.1.6 Controlador PID

O controlador Proporcional Integral Derivativo apresenta as características individuais de cada controlador. A função de transferência que representa a forma básica do controlador PID é escrita pela seguinte expressão.

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (3.11)$$

A variável de controle $u(t)$ do controlador da planta é igual ao ganho Proporcional vezes a magnitude do seu erro mais a soma do ganho Integral vezes a integral do erro mais o ganho Derivativo vezes a derivada do erro, resultando na seguinte equação.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (3.12)$$

Apresentando uma simplicidade e um excelente desempenho, este tipo de controlador é mais utilizado em processos industriais de sistemas de malha fechada (ARULMOZHIALI & KANDIBAN, 2012).

3.2 Função de Transferência da Máquina *Brushless* DC

Para obter a função de transferência da máquina, deve-se utilizar a equação matricial da máquina *Brushless* DC demonstrado no capítulo anterior, equação (2.5). Através desta equação é que se determina a função de transferência da planta da máquina no referencial síncrono.

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L - M) & 0 & 0 \\ 0 & (L - M) & 0 \\ 0 & 0 & (L - M) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a(\theta_r) \\ e_b(\theta_r) \\ e_c(\theta_r) \end{bmatrix}$$

Determinando que os termos matriciais da equação (2.5) sendo como:

$$\mathbf{v}_{abc} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LM} = \begin{bmatrix} (L - M) & 0 & 0 \\ 0 & (L - M) & 0 \\ 0 & 0 & (L - M) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{abc}(\theta_r) = \begin{bmatrix} e_a(\theta_r) \\ e_b(\theta_r) \\ e_c(\theta_r) \end{bmatrix}$$

Reescrevendo a expressão (2.5), tem-se a seguinte equação.

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{LM} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{R} \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{e}_{abc}(\theta_r) \quad (3.13)$$

Organizando a expressão anterior, de modo a deixar a derivada das correntes em evidência, obtém a seguinte expressão.

$$\mathbf{LM} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} = \mathbf{v}_{abc} - \mathbf{R} \mathbf{i}_{abc} - \mathbf{e}_{abc}(\theta_r) \quad (3.14)$$

Multiplicando os dois lados da expressão anterior por \mathbf{LM}^{-1} como demonstra a equação (3.15), de forma a simplificar a constante \mathbf{LM} da derivada das correntes, tem-se.

$$\mathbf{LM}^{-1} \mathbf{LM} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} = \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{v}_{abc} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}_{abc} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{e}_{abc}(\theta_r) \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} = \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{v}_{abc} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}_{abc} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{e}_{abc}(\theta_r) \quad (3.16)$$

Utilizando a expressão para transformar um sistema trifásico em um sistema bifásico dada pela equação (3.17), que será demonstrada no capítulo seguinte todo seu desenvolvimento

para obter este equacionamento, pode-se transformar a expressão (3.16) em uma nova equação em função das variáveis bifásicas.

$$\begin{pmatrix} n_0 \\ n_\alpha \\ n_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_a \\ n_b \\ n_c \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Sendo que n é dado por corrente, tensão e Força Contra-Eletromotriz. Para utilizar a transformação deve-se desconsiderar a componente de sequência zero, de modo a facilitar os cálculos. A equação (3.17) pode ser reescrita da seguinte forma.

$$n_{abc} = \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} n_{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

Substituindo a expressão (3.18) na equação (3.16), obtém.

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta} = \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{e}_{\alpha\beta}(\theta_r) \quad (3.19)$$

Multiplicando os dois lados da equação por $\mathbf{T}_{\alpha\beta}$ como demonstra a expressão (3.20), tem-se.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\alpha\beta} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta} \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta} - \mathbf{T}_{\alpha\beta} \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta} \\ &\quad - \mathbf{T}_{\alpha\beta} \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{e}_{\alpha\beta}(\theta_r) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta} = \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}_{\alpha\beta} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{e}_{\alpha\beta}(\theta_r) \quad (3.21)$$

Verificando a equação anterior na forma matricial depois de feita as multiplicações das matrizes, obtém-se a seguinte expressão,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LM & 0 \\ 0 & LM \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} LM & 0 \\ 0 & LM \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} LM & 0 \\ 0 & LM \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_\alpha(\theta_r) \\ e_\beta(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Utilizando a equação para transformar um sistema bifásico num sistema de referencial de eixo direto e de quadratura, mais conhecida usualmente como transformação de Park, que será demonstrado seu desenvolvimento no capítulo seguinte, tem-se a seguinte expressão.

$$\begin{pmatrix} n_d \\ n_q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma.

$$n_{\alpha\beta} = \mathbf{P}^{-1}n_{dq} \quad (3.24)$$

Substituindo a expressão (3.24) na equação (3.21) obtém,

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq} = \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{v}_{dq} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{i}_{dq} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{e}_{dq}(\theta_r) \quad (3.25)$$

Multiplicando os dois lados da equação (3.25) por \mathbf{P} , tem-se,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq} = \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{v}_{dq} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}_{dq} - \mathbf{LM}^{-1} \mathbf{e}_{dq}(\theta_r) \quad (3.26)$$

Reescrevendo a expressão (3.26) na forma matricial, tem-se a seguinte equação,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LM & 0 \\ 0 & LM \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} LM & 0 \\ 0 & LM \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} LM & 0 \\ 0 & LM \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_d(\theta_r) \\ e_q(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Assim, pode-se obter as correntes de eixo direto e de quadratura. A corrente de eixo direto é dada pela seguinte equação.

$$\frac{d}{dt} i_d = \mathbf{LM}^{-1} v_d - \mathbf{LM}^{-1} R i_d - \mathbf{LM}^{-1} e_d \quad (3.28)$$

Aplicando a transformação de *Laplace*, obtém a seguinte equação.

$$s i_d(s) = \mathbf{LM}^{-1} v_d(s) - \mathbf{LM}^{-1} R i_d(s) - \mathbf{LM}^{-1} e_d(s) \quad (3.29)$$

Reorganizando a expressão (3.29), tem-se.

$$s i_d(s) + \mathbf{LM}^{-1} R i_d(s) = \mathbf{LM}^{-1} v_d(s) - \mathbf{LM}^{-1} e_d(s) \quad (3.30)$$

Deixando os termos em comum em evidência, obtém.

$$i_d(s)(s + \mathbf{LM}^{-1} R) = \mathbf{LM}^{-1} (v_d(s) - e_d(s)) \quad (3.31)$$

Reescrevendo a expressão anterior em relação da corrente sobre a tensão menos a Força Contra-Eletromotriz, tem-se a seguinte expressão.

$$\frac{i_d(s)}{(v_d(s) - e_d(s))} = \frac{LM^{-1}}{(s + LM^{-1}R)} \quad (3.32)$$

Reescrevendo a expressão de modo a simplificar alguns termos, obtendo a seguinte equação.

$$\frac{i_d(s)}{(v_d(s) - e_d(s))} = \frac{1}{s + \frac{R}{LM}} \quad (3.33)$$

A corrente de eixo de quadratura é obtida pela seguinte expressão.

$$\frac{d}{dt}i_q = LM^{-1}v_q - LM^{-1}Ri_q - LM^{-1}e_q \quad (3.34)$$

Aplicando a transformação de *Laplace* na expressão anterior, tem-se.

$$si_q(s) = LM^{-1}v_q(s) - LM^{-1}Ri_q(s) - LM^{-1}e_q(s) \quad (3.35)$$

Reorganizando os termos da expressão anterior, de modo a deixar em evidência a corrente de quadratura sobre a tensão menos a Força Contra-Eletromotriz, tem-se a seguinte equação.

$$\frac{i_q(s)}{(v_q(s) - e_q(s))} = \frac{LM^{-1}}{(s + LM^{-1}R)} \quad (3.36)$$

Deixando os termos da expressão (3.36) em evidência de modo a simplificar, tem-se então a equação da função de transferência da planta da máquina *Brushless* DC no referencial síncrono (3.37), sendo usada tanto para o referencial de eixo direto como de quadratura.

$$G_p(s) = \frac{1}{sLM + R} \quad (3.37)$$

A Figura 3.2 demonstra o diagrama de blocos, com a respectiva obtenção da função de transferência da máquina.

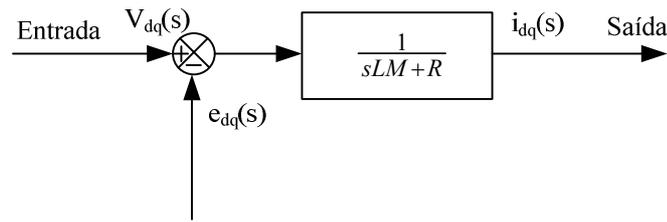


Figura 3.2. Diagrama de blocos com a obtenção da função de transferência da máquina *Brushless* DC.

3.3 Projeto dos Controladores PI de Corrente

Sabendo a função de transferência da planta da máquina no referencial síncrono, pode-se projetar os controladores PI's de corrente. Sendo a função de transferência da planta da máquina *Brushless* DC dada por (3.37) e a função que demonstra o controlador Proporcional Integral é dada pela equação (3.6) (VIEIRA, 2008). A representação do controlador PI em uma única função de transferência do sistema é demonstrada pela seguinte equação.

$$T_{SIS}(s) = G_p(s)G_c(s) \quad (3.38)$$

Substituindo na expressão (3.38) pelas equações (3.37) e (3.6), obtém.

$$T_{SIS}(s) = \frac{sK_p + K_I}{s(sLM + R)} \quad (3.39)$$

Reescrevendo a expressão (3.39) em malha fechada dada pela equação (3.40), obtém.

$$T(s) = \frac{T_{SIS}(s)}{1 + T_{SIS}(s)} \quad (3.40)$$

$$T(s) = \frac{\frac{sK_p + K_I}{s(sLM + R)}}{1 + \frac{sK_p + K_I}{s(sLM + R)}} \quad (3.41)$$

Reescrevendo a expressão (3.41), sendo realimentada com um valor unitário e substituindo os termos de forma a simplificar a equação, tem-se.

$$T(s) = \frac{K_P s + K_I}{LMs^2 + (K_P + R)s + K_I} \quad (3.42)$$

Dividindo todos os termos da equação (3.42) por LM obtém a função de transferência de controle da malha elétrica. A expressão (3.42) fica da seguinte forma.

$$T(s) = \frac{\frac{sK_P}{LM} + \frac{K_I}{LM}}{s^2 + \frac{(K_P + R)s}{LM} + \frac{K_I}{LM}} \quad (3.43)$$

A resistência de fase possui um valor muito pequeno comparado com os ganhos Proporcional e Integral do controlador, assim podendo ser desprezada. Reescrevendo a equação (3.43) obtém.

$$T(s) = \frac{\frac{sK_P}{LM} + \frac{K_I}{LM}}{s^2 + \frac{sK_P}{LM} + \frac{K_I}{LM}} \quad (3.44)$$

A expressão de um sistema de segunda ordem no domínio da frequência é dita idêntica a equação (3.44). Assim a expressão de segunda ordem é escrita por.

$$T_{ref}(S) = \frac{\omega(J\omega b)}{\omega_{ref}} = \frac{2\zeta\omega_n(J\omega b) + \omega_n^2}{(J\omega_b)^2 + 2\zeta\omega_n(J\omega_b) + \omega_n^2} \quad (3.45)$$

Sabendo que s representa $J\omega b$, onde ω_b é a largura de banda, ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a velocidade natural da resposta do sistema, dada em rad/s . A largura de banda é definida através de $I(J\omega b)$ como a saída da planta e $I_{ref}(J\omega b)$ como a referência, assim a equação da largura de banda é dado por (VIEIRA, 2008).

$$20 \log \left(\frac{I(J\omega b)}{I_{ref}(J\omega b)} \right) = -3dB \quad (3.46)$$

Usualmente a largura de banda é definida quando o módulo do sinal de saída atinja uma amplitude de $0.707 pu$, assim no lugar de $3dB$ usa-se $3.01dB$. A equação (3.47) demonstra o resultado do ganho de 0.707 no módulo da equação.

$$\left\| \frac{\omega(J\omega b)}{\omega_{ref}(J\omega b)} \right\| = \left\| \frac{2\zeta\omega_n(J\omega b) + \omega_n^2}{(J\omega_b)^2 + 2\zeta\omega_n(J\omega_b) + \omega_n^2} \right\| = 0.707 \quad (3.47)$$

Sabendo que $J^2 = -1$, assim podemos resolver o módulo da equação (3.47) obtendo.

$$\frac{\sqrt{(2\zeta\omega_n\omega_b)^2 + (\omega_n^2)^2}}{\sqrt{(-\omega_b^2 + \omega_n^2)^2 + (-2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707 \quad (3.48)$$

Elevando o outro lado da equação na base dois, de forma a retirar as raízes da equação (3.48), obtém-se.

$$(2\zeta\omega_n\omega_b)^2 + \omega_n^4 = 0.5[(-\omega_b^2 + \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2] \quad (3.49)$$

Como o termo ω_n^4 é o termo em comum dos dois lados na equação (3.49), pode-se isolar este termo e obter a seguinte expressão.

$$\omega_n^4 = 0.5[(-\omega_b^2 + \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2] - 4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2 \quad (3.50)$$

Depois de isolado o termo ω_n^4 , podemos dividir o mesmo nos dois lados da equação, obtendo a seguinte expressão.

$$1 = 0.5 \left[\left(-\frac{\omega_b^4}{\omega_n^4} + 1 \right) + \frac{4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2}{\omega_n^4} \right] - \frac{4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2}{\omega_n^4} \quad (3.51)$$

Reorganizando a expressão (3.51), tem-se.

$$1 = 0.5 \left[\left(1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \right] - 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \quad (3.52)$$

Observando a expressão (3.52), pode-se verificar que se trata de uma equação de segundo grau, sendo o termo em comum definido por (VIEIRA, 2008).

$$a = \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \quad (3.53)$$

Reescrevendo a expressão (3.52), obtém.

$$1 = 0.5[(1 - a)^2 + 4\zeta^2a] - 4\zeta^2a \quad (3.54)$$

Resolvendo a equação (3.54), tem-se.

$$1 = 0.5[(1 - 2a + a^2) + 4\zeta^2a] - 4\zeta^2a \quad (3.55)$$

Reorganizando a expressão (3.55) em uma equação do segundo grau, tem-se.

$$0.5a^2 + (-2\zeta^2 - 1)a - 0.5 = 0 \quad (3.56)$$

Reescrevendo a equação de segundo grau utilizando a fórmula de *Bhaskara* na (3.56), tem-se a seguinte expressão.

$$a = \frac{(2\zeta^2 + 1) \pm \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 - 4(0.5)(-0.5)}}{2(0.5)} \quad (3.57)$$

Resolvendo, tem-se.

$$a = (2\zeta^2 + 1) \pm \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1} \quad (3.58)$$

Substituindo o valor de a obtido na expressão (3.53), tem-se a seguinte equação.

$$\omega_b^2 = \omega_n^2 \left((2\zeta^2 + 1) \pm \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1} \right) \quad (3.59)$$

Reescrevendo, tem-se.

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{(2\zeta^2 + 1) + \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1}} \quad (3.60)$$

Após determinar a largura de banda, os ganhos de compensação do controlador Proporcional Integral para as malhas de controle da corrente podem ser calculados. Sabendo a função de transferência dada pela equação (3.37), que representa a planta da máquina, e a função de transferência de segunda ordem dada pela equação (3.45), tem-se a seguinte relação (VIEIRA, 2008).

$$2\zeta\omega_n = \frac{K_P}{LM} \quad (3.61)$$

Para calcular o ganho Proporcional deve-se deixar o termo ω_n da equação (3.60) em evidência sendo substituído na equação (3.61), obtendo o ganho Proporcional do projeto do controlador de corrente.

$$K_P = \frac{2\zeta\omega_b LM}{\sqrt{(2\zeta^2 + 1) + \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1}}} \quad (3.62)$$

O ganho integral é calculado pela seguinte relação.

$$\omega_n^2 = \frac{K_I}{LM} \quad (3.63)$$

Reescrevendo a equação (3.63) do mesmo modo que obteve (3.62), evidenciando o termo ω_n de (3.60), tem-se o ganho Integral do projeto do controlador de corrente (VIEIRA, 2008).

$$K_I = \frac{\omega_b^2 LM}{(2\zeta^2 + 1) + \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1}} \quad (3.64)$$

3.4 Projeto dos Controladores PI da malha de Velocidade.

Sabendo a função característica de um controlador Proporcional Integral (3.6), usualmente conhecida como função de transferência da velocidade. Tem-se a mesma equação em referência mecânica. O mesmo projeto feito para os controladores de corrente deve ser feito para os controladores de velocidade. O torque eletromagnético é dado por.

$$T_e = K_t i_{qs}^r \quad (3.65)$$

Sendo a constante de torque K_t é escrita pela seguinte equação (KRISHNAN, 2001).

$$K_t = \frac{3}{2} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \lambda_{af} \quad (3.66)$$

O fluxo mútuo concatenado é constante devido ao uso de ímãs no rotor (KRISHNAN, 2001). A função de transferência mecânica da máquina *Brushless* DC é dada por (BARATIERI, 2011).

$$G_{mec} = \frac{1}{Js + B} \quad (3.67)$$

A função de transferência referente à parte mecânica e a constante de torque em uma única função, é dado pela seguinte equação.

$$G_{mec} = \frac{K_t}{Js + B} \quad (3.68)$$

O sistema em malha fechada com realimentação unitária é dado pela seguinte equação (VIEIRA, 2008).

$$T_{sis} = \frac{(K_t K_P)s + (K_t K_I)}{Js^2 + (B + K_t K_P)s + (K_t K_I)} \quad (3.69)$$

Dividindo todos os termos da equação (3.69) pela constante de inércia, obtém a respectiva equação do torque mecânico.

$$T_{mec} = \frac{\omega(s)}{\omega_{ref}} = \frac{\frac{(K_t K_P)s + (K_t K_I)}{J}}{s^2 + \frac{(B + K_t K_P)s + (K_t K_I)}{J}} \quad (3.70)$$

Sendo que o atrito viscoso possui valor muito pequeno comparado com o ganho Proporcional juntamente com a constante de torque, sendo assim desprezível. Resultando na seguinte expressão.

$$T_{mec} = \frac{\frac{(K_t K_P)s + (K_t K_I)}{J}}{s^2 + \frac{(K_t K_P)s + (K_t K_I)}{J}} \quad (3.71)$$

Sendo que a expressão (3.71) é uma equação de segunda ordem, deve-se seguir os mesmos passos demonstrados para o projeto dos controladores de corrente para determinar a largura de banda até resultar em um ganho Proporcional de velocidade dada pela seguinte relação.

$$2\zeta\omega_n = \frac{K_t K_P}{J} \quad (3.72)$$

Sabendo a equação (3.60) do projeto do controlador de corrente, pode-se obter a seguinte expressão (3.73) para o ganho do controlador Proporcional de velocidade, mecânico (VIEIRA, 2008).

$$K_P = \frac{J}{K_t} \left(\frac{2\zeta\omega_b}{\sqrt{(2\zeta^2 + 1) + \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1}}} \right) \quad (3.73)$$

O ganho Integral de velocidade pode ser calculado pela seguinte relação.

$$\omega_n^2 = \frac{K_t K_I}{J} \quad (3.74)$$

Assim podemos resolver a equação do ganho Integral utilizando a mesma equação para obter o ganho Proporcional, tem-se a seguinte expressão para o ganho do controlador Integral mecânico.

$$K_I = \frac{J}{K_t} \left(\frac{\omega_b^2}{(2\zeta^2 + 1) + \sqrt{(-2\zeta^2 - 1)^2 + 1}} \right) \quad (3.75)$$

3.5 Resultados dos Controladores

Com o intuito de avaliar uma estratégia de controle aplicada a máquina, resultados de simulação são obtidos. A Figura 3.2 mostra o diagrama de blocos dos controladores projetados.

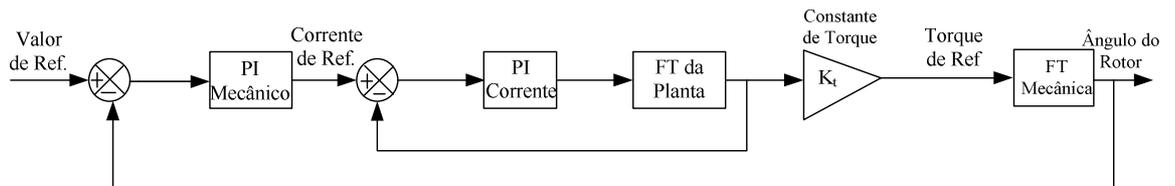


Figura 3.3. Diagrama de blocos para os controladores PI's projetados.

Para estas simulações serão considerados os dados da Tabela 2 e os complementos de dados da Tabela 3 com os parâmetros da máquina *Brushless* DC obtidos a partir do software Matlab/Simulink e a partir do modelo apresentado em (BARATIERI, 2011).

Tabela 3. Parâmetros da máquina utilizados na simulação dos controladores.

Parâmetros	
L - M	4,8572 mH
K_t	0,31V/A

Sendo que K_t é a constante de torque do motor, para o Projeto do controlador PI da malha de controle das correntes deve-se adotar que a velocidade natural da resposta do sistema seja obtida entre a relação da resistência do estator pela indutância equivalente da máquina.

Sabendo o valor da indutância equivalente, pode-se calcular a velocidade natural do sistema, dada pela seguinte relação.

$$\omega_n = \frac{R}{L - M} \quad (3.76)$$

Obtendo o seguinte valor de velocidade natural da resposta do sistema.

$$\omega_n = 591,9048 \text{ rad/s} \quad (3.77)$$

Como o valor da velocidade natural da resposta do sistema para o PI de corrente deve ser um valor de resposta rápida, deve-se multiplicar por um ganho de 1,5 até 3 vezes este valor, para que esta resposta seja considerada adequada.

Assim adotando o valor de ganho de multiplicação igual a 1,5 tem-se.

$$\omega_n = 887,8572 \text{ rad/s} \quad (3.78)$$

Aproximando este valor para um número mais exato, tem-se o seguinte valor da velocidade natural da resposta do sistema.

$$\omega_n = 900 \text{ rad/s} \quad (3.79)$$

Para o projeto PI de corrente o coeficiente de amortecimento varia de 0,7 até 1, assim foi adotado o valor do coeficiente de amortecimento igual a 1. Obtendo todos os parâmetros necessários para calcular os ganhos das equações (3.62) e (3.64), tem-se os respectivos valores de ganhos para o projeto PI da malha de controle da corrente.

$$K_p = 8,7430 \quad (3.80)$$

$$K_i = 3934.3 \quad (3.81)$$

Para simular a resposta em Degrau do controlador da malha de controle da corrente projetado, deve-se adotar a seguinte equação (3.82), obtida através da equação do controlador Proporcional Integral (3.6) multiplicando a função de transferência da máquina (3.37) em malha fechada.

$$T_{FT} = \frac{K_p s + K_i}{L M s^2 + (R + K_p) s + K_i} \quad (3.82)$$

Assim a Figura 3.4 mostra a resposta do sistema projetado em Degrau unitário.

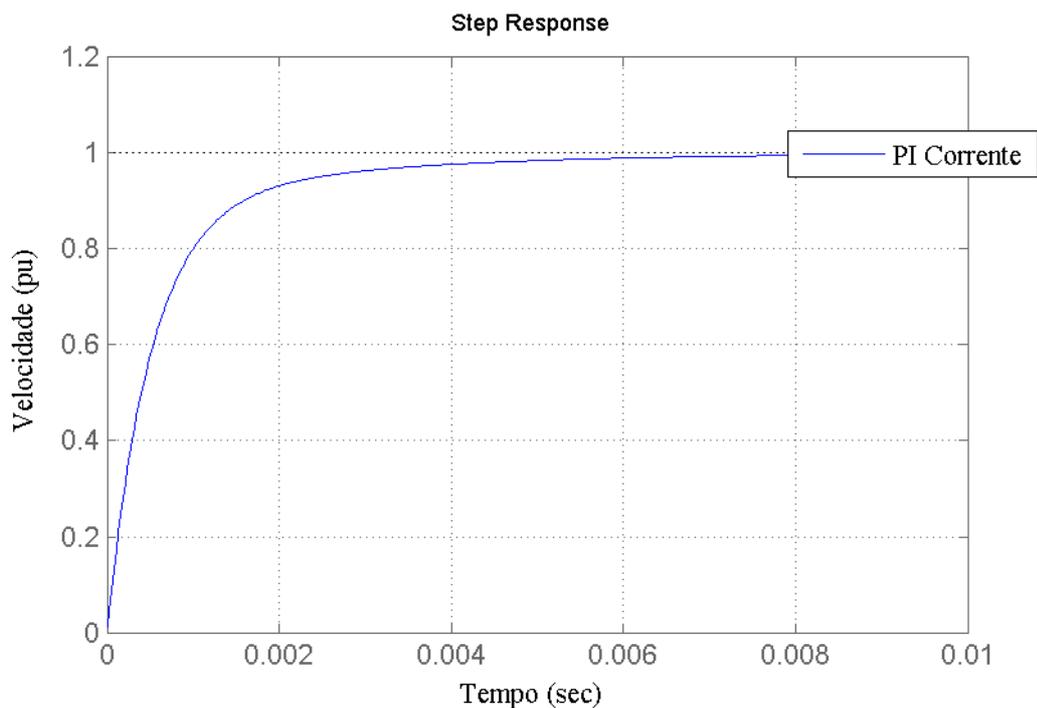


Figura 3.4. Resposta do Sistema projetado para o PI de Corrente.

Comparando com outro valor de velocidade natural da resposta do sistema, pode-se observar qual mais adequado a utilizar no projeto PI dos controladores da malha de controle das correntes. Multiplicando a velocidade natural do sistema (3.77) por um ganho de valor igual a 3, resulta na seguinte velocidade natural do sistema.

$$\omega_n = 1775,7144 \text{ rad/s} \quad (3.83)$$

Aproximando para um valor mais exato, tem-se.

$$\omega_n = 1800 \text{ rad/s} \quad (3.84)$$

Utilizando os mesmos parâmetros, tem-se os seguintes ganhos Proporcional e Integral, respectivamente para o controlador PI da malha de controle da corrente.

$$K_P = 17,4859 \quad (3.85)$$

$$K_I = 15737 \quad (3.86)$$

Utilizando a equação (3.82) para obter a resposta do sistema em Degrau unitário, tem-se a Figura 3.5.

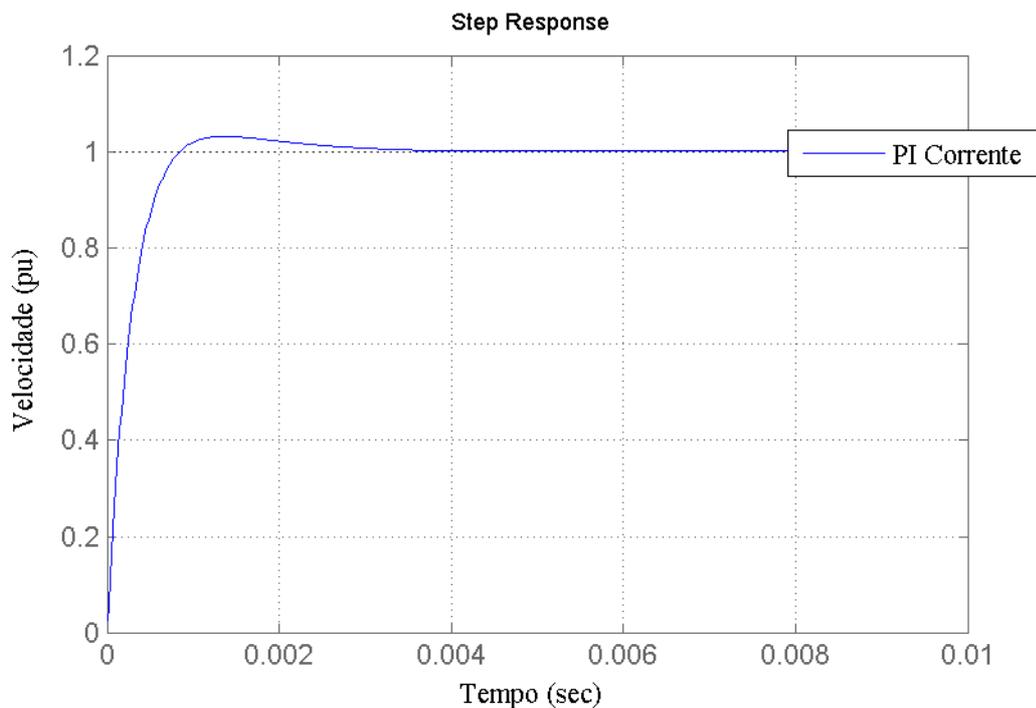


Figura 3.5. Resposta do Sistema projetado com aumento de Velocidade natural para o PI de Corrente.

Observando as Figuras (3.4) e (3.5) do projeto dos controladores da malha de controle da corrente, pode-se concluir que utilizando uma velocidade natural da resposta do sistema menor terá uma resposta mais lenta, ou seja, quanto maior o valor da velocidade natural de resposta do sistema mais rápido será a resposta do seu sistema em Degrau. Assim sendo (3.85) e (3.86) estes valores de ganhos dos controladores da malha de controle da corrente adotados

para se utilizar no sistema controle vetorial de velocidade implementado para a máquina *Brushless* DC.

Utilizando a equação (3.39) dada em malha aberta em relação da função de transferência da planta da máquina pela função de transferência do controlador Proporcional Integral com os respectivos valores de ganhos de projeto (3.85) e (3.86), pode-se obter ainda a representação gráfica do lugar das raízes do sistema. Assim, a Figura 3.6 demonstra a localidade das raízes, sendo possível visualizar os pólos e o zero para os ganhos do controlador de corrente projetado. Analisando a Figura pode-se observar que apresenta dois pólos e um zero, assim a função de transferência possui raízes reais estáveis, pois seus pólos estão no semi-plano esquerdo. Sendo estável pode-se considerar que a resposta dinâmica é relativamente rápida para os controladores projetados. Apresentado pólo complexo, tende a gerar um sobressinal na resposta em Degrau do sistema projetado. Como o zero esta no eixo real e afastado da origem, este sistema projetado é considerado rápido (SILVEIRA & COUTINHO, 2013), (OGATA, 2003).

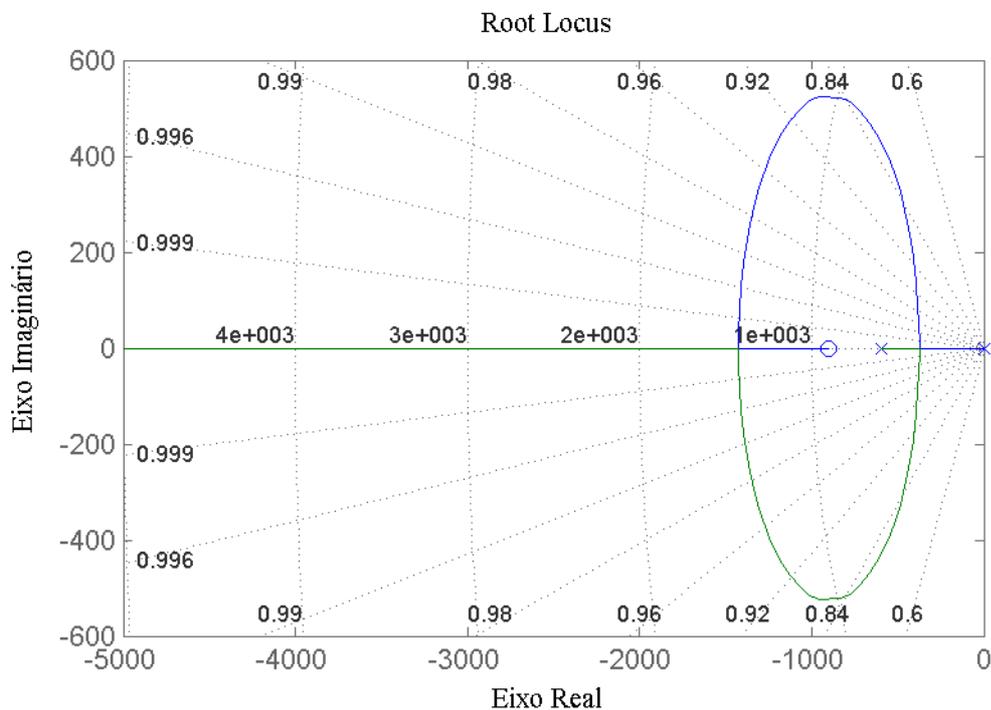


Figura 3.6. Lugares das raízes para o controlador de Corrente.

Sabendo a localidade das raízes para o projeto dos controladores da malha de controle da corrente, pode-se obter a resposta deste projeto em frequência utilizando a equação (3.82) em malha fechada. A Figura 3.7, demonstra a resposta em frequência do sistema projetado para

os ganhos (3.85) e (3.86). Observando a Figura pode-se visualizar a margem mínima de ganho sendo infinito e a margem de fase sendo de 160° . Para a magnitude da Figura 3.7, consta a “curva” de baixa frequência sendo uma reta e a curva de alta frequência apresentando uma inclinação de -20 dB/década, onde é neste momento em que o digrama de Bode encontra um pólo. Observando o diagrama de fase, consta que para a frequência zero o ângulo de fase também será 0° , já para a frequência de mudança de inclinação, ocorrerá quando o ângulo de fase for -45° , assim no infinito o seu ângulo de fase tende a se tornar -90° . O diagrama de Bode apresenta a característica da magnitude e da fase correspondente a um coeficiente de amortecimento sendo igual a 1, para a função quadrática apresentada no projeto dos controladores (3.47) (OGATA, 2003), (BOJORGE, 2013).

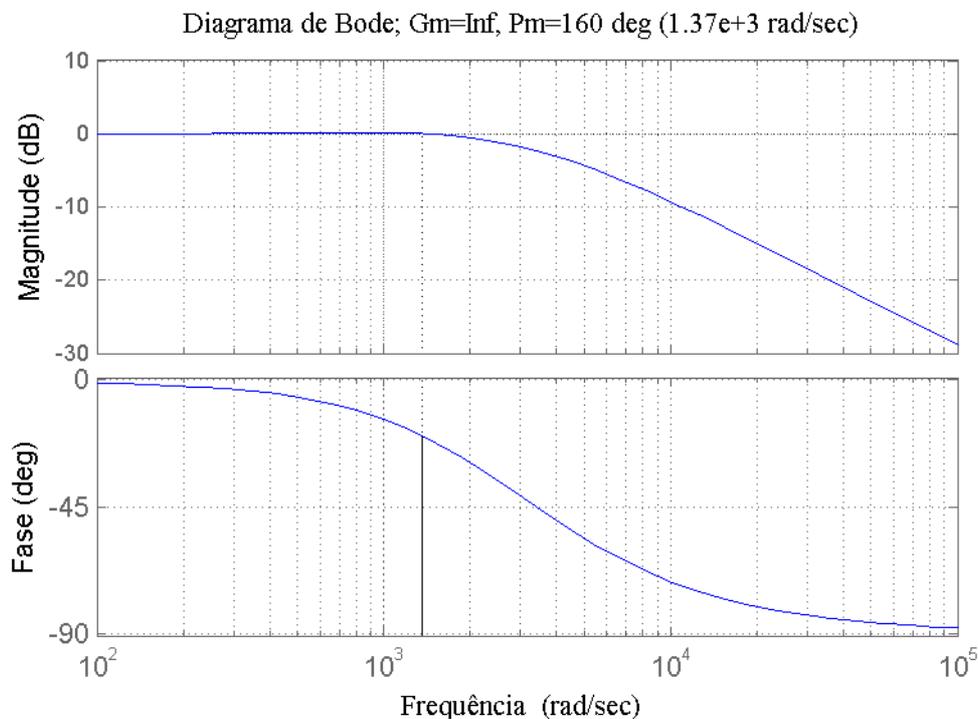


Figura 3.7. Diagrama de Bode, com os valores dos ganhos para o PI de Corrente.

Para o projeto dos controladores da malha de controle da velocidade rotórica, a velocidade natural de resposta do sistema é calculada através da seguinte relação.

$$\omega_n = \frac{B}{J} \quad (3.87)$$

Assim, obtendo o seguinte valor.

$$\omega_n = 5 \text{ rad/s} \quad (3.88)$$

O valor da velocidade natural da resposta do sistema para o PI mecânico será multiplicado por um ganho igual a 3, assim resultando no seguinte valor de velocidade natural.

$$\omega_n = 15 \text{ rad/s} \quad (3.89)$$

Para o controlador de velocidade, a variação do coeficiente de amortecimento é entre 0,8 até 1, assim foi adotado o mesmo valor para o projeto do controlador da malha de controle da corrente. Sabendo todas as variáveis das equações (3.73) e (3.75), pode-se calcular o valor dos ganhos Proporcional e Integral para a malha de controle da velocidade rotórica.

$$K_p = 0,0774 \quad (3.90)$$

$$K_I = 0,5806 \quad (3.91)$$

Para simular a resposta em Degrau do controlador de velocidade projetado deve-se adotar a seguinte equação (3.92), obtida através da equação (3.6) com a função de transferência mecânica e a constante de torque em uma única função (3.68) em malha fechada.

$$T_{SIS} = \frac{(K_t K_p)s + (K_t K_I)}{Js^2 + (B + K_t K_p)s + (K_t K_I)} \quad (3.92)$$

A Figura 3.8 mostra a resposta do sistema em Degrau unitário.

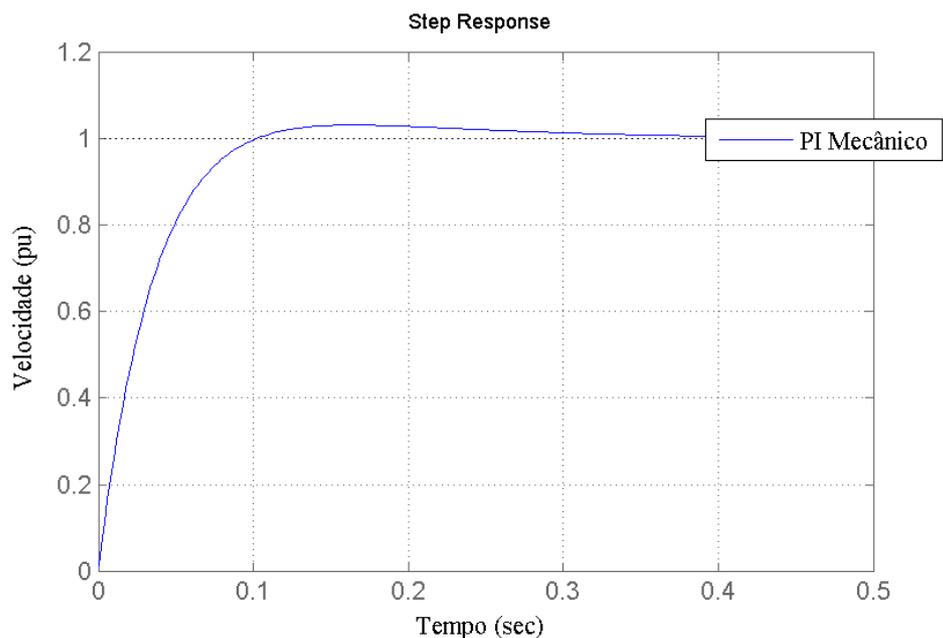


Figura 3.8. Resposta do Sistema projetado para o PI Mecânico.

Para o sistema vetorial de controle de velocidade demonstrado no capítulo seguinte, este valor de velocidade natural de resposta não se adapta ao sistema simulado em malha fechada, pois sua resposta está sendo comparado com uma velocidade de referência de 377 rad/s , onde neste caso é considerada lenta devido a não convergir para velocidade de referência. Então para se ter uma resposta mais rápida, a velocidade natural do sistema será multiplicado por um ganho de valor igual a 8, resultando no seguinte valor de velocidade natural do sistema para o controlador PI mecânico (3.93).

$$\omega_n = 40 \text{ rad/s} \quad (3.93)$$

Para esta velocidade natural, os ganhos Proporcional e Integral da malha de controle da velocidade rotórica são os seguintes.

$$K_p = 0,2065 \quad (3.94)$$

$$K_i = 4,1290 \quad (3.95)$$

Com estes respectivos ganhos, a Figura 3.9 demonstra a resposta do sistema em Degrau unitário.

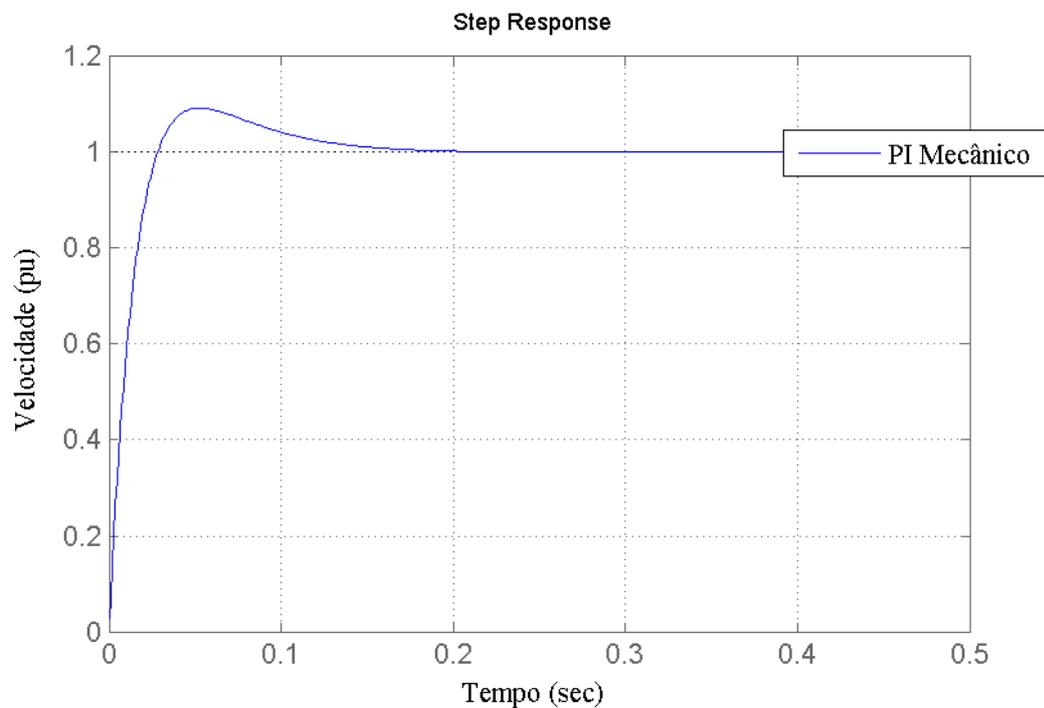


Figura 3.9. Resposta do Sistema projetado no PI Mecânico para um novo valor de Velocidade natural do Sistema.

Com esta Figura, pode-se afirmar que para um projeto de controladores não se pode manter um padrão, devido ao sistema de controle de velocidade implementado exigir respostas diferentes para cada controlador.

Utilizando a equação (3.96) em malha aberta com os respectivos valores de ganhos do projeto (3.94) e (3.95), tem-se a representação gráfica da localidade dos pólos e zeros.

$$T_{SIS} = \frac{(K_t K_P)s + K_t K_I}{Js^2 + Bs} \quad (3.96)$$

Assim, a Figura 3.10 demonstra os lugares das raízes, podendo visualizar que possui dois pólos e um zero no seu eixo real. Para estes valores de ganhos projetados o sistema é considerado estável, pois apresenta seus pólos no semi-plano esquerdo da Figura. Sendo estável pode-se considerar que a resposta dinâmica é relativamente rápida para os controladores projetados. Apresentado pólo complexo, tende a gerar um sobressinal na resposta em Degrau do sistema projetado. (SILVEIRA & COUTINHO, 2013), (OGATA, 2003).

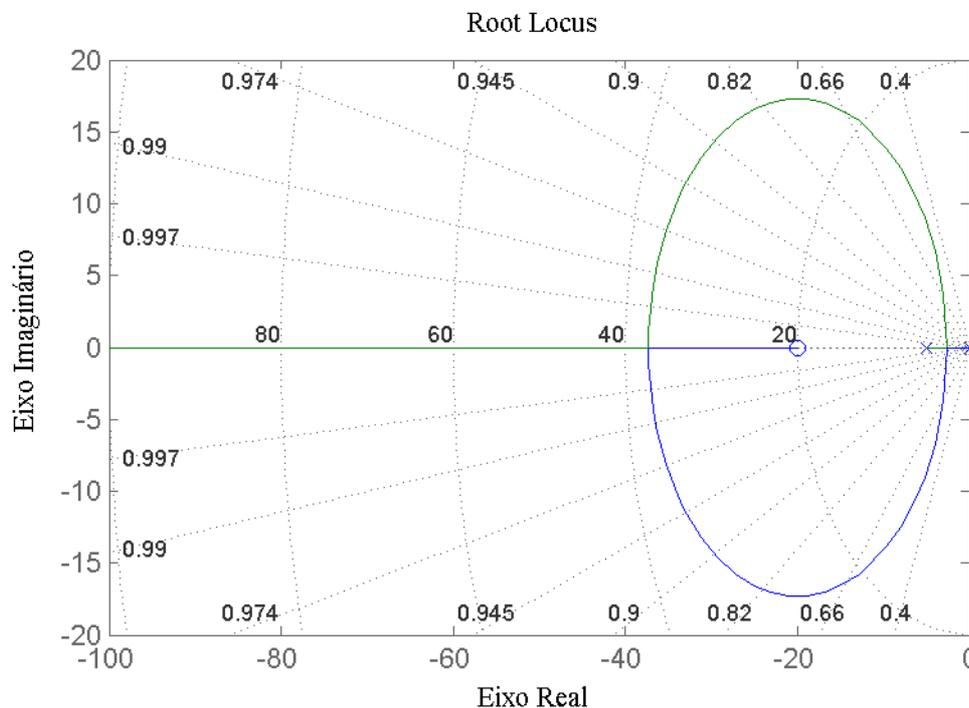


Figura 3.10. Lugares das raízes para o controlador Mecânico.

Sabendo a localidade das raízes para o projeto dos controladores da malha de controle da velocidade rotórica, pode-se obter ainda a resposta deste projeto em frequência utilizando a equação (3.92) em malha fechada. A Figura 3.11 demonstra a resposta em frequência para os

ganhos dos controladores obtidos nas expressões (3.94) e (3.95). Para estes determinados ganhos dos controladores, obteve uma margem de ganho infinito e uma margem de fase sendo igual a 147° .

Analisando a magnitude da Figura 3.11, visualiza-se o momento em que o diagrama de Bode encontra um pólo em sua função de transferência, pois a “curva” de baixa frequência sendo uma reta e a “curva” de alta frequência ocorre uma inclinação de -20 dB/década, neste momento que se encontra o pólo da função. Analisando a curva do diagrama de fase, consta que para a frequência zero o ângulo de fase também será 0° , já para a frequência de mudança de inclinação, ocorrerá quando o ângulo de fase for -45° , assim no infinito o seu ângulo de fase tende a se tornar -90° (OGATA, 2003), (BOJORGE, 2013).

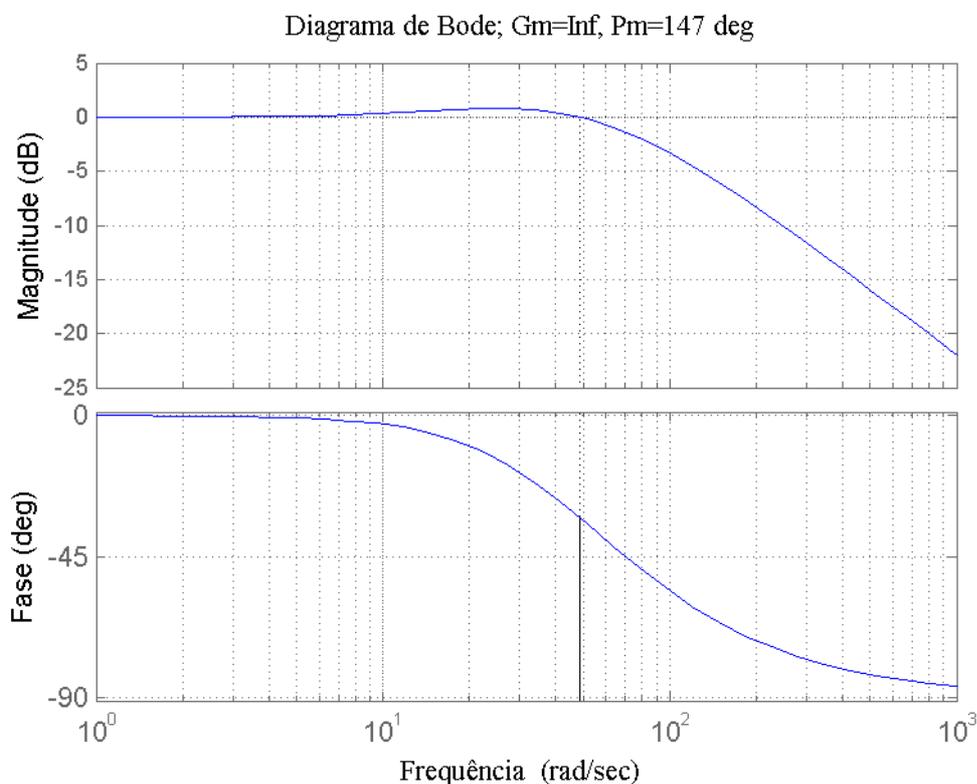


Figura 3.11. Diagrama de Bode, com os valores dos ganhos para o PI Mecânico.

3.6 Conclusão deste capítulo

Neste capítulo foram apresentados alguns tipos de controladores, a obtenção da função de transferência da máquina *Brushless* DC e os projetos dos controladores da malha de controle da corrente e da malha de controle da velocidade rotórica. A obtenção da função de transfe-

rência foi obtida com a utilização das transformações de referencial demonstradas no capítulo seguinte, com isto, foi possível projetar os controladores PI de corrente.

Para os controladores de corrente e os controladores mecânicos foram possível determinar a velocidade natural de resposta do sistema dependendo de relações de parâmetros da máquina, sendo que para cada projeto do controlador foi utilizado velocidades natural de resposta diferentes, para o controlador de velocidade, mecânico, não foi utilizado o mesmo ganho de multiplicação de velocidade natural do controlador de corrente, devido ao sistema de controle de velocidade implementado exigir um controlador mais rápido. Após saber-se os valores dos ganhos para cada projeto dos controladores, determinou-se a localidade das raízes, pólos e zeros, para os valores de ganhos projetados e ainda obteve-se a resposta em frequência, sendo que todas as simulações necessárias para comprovar que estes controladores estavam corretos foram efetuadas no software Matlab.

Para cada projeto do controlador PI da malha de controle obteve um resultado adequado, podendo assim ser aplicado no sistema de controle de velocidade implementado para a máquina *Brushless* DC.

4. TRANSFORMAÇÕES DE REFERENCIAL

As equações de tensão demonstradas no segundo capítulo descrevem o comportamento da máquina *Brushless* DC, sendo que as variáveis envolvidas são ao decorrer do tempo exceto quando o rotor estiver parado.

Algumas alterações destas variáveis nas equações das tensões são utilizadas para reduzir a complexidade deste equacionamento. As transformações utilizadas referem-se às variáveis da máquina para o quadro de referência que gira a uma velocidade natural da resposta arbitrária, sendo que estas transformações são obtidas simplesmente designando uma velocidade de rotação para um quadro de referência.

Estas transformações são apresentadas, pois muitas de suas propriedades podem ser estudadas sem a complexidade da máquina envolvida, esta abordagem dos conceitos básicos das transformações são estabelecidas neste capítulo (KRAUSE et al., 2002).

4.1 Transformação de uma Máquina Simétrica Trifásica para $\alpha\beta 0$

Esta transformação é mais conhecida usualmente por transformar um sistema trifásico em um sistema bifásico, dita transformação $\alpha\beta 0$. Essa transformação é feita através da diagonalização das matrizes circulantes simétricas que aparecem na formulação do modelo da máquina, com as respectivas características de potência mecânica, torque, velocidade e número de pares pólos. A transformação se baseia na decomposição das variáveis do sistema original em um novo sistema composto por dois eixos em quadratura. Esta decomposição pode ser realizada sem a presença do neutro do sistema trifásico das máquinas. Para ocorrer a transformação $\alpha\beta 0$, a máquina pode ser alimentada com uma fonte não-senoidal e não simétrica, mas a máquina sendo simétrica a transformação é válida.

As estruturas simétricas das máquinas trifásicas e bifásicas podem ser representadas como demonstra a Figura 4.1, onde os enrolamentos que formam a estrutura trifásica possuem n_3 espiras e os enrolamentos que formam a estrutura bifásica possuem n_2 espiras. Sendo assim cada enrolamento pode ser percorrido por uma corrente que produzirá uma Força Magnetomotriz chamada de F (BARBI, 2013). A partir da Figura 4.1, pode-se estabelecer uma transformação para encontrar F_α e F_β em função de F_1 , F_2 e F_3 , assim a estrutura bifásica produzirá uma Força Magnetomotriz resultante com efeito semelhante da estrutura trifásica.

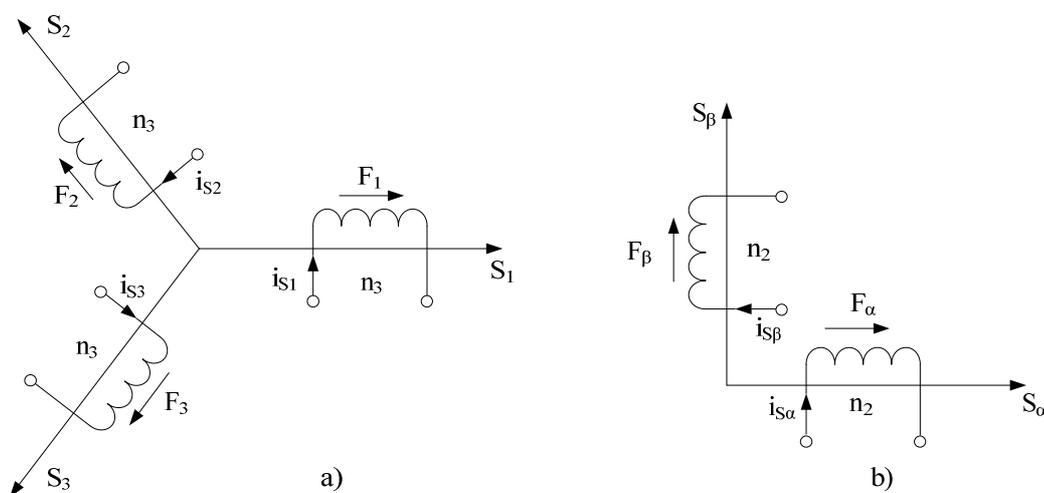


Figura 4.1. Estruturas Simétricas: a) Circuito Trifásico Simétrico, b) Circuito Bifásico Simétrico.

Decompondo sobre o eixo S_α , na Figura 4.2, e sobre o eixo S_β , na Figura 4.3, tem-se.

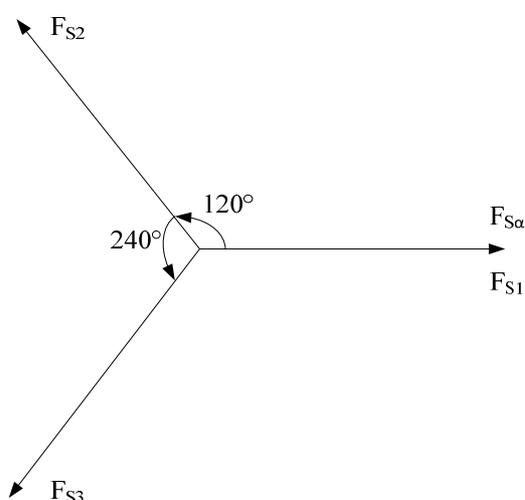


Figura 4.2. Decomposição vetorial em S_α .

Expressão resultante através da decomposição do eixo S_α .

$$F_{S_\alpha} = F_{S1} + F_{S2} \cos(120^\circ) + F_{S3} \cos(240^\circ) \quad (4.1)$$

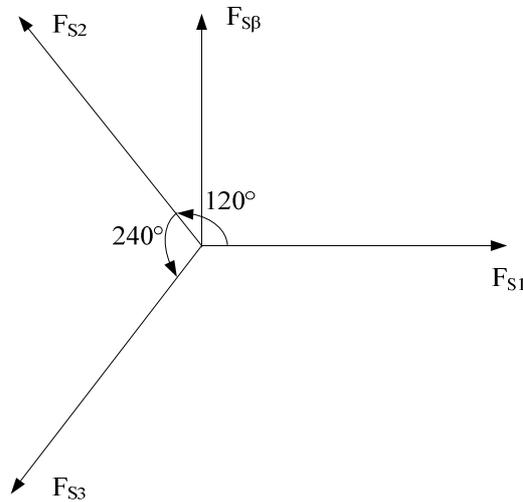


Figura 4.3. Decomposição vetorial em S_β .

Expressão resultante através da decomposição do eixo S_β .

$$F_{S_\beta} = 0 + F_{S2} \sin(120^\circ) + F_{S3} \sin(240^\circ) \quad (4.2)$$

A partir destas duas expressões, podemos reescrever em forma de matriz como demonstra a equação (4.3).

$$\begin{bmatrix} F_{S_\alpha} \\ F_{S_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{S2} \\ F_{S3} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Como citado anteriormente, as máquinas bifásicas possuem os enrolamentos com n_2 espiras sobre os eixos S_α e S_β , logo para os enrolamentos trifásicos possuem n_3 espiras sobre os eixos S_α e S_β , decomposta estas relações sobre a Força Magnetomotriz F , resulta na seguinte expressão (BARBI, 2013).

$$\begin{bmatrix} i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Será definida uma corrente i_0 pela expressão (4.5), que possibilitará a inversão dos enrolamentos trifásicos que possuem n_3 espiras.

$$i_{s0} = a \frac{n_3}{n_2} (i_{s1} + i_{s2} + i_{s3}) \quad (4.5)$$

Inserindo a componente de sequência zero, tem-se a seguinte expressão.

$$\begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_3 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Assim a equação matricial anterior pode ser definida pela seguinte expressão.

$$A^{-1} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Para que a expressão (4.7) tenha a potência da máquina invariante à seguinte relação deve ser satisfeita.

$$A^{-1}A^{-1t} = \mathbb{I} \quad (4.8)$$

Sendo que \mathbb{I} , será a matriz identidade 3x3. Substituindo a expressão (4.7) na expressão (4.8), tem-se.

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Para obter o valor de $\left(\frac{n_3}{n_2}\right)$, foi simplificada a equação anterior de modo a obter a seguinte relação.

$$\frac{n_3}{n_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.10)$$

Com o valor da relação $\left(\frac{n_3}{n_2}\right)$, pode-se encontrar o valor de a .

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.11).$$

Substituindo a equação (4.7), pelas expressões obtidas em (4.10) e (4.11), tem-se a seguinte expressão (BARBI, 2013).

$$A^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.12).$$

Assim, a expressão geral que descreve a transformação de uma máquina simétrica trifásica em uma máquina simétrica bifásica, chamada transformação $\alpha\beta 0$, é dada pela seguinte equação

$$\begin{bmatrix} i_{S0} \\ i_{S\alpha} \\ i_{S\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

4.2 Transformação de Park

É uma transformação linear onde simplifica as equações das máquinas introduzindo em um conjunto de variáveis hipotéticas. Este processo transforma uma sistema bifásica com seus enrolamentos estáticos fixos e rotóricos girantes em enrolamentos estacionários fixos e rotóricos em pseudo-estacionários.

Assim utilizando a transformação de Park é possível obter um par de enrolamentos girantes de $\alpha\beta 0$ em um par de enrolamentos pseudo-girantes dos eixos direto e de quadratura ($d - q$). Para obter a transformação de Park, deve-se considerar o sistema de eixos representado na Figura 4.4 (BARBI, 2013).

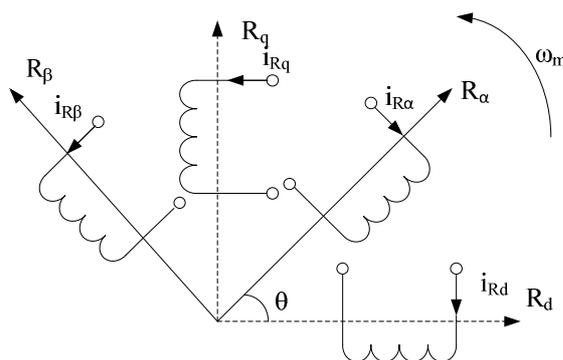


Figura 4.4. Transformação de Park aplicado ao Sistema de eixos.

O sentido de rotação dos eixos R_α e R_β é no sentido anti-horário com velocidade ω_m . Sendo que os eixos R_d e R_q estão em estado estacionário, assim têm-se dois enrolamentos girantes com correntes $i_{R\alpha}$ e $i_{R\beta}$ e dois enrolamentos estacionários com correntes i_{Rd} e i_{Rq} , sendo todos os enrolamentos idênticos.

Para se obter a transformação de Park deve-se decompor as Forças Magnetomotrices dos enrolamentos girantes sobre os eixos fixos e dividir pelo número de espiras, obtendo assim as seguintes expressões (4.14) e (4.15). A Figura 4.5 e a Figura 4.6 demonstram a obtenção das expressões através dos eixos fixos.

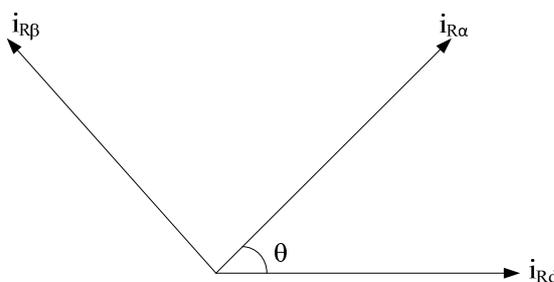


Figura 4.5. Transformação de Park sobre o eixo i_{Rd} .

A expressão (4.14) é resultante através da decomposição sobre o eixo i_{Rd} .

$$i_{Rd} = i_{R\alpha} \cos \theta - i_{R\beta} \sin \theta \quad (4.14)$$

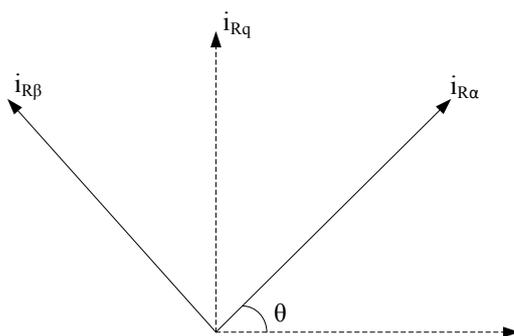


Figura 4.6. Transformação de Park sobre o eixo i_{Rq} .

A seguinte expressão (4.15) é resultante através da decomposição do eixo i_{Rq} .

$$i_{Rq} = i_{R\alpha} \sin \theta + i_{R\beta} \cos \theta \quad (4.15)$$

Através das expressões obtidas (4.14) e (4.15), tem-se a transformação de Park na forma matricial descrita pela equação (4.16), sendo que neste caso será desconsiderada a componente de sequência zero da máquina bifásica.

$$\begin{bmatrix} i_{Rd} \\ i_{Rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R\alpha} \\ i_{R\beta} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A transformação de Park permite converter um conjunto de enrolamentos girantes num conjunto de enrolamentos fixos, produzindo os mesmos efeitos. As correntes dos enrolamentos fixos terão frequências diferentes das correntes dos enrolamentos girantes. A transformação da máquina pode ser representada pela Figura 4.7, sendo demonstrada a máquina original no item a) e a máquina transformada no item b) (BARBI, 2013).

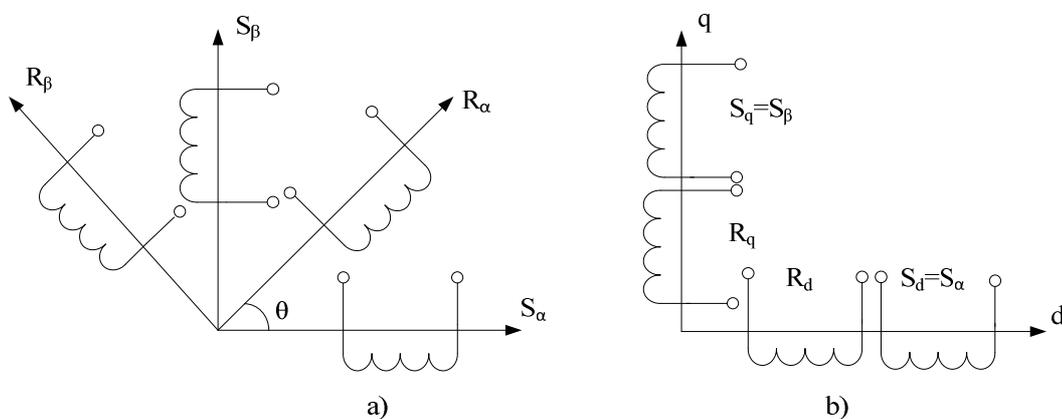


Figura 4.7. Transformação de Park: a) Máquina Original, b) Máquina Transformada.

4.3 Transformação de Park Estendida

As transformações citadas anterior se equivalem para qualquer máquina, mas pode-se observar que para as máquinas de ímãs permanentes estas transformações não são bem definidas, assim deve-se dividir em dois tipos, as que possuem Força Contra-Eletromotriz senoidal onde pode-se aplicar seu controle vetorial utilizando o modelo baseado na transformação de Park, e o outro tipo de unidade pode ser controlada em estado estacionário, que é o caso das máquinas que possuem Força Contra-Eletromotriz não-senoidal, como o motor *Brushless* DC. Para este tipo de controle, é proposta a transformação estendida de Park, onde permite obter o modelo dinâmico destes motores independente de sua Força Contra-Eletromotriz ser senoidal ou não (GRENIER & LOUIS, 1993), (GRENIER & LOUIS, 1995).

A transformação de $\alpha\beta 0$, transforma uma máquina trifásica em uma máquina bifásica equivalente. Para os motores com Força Contra-Eletromotriz senoidal deve-se considerar que a componente de sequência zero não irá contribuir para o seu torque, considerando igual a zero, mas contribuirá para as perdas de cobre do motor. Assim utilizando a transformação $\alpha\beta 0$ pode-se reduzir para uma máquina bifásica somente no sistema “ $\alpha - \beta$ ”. Para uma máquina não senoidal, a componente de sequência zero pode não ser igual a zero. Assim para este caso a transformação de $\alpha\beta 0$ não é utilizada, mas permite obter um sistema semelhante.

Considerando uma máquina de ímãs permanentes conectada em estrela com sua Força Contra-Eletromotriz não senoidal, ocorrerá uma variação de ângulo onde definirá os eixos diretos e de quadratura, denominados anteriormente de pseudo-eixos girantes, sendo descrito da seguinte maneira “ $p\theta + \mu(\theta)$ ”, onde (μ) é o coeficiente de variação angular, devido a esta variação angular a corrente rotórica do eixo direto, i_{Rd} será igual a zero e a corrente rotórica do eixo de quadratura, i_{Rq} não pode ser considerada uma constante, de modo que deve ser calculada dependendo da posição angular do rotor θ .

A multiplicação do número de pares de pólos pela posição angular do rotor deve ser considerada para qualquer transformação de referencial de uma máquina. A equação que descreve a transformação de Park Estendida é dada pela seguinte equação (GRENIER & LOUIS, 1993), (GRENIER & LOUIS, 1995).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ i_{Rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p\theta + \mu(\theta) & \sin p\theta + \mu(\theta) \\ -\sin p\theta + \mu(\theta) & \cos p\theta + \mu(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R\alpha} \\ i_{R\beta} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Sendo que o coeficiente de variação angular é expresso pela seguinte expressão.

$$\begin{aligned}\sin(p\theta + \mu) &= -\frac{i_{R\alpha}}{i_{Rq}} \\ \cos(p\theta + \mu) &= \frac{i_{R\beta}}{i_{Rq}}\end{aligned}\quad (4.18)$$

Sabendo a equação anterior, pode-se deixar o coeficiente de variação angular em evidência de duas formas, demonstrados pelas seguintes equações.

$$\mu = \sin^{-1}\left(-\frac{i_{R\alpha}}{i_{Rq}}\right) - p\theta \quad (4.19)$$

$$\mu = \cos^{-1}\left(\frac{i_{R\beta}}{i_{Rq}}\right) - p\theta \quad (4.20)$$

Sendo que a corrente rotórica do eixo direto é dado pela seguinte equação.

$$i_{Rq} = \sqrt{(i_{S\alpha})^2 + (i_{S\beta})^2} \quad (4.21)$$

O coeficiente de variação angular é uma função da posição angular do rotor, sendo que para o caso de Força Contra-Eletromotriz senoidal, o coeficiente de variação angular será zero. Assim, o coeficiente dependerá apenas de valores da variação do rotor, podendo ser facilmente conhecido através de medições da Força Contra-Eletromotriz. Pode-se considerar como uma extensão da transformação de Park sendo aplicada para máquinas síncronas com Força Contra-Eletromotriz não senoidal.

4.4 Ação Anti-Windup

Quando o atuador de um sistema de malha de controle atinge um limite máximo ou mínimo ocorre uma saturação do sinal de controle. Isto faz com que a malha de realimentação deste sistema seja inexistente, pois o atuador permanecerá no seu limite independente do sinal de saída deste processo. Porém utilizando um controlador com ação integral, o seu erro continuará e seu valor se tornará muito grande, neste caso para que o controlador saia da região de saturação é necessário que o termo integral volte a ter um valor correspondente, então deve-se esperar que o sinal de erro troque de sinal por um período de tempo, e aplicar na entrada do controlador um sinal oposto. Assim, a resposta transitória do sistema tenderá a ficar lenta e

oscilatória, sendo uma característica não desejável (SILVA, 2013). Para evitar este problema da ação integral utiliza-se a ação *Anti-Windup* que tem por finalidade de diminuir o efeito produzido pela saturação do sinal de controle em um sistema de malha fechada, verificando a existência de saturação da ação de controle (PAULISTA, 2003).

A técnica de rastreamento reverso é bem utilizada com a ação *Anti-Windup*, chamada de *backtracking* ou *back-calculation*, como demonstra a Figura 4.8, para um controlador PI, quando a saída do atuador saturar, o termo integral é novamente calculado de forma que seu valor esteja no limite do atuador, sendo o atuador nesta Figura é a função de saturação do sinal de controle. Esta correção torna-se vantajosa em forma dinâmica, sendo que o ganho K_s deve ser criteriosamente projetado (MICHELS et al., 2010), (PAULISTA, 2003).

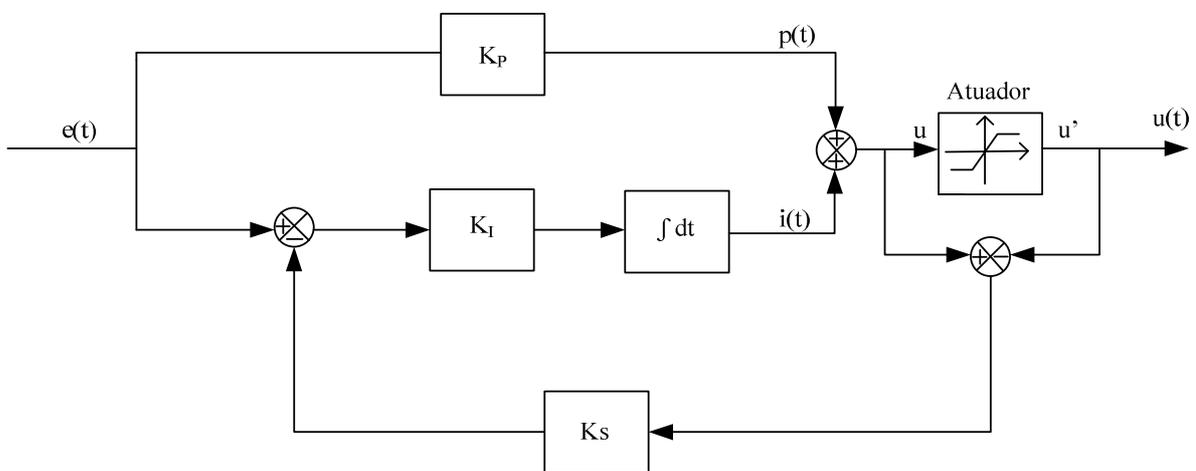


Figura 4.8. Ação *Anti-Windup* para um controlador PI.

O valor da ação integral será modificado com a diferença entre u' e u e multiplicado por um ganho K_s , que está relacionado com o tempo integral, $1/T_i$, para este valor de tempo usa-se as propriedades da curva característica da ação integral. Este tempo integral está variando entre 1, 2 e 5, deve-se adequar este valor ao sistema de controle implementado (HAFFNER, 2009), (OGATA, 2003).

4.5 Resultados de Simulações

Para validar a estratégia de controle vetorial de velocidade com as suas respectivas transformações da máquina *Brushless* DC resultados de simulações são obtidos, utilizando o software Simulink. Os parâmetros da máquina utilizados para esta simulação são apresentados na Tabela 2. A Figura 4.9 mostra um diagrama de como foi obtido o sistema de controle vetorial de velocidade para a máquina *Brushless* DC através das transformadas de referenciais no software Simulink, sendo que os valores para os PI's da malha de controle foram obtidos nas seguintes equações (3.85), (3.86), (3.93) e (3.94).

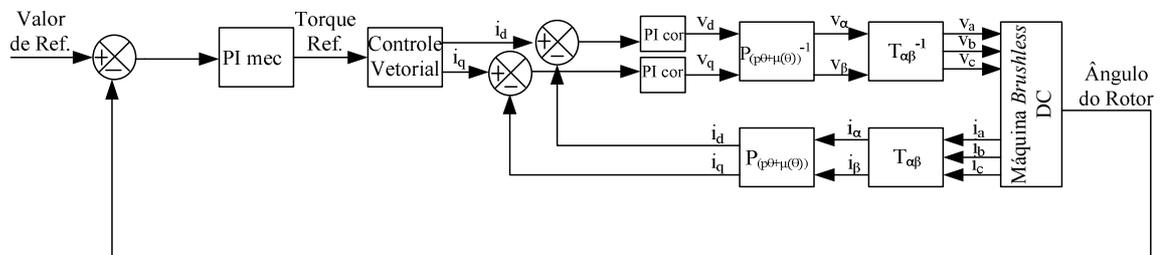


Figura 4.9. Controle Vetorial de velocidade implementado para a máquina *Brushless* DC.

O Valor de Referência mencionado na Figura 4.9 está relacionado com o número de pares de pólos do motor e sua frequência do sistema, sendo que para as simulações efetuadas a seguir este valor é 377 rad/s , ainda nesta Figura constam as transformadas $\alpha\beta\theta$ e a transformada de Park Estendida, sendo as utilizadas para implementar o sistema de controle vetorial de velocidade para a máquina *Brushless* DC.

Como apresentado neste capítulo, que para a máquina *Brushless* DC ocorre uma variação angular entre os eixos direto e de quadratura, então para efetuar o controle vetorial desta máquina deve-se utilizar a transformação de Park estendida. Sabendo que esta variação angular depende dos valores da variação do rotor, sendo evidenciados nas equações (4.19) e (4.20), a variação angular foi dividida em quadrantes, sendo que cada equacionamento desenvolvido por quadrante não interfira no seguinte, ou seja, o valor angular de um quadrante sendo limitado pelo outro.

As equações dos quadrantes foram definidas através das equações (4.19) e (4.20), assim o primeiro quadrante ficou definido pelas seguintes equações.

$$\mu = \sin^{-1} \left(-\frac{i_{R\alpha}}{i_{Rq}} \right) \quad (4.22)$$

$$\mu = \cos^{-1} \left(\frac{i_{R\beta}}{i_{Rq}} \right) \quad (4.23)$$

Já para o segundo quadrante, utiliza-se as mesmas expressões citadas anteriormente, sendo que para este quadrante a equação (4.22) irá diminuir seu valor obtido por π . Para o terceiro quadrante o valor obtido em (4.22) também será diminuído de π , já para o outro valor obtido na equação seguinte (4.23), será reduzida de 2π . E por fim, no quarto quadrante vai somar 2π em (4.22) e diminuir 2π em (4.23) sobre o valor adquirido em cada uma das equações.

Sabendo o valor por quadrante através das equações, pode-se fazer o valor médio da variação angular e diminuir do ângulo do rotor, obtendo assim o valor total do coeficiente de variação angular (μ). Com isto pode-se verificar que a rotação angular será acompanhada pela variação angular da máquina, como mencionado neste capítulo da transformada de Park estendida. A Figura 4.10 demonstra a variação obtida entre os dois coeficientes com a implementação feita no Matlab para cada quadrante.

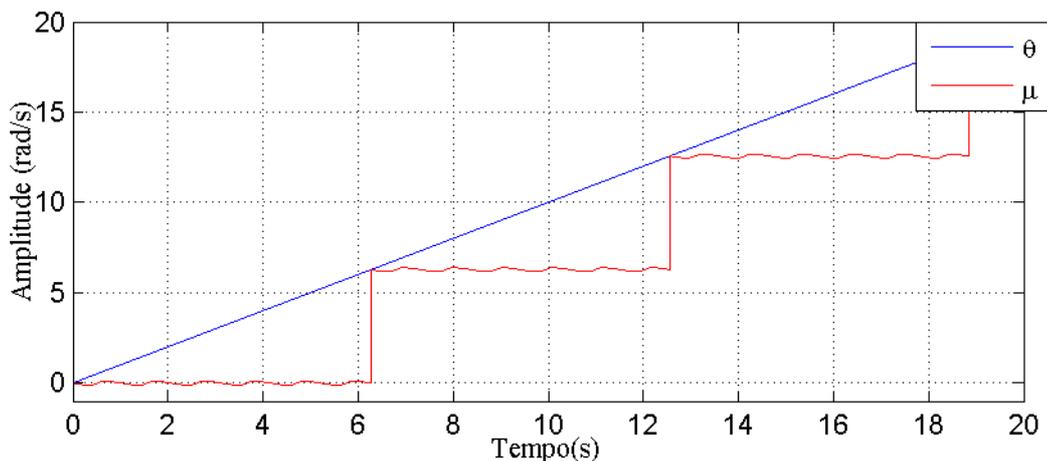


Figura 4.10. Variação do ângulo do rotor com o coeficiente angular (μ), obtida no Matlab.

Feita a definição da variação do coeficiente angular, pode-se obter o sistema de controle vetorial de velocidade para a máquina *Brushless* DC demonstrado na Figura 4.9. A seguir será demonstrado o motivo de se utilizar os seguintes valores de ganhos (3.94) e (3.95) para os controladores da malha de controle da velocidade rotórica. Para a velocidade natural de res-

posta de 15 rad/s , a velocidade do rotor não irá convergir para a referência, como demonstra a Figura 4.11.

Assim para um aumento na velocidade natural da resposta do sistema sendo igual a 40 rad/s a Figura 4.12 demonstra a velocidade do rotor convergindo para a velocidade de referência no sistema de controle vetorial de velocidade projetado para a máquina *Brushless* DC.

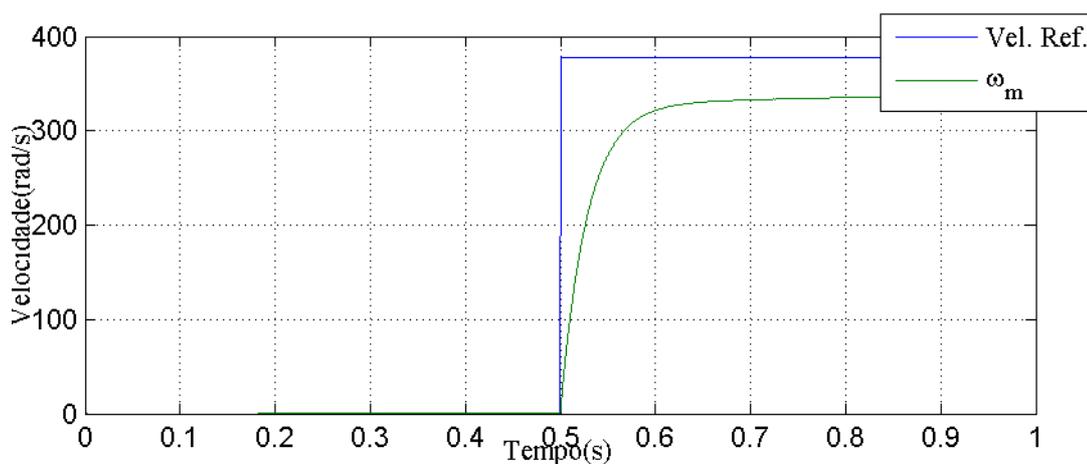


Figura 4.11. Comparação da Velocidade de Referência com a Velocidade do rotor para o projeto do PI Mecânico com velocidade natural de 15 rad/s .

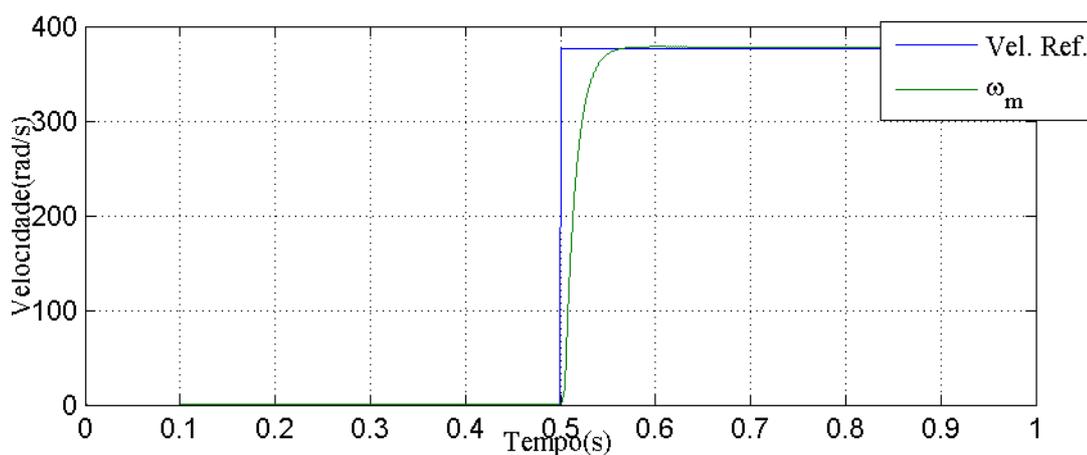


Figura 4.12. Comparação da Velocidade de Referência com a Velocidade do rotor para o projeto do PI mecânico com velocidade natural de 40 rad/s .

Após verificar que os ganhos dos controladores projetados para o controlador da malha de controle da velocidade rotórica estavam convergindo para o valor de velocidade de refe-

rência da máquina, pode-se obter as formas de onda das correntes trifásicas no sistema de controle de velocidade aplicado em malha fechada para a máquina *Brushless* DC. A Figura 4.13 mostra as correntes trifásicas obtidas no sistema de controle vetorial de velocidade implementado para a máquina.

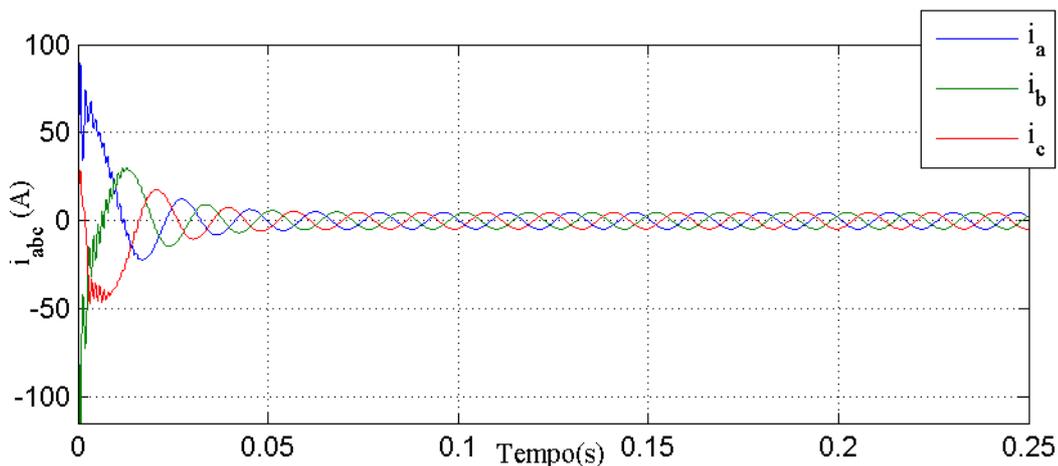


Figura 4.13. Formas de onda das Correntes Trifásicas.

Utilizando a transformada de uma máquina trifásica para uma máquina bifásica, ou seja, a transformada $\alpha\beta 0$, no sistema de controle de velocidade, tem-se a seguinte Figura 4.14 das correntes bifásicas da máquina.

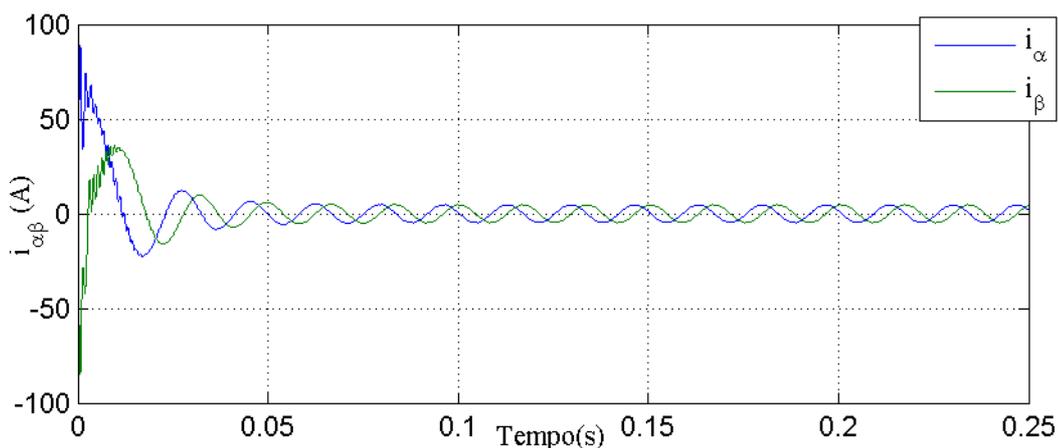


Figura 4.14. Correntes Bifásicas da máquina *Brushless* DC.

Com a Figura 4.14, pode-se observar que a componente de sequência zero não consta nesta simulação, devido a se desprezar esta componente neste tipo de transformação. Para obter as correntes do eixo direto e de quadratura, ($d - q$), da máquina deve-se utilizar a trans-

formada de Park estendida. Como a lógica implementada para o coeficiente angular (μ) no Matlab obteve o esperado, então foi utilizado o mesmo método no Simulink, obtendo a seguinte Figura 4.15, que demonstra a variação do coeficiente angular (μ) com o ângulo do rotor em um sistema de controle vetorial de velocidade em malha fechada.

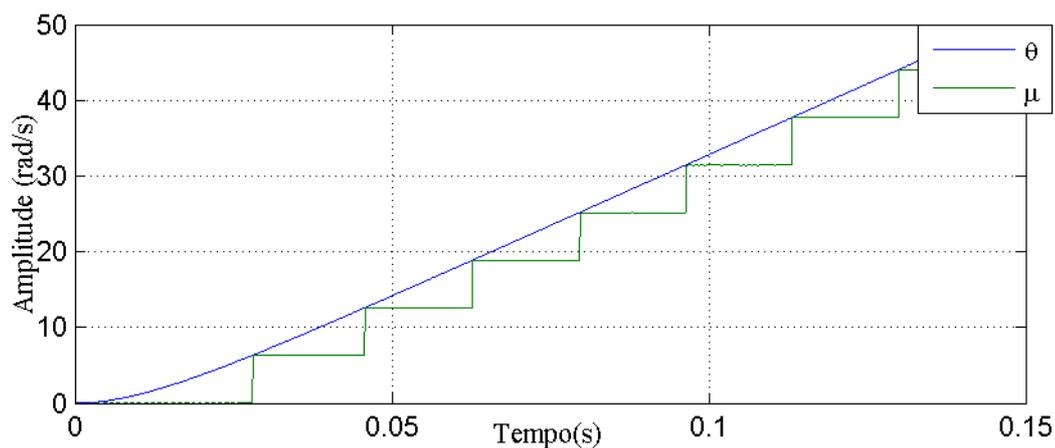


Figura 4.15. Variação do ângulo do rotor com a variação do coeficiente angular (μ), obtida no Simulink.

Assim, a Figura 4.16 demonstra as correntes dos eixos direto e de quadratura, após efetuada à transformação de Park estendida.

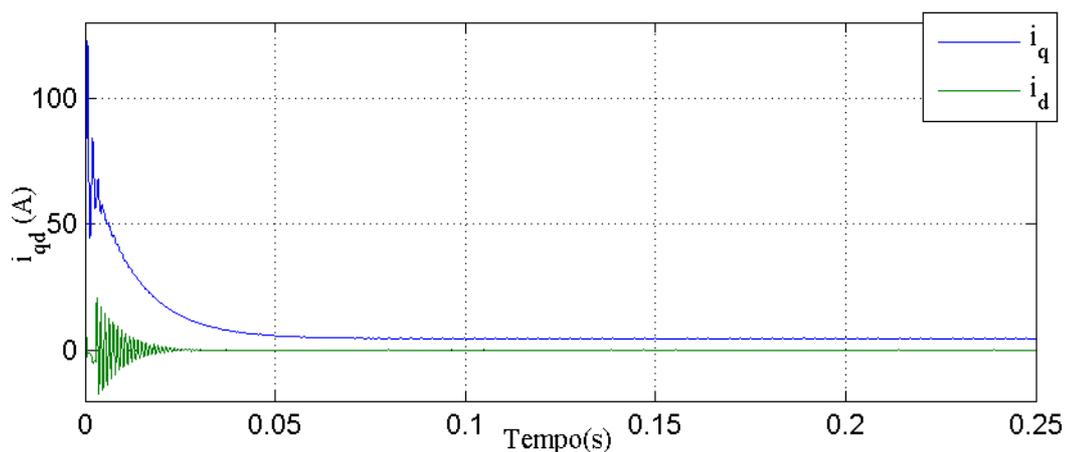


Figura 4.16. Formas de onda das correntes do eixo direto e de quadratura, utilizando a Transformada de Park estendida.

Demonstrando todas as transformações de referencial, é possível reconstituir estas transformações da máquina, ou seja, de uma máquina em eixo direto e de quadratura para uma

máquina bifásica e de uma máquina bifásica para uma máquina trifásica, basta utilizar a transformação inversa, como demonstrado na Figura 4.9. Utilizando a transformada de Park estendida inversa, tem-se as seguintes formas de ondas das tensões bifásicas na Figura 4.17.

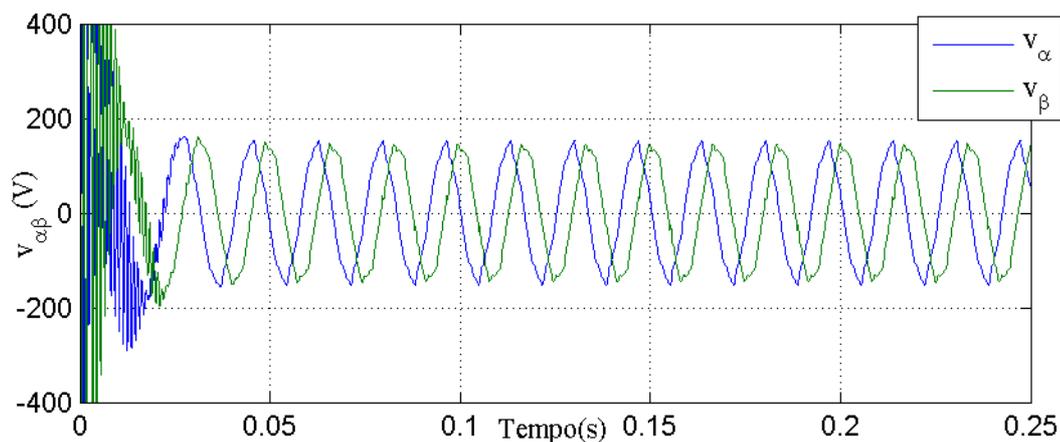


Figura 4.17. Tensões Bifásicas da máquina.

Assim, sabendo as tensões bifásicas da máquina é possível obter agora as tensões trifásicas utilizando a transformada $\alpha\beta\theta$ inversa, demonstrado na Figura 4.18.

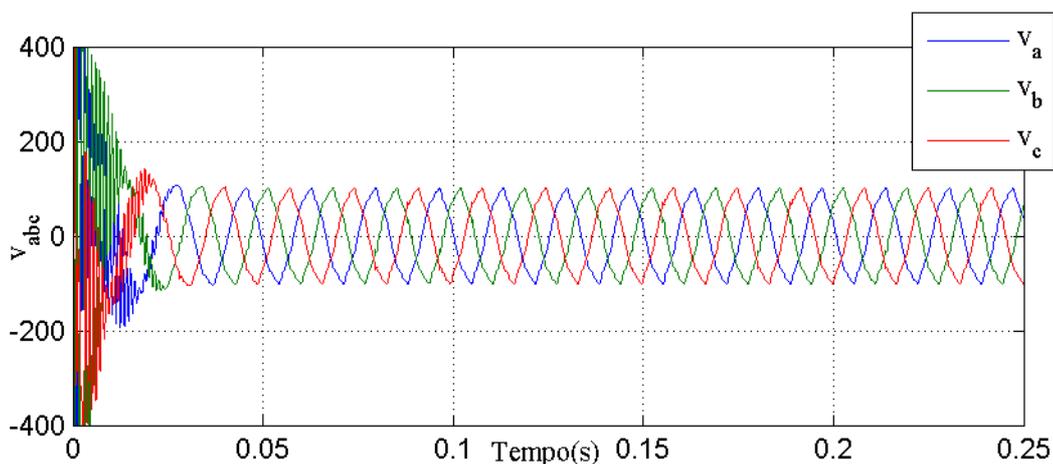


Figura 4.18. Tensões Trifásicas da máquina.

Com as Figuras 4.17 e 4.18, pode-se observar que as formas de onda das tensões são tipicamente trapezoidais no sistema de controle vetorial de velocidade implementado para a máquina *Brushless* DC, comprovando a teoria proposta no segundo capítulo. Com este controle vetorial de velocidade ainda pode-se obter a forma de onda do torque eletromagnético demonstrado na Figura 4.19.

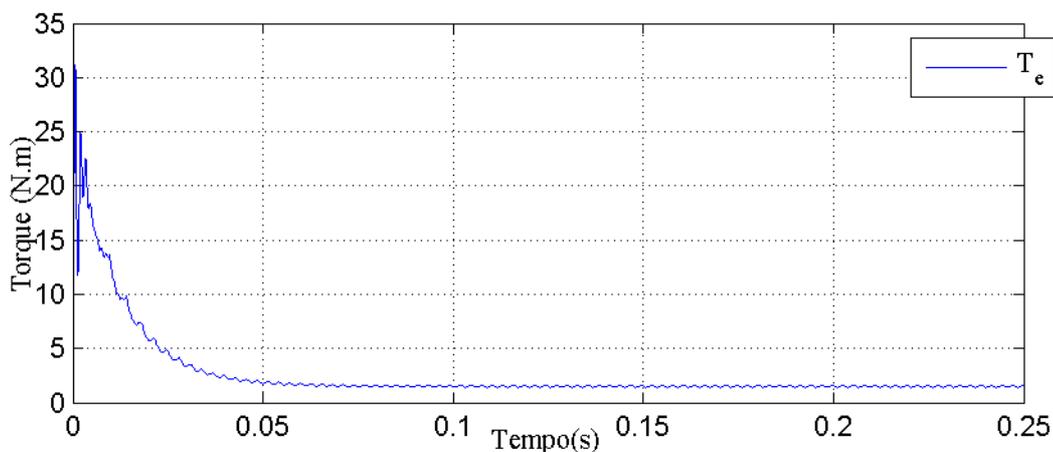


Figura 4.19. Torque Eletromagnético.

Esta oscilação do torque ao decorrer do tempo está relacionada com a sua equação (2.6) envolver a Força Contra-Eletromotriz, que possui a forma de onda trapezoidal. Após obter as correntes e as tensões utilizando as transformações de referencial da máquina, foi conectado uma carga no motor de 5 N/m , por um determinado tempo, onde pode-se verificar a variação das tensões trifásicas, correntes trifásicas, torque eletromagnético e da velocidade do rotor com a inserção da carga. A Figura 4.20 demonstra as tensões trifásicas com carga.

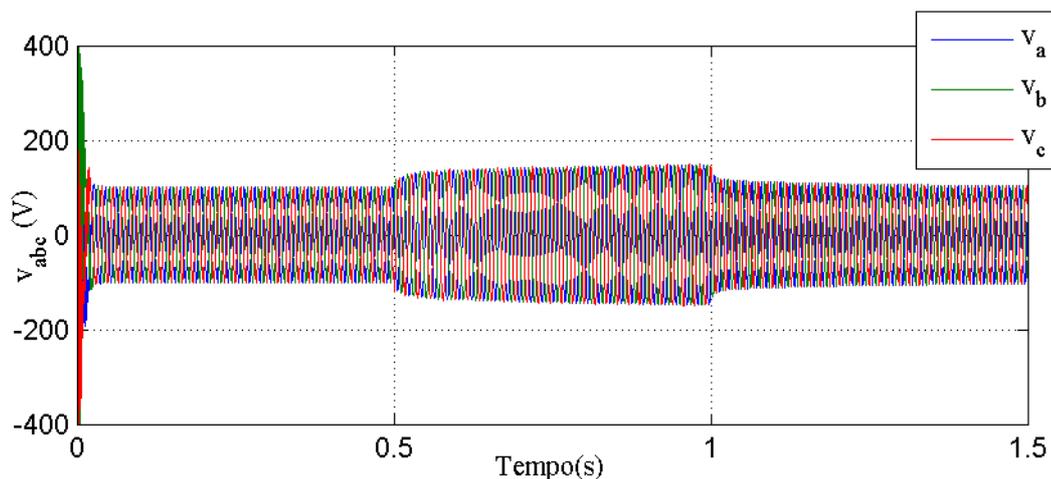


Figura 4.20. Tensões Trifásicas com inserção de Carga.

Analisando a Figura 4.20, pode-se observar o instante em que a carga é conectada ao motor, aumentando as tensões. A Figura 4.21 mostra as correntes trifásicas da máquina no momento em que é inserida a carga.

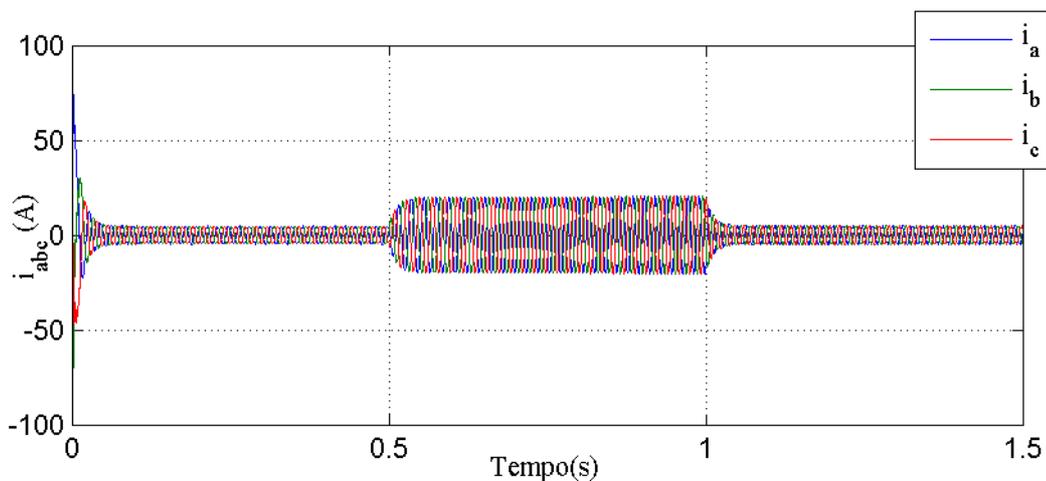


Figura 4.21. Correntes Trifásicas com inserção de Carga.

Com as Figuras 4.21 e 4.20, pode-se visualizar que a elevação das correntes trifásicas e das tensões trifásicas da máquina com a inserção de carga ocorre devido ao motor estar tentando suprir a carga inserida com o aumento da tensão e da corrente naquele determinado instante de tempo.

A Figura 4.22 mostra o torque eletromagnético da máquina sendo inserida uma carga que demonstra sua elevação de torque num determinado instante de tempo.

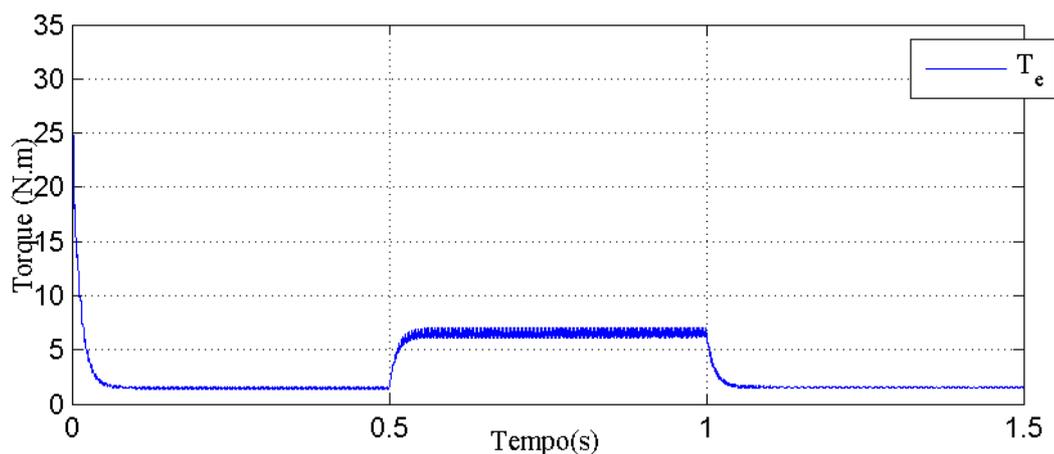


Figura 4.22. Torque Eletromagnético com inserção de Carga.

A Figura 4.23 demonstra como fica a velocidade do rotor com inserção da carga por alguns segundos.

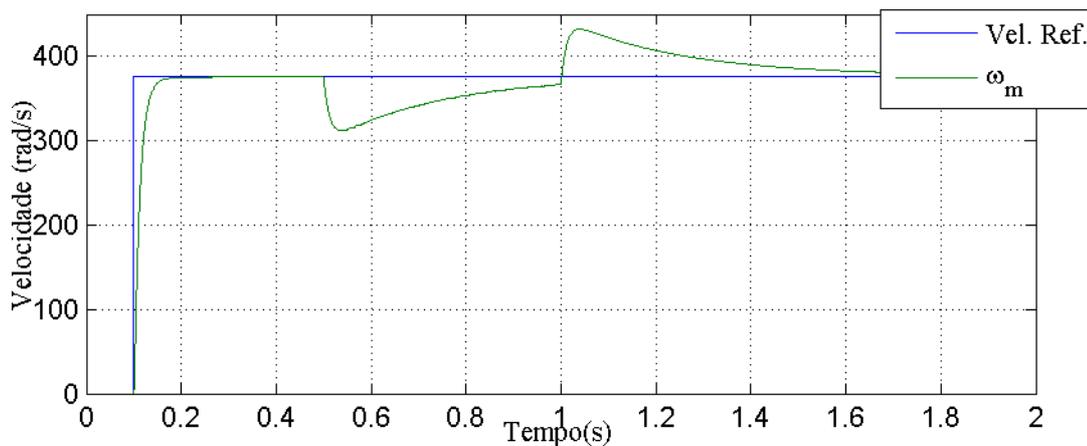


Figura 4.23. Velocidade de Referência e a Velocidade do Rotor com inserção de Carga.

Nesta Figura 4.23 pode-se verificar o instante que se conecta a carga no motor, onde diminui a velocidade do rotor, e o instante onde se desconecta a carga, que ocasiona um aumento de velocidade ultrapassando a velocidade referência por poucos segundos e logo após a velocidade do rotor torna a convergir para a referência, sendo que este aumento de velocidade após desconectado a carga é considerado uma reação normal da máquina..

Analisando as Figuras 4.17, 4.18, 4.20 e 4.21, pode-se verificar que estava acontecendo uma saturação dos controladores projetados, onde visualiza-se os transitórios de tensões e correntes elevados. Para solucionar este problema foi proposto utilizar uma ação contra esta saturação, chamada de *Anti-Windup*, que irá diminuir o efeito produzido pela saturação do termo integral demonstrado pela técnica da Figura 4.8.

Esta técnica *backtracking* da ação *Anti-Windup* será implementada juntamente no sistema de controle vetorial de velocidade da máquina *Brushless* DC demonstrado na Figura 4.9. Como mencionado anteriormente, onde o valor da ação integral será modificado pela diferença entre u' e u e multiplicado por um ganho K_s , sendo que o valor deste ganho esta relacionado com o tempo integral, $1/T_i$. Então para efetuar esta implementação utilizando as propriedades de uma ação integral, foi escolhido um valor, através de simulações, que obtivesse o melhor resultado. Assim o melhor resultado foi obtido para o valor de tempo integral sendo igual a 2, com isto tem-se um ganho K_s igual a 0,5. O atuador mencionado na Figura 4.8, foi limitado em máximo e mínimo de 250 V, pois este valor está relacionado com uma possível tensão de entrada na máquina de 380 V dividido entre as três fases. Para comprovar estas afirmações serão demonstradas algumas simulações. A Figura 4.24 mostra as tensões trifásicas com carga utilizando uma ação *Anti-Windup*.

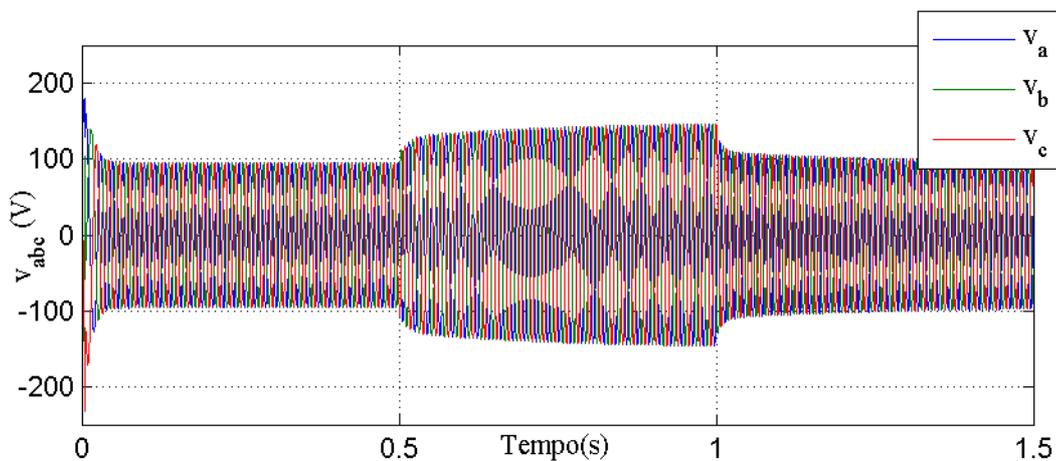


Figura 4.24. Tensões Trifásicas com uma ação *Anti-Windup* sendo conectada uma Carga.

A seguinte Figura 4.25 mostra as correntes trifásicas com carga utilizando de uma ação *Anti-Windup* contra a saturação da ação de controle.

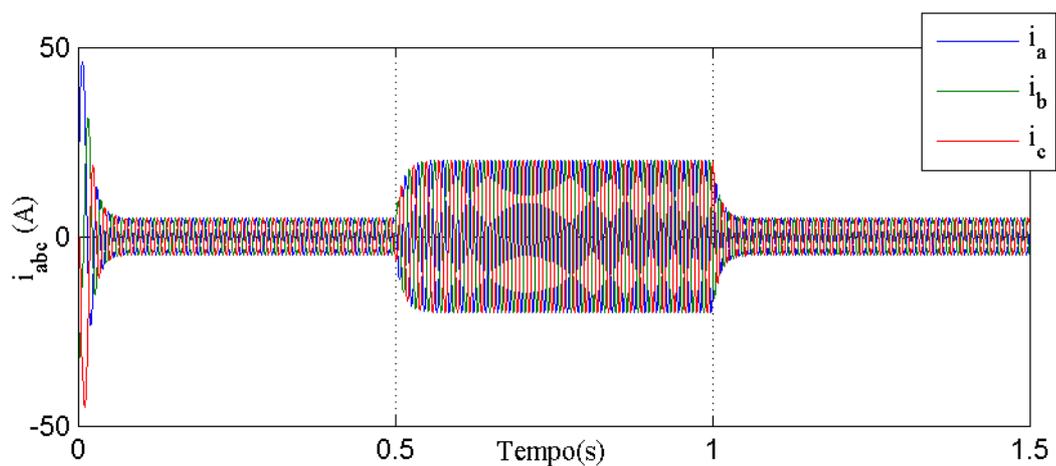


Figura 4.25. Correntes Trifásicas com uma ação *Anti-Windup* sendo conectada uma Carga.

Observando as Figuras 4.24 e 4.25, pode-se visualizar a diferença para as Figuras 4.20 e 4.21, onde seus transitórios iniciais das formas de ondas eram mais elevados devido à saturação dos controladores projetados.

A Figura 4.26 demonstra como fica a velocidade do rotor com ação *Anti-Windup* sendo inserido uma carga.

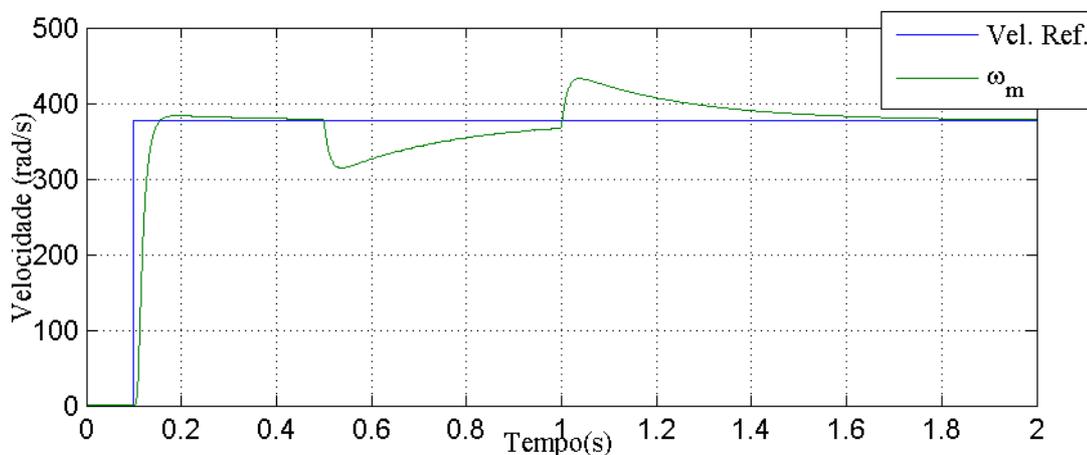


Figura 4.26. Velocidade de Referência e a Velocidade do Rotor com a ação *Anti-Windup* inserindo uma Carga.

Com esta ação, pode-se visualizar que a velocidade do rotor com inserção de carga converge para a velocidade de referência, apresentando uma resposta semelhante mostrada na Figura 4.23 sem a ação *Anti-Windup*.

4.5 Conclusão deste capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as transformações de referenciais. Destacando que para as máquinas *Brushless* DC as transformações de uma máquina trifásica para $\alpha\beta 0$ e a transformada de Park não são bem definidas, tendo que utilizar uma extensão da transformada de Park para este tipo de máquina. Ainda neste capítulo foram demonstradas estas transformações obtidas em um sistema de controle de velocidade da máquina e sua implementação utilizada.

Com o sistema de controle vetorial de velocidade, tornou-se possível demonstrar o motivo do elevado ganho utilizado para multiplicar a velocidade natural de resposta do sistema para o controlador de velocidade projetado. Com isto foi inserido uma carga na máquina sendo demonstrada a sua variação nas formas de onda das tensões trifásicas, das correntes, torque eletromagnético e da velocidade do rotor. Como para alguns resultados obtidos nas simulações era visível a saturação dos controladores projetados, pela razão de apresentarem os transitórios iniciais muito elevado, então para solucionar este problema foi utilizado uma técnica contra esta saturação chamada de *Anti-Windup*, obtendo um resultado adequado após a im-

plementação desta técnica. As transformações utilizadas no sistema de controle vetorial de velocidade foram satisfatórias, podendo ser visível o controlador de velocidade atuando para determinada velocidade do sistema.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de conclusão de curso apresentou um sistema de controle vetorial de velocidade para a máquina *Brushless* DC. Para se obter este sistema de controle foram apresentadas as características da máquina e seu modelo matemático, sendo possível alcançar as formas de onda das tensões, correntes, das Forças Contra-Eletromotrizes, variação do torque de carga e a variação angular do rotor, comprovando a teoria proposta. Após isto foram apresentados os tipos de controladores mais usuais e como obter a função de transferência desta máquina, assim podendo projetar os controladores PI da malha de controle. Para determinar os valores dos ganhos PI da malha de corrente e da malha de controle da velocidade, foram utilizadas relações dos parâmetros da máquina para ter o valor da velocidade natural de resposta para cada controlador, juntamente com sua resposta em Degrau unitário, em frequência e a localidade de suas raízes, assim obtendo uma resposta estável para os controladores projetados. E por fim foram apresentadas as transformadas de referenciais utilizadas na implementação do sistema de controle vetorial de velocidade para a máquina, sendo demonstrado com simulações. Com a implementação deste sistema de controle foi possível visualizar a saturação dos controladores projetados, então para solucionar este problema foi utilizada uma técnica chamada de *Anti-Windup*, resolvendo o problema de saturação.

Para cada tópico destes mencionados, foram apresentados resultados através de simulações efetuadas no software Matlab/Simulink. Estes resultados foram comprovados pelas teorias propostas, assim podendo utilizar este sistema de controle vetorial de velocidade implementado para a máquina *Brushless* DC em prática.

Com os estudos realizados sobre a máquina *Brushless* DC, verifica-se que para trabalhos futuros ainda pode-se obter um sistema de controle de velocidade *sensorless* para esta máquina, sendo um dos controles que vem ganhando uma maior atenção e também alguns controladores robustos como *Sliding mode* ou até mesmo controladores adaptativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARULMOZHIAL, R. ; KANDIBAN, R. Design of Fuzzy PID Controller for Brushless DC Motor. IEEE 2012.
- ASTROM, K.J.; HAGGLUND, T. Discrete PID controller, 1995.
- BOSE, B.K. Modern Power Electronics And AC Drives. Prentice Hall ,2002.
- BARATIERI, C.L. Controle de Velocidade Sensorless de Motores Brushless DC Submetidos a Variações Periódicas de Carga. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2011.
- BARBI, I. A transformação de park e a máquina simétrica. <<http://www.ivobarbi.com>>. Acesso em: 13 jan. 2013.
- BARBI, I. Estudo da Transformação $\alpha\beta 0$. <<http://www.ivobarbi.com>>. Acesso em: 13 jan. 2013.
- BOJORGE, N. Diagrama de Bode. Departamento de Engenharia Química e de Petróleo-UFF, <www.professores.uff.br/controldeprocessos-eq/images/stories/Control_Aula22_Exercicios_Diagrama_de_Bode.pdf>. Acesso em: 9 fev. 2013.
- CAI, C. Modeling and Simulation of BLDC motor in Electric Power Steering. Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference, IEEE, 2010.
- CARUSO, J., M. Controle de Velocidade de um MIT Tractionando um Veículo Elétrico. Dissertação de Obtenção de Grau em Engenharia Mecânica, Universidade de Taubaté, 2007.
- CHIASSON, J. Modeling and High-Performance Control of Electric Machine,IEEE, 2005
- DARYABEIGI, E. et al., Speed Control of Brushless DC Motors Using Emotional Intelligent Controller. IEEE, 2010.
- ELNADY, A.; LIU, Y.F. A Simple and Effective Speed Control Strategy for the Brushless DC Motor. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 2007.
- GRILO, N.,A. Concepção e Caracterização de um Motor de Indução para Integração num Veículo Elétrico Comercial, Dissertação de Obtenção de Grau em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores. Universidade Técnica de Lisboa, 2010.
- GRENIER, D.; LOUIS, J.P. Modeling for control of non-sinewave permanent-magnet synchronous drives by extending Park's transformation. , IEEE, 1995.
- GRENIER, D.; LOUIS, J.P. Use of an Extension of the Park's Transformation to determine Control Laws Applied to a Non-Sinusoidal Permanent Magnet Synchronous Motor. IEEE, pp.32-37, 1993.

- HAFFNER, J.F. Implementação de Controladores PID. Projetos de Sistemas de Controle, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Elétrica, 2009.
- KIM, G. et al. Study on maximum torque generation for sensorless controlled brushless DC motor with trapezoidal back EMF. IEEE, 2005.
- KRAUSE, P.C.; WASYNCZUK, O.; SUDHOFF, S.D. Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, IEEE, 2002.
- KRISHNAN, R. Electric Motor Drives - Modeling, Analysis and Control, Ed. Prentice Hall, 2001.
- LEE, D.; AHN, J. A Wide Range Speed Control Method of Compact High Speed BLDCM using PLL Approach. IEEE, 2001.
- LEE, D.; AHN, J. A Wide Range Speed Control Method of Compact High Speed BLDCM using PLL Approach. IEEE, 2008.
- LU, J.; LIANG, D.; FENG, X. Simulation of Linear Brushless DC Motor Speed-controlled System Based on MATLAB/SULINK. IEEE, pp.696-698, 2005.
- MATSUI, N.. Brushless DC Motor Control without Position and Speed Sensors. *IEEE*, 1992
- MICHELS, L. et al., Técnicas anti-windup para controladores repetitivos empregados em inversores pwm. Grupo de Eletrônica de Potência e Controle - Universidade Federal de Santa Maria Núcleo de Processamento de Energia Elétrica - Universidade do Estado de Santa Catarina, 2010.
- MOURA, R.L. O uso de Microcontroladores no Acionamento e Controle de Motores Brushless DC. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2010.
- NISE, N.S. Engenharia de Sistemas de Controle. , 5ª Edição, Editora LTC, 2009.
- OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, 4º Edição, Editora ABDR, 2003.
- PAULISTA, U., Sistemas de Controle e Servomecanismos, Ações de Controle e Tipos de Controladores P,I,D. Universidade Paulista, Campus Araraquara, 2003..
- PATENÉ, E.J. Implementação de Controle de Velocidade em Malha Fechada para Motores de Corrente Contínua utilizando Sistema de Aquisição de Dados. Mauá: Escola de Engenharia de Mauá do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia, 2008.
- PEREIRA, L.F.A.; HAFFNER, J.F. Controladores do tipo Proporcional, Integral e Diferencial. Porto Alegre: Projeto de Sistemas de Controle Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, pp.1-15, 2008.
- RAMOS, T., M., S. Sistema de Tração de um Veículo Elétrico de Competição. Dissertação de Obtenção de Grau em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2011.

- SRIDOKBUAP, W. I-PD and PD controllers designed by CRA for overhead crane system. International Conference on Control, Automation and Systems, 2007.
- SANTOS, A. de O. Desenvolvimento do Time de Futebol de Robôs da categoria Small Size da Fei - ROBOFEI. São Bernardo do Campo: Centro Universitário da *FEI*, 2007.
- SILVA, J.M.G., Wind-up da ação integral. Available <www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node31.html> Acesso em: 9 fev. 2013.
- SILVEIRA, H.B.; COUTINHO, D., Efeitos de Pólos e Zeros na Dinâmica. <www.das.ufsc.br/~coutinho/DAS5317/Lab2ble> Acesso em: 9 fev. 2013.
- SINGH, B. P.; SWAMY, C.L. Analysis and development of a low-cost permanent magnet brushless DC motor drive for PV-array fed water pumping system. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 1998.
- SU, G. J.; MCKEEVER, J.W. Low Cost Sensorless Control of Brushless DC Motors with Improved Speed Range. *IEEE*, pp.286-292, 2002.
- TRINDADE, R.H. Estudo de Máquinas Elétricas não-convencionais: Motor Brushless DC. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009.
- VIEIRA, R.P. Servocontrole de velocidade aplicado a motores de indução monofásicos sem sensores mecânicos. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2008.
- XIN, X. A new method of brushless DC motor control system simulation. *IEEE*, 2011.
- XIAOBO, Y.; XIAO, L.; YONG, G. Sensor-less Brushless DC Motor Control System Design for Electric Vehicle. *IEEE*, 2011.
- YEDAMALE, P. T.M. Brushless DC (BLDC) Motor Fundamentals. Microchip Technology, pp.1-20, 2003.
- YEO, H. Sensorless Drive for Interior Permanent Magnet Brushless DC motors. *IEEE*, 1997.
- ZHU, Z.Q.; HOWE, D., Electrical Machines and Drives for Electric, Hybrid, and Fuel Cell Vehicles. *Proceedings of the IEEE*, 2007.