

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

Jefferson Oliveira dos Santos

**Metaheurísticas Bio-Inspiradas Aplicadas
em Problemas de Despacho Econômico de Carga**

Alegrete, RS
Agosto de 2020

Jefferson Oliveira dos Santos

**Metaheurísticas Bio-Inspiradas Aplicadas
em Problemas de Despacho Econômico de Carga**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Machado dos Santos

Alegrete, RS
Agosto de 2020

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S45m Santos, Jefferson Oliveira dos
Metaheurísticas Bio-Inspiradas Aplicadas em Problemas de
Despacho Econômico de Carga / Jefferson Oliveira dos Santos.
97 p.

Dissertação(Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa,
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, 2020.

"Orientação: Eduardo Machado dos santos".

1. Despacho Econômico de Carga. 2. Otimização por Enxame de
Partículas. 3. Algoritmo dos Vaga-Lumes. 4. Algoritmo Busca do
Cuco. 5. Otimização do Lobo Cinzento. I. Título.

JEFFERSON OLIVEIRA DOS SANTOS

METAHEURÍSTICAS BIO INSPIRADAS APLICADAS EM PROBLEMAS
DE DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

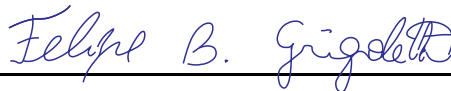
Área de concentração: Sistemas de Energia.

Dissertação defendida e aprovada em 14 de Agosto de 2020.

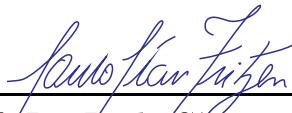
Banca examinadora:



Prof. Dr. Eduardo Machado dos Santos
Orientador
UNIPAMPA



Prof. Dr. Felipe Bovolini Grigoletto
Coorientador
UNIPAMPA



Prof. Dr. Paulo Cícero Fritzen
UTFPR



Prof. Dr. Chrystian Dalfa Lana da Silva
UNIPAMPA

Este trabalho é dedicado aos meus irmãos Aline, Thaís e João Pedro,
ao meu pai Enock por ser uma constante fonte de inspiração
e resiliência. Em memória, a minha mãe Luiza.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me concedido a vida e meios para romper as inúmeras barreiras de dificuldades e galgar os degraus da imensa escada para a conclusão desse curso. Meus agradecimentos aos muitos amigos que fiz em Alegrete-RS, em especial os amigos da Igreja Adventista do Sétimo Dia de Alegrete-RS, pelo carinho e preocupação. Todos vocês foram importantíssimos para a realização desse sonho! Agradeço aos amigos do Rio de Janeiro, que mesmo de longe, dispensaram-me apoio e incentivo para a conclusão desse trabalho. Agradeço aos meus colegas de curso pelo companheirismo. Minha gratidão à Universidade, às Coordenações Acadêmica e Administrativa, ao corpo docente, em especial, ao Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto por ter acreditado na proposta inicial desse trabalho, e aos professores Eduardo dos Santos e Felipe Grigoletto pelo acompanhamento e dedicada orientação na conclusão deste trabalho. A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha caminhada e me ajudaram a completar esse desafio, o meu muito obrigado!

*"Muitas das falhas da vida ocorrem quando
não percebemos o quão próximos estávamos
do sucesso na hora em que desistimos".
(Thomas Edison)*

RESUMO

O crescente consumo de energia elétrica está formando um mercado consumidor altamente competitivo e vibrante, alterando muitos aspectos no que tange à geração, transmissão e distribuição da energia elétrica. A busca por recursos energéticos suficientes para atender a demanda de carga, o alto custo da geração de energia elétrica e a crescente preocupação em mitigar os impactos ambientais, influenciam diretamente no despacho econômico de carga (DE), o qual é indispensável para que as unidades geradoras de energia elétrica atinjam o custo mínimo ideal de operação. O problema de DE, primeiramente, consiste em minimizar o custo da geração de energia elétrica e operação das unidades geradoras, atendendo à demanda total da carga e às restrições inerentes ao sistema, portanto, configurando um problema de otimização. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é resolver quatro problemas de DE considerando sistemas de geração com três, seis, quinze e vinte unidades termoelétricas. Em todos os casos, são consideradas as perdas nas linhas de transmissão e os limites máximos e mínimos de geração para cada unidade geradora. Para tal, foram utilizadas as heurísticas: otimização por enxame de partículas (PSO), algoritmo dos vaga-lumes (FA), algoritmo busca do cuco (CS) e otimização do lobo cinzento (GWO). Todos os métodos apresentaram resultados de custo total e perdas nas linhas de transmissão compatíveis com aqueles encontrados na literatura. Os resultados obtidos também foram comparados com a solução alcançada via método dos multiplicadores de Lagrange (MML). Sendo assim, o CS se destacou pelas ótimas soluções de custo total obtidas e um baixo índice de desvio padrão, boa convergência e eficiência em determinar a solução exata ou bem próxima daquela verificada através do MML. Já para o sistema com vinte máquinas, a solução obtida pelo GWO foi melhor do que as alcançadas via PSO, FA e CS. Essa solução, quando comparada com aquelas encontradas na literatura especializada, também é melhor. O GWO não obteve o custo mínimo em nenhum dos casos analisados, porém, obteve soluções bem próximas do ótimo, com custo computacional relativamente baixo, em relação aos demais métodos analisados. O PSO apresentou custo mínimo ou próximo do ótimo na maioria dos casos, com custo computacional relativamente alto. O FA apresentou soluções perto do ótimo e baixo custo computacional. Já o CS apresentou elevado custo computacional, porém, obteve ótimas soluções. Assim, foi possível concluir que os métodos CS e GWO desempenharam melhor a tarefa de otimização do despacho econômico de carga para os problemas analisados.

Palavras-chave: Despacho Econômico de Carga. Otimização por Enxame de Partículas. Algoritmo dos Vaga-Lumes. Algoritmo Busca do Cuco. Otimização do Lobo Cinzento. Método dos Multiplicadores de Lagrange.

ABSTRACT

The growing consumption of electricity is forming a highly competitive and vibrant consumer market, changing many aspects of electricity generation, transmission and distribution. The search for sufficient energy resources to meet the load demand, the high cost of electricity generation and the growing concern to mitigate environmental impacts, directly influence the economic load dispatch (ED), which is essential for the generating units of electricity reach the optimal minimum cost of operation. The problem of ED, firstly, is to minimize the cost of generating electricity and operating the generating units, meeting the total load demand and the inherent restrictions of the system, thus configuring an optimization problem. In this context, the objective of this paper is to solve four problems ED considering generation systems with three, six, fifteen and twenty thermoelectric units. In all cases, transmission line losses and maximum and minimum generation limits for each generating unit are considered. For this, heuristics were used: particle swarm optimization (PSO), firefly algorithm (FA), cuckoo search algorithm (CS) and gray wolf optimization (GWO). All methods showed total cost and transmission line losses compatible with those found in the literature. The results obtained were also compared with the solution achieved by the Lagrange Multiplier Method (LMM). Thus, the CS stood out for the excellent total cost solutions obtained and a low standard deviation index, good convergence and efficiency in determining the exact solution or very close that verified through the LMM. For the system with twenty machines, the solution obtained by GWO was better than the achieved by PSO, FA and CS. This solution, when compared to those found in the specialized literature, is also better. The GWO did not obtain the minimum cost in any of the analyzed cases, however, it obtained very close to the optimal solutions, with relatively low computational cost, in relation to the other analyzed methods. The PSO presented minimum or near optimal cost in most cases, with relatively high computational cost. The FA presented solutions close to the optimal and low computational cost. The CS presented high computational cost, however, obtained excellent solutions. Thus, it was possible to conclude that the CS methods and GWO performed better the task of optimizing the economical load dispatch for the analyzed problems.

Key-words: Economic Dispatch of Load. Particle Swarm Optimization. Firefly Algorithm. Cuckoo Search Algorithm. Gray Wolf Optimization. Lagrange Multipliers Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Função Custo Quadrático e Limites de Geração.	29
Figura 2 – Função custo com efeito de ponto de válvula.	30
Figura 3 – Níveis de geração: (a) constante; (b) crescente e (c) decrescente.	31
Figura 4 – Função custo descontínua devido as zonas proibidas.	32
Figura 5 – Intervalo Côncavo e Convexo de $f(x) = x^3 - 3x$	35
Figura 6 – Nova posição da partícula i associada aos parâmetros cognitivo e social.	39
Figura 7 – Comportamento hierárquico social dos lobos cinzentos.	45
Figura 8 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 1.	56
Figura 9 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 2.	62
Figura 10 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 3.	68
Figura 11 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 4.	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes de custo - caso 1.	52
Tabela 2 – Limites de geração - caso 1.	52
Tabela 3 – Solução via MML - caso 1	54
Tabela 4 – Comparativo das soluções heurísticas - caso 1.	55
Tabela 5 – Custo computacional - caso 1.	56
Tabela 6 – Comparação das heurísticas com o MML - caso 1.	57
Tabela 7 – Coeficientes de custo e capacidade de geração - caso 2.	58
Tabela 8 – Solução via MML - caso 2	59
Tabela 9 – Soluções heurísticas - caso 2.	60
Tabela 10 – Custo computacional - caso 2.	61
Tabela 11 – Comparação das heurísticas com o MML - caso 2.	62
Tabela 12 – Coeficientes de custos e limites de geração - caso 3.	63
Tabela 13 – Solução via MML - caso 3	66
Tabela 14 – Comparativo das soluções heurísticas - caso 3.	67
Tabela 15 – Custo computacional - caso 3.	67
Tabela 16 – Comparativo das heurísticas com o MML - caso 3	68
Tabela 17 – Coeficientes de custos e limites de geração - caso 4.	70
Tabela 18 – Comparativo das soluções heurísticas - caso 4.	72
Tabela 19 – Custo computacional - caso 4.	73
Tabela 20 – Comparativo das heurísticas com a literatura - caso 4	74
Tabela 21 – Despacho econômico com 3 unidades.	91
Tabela 22 – Despacho econômico com 6 unidades.	93
Tabela 23 – Despacho econômico com 15 unidades.	95
Tabela 24 – Despacho econômico com 20 unidades.	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Considerações Gerais	21
1.2	Motivação	21
1.3	Trabalhos Relacionados	21
1.4	Objetivo do Trabalho	24
1.5	Organização do Trabalho	25
2	DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA	27
2.1	Considerações gerais	27
2.2	Despacho econômico de carga clássico	27
2.3	Restrições	28
2.4	Considerações finais	32
3	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO IMPLEMENTADOS	33
3.1	Considerações gerais	33
3.2	Método dos Multiplicadores de Lagrange	33
3.3	Otimização por Enxame de Partículas	38
3.4	Algoritmo dos Vaga-lumes	40
3.5	Algoritmo Busca do Cuco	42
3.6	Otimização do Lobo Cinzento	45
3.7	Considerações finais	48
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
4.1	Considerações gerais	51
4.2	Caso 1: sistema com três unidades geradoras	52
4.2.1	Solução segundo o MML - caso 1	53
4.2.2	Soluções heurísticas - caso 1	55
4.2.3	Comparação dos resultados - caso 1	57
4.3	Caso 2: sistema com seis unidades geradoras	57
4.3.1	Solução segundo o MML - caso 2	58
4.3.2	Soluções heurísticas - caso 2	60
4.3.3	Comparação dos resultados - caso 2	61
4.4	Caso 3: sistema com quinze unidades geradoras	62
4.4.1	Solução segundo o MML - caso 3	64
4.4.2	Soluções heurísticas - caso 3	65
4.4.3	Comparação dos resultados - caso 3	67
4.5	Caso 4: sistema com vinte unidades geradoras	69
4.5.1	Soluções heurísticas - caso 4	71

4.5.2	Comparação dos resultados - caso 4	73
4.6	Considerações finais	74
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	77
5.1	Conclusões	77
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	79
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICES	89
	APÊNDICE A – RESULTADOS DO CASO 1	91
	APÊNDICE B – RESULTADOS DO CASO 2	93
	APÊNDICE C – RESULTADOS DO CASO 3	95
	APÊNDICE D – RESULTADOS DO CASO 4	97

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Gerais

O Despacho Econômico de Carga (DE) é considerado uma das mais importantes ferramentas na operação de sistemas elétricos de potência. Simplificando, a função custo das unidades geradoras de energia pode ser aproximada por uma função quadrática, o que permite formular o despacho econômico de carga como um problema de otimização com restrições. O objetivo principal no DE é minimizar os custos totais de geração de energia elétrica, visando atender as restrições inerentes ao sistema. Algumas dessas restrições operacionais podem impactar de forma relevante na função custo e devem ser consideradas (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008).

1.2 Motivação

Muitos problemas de otimização na engenharia, como por exemplo o próprio DE, devido a sua não-linearidade e ao complexo tratamento matemático, têm levado a busca de outras alternativas que possibilitem determinar sua solução. O problema do DE se resume em atender a demanda de carga consumidora ao menor custo de geração possível. A solução para este problema é de grande interesse do setor de engenharia elétrica e, apesar de diversos métodos terem sido utilizados para resolvê-lo, as abordagens convencionais podem não ser o melhor caminho para a solução, principalmente, nos casos onde a função objetivo apresenta descontinuidades, não-diferenciabilidade ou a ocorrência de muitos mínimos locais. Para contornar essas características, variadas técnicas heurísticas de otimização têm sido propostas, entre as quais destacam-se a Otimização por Enxame de Partículas (PSO), o Algoritmo dos Vaga-lumes (FA), o Algoritmo Busca do Cuco (CS), o Algoritmo Genético (GA), entre outros métodos que estão sendo reconhecidos como mecanismos de otimização bastante eficientes para solucionar tal tipo de problema (MAHOR; PRASAD; RANGNEKAR, 2009).

1.3 Trabalhos Relacionados

Nos últimos tempos, algoritmos bio-inspirados baseados em populações e metaheurísticas, vêm sendo usados para resolver problemas de otimização para os quais soluções robustas são difíceis, quando não impossíveis de encontrar usando abordagens tradicionais como a programação matemática. Tais algoritmos são conhecidos como algoritmos de computação evolutiva, destacando-se, principalmente, os algoritmos evolutivos e os algoritmos de enxames.

Os Algoritmos Evolutivos (AE) tradicionalmente incluem os Algoritmos Genéticos (AGs), conforme Goldberg (1989), bem como a Programação Evolutiva (PE) e as

Estratégias Evolutivas (EE), segundo o trabalho de Jong (2006). Ainda, dentro desta classificação, encaixam-se a Programação Genética (PG), os Algoritmos de Estimação de Distribuição (AED) e os Algoritmos Genéticos Competentes (AGC), respectivamente, conforme Koza, Keane e Streeter (), Pelikan, Sastry e Cantú-Paz (2006) e Goldberg (2002).

Os estudos em AE estão sendo aprofundados e amplamente aplicados para resolver diversos problemas multidisciplinares, tais como projeto de robô (TINÓS, 2007), despacho econômico de Carga (COELHO; MARIANI, 2006) e problemas de identificação de dobra de proteína (GABRIEL; MELO; DELBEM, 2012), entre outros. Através destes algoritmos, muitas pesquisas foram bem sucedidas em suas aplicações devido à sua simplicidade, robustez e flexibilidade.

Os Algoritmos de Enxame que se destacaram reconhecidamente mais promissoras são: a otimização por colônia de formigas, ACO, do inglês *Ant Colony Optimization* (DORIGO; MANIEZZO; COLORNI, 1991); a otimização por enxame de partículas, PSO, do inglês *Particle Swarm Optimization* (KENNEDY,); algoritmo do salto do sapo embaralhado, SFL, do inglês *Shuffled Frog-Leaping* (EUSUFF; LANSEY, 2003); o algoritmos da colônia de abelhas artificiais, ABC, do inglês *Artificial Bee Colony* (TEODOROVIC; DELL'ORCO, 2005); o algoritmo busca do cuco, CS, do inglês *Cuckoo Search* (YANG; DEB, 2009); o algoritmo dos vaga-lumes, FA, do inglês *Firefly Algorithm* (YANG, 2009); o algoritmo de otimização do lobo cinzento, GWO, do inglês *Grey Wolf Optimization* (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014); e o algoritmo de coleta de alimentos por bactérias, BFO, do inglês *Bacterial Foraging Optimization* (PASSINO, 2000).

O processo de extrair ideias da natureza para desenvolver sistemas computacionais, como ocorre com os algoritmos de enxames, é denominado Computação Natural. Esse ramo da abordagem computacional pode ser encontrado em Castro (2006), que fornece uma ampla visão dos conceitos, algoritmos e aplicações da computação natural.

Este trabalho em sua condução, utilizou os algoritmos de enxames, especialmente a otimização por enxame de partículas, o algoritmo dos vaga-lumes, algoritmo busca do cuco e o algoritmo otimização do lobo cinzento. A seguir, é apresentada uma revisão dos trabalhos que utilizaram essas metaheurísticas bio-inspiradas para solucionar diversos tipos de problemas, inclusive o despacho econômico de carga.

O PSO foi apresentado por James Kennedy e Russell Elberhart (KENNEDY,), que buscavam soluções de problemas no domínio contínuo. Através de experiências realizadas com algoritmos de modelagem social, os quais simulam o comportamento social observado em variadas espécies de pássaros e cardumes de peixes, bem como o comportamento social dos seres humanos, originou-se o PSO.

Aplicações do PSO têm sido amplamente investigadas na literatura. Ele tem sido empregado para a melhoria do desempenho de outros algoritmos de otimização, tais como redes neurais (BASHIR; EL-HAWARY, 2009), sistemas nebulosos (JUANG; WANG,

2009), algoritmos genéticos (RU; JIANHUA, 2008), clusterização (Pei; Hua; Han, 2008), evolução diferencial (WICKRAMASINGHE; LI, 2008), entre outros.

Outra vertente do uso do PSO é na resolução de problemas em engenharia, onde encontra-se uma ampla gama de aplicações, tais como: sintonização de controlador Proporcional Integral Derivativo - PID (GAING, 2004), otimização do controle de potência reativa e tensão (ABIDO, 2002), detecção de falhas (TEBALDI; COELHO; JUNIOR, 2006), projeto de antenas (WYSOTA; JAGODZINSKA; WALKOWIAK, 2008), otimização de redes de energia elétrica (MO et al., 2007), despacho econômico de carga (WANG; SINGH, 2009), dentre muitas outras aplicações.

Em Yang (2009), encontra-se um estudo comparativo do desempenho do FA com o PSO e outros algoritmos relevantes, onde o autor utiliza diversas funções testes para a obtenção de mínimos. A otimização utilizando FA parece mais promissora do que a otimização por enxame de partículas, no sentido de que o FA pode lidar com funções multimodais de forma mais eficiente.

Os autores Yang, Hosseini e Gandomi (2012) apresentam um vasto estudo utilizando o FA. O algoritmo é aplicado na resolução do problema do despacho econômico em quatro sistemas testes, sendo estes com três, treze, quinze e quarenta unidades de geração. Em tal aplicação, foram consideradas as restrições e características não-lineares dos geradores, tais como limitações de geração, zonas de operação proibidas, limites de rampa, perdas e funções de custo não lineares, o que representam restrições operacionais comuns em situações reais.

O FA é utilizado também por Serapião (2013), onde neste trabalho, o FA é aplicado na resolução de problemas de DE em dois sistemas teste. Uma comparação dos resultados de simulação obtidos usando o FA é realizada com outros algoritmos de enxame, inclusive com o PSO e o CS. A eficácia de cada algoritmo é demonstrada em sistemas de teste com três e seis geradores.

O CS é também avaliado no trabalho realizado por Yang e Deb (2009), o qual é aplicado na resolução de diversas funções testes de otimização. Os autores realizam uma comparação dos resultados obtidos usando o CS com aqueles conseguidos via PSO e GA. A eficiência do CS é confirmada em funções multimodais e se revela um algoritmo bastante promissor para a resolução de variados problemas de otimização. Os mesmos autores também realizaram um estudo comparativo, utilizando algumas funções de teste estocásticas, o qual foi apresentado por Yang e Deb (2010). Em tal trabalho, o CS foi aplicado para resolver problemas de otimização de projetos de engenharia, incluindo o projeto de molas e estruturas de vigas soldadas, onde as soluções ótimas obtidas pelo CS são muito melhores do que aquelas encontradas com o PSO e o GA.

Ressalta-se ainda que, em Oliveira et al. (2015), o PSO foi novamente aplicado em problemas de Despacho Econômico de Carga considerando os efeitos de ponto de válvula e múltiplos combustíveis, onde a função custo é não convexa.

Já, em Kapelinski et al. (2018), é apresentada uma variação do método FA em comparação com sua forma original, para solucionar um problema de Despacho Econômico de Carga, envolvendo restrições de zonas de operação proibida e limites de rampa.

Uma ampla revisão sobre o CS é apresentada por Shehab, Khader e Al-Betar (2017) que, em um vasto trabalho de pesquisa, discutem acerca do CS estabelecido por Yang e Deb (2009), bem como sobre suas principais variantes e versões modificadas, com conclusões sólidas sobre as atuais aplicações desses métodos, como, por exemplo, em estudos de otimização aplicados em medicina, mineração de dados e engenharia, incluindo o despacho econômico de carga.

Além disso, o algoritmo do lobo cinzento apresentado por Mirjalili, Mirjalili e Lewis (2014), foi testado para a otimização de vinte e nove funções teste clássicas, unimodais e multimodais, apresentando bom desempenho quando comparado aos resultados obtidos por outros métodos de otimização, incluindo o PSO, para as mesmas funções teste. Dessa forma, tendo sua robustez confirmada, os autores afirmam que o GWO pode ser aplicado em problemas clássicos de otimização em engenharia, como no projeto de molas de tensão/compressão, entre outros.

Sendo assim, em Pradhan, Roy e Pal (2016), o algoritmo GWO é utilizado no despacho econômico de sistemas testes com dez, quarenta, oitenta e até cento e quarenta unidades termoeletricas, utilizando diferentes restrições. Os resultados confirmam o potencial e a eficácia do algoritmo em comparação com vários outros métodos disponíveis na literatura, entre eles PSO e GA. Já no trabalho de Sharma, Mehta e Chopra (2015), o despacho econômico de dois sistemas com diferentes restrições e demandas de carga é solucionado utilizando o algoritmo GWO, tendo seus resultados comparados com outras técnicas de otimização, entre elas o CS.

Por fim, destaca-se que as metaheurísticas bio inspiradas são objeto de estudo em diversas áreas do conhecimento, principalmente, por apresentarem uma vasta gama de possibilidades na resolução de diversos problemas de otimização. Revisões mais completas sobre o PSO, o FA, o CS, o GWO e outros métodos de otimização baseados em enxames, podem ser encontradas em Rao (2009), Yang (2010a), Yang (2010b) e Mirjalili, Mirjalili e Lewis (2014), respectivamente.

1.4 Objetivo do Trabalho

Este trabalho tem por objetivo geral solucionar o problema de DE utilizando o MML e as heurísticas PSO, FA, CS e GWO com critério de parada, comparando as soluções e a aplicação desses métodos para resolver o DE. Como objetivos específicos, citam-se:

- Estudar e implementar o MML e as heurísticas PSO, FA, CS e GWO com critério de parada para solucionar o problema de DE;

- Realizar simulações computacionais de DE, considerando quatro sistemas termoeletricos, sendo um com três, um com seis, um com quinze e outro com vinte unidades de geração;
- Analisar e concluir acerca dos resultados obtidos, comparando e validando as soluções.

1.5 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, é apresentado o problema de despacho econômico em sua forma geral e algumas das principais restrições consideradas em um modelo real de DE.

No Capítulo 3, são apresentados os métodos de otimização utilizados para solucionar os problemas de DE.

No Capítulo 4, são apresentados os estudos de caso, utilizando o PSO, FA, CS e GWO com a implementação de um critério de parada. Os resultados obtidos são analisados, discutidos e comparados com a literatura e com aqueles conseguidos a partir do Método convencional dos Multiplicadores de Lagrange.

Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras.

2 DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA

2.1 Considerações gerais

A disponibilidade de recursos hídricos para atender a demanda de carga unida ao alto custo da geração de energia termoeletrica, somada ainda a grande preocupação dos órgãos do meio ambiente em diminuir os impactos ambientais decorrentes da produção de energia, desempenham um papel direto no que diz respeito ao despacho econômico de carga (DE) (MAHOR; PRASAD; RANGNEKAR, 2009).

Tendo em vista esses aspectos, o DE consiste em minimizar o custo da geração de energia elétrica e da operação das unidades geradoras, de forma que possa atender a demanda total da carga, obedecendo as restrições do sistema. Cada unidade geradora possui um custo de produção próprio que depende do recurso energético empregado na geração (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2018). As fontes de energia usadas para produzir potência elétrica, como, por exemplo, o carvão, o gás natural, o óleo diesel, o urânio, a água de reservatórios, são os responsáveis por gerar diferentes custos de acordo com o cenário econômico.

2.2 Despacho econômico de carga clássico

O custo da geração em cada unidade é aproximada por uma função quadrática convexa (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2018), expressa em termos da própria potência de saída. A Equação 2.1 expressa o custo individual em cada unidade geradora, onde os coeficientes a_i , b_i e c_i representam as características do gerador i e P a potência gerada pela mesma.

$$C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (2.1)$$

Além disso, tem-se que o custo total de geração é a soma dos custos de cada unidade geradora, conforme a Equação 2.2.

$$C(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \quad (2.2)$$

A carga demandada é distribuída calculando a potência gerada em cada uma das unidades geradoras, formando um conjunto de variáveis contínuas (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2018). A potência P_i , em MW, é fornecida pela unidade geradora i e o seu custo de geração C_i , em \$/h, é dado em função da potência gerada.

No DE clássico, todas as unidades de geração contribuem para atender a carga total do sistema, representada por P_D . As perdas de transmissão, P_L , são estimadas por modelagem própria e devem ser consideradas no balanço de potência para satisfazer a carga total consumida pelo sistema (FERNANDES; NASCIMENTO; TELES, 2010).

As perdas com transmissão e distribuição aumentam a demanda de energia a ser produzida e, ao se considerar a minimização dos custos de geração, deve-se levar em conta esse aumento na produção. A potência perdida nas linhas de transmissão para atender a carga solicitada é também fornecida pelos geradores ativos. Dessa forma, as perdas devem ser consideradas como uma demanda do sistema, mesmo porque este é um fator relevante em estudos de DE reais (FERNANDES; NASCIMENTO; TELES, 2010).

Uma forma de incluir as perdas ao considerar o DE de um sistema termoeletrico é utilizando a Fórmula de Perdas de Kron (SAADAT, 1999), representada pela Equação 2.3 .

$$P_L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} P_i P_j + \sum_{i=1}^n B_{0i} P_i + B_{00} \quad (2.3)$$

Na Equação 2.3, P_i e P_j são, respectivamente, o i -ésimo e j -ésimo elemento do vetor de potência das unidades geradoras, B_{ij} é o ij -ésimo elemento da matriz de coeficientes de perda, B_{0i} é o i -ésimo elemento do vetor de coeficiente de perdas e B_{00} é a constante do coeficiente de perda.

As perdas no sistema são calculadas em função da potência gerada utilizando a matriz de coeficientes de perdas B . Essa matriz é obtida através de um estudo do fluxo de potência do sistema, no qual são obtidos os dados da potência gerada e as perdas correspondentes. Utilizando métodos de regressão não-linear, por exemplo, é possível obter as matrizes de perdas do sistema (SAADAT, 1999).

O DE com as perdas inseridas em sua modelagem, assume uma forma mais adequada quanto às condições reais do sistema e o problema de minimizar o custo total, dado pela Equação 2.2, sujeito ao balanço de potência, conforme a Equação 2.4, apresenta maior complexidade à medida que as perdas são determinadas a partir da potência gerada que não é conhecida. A dificuldade de solucionar o DE está em relacionar o vetor de potência gerada com as perdas devidas a esse vetor, o que torna esse problema não-linear.

$$\sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_n) = 0 \quad (2.4)$$

2.3 Restrições

A oferta de energia fornecida pela termoeletrica i está sujeita aos limites operacionais da mesma. Ao ser considerado o DE das usinas, algumas restrições operacionais, as quais podem impactar de forma relevante na função custo, devem ser respeitadas. Algumas dessas restrições podem ser os limites de geração, a influência dos pontos de válvula, as zonas de operação proibidas e os limites de rampa (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008).

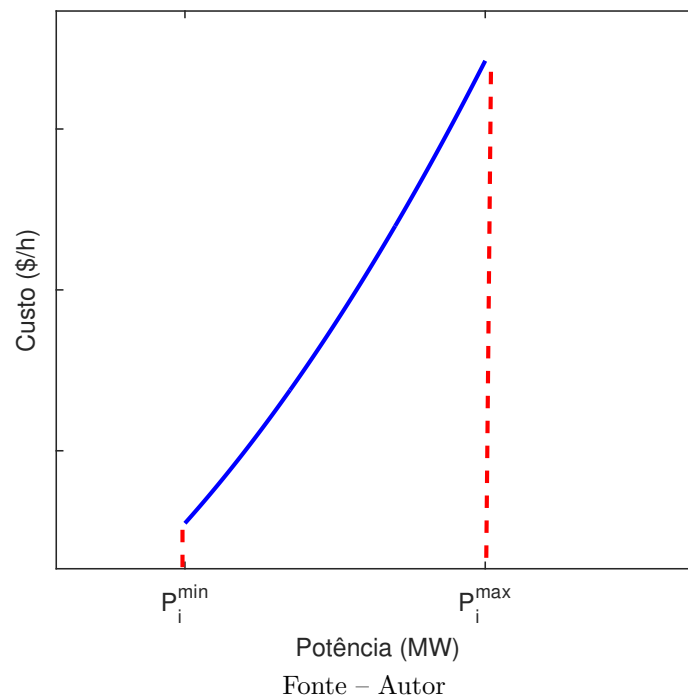
Os limites de capacidade de geração correspondem a saída mínima e máxima de potência de cada usina geradora, conforme mostra a Figura 1. As respectivas capacidades mínima e máxima são dadas conforme a Equação 2.5, que mostra as saídas de potência

mínima e máxima da unidade i acionada.

$$P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max} \quad (2.5)$$

Na Equação 2.5, P_i^{\min} e P_i^{\max} são os respectivos limites mínimo e máximo da i -ésima unidade apta para despachar a energia gerada. Para a função de custo convexa, a solução do DE com limites de operação é única e resolvida numericamente. No entanto, sua resolução analítica não é simples de ser obtida, por se tratar de combinar os geradores em seus limites operacionais (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2018).

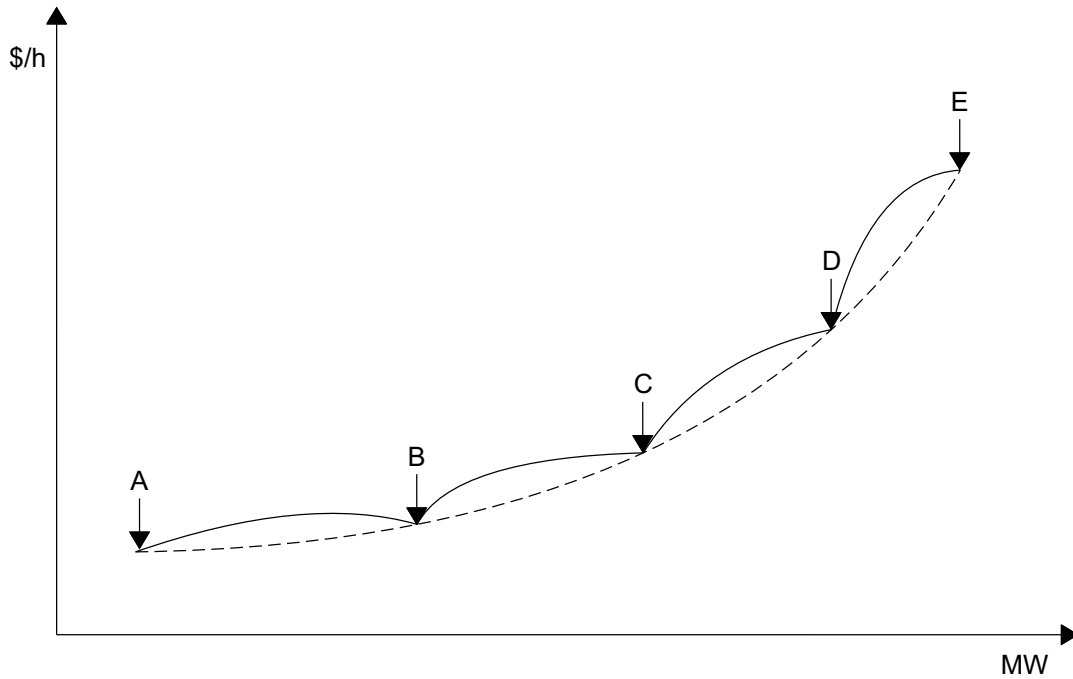
Figura 1 – Função Custo Quadrático e Limites de Geração.



Para aumentar a quantidade de potência despachada de uma usina termoeletrica em plena operação, é necessário injetar uma maior quantidade de vapor nas turbinas. Ao se abrirem válvulas para admissão de vapor nas turbinas, são produzidas ondulações na função de custo da usina em questão. Uma certa quantidade de combustível é utilizado para suprir o aumento da carga requerida ou até mesmo ocorre uma mudança de combustível para atender o nível de potência solicitado. Os pontos onde ocorre essa abertura das válvulas, os quais podem ser visualizados na Figura 2, são conhecidos como pontos de válvula (WALTERS; SHEBLE, 1993).

As saídas dos geradores possuem como características principais descontinuidades e altos índices de não linearidades, que ocorrem devido ao efeito dos pontos de válvula (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008). A função custo, em virtude dos variados pontos de válvula, pode ser modelada adicionando um termo não-linear senoidal na função custo da referente unidade de geração. Assim, a função custo modelada para o gerador com influência dos pontos de válvula é dada por (2.6).

Figura 2 – Função custo com efeito de ponto de válvula.



Fonte – Fernandes (2009)

Na Equação 2.6, α_i é igual à 1 para pontos de válvula existentes e 0 caso contrário. Os coeficientes e_i e f_i caracterizam os pontos de válvula em sua forma, mudando a amplitude e o período (WALTERS; SHEBLE, 1993).

$$C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + \alpha_i \left| e_i \sin(f_i(P_i^{min} - P_i)) \right| \quad (2.6)$$

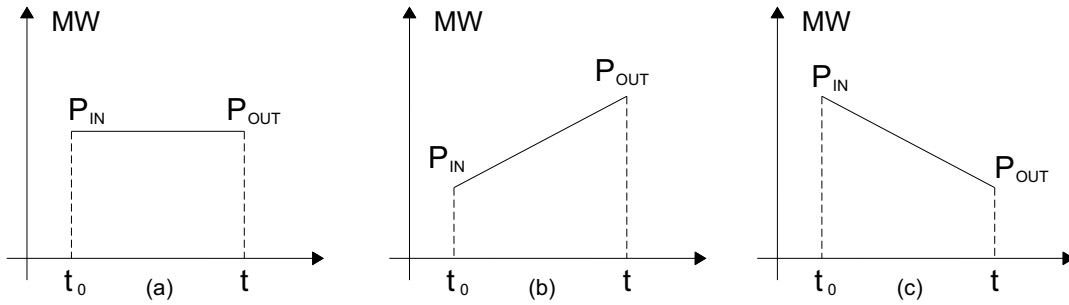
As usinas geradoras, em plena operação, nem sempre despacham o mesmo nível de potência. Em um sistema real, onde a demanda horária pode sofrer bruscas variações para mais ou para menos, alterações no nível da geração de um estado para outro não ocorrem de forma instantânea. Sob essas circunstâncias, o problema consiste em elevar ou reduzir o nível da potência produzida a partir de uma condição operacional inicial e atingir o nível ótimo de despacho em um dado espaço de tempo (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008).

As variações de potência despachada possuem seus limites mínimos e máximos em cada termoeletrica, os quais são denominados limites de rampa. Esses limites são restrições de desigualdades em um espaço de busca de soluções não convexo, elevando a complexidade para solucionar o DE (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008). A termoeletrica i em operação, que sai de um estado atual de produção no instante t_0 para um estado final no instante t , pode ter suas restrições de desigualdades para os limites de rampa conforme (2.7).

$$\max(P_i^{min}, P_i^{t_0} - DR_i) \leq P_i \leq \min(P_i^{max}, P_i^{t_0} + UR_i) \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, $P_i^{t_0}$ é a potência da usina i produzida no instante t_0 atual; P_i a potência de saída da unidade i no instante t ; UR_i e DR_i representam, respectivamente, os limites de rampa crescente e decrescente da unidade i , como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Níveis de geração: (a) constante; (b) crescente e (c) decrescente.



Fonte – Fernandes (2009)

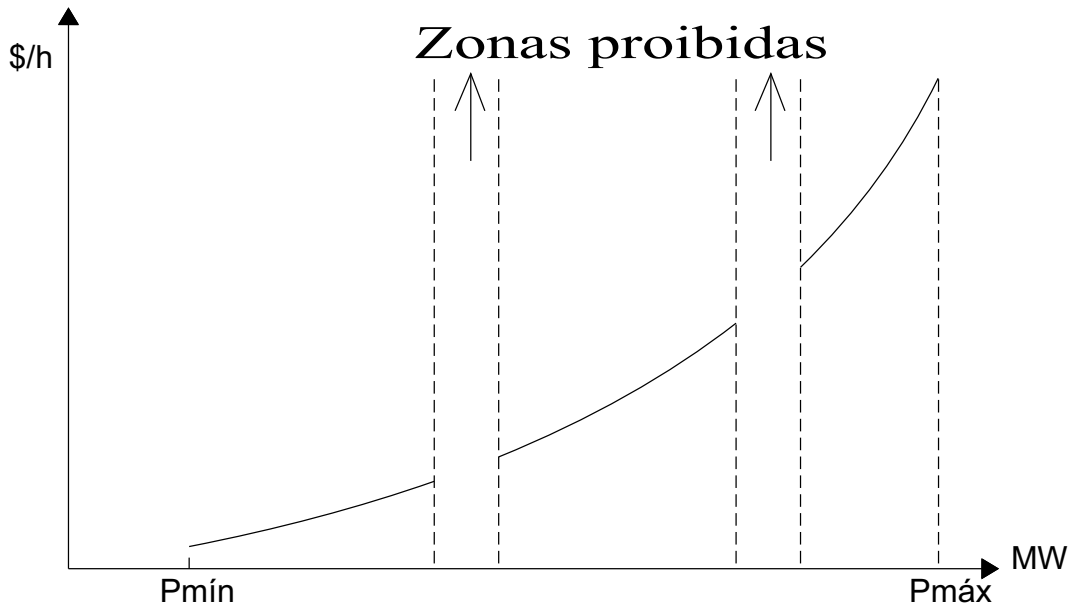
As zonas proibidas são subintervalos dentro dos limites mínimo e máximo da capacidade de geração de uma usina termoeétrica. Devido à faltas nas máquinas, às oscilações das válvulas a vapor ou, até mesmo, às características operativas dos equipamentos auxiliares e pontos de válvula não modeláveis, as zonas proibidas se tornam inoperantes do ponto de vista da geração (YALCINOZ; SHORT, 1998). Nessas zonas, nas quais o sistema pode se tornar instável, os testes que determinam a função custo, seja pelo desempenho das máquinas ou arquivos de dados registrados, são difíceis de ser aplicados. Portanto, evitar essas zonas de operação é a melhor medida para tratar esse problema (OLIVEIRA; NASCIMENTO; SAAVEDRA, 2008). A restrição de zonas de operação proibidas divide os limites de geração em variadas regiões de possível produção de energia ou não. Essa divisão torna o espaço de busca das soluções não convexo, tornando o DE um problema de difícil solução, devido a falta de linearidade e não convexidade.

De forma matemática, as zonas de operação proibidas correspondem à adição de novas restrições dentro do limite de capacidade da usina geradora. As desigualdades são adicionadas conforme a quantidade de zonas proibidas (FERNANDES, 2009). As expressões descritas em (2.8) mostram as restrições de desigualdades para zonas de operação proibidas.

$$\begin{aligned}
 P_i^{min} &\leq P_i \leq P_{i,1}^l \\
 P_{i,k-1}^u &\leq P_i \leq P_{i,k}^l \quad k = 2, 3, 4, \dots, z_i \\
 P_{i,z_i}^u &\leq P_i \leq P_i^{max}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na Equação 2.8, P_i^{min} e P_i^{max} são os limites mínimo e máximo de operação da usina i , z_i é o número de zonas proibidas para a usina i , k é o índice da zona proibida da unidade i , l é o limite inferior e u , o limite superior da k -ésima zona proibida da termoeétrica i . Os espaços estão subdivididos em diversos intervalos, onde a termoeétrica i pode estar operando ou não, acrescentando ao problema de DE uma complexidade maior. A Figura 4 mostra a função custo descontinuada pelas zonas de operação proibidas.

Figura 4 – Função custo descontínua devido as zonas proibidas.



Fonte – Oliveira, Nascimento e Saavedra (2008)

2.4 Considerações finais

Este capítulo apresentou o problema de DE em sua forma geral, que matematicamente pode ser escrito como um problema de otimização não-linear dado pela Equação 2.9. Essa formulação é usada como objeto de estudo e investigação para aplicação dos métodos de otimização bio-inspirados, os quais são apresentados no Capítulo 3 como possíveis ferramentas para sua resolução.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_n) = 0 \\ \\ P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Com a inclusão das perdas e algumas das principais restrições, fica evidente a complexidade que o DE pode alcançar, à medida que situações realísticas operacionais das usinas de geração são modeladas e incorporados nesse problema. Dentre as restrições apresentadas, os limites de geração e o balanço de potência, considerando as perdas nas linhas de transmissão, têm especial atenção ao longo deste trabalho, pois as mesmas são consideradas na resolução dos estudos de caso do DE, os quais foram solucionados por meio da aplicação das heurísticas bio-inspiradas implementadas com critério de parada, bem como pelo tradicional Método dos Multiplicadores de Lagrange.

3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO IMPLEMENTADOS

3.1 Considerações gerais

As técnicas para solucionar problemas de otimização representam um papel especial nas aplicações das áreas de engenharia, economia, matemática e ciência da computação, sendo comum sua aplicação em diversos campos de pesquisa.

Os métodos heurísticos, também conhecidos como metaheurísticas, são diferentes dos métodos tradicionais, chamados de métodos determinísticos ou exatos. Enquanto os primeiros constituem métodos bio-inspirados, os segundos representam técnicas puramente matemáticas. A principal diferença consiste na forma de encontrar a solução. As metaheurísticas podem encontrar distintas soluções a partir de uma mesma condição inicial, ao passo que os métodos clássicos determinam a mesma solução. Portanto, as metaheurísticas são essencialmente estocásticas.

Apesar de apresentarem soluções exatas, os métodos clássicos são limitados em suas aplicações práticas se considerarmos os problemas com funções não diferenciáveis e descontínuas (RAO, 2009). Neste sentido, nos últimos tempos, algoritmos bio-inspirados, baseados em populações e metaheurísticas, vêm sendo usados para resolver problemas de busca e otimização em vários domínios de aplicações, para os quais soluções robustas são difíceis de encontrar usando abordagens tradicionais como a programação matemática (SERAPIÃO, 2009).

Nesse contexto, este Capítulo apresenta o tradicional Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML) como método determinístico e quatro metaheurísticas, sendo estas o PSO, o FA, o CS e o GWO, como possíveis ferramentas para a solução do DE. São apresentadas revisões do MML e dos principais conceitos relativos aos algoritmos em sua forma básica, bem como algumas das suas principais características, tendo por objetivo demonstrar o uso desses algoritmos no desenvolvimento efetivo de trabalhos em diferentes áreas de aplicação prática. Quatro experimentos distintos de despacho econômico de carga foram conduzidos, cujos resultados são apresentados no Capítulo 4, para indicar possíveis aplicações das metaheurísticas em problemas da engenharia e para caracterizar as principais diferenças encontradas nos métodos e suas soluções, quando comparados com o método tradicional dos Multiplicadores de Lagrange.

3.2 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Muitas técnicas são utilizadas para solução de problemas de otimização. Entre elas, podemos citar o método de iteração lambda, o método de busca por gradiente, o método de Newton-Raphson, o método da secante e a programação linear (DJUROVIC; MILANCIC; KRSULJA, 2012), as quais têm sido desenvolvidas para solucionar problemas onde se deseja determinar uma solução ótima. No entanto, estas técnicas possuem certas

limitações na resolução de otimizações com restrições e com funções objetivo descontínuas.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML) é uma técnica clássica de solução dos problemas de otimização e fornece uma excelente gama de recursos para determinar máximos ou mínimos de uma função diferenciável com uma ou n variáveis (SIMON; BLUME, 2004), sujeita a uma ou m restrições.

Esse método é vastamente utilizado na literatura e, para a maioria das soluções de DE com restrições de igualdade e/ou desigualdade, os algoritmos de resolução utilizaram o MML (DJUROVIC; MILANCIC; KRSULJA, 2012). Esta Seção apresenta o MML como técnica de otimização, comentando sua eficiência em determinar máximos ou mínimos das funções, justificando sua utilização para resolução do DE.

As funções de forma quadrática são as funções não lineares mais simples (SIMON; BLUME, 2004). O problema de DE, objeto de estudo deste trabalho, é descrito por uma função de forma quadrática e convexa (GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO; CANIZARES, 2018). Essas definições serão elucidadas ao longo dessa Seção.

A definição para uma forma quadrática em \mathbb{R}^n é o somatório de monômios, cuja soma dos expoentes de cada termo é igual a 2. A função real descrita pela Equação 3.1, a seguir, define a forma quadrática:

$$Q(\vec{x}) = (\vec{x})^T \cdot A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde A é uma matriz simétrica única que identifica a forma quadrática.

Em funções de várias variáveis, mostrar que um ponto crítico de f é um ponto de mínimo, máximo ou nenhum dos dois, implica em verificar se a matriz hessiana de f no ponto crítico é positiva definida, negativa definida ou indefinida. Analogamente, esse resultado pode ser generalizado para determinar se a função é côncava ou convexa em uma região específica, analisando a matriz de sua derivada segunda quanto a sua terminologia de formas quadráticas (SIMON; BLUME, 2004).

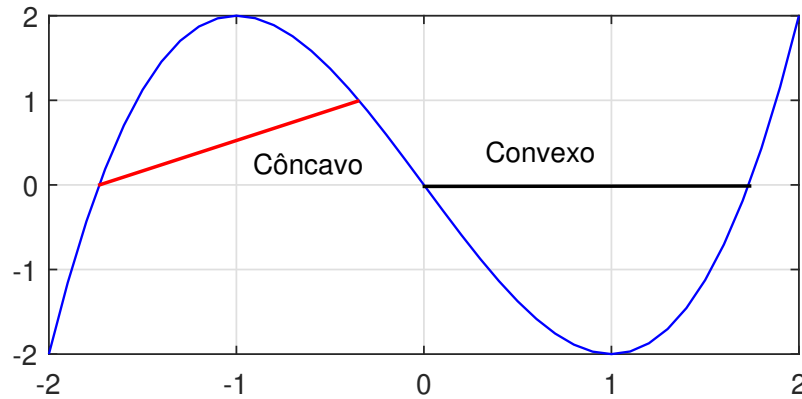
Uma forma bastante comum de caracterizar uma função côncava ou convexa é através da reta secante. Ligando quaisquer dois pontos do gráfico, a reta secante ficará acima ou abaixo deste. Portanto, em uma função convexa, a reta secante sempre ficará acima de seu gráfico e, em uma função côncava, a reta secante sempre estará abaixo de seu gráfico (SIMON; BLUME, 2004). Isto pode ser verificado observando a Figura 5.

Para uma definição mais formal, uma função real f definida em um subconjunto convexo U de \mathbb{R}^n é convexo se, para quaisquer \vec{x}, \vec{y} em U e para todo t no intervalo entre 0 e 1, a Expressão 3.2 for satisfeita.

$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y}) \quad (3.2)$$

Ou seja, o plano secante fica acima da superfície da f . Uma função real g definida em um subconjunto convexo U de \mathbb{R}^n é côncava se, para quaisquer \vec{x}, \vec{y} em U e para todo t no intervalo entre 0 e 1, a condição (3.3) for satisfeita.

Figura 5 – Intervalo Côncavo e Convexo de $f(x) = x^3 - 3x$.



Fonte – Autor.

Caso (3.3) seja satisfeita, o plano secante fica abaixo da superfície de g .

$$g(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \geq tg(\vec{x}) + (1-t)g(\vec{y}) \quad (3.3)$$

Uma função de n variáveis, em um conjunto convexo U , é côncava ou convexa se, e somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta em U é uma função côncava ou convexa de uma variável (SIMON; BLUME, 2004).

Os pontos críticos de segunda ordem, como são denominados, ou ponto de inflexão, quando a derivada segunda troca de sinal no ponto, dividem o domínio de f em intervalos, onde a derivada segunda é sempre positiva ou sempre negativa. Para cada intervalo de f , calculando a derivada segunda em um único ponto do mesmo intervalo, é possível determinar o sinal em todo intervalo.

As definições de ponto de mínimo ou de máximo de uma função com uma variável são válidas para funções de múltiplas variáveis. Um ponto x^* é um mínimo local se não possuir pontos próximos que façam f atingir valores menores que $f(x^*)$. Quando x^* for um mínimo global, x^* será um ponto de mínimo de f em todo seu domínio.

Considerando essas definições, uma condição necessária para que \vec{x}^* seja um ponto de mínimo ou de máximo no interior da f , é que a $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$, ou seja, que \vec{x}^* seja um ponto crítico da f . É necessário que \vec{x}^* esteja no interior do intervalo e não nos extremos do domínio da f .

A Condição de Primeira Ordem (CPO) funciona para funções de n variáveis. Porém, a mesma deve possuir n derivadas parciais, $\partial f / \partial x_i = 0$, em \vec{x}^* . Em resumo, para que um ponto seja considerado mínimo ou máximo de uma função, é necessário que sua derivada primeira em \vec{x}^* seja igual a zero como mostra a Equação 3.4:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = 0 \quad (3.4)$$

para $i = 1, \dots, n$.

O problema de otimização, do qual trata este trabalho, se resume em minimizar uma função de diversas variáveis vinculada à equações de restrições. O problema de minimizar uma função com n variáveis, sujeita a (s.a) equações de igualdade, pode ser generalizado conforme (3.8),

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, \dots, x_n) = h_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = h_m \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde a f é chamada de função objetivo e está restringida por h_1, \dots, h_m , que são as equações das restrições de igualdade.

A solução consiste em determinar os pontos críticos de $f(x_1, \dots, x_n)$, sujeitos à restrição $g(x_1, \dots, x_n) = h$, o que significa encontrar o menor valor para k de forma que a curva de nível $f(x_1, \dots, x_n) = k$ intercepte o conjunto restrição $g(x_1, \dots, x_n) = h$. Do ponto de vista geométrico, esta interceptação ocorre exatamente quando essas curvas possuírem uma reta tangente em comum, ou seja, os vetores gradientes ($\nabla f(\vec{x}^*) = -\lambda \nabla g(\vec{x}^*)$) são paralelos para alguma constante λ (STEWART, 2006). O Teorema da Função Implícita (SIMON; BLUME, 2004) mostra que, se $\nabla g(\vec{x}^*) \neq 0$, existe uma reta tangente à curva comum a f e g no mínimo condicionado, com os vetores $\nabla f(\vec{x}^*)$ e $\nabla g(\vec{x}^*)$ paralelos, e a inclinação de f é igual a inclinação de g . A função lagrangiana pode ser adequadamente escrita de acordo com a Equação (3.6).

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda_1[g_1(\vec{x}) - h_1] + \lambda_2[g_2(\vec{x}) - h_2] + \dots + \lambda_m[g_m(\vec{x}) - h_m] \quad (3.6)$$

Calculando as derivadas parciais do lagrangiano (3.6) e igualando cada um a zero, obtém-se um sistema de equações. A derivada parcial $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda = 0$ corresponde exatamente à equação de restrição no sistema de equações (3.7) que, na função lagrangiana, é multiplicada por λ , chamado Multiplicador de Lagrange. Portanto, para minimizar ou maximizar uma função condicionada a uma restrição de igualdade, basta determinar seus pontos críticos aplicando a CPO à função lagrangiana e resolver o sistema de equação obtido.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m}(\vec{x}^*, \lambda^*) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

O DE envolve condições de desigualdade e, conforme Rao (2009), os problemas de otimização que envolvem condições de desigualdades, como por exemplo, o de determinar o mínimo da f , podem ser descritos como (3.8):

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\vec{x}) \\ \text{s.a} \quad & t_i(\vec{x}) \leq u_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $i = 1, 2, \dots, m$.

A condição de desigualdade descrita em (3.8) pode ser transformada em uma condição de igualdade, adicionando uma nova variável de folga, *Slack variable*, y_i^2 (RAO, 2009). Djurovic, Milancic e Krsulja (2012) também utilizaram a variável *slack* para solucionar o problema de otimização com restrições de desigualdades. Dessa forma, a condição de desigualdade em (3.8) se torna uma igualdade, dada por (3.9).

$$T_i(\vec{x}, \vec{y}) = t_i(\vec{x}) + y_i^2 = u_i \quad (3.9)$$

Na Equação 3.9, y_i^2 é o valor a ser determinado e $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$, o vetor de variáveis *slack*. Assim, o problema em (3.8) assume a forma expressa em 3.10.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\vec{x}) \\ \text{s.a} \quad & t_i(\vec{x}) + y_i^2 = u_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como para as restrições de igualdade o conjunto das curvas de nível de f e t são tangentes entre si, ou seja, $\nabla f(\vec{x}^*)$ e $\nabla t(\vec{x}^*)$ estão alinhados, indicando que são múltiplos, novamente, o multiplicador de Lagrange (λ) reaparece como a variável que representa este múltiplo (SIMON; BLUME, 2004), conforme (3.11).

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x}^*) &= \sum_{i=1}^m -\lambda_i \nabla t_i(\vec{x}^*) \\ \nabla f(\vec{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla t_i(\vec{x}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pode-se, então, escrever a função lagrangiana para esta nova situação como (3.12).

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [t_i(\vec{x}) + y_i^2 - u_i] \quad (3.12)$$

Aplicando as condições de primeira ordem, tem-se (3.13):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) &= 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) &= 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) &= 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m}(\vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{\lambda}^*) = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

O Método dos Multiplicadores de Lagrange é uma técnica clássica de otimização (RAO, 2009) e largamente utilizada na literatura para solucionar problemas dessa natureza. Muitos problemas de otimização de caráter econômico são enunciados em termos de formas quadráticas (SIMON; BLUME, 2004), como o DE, e são solucionados utilizando o MML.

Para funções descontínuas, para as quais não se pode utilizar o cálculo diferencial, esse método se torna limitado em muitas aplicações. No entanto, é uma técnica consolidada na condução de problemas de otimização em engenharia, especialmente na solução do DE, e forma uma base segura para experimentar técnicas numéricas e até mesmo heurísticas em problemas nos quais o MML é aplicável.

3.3 Otimização por Enxame de Partículas

Em 1995, James Kennedy e Russell Elberhart apresentaram o método de otimização por enxame de partículas PSO, do inglês *Particle Swarm Optimization* (MAHOR; PRASAD; RANGNEKAR, 2009), o qual foi inspirado no comportamento social constatado em variadas espécies de pássaros, cardumes de peixes e enxames de insetos.

O PSO é baseado em uma população composta por indivíduos capazes de interagir entre si e com o meio ambiente (SERAPIÃO, 2009). Como método heurístico, o PSO é um algoritmo de busca das soluções ótimas com base em processos estocásticos. Para Mahor, Prasad e Rangnekar (2009), a simplicidade do algoritmo é sua principal característica e as posições de cada partícula podem apontar para a solução ótima.

A mudança de direção e velocidade de cada indivíduo, no sentido de encontrar o local mais favorável dentro do espaço de busca, é um efeito dos aspectos sociais, cognitivos e estocásticos das partículas (EBBESEN; KIWITZ; GUZZELLA, 2012). Os indivíduos utilizam, de forma resumida, três princípios para se adaptarem (KENNEDY et al., 2001): autoavaliação, adaptação e imitação. Assim, eles são capazes de lidar com as possibilidades que o meio propicia e gerar resultados provenientes das interações sociais.

No algoritmo PSO, as coordenadas no espaço de busca indicam as posições ocupadas pelas partículas que compõem um enxame ou população. As partículas tendem a se mover no espaço em busca da posição ótima e as variações ao longo do processo indicam novas posições no espaço.

As partículas tenderão a se mover em direção umas às outras, influenciando umas às outras e, conseqüentemente, todo o enxame. Os aspectos cognitivos e sociais estão diretamente ligados ao desempenho da população. Cada partícula possui sua própria experiência e, como os indivíduos são sociais, eles estimam o comportamento dos vizinhos e a qualidade das experiências. Portanto, a decisão correta de uma partícula será função de suas decisões passadas e do aproveitamento dos seus vizinhos (KENNEDY et al., 2001).

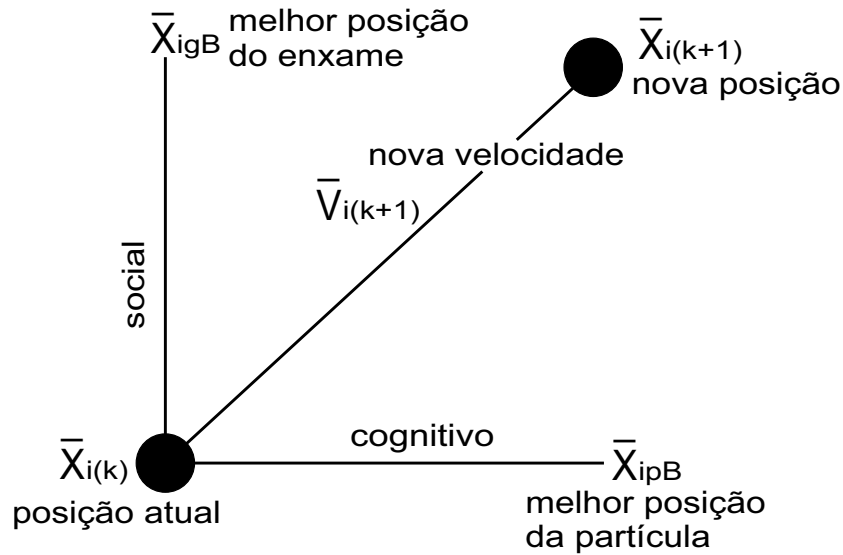
Destaca-se ainda que, na otimização por enxame de partículas os indivíduos são inicialmente distribuídos em posições aleatórias no espaço de busca com dimensão igual ao número de variáveis a serem determinadas. Novas posições são definidas no espaço de busca de acordo com o comportamento individual e coletivo das partículas, movimentando o enxame para a solução ótima.

Dois parâmetros norteiam o processo de decisão de cada partícula: o primeiro é social, $gBest$ (g_B), e está relacionado com a influência que uma partícula exerce sobre

toda população. O segundo é cognitivo, $pBest$ (p_B), refletindo o melhor resultado obtido individualmente no passado (SERAPIÃO, 2009).

Inicialmente, os vetores posição e velocidade são gerados aleatoriamente. Durante o processo de evolução do PSO, a partícula \vec{p}_i deverá se mover com uma velocidade \vec{v}_i para um novo local no espaço $\vec{x}_i(k+1)$, composto pelo vetor da sua melhor posição alcançada até o instante atual, $\vec{x}_{i_{p_B}}$, o qual gera a melhor solução individual p_B , e o vetor posição da melhor partícula localizada entre todas as partículas do enxame, $\vec{x}_{i_{g_B}}$, que relaciona o melhor resultado de toda a população. A Figura 6 mostra como uma partícula se movimenta no espaço de soluções.

Figura 6 – Nova posição da partícula i associada aos parâmetros cognitivo e social.



Fonte – Autor.

Esses parâmetros são avaliados pela função objetivo a cada iteração e essas informações são guardadas ao longo do processo iterativo, que resultará na otimalidade do problema de otimização. Portanto, as soluções estão associadas aos vetores posição e velocidade, que serão atualizados de acordo com as variações de (p_B) e (g_B) no decorrer do processo de evolução de cada indivíduo, indicando a provável solução no espaço de busca.

A partícula i , cuja posição é \vec{x}_i , deverá se mover com uma velocidade \vec{v}_i , que pode ser calculada segundo a Equação 3.14.

$$\vec{v}_i(k+1) = \vec{v}_i(k) + \varphi_1 \epsilon_1 (\vec{x}_{p_B} - \vec{x}_i(k)) + \varphi_2 \epsilon_2 (\vec{x}_{g_B} - \vec{x}_i(k)) \quad (3.14)$$

Em (3.14), φ_1 e φ_2 são constantes que representam, respectivamente, os parâmetros cognitivo e social, conforme (KENNEDY et al., 2001), ϵ_1 e ϵ_2 são variáveis aleatórias escalares, possuindo distribuição probabilística uniforme no intervalo entre 0 e 1, p_B é o melhor valor da função objetivo para a respectiva partícula até o momento, \vec{x}_{p_B} é sua posição, g_B representa o melhor valor da função objetivo até o momento dentre todas as partículas, \vec{x}_{g_B} é sua posição, $\vec{v}_i(k)$ é a velocidade atual e $\vec{x}_i(k)$ é a posição atual da

partícula. A posição da partícula é calculada por (3.15).

$$\vec{x}_i(k+1) = \vec{x}_i(k) + \vec{v}_i(k+1) \quad (3.15)$$

A velocidade dos indivíduos sofrem restrições para que o espaço de busca não seja extrapolado. Dessa forma, são impostos limites para o módulo da velocidade das partículas, $v_{max} > 0$, conforme mostra (3.16).

$$|\vec{v}_i| > v_{max} \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} v_{max} \quad (3.16)$$

Caso o espaço de busca seja extrapolado pela partícula \vec{p}_i , a mesma é desconsiderada e uma nova partícula é introduzida aleatoriamente no espaço de busca. No Algoritmo 1, encontra-se a descrição em pseudocódigo do PSO, em sua forma original.

Algoritmo 1: Pseudocódigo do PSO

- 1 Declaração das variáveis;
 - 2 Número de partículas do enxame;
 - 3 Inicializar as posições de cada partícula p_i aleatoriamente;
 - 4 Atribuir velocidade igual para todas as partículas;
 - 5 Calcular p_B e g_B e guardar suas posições;
 - 6 **início**
 - 7 Enquanto o critério de parada não for satisfeito, para cada partícula p_i **faça**;
 - 8 atualize a velocidade;
 - 9 verifique o limite de velocidade;
 - 10 atualize a posição;
 - 11 verifique o limite do espaço de busca;
 - 12 calcule p_B e guarde sua posição;
 - 13 encontre g_B e guarde sua posição;
 - 14 Se a condição de término não for satisfeita, volte a linha 7;
 - 15 **fim**
-

3.4 Algoritmo dos Vaga-lumes

Existem muitas espécies de vaga-lumes, onde cada uma tem uma forma particular de se comunicar através de sua luz. O ritmo, a frequência e a quantia de tempo das piscadas definem o sistema de sinalização dos vaga-lumes (YANG, 2009). Este sistema serve para atrair parceiros de acasalamento, bem como potenciais presas e, também, serve como mecanismo de alerta da presença de predadores. A visibilidade de um vaga-lume está associada com a distância a que ele está do observador. Além disso, o ar também absorve uma parcela da luminosidade, o que se torna outro fator associado à visibilidade do vaga-lume.

No FA (*Firefly Algorithm* - Algoritmo dos vaga-lumes), segundo Yang (2009), a ideia é associar a função objetivo com a luz dos vaga-lumes. Desta forma, quanto melhor a solução, maior o brilho do vaga-lume. No algoritmo, são idealizadas três regras básicas:

- Todos os vaga-lumes se atraem independentemente do gênero (são unissex);
- A atratividade de um vaga-lume está relacionada com o seu brilho (o menos brilhante tende a se dirigir ao mais brilhante);
- O brilho do vaga-lume é afetado ou determinado pelo panorama da função objetivo.

Neste algoritmo, existem dois problemas importantes, que são a variação da intensidade de luz e a formulação da atratividade.

A atratividade de um vaga-lume é determinada por seu brilho. Em um caso simples, assume-se que a intensidade da luz de um vaga-lume é proporcional ao valor da função objetivo na sua posição. A atratividade β é relativa e varia com a distância r entre dois vaga-lumes (r_{ij}). A intensidade de luz diminui quanto mais distante se estiver da fonte e, também, a luz é absorvida no meio. Sendo assim, a intensidade de luz I varia com um grau de absorção.

De uma forma simples, pode-se aproximar a intensidade da luz I a uma distância r da fonte de luz I_s , pela Equação 3.17.

$$I(r) = I_s e^{-\gamma r^2} \quad (3.17)$$

Como a atração é proporcional à intensidade de luz vista pelos vaga-lumes, a atratividade é definida por (3.18).

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^2} \quad (3.18)$$

Na Equação 3.18, β_0 é a atratividade em $r = 0$. Nota-se que, nessas expressões, existe uma distância característica, onde a atratividade muda significativamente de β_0 para β_0/e . Esta distância característica é definida em (3.19).

$$\Gamma = 1/\sqrt{\gamma} \quad (3.19)$$

A distância entre dois vaga-lumes é determinada pela distância Euclidiana para d dimensões do problema, conforme (3.20).

$$r_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^d (\vec{x}_i^k - \vec{x}_j^k)^2} \quad (3.20)$$

Desta forma, o movimento de um vaga-lume i , que é atraído por outro mais atrativo (ou mais brilhante) j , é determinado pela Equação 3.21.

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (\vec{x}_j - \vec{x}_i) + \alpha \left(\epsilon - \frac{1}{2} \right). \quad (3.21)$$

O segundo termo em (3.21) está relacionado à atração e irá dirigir o vaga-lume i para o j . O terceiro termo diz respeito ao comportamento aleatório do vaga-lume, onde α é a constante que dá peso a este comportamento e ϵ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, 1]$. Em geral, tem-se $\alpha \in [0, 1]$ e $\beta_0 = 1$. O coeficiente de absorção γ , geralmente, é constante e varia entre 0,01 e 100. Em (YANG, 2009), é mostrado que quando $\gamma \rightarrow 0$, o FA se reduz a um caso particular do PSO, onde todas as partículas conseguem ver todas as outras com precisão no espaço de busca.

A implementação utilizada neste Trabalho segue a proposta original de Yang (2009), a qual tem seu pseudocódigo apresentado no Algoritmo 2. Existem três parâmetros fundamentais para o processo de otimização do FA: γ , β_0 e α . Portanto, a escolha desses devem estar de acordo com as peculiaridades de cada problema. As duas principais equações utilizadas no algoritmo são a Equação 3.18 da atratividade e a Equação 3.21 do movimento.

Algoritmo 2: Pseudocódigo do FA

```

1 Definição dos parâmetros  $\gamma$ ,  $\beta_0$  e  $\alpha$ ;
2 Inicialização da população de vaga-lumes;
3 Calcular  $I_i = f(x_i)$ ;
4 início
5   Enquanto o critério de parada não for satisfeito faça;
6   Arranjar os vaga-lumes de acordo com a intensidade do brilho;
7   para  $i=1$  até  $n$  faça
8     para  $j=1$  até  $n$  faça
9       se  $(I_i > I_j)$  então
10        Calcular a distância entre os vaga-lumes  $i$  e  $j$ ;
11        Calcular  $\beta(r)$  através da Equação 3.18;
12        Deslocar o vaga-lume  $i$  na direção do vaga-lume  $j$  através da
           Equação 3.21;
13      fim
14    fim
15  fim
16  Verificar a melhor solução da população;
17 fim

```

3.5 Algoritmo Busca do Cuco

O algoritmo de busca dos Cucos (*Cuckoo Search Algorithm* - CS) foi originalmente apresentado por Yang e Deb (YANG; DEB, 2009), onde mostrou melhores resultados em diversos problemas de otimização em comparação com as respostas encontradas pelo PSO

e pelo GA. O CS é inspirado em algumas espécies de aves chamadas Cuco, devido ao seu modo de vida agressivo e estratégico de reprodução. O Cuco é uma espécie parasita que deposita seus ovos no ninho de outras aves. A intenção é que as aves fêmeas de outra espécie possam incubar seus ovos, tornando-se aves hospedeiras, transmitindo, assim, a tarefa de dar a vida e cuidar dos jovens pássaros Cucos (DAVIES; BROOKE, 1989).

As aves Cuco procuram possíveis ninhos que possam ser uma espécie de “lar adotivo” para incubar seus ovos e dar vida aos futuros filhotes. Ao encontrar um hospedeiro apropriado, a mãe Cuco retira um dos ovos da ave hospedeira e põe um dos seus ovos. Embora essa ação possa aumentar a probabilidade de dar vida aos seus próprios ovos, a ave hospedeira pode descobrir que tais ovos não são dela. Nesse caso, os ovos estrangeiros são descartados ou ela abandona o ninho e constrói um novo em outro local (SERAPIÃO, 2013).

O algoritmo CS consiste em uma população de ninhos ou ovos. As soluções do problema são representadas pelos ovos nos ninhos, assim como cada nova solução determinada. Cada pássaro põe seu ovo em um ninho aleatoriamente escolhido. Quando o ovo é semelhante ao ovo hospedeiro, as chances de ele ser descoberto pela ave hospedeira diminuem. O número de ninhos hospedeiros é fixo e o ovo posto pela ave Cuco possui a probabilidade pa de ser descoberto pelo pássaro hospedeiro. As soluções são atualizadas por novos ninhos melhores ao longo do processo iterativo. Isso ocorre substituindo o ovo antigo por outro gerado através de um voo de Lévy aplicado sobre o ovo atual. Assim, através de elitismo, a convergência é garantida transferindo às próximas iterações os melhores ninhos (SOUZA, 2014).

Ao gerar novas soluções $x^{(t+1)}$ para o ninho i , é realizado um voo de Lévy, dado por (3.22), onde $\alpha > 0$ é o comprimento do passo que deve estar atrelado às escalas do problema. O produto \oplus expressa a multiplicação de entrada (YANG; DEB, 2009). Os voos de Lévy fazem uma varredura aleatória no espaço de soluções factíveis. Essa busca é realizada com passos aleatórios através de uma distribuição de Lévy, conforme (3.23), para grandes passos com média e variação infinitas. Os passos são um processo de caminhada aleatória responsável por explorar o espaço de busca.

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + \alpha \oplus Lévy(\lambda). \quad (3.22)$$

$$Lévy \sim u = t^{(-\lambda)}, (1 < l \leq 3) \quad (3.23)$$

O voo de Lévy é um maximizador de desempenho do algoritmo CS. Além de estar diretamente ligado ao método, ele possibilita realizar uma busca aleatória e minuciosa no universo de soluções. Diversos animais realizam deslocamentos com características típicas do voo de Lévy, o qual é uma busca eficiente em termos de distância espacial percorrida, onde as mudanças de direção são isotrópicas e aleatórias, com probabilidade de escolha em determinada direção ser igual a qualquer outra direção. A trajetória possui

seguimentos retilíneos e seus comprimentos obedecem uma distribuição de Lévy. Esse comportamento pode ser observado, por exemplo, em tubarões que, quando a caça é abundante em determinada região próxima, movimentam-se na forma browniana. Porém, quando o alimento caçado está escasso nessa região, alternam o movimento para o voo de Lévy (SOUZA, 2014).

O algoritmo CS, basicamente, segue três regras bem simples (YANG; DEB, 2009):

- Cada ave Cuco escolhe aleatoriamente um ninho hospedeiro para depositar um único ovo;
- Os melhores ninhos, ou seja, com ótimas soluções, são guardados para as iterações seguintes.
- A quantidade de ninhos hospedeiros disponíveis é fixo com a probabilidade pa de um ovo Cuco ser descoberto $\in [0, 1]$. Na hipótese de um ovo Cuco ser descoberto, a ave hospedeira abandona o ninho e constrói um outro ninho em novo local ou simplesmente descarta o ovo descoberto.

Uma fração pa de ninhos descobertos são substituídos por novas soluções aleatórias. Seguindo essas três regras básicas, o Algoritmo 3 mostra o pseudocódigo deste método, que pode ser resumido nos seguintes passos:

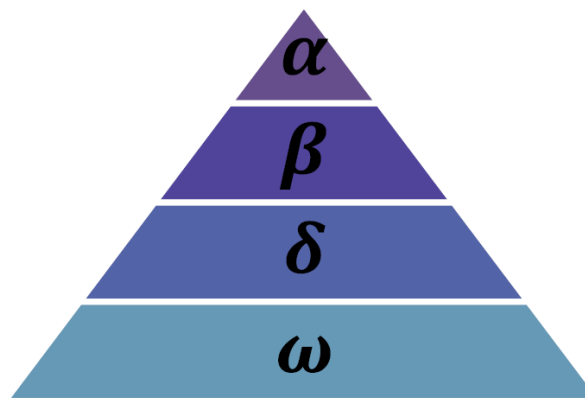
Algoritmo 3: Pseudocódigo do CS

- 1 Definir a função objetivo $f(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$;
 - 2 Definir os parâmetros iniciais n , pa e α ;
 - 3 Gerar uma população inicial de n ninhos $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$;
 - 4 **início**
 - 5 Enquanto o critério de parada não for satisfeito **faça**;
 - 6 Deslocar uma ave Cuco aleatoriamente através de voo de Lévy;
 - 7 Avaliar sua função objetivo f_i ;
 - 8 Aleatoriamente escolher um outro ninho j entre os n ninhos;
 - 9 **se** $(f_i > f_j)$ **então**
 - 10 | Substitua j pela nova solução;
 - 11 **fim**
 - 12 Descarte uma fração pa dos piores ninhos e substitua pela mesma quantidade de novos ninhos em novos locais gerados aleatoriamente através de voo de Lévy;
 - 13 Guardar as soluções ótimas, ou os melhores ninhos;
 - 14 Encontrar a melhor solução dentre as soluções existentes;
 - 15 **fim**
-

3.6 Otimização do Lobo Cinzento

O algoritmo de otimização do lobo cinzento (*Grey Wolf Optimization - GWO*) é uma metaheurística baseada em enxames proposto por Mirjalili, Mirjalili e Lewis (2014). O algoritmo é inspirado no comportamento de caça dos lobos cinzentos, animais predadores e que ocupam o topo da cadeia alimentar. Os lobos cinzentos vivem em bando, grupos de 5 a 12 animais em média, sendo uma característica importante a hierarquia social dominante entre os membros do bando. A Figura 7 mostra o nível de dominância dentro da matilha que diminui de cima para baixo.

Figura 7 – Comportamento hierárquico social dos lobos cinzentos.



Fonte – Mirjalili, Mirjalili e Lewis (2014).

O líder do bando é denominado o lobo alfa (α), ou dominante, e as decisões que determinam a rotina do grupo são ditadas por ele. O lobo dominante nem sempre é o mais forte. Porém, é o que melhor administra o bando, uma vez que sua habilidade de organização e disciplina são mais importantes que sua força.

Os lobos cinzentos do nível beta (β) ocupam a segunda posição hierárquica e são subordinados aos alfas, auxiliando esses na tomada de decisões e demais atividades da matilha. Os betas são prováveis substitutos do alfa e ajudam a comandar o próximo nível dos lobos que compõe o bando.

Os próximos lobos, abaixo dos alfa e beta, são os delta (δ). Estes são os subordinados, responsáveis pela caça, escolta, vigia e cuidado com os mais fracos, doentes e feridos. Eles auxiliam os alfas e betas na caçada e na provisão de alimento para o bando, bem como fazem a vigilância das fronteiras e garantem a segurança da matilha.

Por sua vez, os lobos cinzentos ômega (ω) ocupam a última classe hierárquica da matilha e são submetidos a todos os outros animais do bando, sendo os últimos a se alimentar. No entanto, foi observado que os ômegas possuem importância para o grupo, pois as disputas e lutas que envolvem o bando acontecem em virtude da perda do ômega (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014). Esses seguem os lobos alfa, beta e delta.

A caça em bando é outra característica do comportamento dos lobos cinzentos. De acordo com Muro et al. (2011), são listadas a seguir as principais etapas desse processo:

- rastreamento da presa;
- cerco da presa;
- caça da presa; e
- ataque à presa.

O algoritmo é implementado para um número específico de lobos cinzentos em um bando que se move em um espaço de busca multidimensional. Nesse algoritmo, as posições dos lobos cinzentos são consideradas diferentes variáveis e a distância da presa para os lobos cinzentos determina o valor de aptidão da função objetivo. O lobo cinzento tem sua posição ajustada e se move para o melhor ponto do espaço de busca. O método faz a busca da melhor solução através da rota mais curta possível para que o bando possa alcançar a presa.

Essas características comportamentais dos lobos cinzentos são consideradas na modelagem matemática do algoritmo GWO. A melhor solução da matilha é a encontrada pelo alfa, seguida pelo beta e delta, respectivamente. As demais soluções são consideradas ômega. Assim, evidencia-se que o processo de otimização é guiado pelos lobos alfa, beta e delta, enquanto os ômegas seguem os demais.

Os lobos fazem o cerco da presa durante a caçada. Esse comportamento é expresso matematicamente pelas Equações 3.24 e 3.25.

$$\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t)| \quad (3.24)$$

$$\vec{X}_{(t+1)} = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (3.25)$$

Nas Equações acima, t indica a iteração atual, \vec{A} e \vec{C} são os vetores de coeficientes, \vec{X}_p é o vetor de posição da presa e \vec{X} indica o vetor da posição de um lobo cinzento. Os vetores \vec{A} e \vec{C} são calculados segundo (3.26) e (3.27).

$$\vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r}_1 - \vec{a} \quad (3.26)$$

$$\vec{C} = 2 \cdot \vec{r}_2 \quad (3.27)$$

Em (3.26) e (3.27), as componentes de \vec{a} decrescem linearmente de 2 para 0 no decorrer das iterações e r_1 e r_2 são vetores aleatórios entre 0 e 1. Um lobo cinzento tem sua posição atualizada de acordo com o movimento da presa e melhores posições podem ser obtidas em relação a posição atual, ajustando os valores de \vec{A} e \vec{C} . Os vetores r_1 e r_2 possibilitam que os lobos cinzentos ocupem qualquer posição ao redor da presa e, para atualizá-la, basta utilizar as Equações 3.24 e 3.25, que os lobos se moverão em torno da melhor solução obtida.

Os lobos cinzentos possuem a habilidade de caça com base na localização das presas. A caça é, normalmente, direcionada pelo alfa. O beta e o delta ocasionalmente participam da caça. A localização da presa não é conhecida. Porém, tomando o alfa como a melhor solução, bem como o beta e o delta, seus seguidores, as três melhores soluções são guardadas supondo que elas possuem um potencial conhecimento da localização da presa. Os outros lobos cinzentos, ômega, prosseguem a busca para atualizar suas posições conforme as melhores soluções encontradas pelos outros lobos cinzentos. As Equações 3.28 a 3.34 expressam matematicamente a rotina de caça da matilha.

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \cdot \vec{X}_\alpha - \vec{X}| \quad (3.28)$$

$$\vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \cdot \vec{X}_\beta - \vec{X}| \quad (3.29)$$

$$\vec{D}_\delta = |\vec{C}_3 \cdot \vec{X}_\delta - \vec{X}| \quad (3.30)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1 \cdot (\vec{D}_\alpha) \quad (3.31)$$

$$\vec{X}_2 = \vec{X}_\beta - \vec{A}_2 \cdot (\vec{D}_\beta) \quad (3.32)$$

$$\vec{X}_3 = \vec{X}_\delta - \vec{A}_3 \cdot (\vec{D}_\delta) \quad (3.33)$$

$$\vec{X}_{(t+1)} = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3} \quad (3.34)$$

Os lobos cinzentos alfa, beta e delta estimam a posição da presa, enquanto os lobos ômega atualizam suas posições aleatoriamente em torno da presa. A caçada é concluída quando a presa para de se mover. O modelo matemático que se aproxima desse comportamento é o decréscimo do valor de \vec{a} , ao longo das iterações, de 2 a 0. Com isso \vec{A} assume um valor aleatório no intervalo $[-2a \ 2a]$.

O algoritmo faz a busca do ótimo de acordo com as melhores soluções encontradas pelos lobos cinzentos alfa, beta e delta. No entanto, eles divergem um do outro na busca pela presa e convergem para atacar a presa. Para isso, os valores de \vec{A} são aleatórios maiores que 1 ou menores que -1, o que possibilita o GWO fazer uma busca global.

Um outro fator favorável na exploração do espaço de busca é o vetor \vec{C} , o qual possui valores aleatórios entre 0 e 2, fornecendo eventuais pesos para as presas, dando ênfase no efeito estocástico na definição das distâncias pela Equação 3.24. O vetor \vec{C} não decresce linearmente como o vetor \vec{A} , fornecendo valores aleatórios em todas as iterações, para fazer uma ampla busca no espaço de soluções, evitando a estagnação em ótimos locais. O vetor \vec{C} pode representar os possíveis obstáculos que os lobos cinzentos podem

encontrar na busca pela presa. Isso pode ocorrer no caminho durante a caça, o que simula de fato os empecilhos para uma aproximação mais rápida e conveniente da presa (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014).

O processo de busca do valor ótimo é iniciado com soluções aleatórias atribuídas a população de lobos cinzentos. Ao longo das iterações, as prováveis soluções são estimadas pelos lobos alfa, beta e delta tendo suas distâncias da presa atualizadas. O parâmetro a é diminuído linearmente de 2 a 0 e as soluções candidatas divergem da presa quando $|\vec{A}| > 1$ e convergem para $|\vec{A}| < 1$. O Algoritmo 4 mostra o pseudocódigo do GWO para problemas de otimização.

Algoritmo 4: Pseudocódigo do GWO

```

1 Gerar uma população inicial de lobos cinzentos  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ;
2 Inicializar  $a$ ,  $\vec{A}$  e  $\vec{C}$ ;
3 Calcular a função objetivo para cada lobo cinzento da população;
4  $X_\alpha$  = a melhor solução;
5  $X_\beta$  = a segunda melhor solução;
6  $X_\delta$  = a terceira melhor solução;
7 início
8   Enquanto o critério de parada não for satisfeito faça;
9   para cada lobo cinzento faça
10    | Atualize a posição pela Equação 3.34;
11   fim
12   Atualizar  $a$ ,  $\vec{A}$  e  $\vec{C}$ ;
13   Calcular a função objetivo de toda população;
14   Atualize  $X_\alpha$ ,  $X_\beta$ ,  $X_\delta$ ;
15 fim

```

3.7 Considerações finais

Normalmente, na literatura, o método de otimização é executado até que um respectivo número máximo de iterações seja alcançado, sendo que não é apresentado um motivo para a adoção deste número, além de tentativa e erro. Há uma desvantagem nesse critério pelo fato de ser desconhecido o número de iterações necessárias para se atingir a convergência (ZIELINSKI; LAUR, 2007), o que faz um critério de parada que estime o erro ser uma importante ferramenta para determinar o número de iterações necessárias para se obter convergência.

Um critério simples, mas eficiente, consiste em verificar se o erro relativo nas últimas g iterações é menor que um valor previamente estabelecido para o erro mínimo (ZIELINSKI; LAUR, 2007). Dessa forma, nesse trabalho, foi adotado esse critério de

parada. O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos através das heurísticas implementadas, para diferentes casos de despacho econômico de carga, os quais são discutidos e comparados com as respostas obtidas através do MML.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Considerações gerais

As heurísticas apresentadas no Capítulo anterior foram aplicadas para resolver os problemas de despacho econômico em quatro casos teste diferentes, de modo a investigar a capacidade de otimização, sendo a função objetivo limitada dentro das faixas de potência das unidades geradoras e as perdas de transmissão consideradas no balanço de potência. O desempenho dos métodos heurísticos é comparado com a solução obtida pelo tradicional método de otimização dos Multiplicadores de Lagrange (MML). Todas as simulações computacionais foram realizadas utilizando o Matlab[®] 8.5.0 (MathWorks), o qual foi executado em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-2410M, de 2.30 GHz e 6GB de RAM. Cabe ressaltar que os resultados completos obtidos para cada caso analisado são expostos nos Apêndices A, B, C e D ao final deste documento.

No problema do DE, o custo total do combustível na geração de n termoelétricas é o somatório do custo individual de cada unidade de geração, dado conforme a Equação 4.1.

$$\sum_{i=1}^n C_i(P_i) \quad (4.1)$$

Na Equação 4.1, C_i é a função de custo do combustível da unidade de geração i em \$/h e P_i , em MW, é a potência gerada pela mesma unidade i .

O custo individual de cada unidade é expresso pela forma quadrática em função da potência gerada, conforme a Equação 4.2

$$C_i(P_i) = a_1 P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (4.2)$$

que estará restrito conforme (4.3)

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (4.3)$$

onde a_i , b_i e c_i são os coeficientes característicos do gerador e P_i^{min} e P_i^{max} são, respectivamente, os limites de operação mínimo e máximo da unidade i , em MW.

A potência gerada deve satisfazer a demanda de carga solicitada pelo sistema, conforme a Equação 4.4.

$$\sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L = 0 \quad (4.4)$$

Na Equação 4.4, a demanda P_D , considerada constante, é a potência a ser suprida pelo sistema e P_L é a perda de transmissão a ser calculada conforme descrito no Capítulo 2. As Equações 4.3 e 4.4 são as referidas condições de desigualdade e igualdade do sistema.

O problema de minimizar o custo de n unidades geradoras considerando as perdas e limites de geração pode ser descrito por (4.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n C_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_n) = 0 \\ \\ P_1^{min} \leq P_1 \leq P_1^{max} \\ \vdots \\ P_n^{min} \leq P_n \leq P_n^{max} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

4.2 Caso 1: sistema com três unidades geradoras

Nesta Seção, é apresentada a solução do DE para um sistema termoelétrico com três unidades geradoras, considerando uma demanda de potência $P_D = 150$ MW e perdas nas linhas de transmissão, utilizando o PSO, o FA, o CS, o GWO e o MML. Os dados do sistema em questão são reproduzidos nas Tabelas 1 e 2, bem como as matrizes B com os coeficientes de perda nas linhas de transmissão (base de 100 MW) são dados pelas Equações 4.6 à 4.8 (SAADAT, 1999; SERAPIÃO, 2009).

Tabela 1 – Coeficientes de custo - caso 1.

Unidade _{i}	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	0,008	7	200
2	0,009	6,3	180
3	0,007	6,8	140

Fonte – (SERAPIÃO, 2009).

Tabela 2 – Limites de geração - caso 1.

Unidade _{i}	P_i^{min} (MW)	P_i^{max} (MW)
1	10	85
2	10	80
3	10	70

Fonte – (SERAPIÃO, 2009).

$$B_{ij} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0,0218 & 0,0093 & 0,0028 \\ 0,0093 & 0,0228 & 0,0017 \\ 0,0028 & 0,0017 & 0,0179 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$B_{0i} = 10^{-3} \times [0,3 \quad 3,1 \quad 1,5] \quad (4.7)$$

$$B_{00} = 0,030523. \quad (4.8)$$

Para esse caso, o problema de otimização é dado conforme a Equação 4.9. O objetivo é minimizar a função custo, dada pela Equação 4.10, que está sujeita às restrições de desigualdade e igualdade, que são, respectivamente, as referidas capacidades limites de geração de cada unidade termoelétrica e o balanço de potência, considerando as perdas nas linhas de transmissão, conforme a Equação 4.11.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, P_2, P_3) \\ \text{s.a.} \quad P_1 + P_2 + P_3 - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3) = 0 \\ \quad \quad 10 \leq P_1 \leq 85 \\ \quad \quad 10 \leq P_2 \leq 80 \\ \quad \quad 10 \leq P_3 \leq 70 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

$$C(P_1, P_2, P_3) = (a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2) + (b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3) + (c_1 + c_2 + c_3) \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} P_L(P_1, P_2, P_3) = & (B_{11} P_1 P_1 + B_{12} P_1 P_2 + B_{13} P_1 P_3) + \\ & (B_{21} P_2 P_1 + B_{22} P_2 P_2 + B_{23} P_2 P_3) + \\ & (B_{31} P_3 P_1 + B_{32} P_3 P_2 + B_{33} P_3 P_3) + \\ & (B_{10} P_1 + B_{20} P_2 + B_{30} P_3) + B_{00} \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2.1 Solução segundo o MML - caso 1

As restrições envolvendo desigualdades podem ser reescritas como igualdades através da introdução de variáveis “slack” (SIMON; BLUME, 2004). Assim, o problema de DE exposto pela Equação 4.9, pode ser reescrito pela Equação 4.12.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, P_2, P_3) \\ \text{s.a.} \quad P_1 + P_2 + P_3 - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3) = 0 \\ \quad \quad P_1 - Y_1^2 - 10 = 0 \\ \quad \quad P_1 + Y_2^2 - 85 = 0 \\ \quad \quad P_2 - Y_3^2 - 10 = 0 \\ \quad \quad P_2 + Y_4^2 - 80 = 0 \\ \quad \quad P_3 - Y_5^2 - 10 = 0 \\ \quad \quad P_3 + Y_6^2 - 70 = 0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

A função lagrangiana pode ser escrita para o problema de otimização da Equação 4.12. Aplicando as Condições de Primeira Ordem (CPO) à função lagrangiana (SIMON; BLUME, 2004), Equação 4.13, obtém-se um sistema de equações não-lineares com 16 equações e 16 variáveis, conforme a Equação 4.14.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_1, P_2, P_3, Y_1, \dots, Y_6, \lambda_1, \dots, \lambda_7) = & C(P_1, P_2, P_3) + \lambda_1 [P_1 + P_2 + P_3 \\ & - P_D - P_L(P_1, P_2, P_3)] + \lambda_2 (P_1 - Y_1^2 - 10) + \lambda_3 (P_1 + Y_2^2 - 85) + \\ & \lambda_4 (P_2 - Y_3^2 - 10) + \lambda_5 (P_2 + Y_4^2 - 80) + \lambda_6 (P_3 - Y_5^2 - 10) + \\ & \lambda_7 (P_3 + Y_6^2 - 70) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
2a_1P_1 + b_1 + \lambda_1(1 - 2B_{11}P_1 - B_{12}P_2 - B_{13}P_3 - B_{21}P_2 - B_{31}P_3 - B_{10}) + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
2a_2P_2 + b_2 + \lambda_1(1 - B_{12}P_1 - B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2 - B_{23}P_3 - B_{32}P_3 - B_{20}) + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\
2a_3P_3 + b_3 + \lambda_1(1 - B_{13}P_1 - B_{23}P_2 - B_{31}P_1 - B_{32}P_2 - 2B_{33}P_3 - B_{30}) + \lambda_6 + \lambda_7 = 0 \\
-2\lambda_2Y_1 = 0 \\
2\lambda_3Y_2 = 0 \\
-2\lambda_4Y_3 = 0 \\
2\lambda_5Y_4 = 0 \\
-2\lambda_6Y_5 = 0 \\
2\lambda_7Y_6 = 0 \\
P_1 + P_2 + P_3 - P_D - [(B_{11}P_1P_1 + B_{12}P_1P_2 + B_{13}P_1P_3) + (B_{21}P_2P_1 + B_{22}P_2P_2 + \\
B_{23}P_2P_3) + (B_{31}P_3P_1 + B_{32}P_3P_2 + B_{33}P_3P_3) + (B_{10}P_1 + B_{20}P_2 + B_{30}P_3) + B_{00}] = 0 \\
P_1 - Y_1^2 - 10 = 0 \\
P_1 + Y_2^2 - 85 = 0 \\
P_2 - Y_3^2 - 10 = 0 \\
P_2 + Y_4^2 - 80 = 0 \\
P_3 - Y_5^2 - 10 = 0 \\
P_3 + Y_6^2 - 70 = 0
\end{array} \right. \quad (4.14)$$

A solução do sistema expresso pela Equação 4.14 foi obtida utilizando o comando *fsolve* do Matlab[®] e os valores encontrados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Solução via MML - caso 1

Potência Despachada	MML
Unidade 1 (MW)	33,4701
Unidade 2 (MW)	64,0974
Unidade 3 (MW)	55,1012
P_L (MW)	2,6687
P_D (MW)	150,0000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687
Custo (\$/h)	1.599,98

Fonte – Elaborado pelo autor.

Esse estudo de caso pode ser encontrado em Serapião (2013), que utilizou as heurísticas PSO, FA e CS tais como apresentadas nesse trabalho, porém, sem critério de parada. A autora obteve menor custo médio entre os métodos no valor de \$1.600,46/h. Já Saadat (1999), utilizou o MML e encontrou \$1.599,98/h, resultado o qual foi verificado nesse trabalho, através da implementação do MML. Verificou-se que ambos os métodos resultam em uma solução bem próxima uma da outra. No entanto, o MML retorna o valor exato do problema e se mostrou mais preciso do que os métodos heurísticos implementados em Serapião (2013).

4.2.2 Soluções heurísticas - caso 1

Na implementação das heurísticas, a função objetivo utilizada é dada pela Equação 4.15, onde ϕ é uma constante positiva que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga.

$$f(\vec{P}) = \sum_{i=1}^3 C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^3 P_i - P_D - P_L \right| \quad (4.15)$$

Foram considerados alguns parâmetros na implementação das heurísticas, os quais seguem os valores usuais utilizados na literatura:

- O valor da constante positiva ϕ utilizada foi de 50;
- PSO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $p = 20$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 2$ (SERAPIÃO, 2009);
- FA: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $n = 20$, $\alpha = 0,5$, $\beta_0 = \gamma = 1$ (YANG, 2009);
- CS: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $n = 20$ e $P_a = 0,25$ (YANG; DEB, 2009);
- GWO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e o parâmetro $l = 20$ (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014).

Além disso, como critério de parada, foi calculado o erro relativo estimado nas últimas 500 iterações e verificado se esse erro é menor do que a tolerância de 10^{-6} .

A Tabela 4 resume os melhores resultados das simulações deste trabalho, as quais foram feitas utilizando critério de parada, contrastando-os com as soluções verificadas em Serapião (2013), que, por sua vez, utilizou 5.000 iterações em cada simulação, sem critério de parada. Pode-se observar que as heurísticas, utilizando o critério de parada, retornam melhores resultados de custo mínimo, médio (μ) e máximo, bem como menores valores de desvio padrão (σ) para o mesmo problema de DE.

Tabela 4 – Comparativo das soluções heurísticas - caso 1.

Custos	PSO	FA	CS	GWO	Ref ¹
min (\$/h)	1.599,98	1.599,98	1.599,98	1.599,99	1.600,46
μ (\$/h)	1.600,27	1.600,31	1.599,98	1.600,13	1.600,46
max (\$/h)	1.603,18	1.601,38	1.599,98	1.600,54	1.600,46
σ	0,78	0,42	0,00	0,16	0,00

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

¹ Referência:(SERAPIÃO, 2013).

O critério de parada utilizado garantiu a convergência dos algoritmos para a solução correta, além de retornar resultados melhores do que os verificados em Serapião (2013). Na tabela 4, é possível notar a qualidade das soluções através dos números resultantes para o desvio padrão.

A Tabela 5 apresenta o custo computacional das heurísticas. O GWO apresentou menor tempo de processamento e menor número de iterações. O PSO convergiu em 6.000 iterações no entanto levou apenas 4,35 segundos. O FA e o CS convergiram com 1.500 iterações, porém, levando o maior tempo de processamento, 12,59 e 24,44 segundos, respectivamente. Ressalta-se, novamente, que as soluções publicadas por Serapião (2013) foram obtidas após 5.000 iterações.

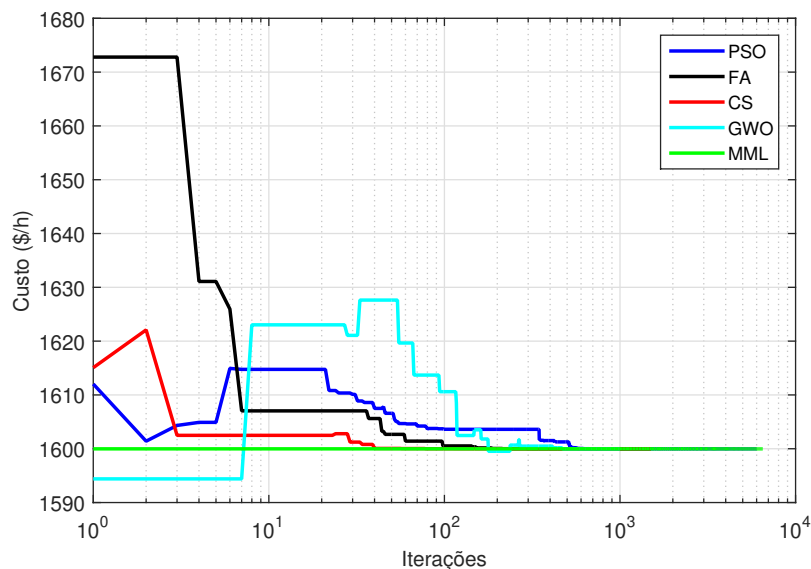
Tabela 5 – Custo computacional - caso 1.

Heurísticas	PSO	FA	CS	GWO
Tempo (s)	4,35	12,59	24,44	2,44
Iterações	6.000	1.500	1.500	1.000

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 8 mostra o gráfico das melhores soluções obtidas entre os 20 experimentos realizados com as heurísticas utilizando critério de parada para determinar o custo mínimo no valor de \$1.599,98/h. Os Algoritmos retornaram ótimos resultados quanto a precisão da resposta esperada pelo processo de otimização realizado. As heurísticas convergiram de maneira rápida e adequada em uma razoável quantidade de iterações utilizando o critério de parada com erro relativo de 10^{-6} . O baixo valor de desvio padrão revela a ótima convergência e eficiência das heurísticas para a solução do problema DE.

Figura 8 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 1.



Fonte – Autor.

4.2.3 Comparação dos resultados - caso 1

Observando a Tabela 6, pode-se concluir que os métodos de solução retornaram praticamente a mesma resposta no que diz respeito a solução exata do MML. Porém, o GWO foi o único método a não encontrar a solução exata determinada pelo MML, o que, em termos de erro percentual, é uma diferença insignificante, na ordem de 0,00062%.

A grande diferença observada ocorreu nas perdas de transmissão. O menor valor de potência perdida em transmissão atingido nas referências foi de 2,72 MW, utilizando o FA em Serapião (2013). As perdas resultantes das heurísticas aplicadas aqui são de 2,67 MW para todos os métodos. Isto representa uma diferença de 50 kW em relação a melhor solução obtida em Serapião (2013), o que significa 1,87% a mais de perdas em relação as heurísticas com critério de parada e o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os níveis de potência díspares entre as soluções em Serapião (2009) e Serapião (2013), em relação aos resultados obtidos neste trabalho, justificam a diferença de perdas de transmissão. Os resultados completos obtidos para este caso, estão no Apêndice A, ao final deste documento.

Tabela 6 – Comparação das heurísticas com o MML - caso 1.

Potência	MML	PSO	FA	CS	GWO
Uni 1 (MW)	33,4701	33,4703	33,5933	33,4701	33,1150
Uni 2 (MW)	64,0974	64,0957	64,2240	64,0974	64,0466
Uni 3 (MW)	55,1012	55,1027	54,8540	55,1012	55,5047
P_L (MW)	2,6687	2,6687	2,6713	2,6687	2,6663
P_D (MW)	150,0000	150,0000	150,0000	150,0000	150,000
$\sum P_i$ (MW)	152,6687	152,6687	152,6713	152,6687	152,6663
Custos (\$/h)	1.599,98	1.599,98	1.599,98	1.599,98	1.599,99

Fonte – Elaborado pelo autor.

4.3 Caso 2: sistema com seis unidades geradoras

Nesta Seção, é apresentada a solução do DE para um sistema termoeletrico com seis unidades geradoras, considerando uma demanda de potência $P_D = 283,4$ MW e perdas nas linhas de transmissão, utilizando o PSO, FA, CS, GWO e o MML. Os dados do sistema em questão são reproduzidos na Tabela 7, bem como as matrizes B com os coeficientes de perda nas linhas de transmissão (base de 100 MW) são dados pelas Equações 4.16 à 4.18 (PEREZ-GUERRERO; CEDENO-MALDONADO, 2005; CAI et al., 2009; ZHANG; GONG; DING, 2012).

Para esse caso, o problema de otimização é dado conforme a Equação 4.19. O objetivo é minimizar a função custo que está sujeita às restrições de desigualdade e igualdade, que são, respectivamente, as referidas capacidades limites de geração de cada unidade termoeletrica e o balanço de potência, considerando as perdas nas linhas de transmissão.

Tabela 7 – Coeficientes de custo e capacidade de geração - caso 2.

Uni _i	a _i (\$/MW ²)	b _i (\$/MW)	c _i (\$)	P _i ^{min} (MW)	P _i ^{max} (MW)
1	0,01	2	10	5	50
2	0,012	1,5	10	5	60
3	0,004	1,8	20	5	100
4	0,006	1	10	5	120
5	0,004	1,8	20	5	100
6	0,01	1,5	10	5	60

Fonte – Elaborado pelo autor.

As matrizes B com os coeficientes de perda nas linhas de transmissão.

$$B_{ij} = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0,1382 & -0,0299 & 0,0044 & -0,0022 & -0,0010 & -0,0008 \\ -0,0299 & 0,0487 & -0,0025 & 0,0004 & 0,0016 & 0,0041 \\ 0,0044 & -0,0025 & 0,0182 & -0,0070 & -0,0066 & -0,0066 \\ -0,0022 & 0,0004 & -0,0070 & 0,0137 & 0,0050 & 0,0033 \\ -0,0010 & 0,0016 & -0,0066 & 0,0050 & 0,0109 & 0,0005 \\ -0,0008 & 0,0041 & -0,0066 & 0,0033 & 0,0005 & 0,0244 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$B_{0i} = 10^{-2} \times [-0,0107 \quad 0,0060 \quad -0,0017 \quad 0,0009 \quad 0,0002 \quad 0,0030] \quad (4.17)$$

$$B_{00} = 9,8573 \times 10^{-4} \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_t(P_1, P_2, \dots, P_6) \\ \text{s.a.} \quad P_1 + P_2 + \dots + P_6 - P_D - P_L(P_1, P_2, \dots, P_6) = 0 \\ \quad \quad 5 \leq P_1 \leq 50 \\ \quad \quad 5 \leq P_2 \leq 60 \\ \quad \quad 5 \leq P_3 \leq 100 \\ \quad \quad 5 \leq P_4 \leq 120 \\ \quad \quad 5 \leq P_5 \leq 100 \\ \quad \quad 5 \leq P_6 \leq 60 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

4.3.1 Solução segundo o MML - caso 2

Como visto anteriormente, as restrições envolvendo desigualdades podem ser re-escritas como igualdades através da introdução de variáveis "slack". Assim, o problema

de DE, conforme a Equação 4.19, pode ser reescrito como mostra a Equação 4.20.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C_t(P_1, P_2, \dots, P_6) \\ \text{s.a. } P_1 + P_2 + \dots + P_6 - P_D - P_L(P_1, P_2, \dots, P_6) = 0 \\ P_1 - Y_1^2 - 5 = 0 \\ P_1 + Y_2^2 - 50 = 0 \\ P_2 - Y_3^2 - 5 = 0 \\ P_2 + Y_4^2 - 60 = 0 \\ P_3 - Y_5^2 - 5 = 0 \\ P_3 + Y_6^2 - 100 = 0 \\ P_4 - Y_7^2 - 5 = 0 \\ P_4 + Y_8^2 - 120 = 0 \\ P_5 - Y_9^2 - 5 = 0 \\ P_5 + Y_{10}^2 - 100 = 0 \\ P_6 - Y_{11}^2 - 5 = 0 \\ P_6 + Y_{12}^2 - 60 = 0 \end{array} \right. \quad (4.20)$$

A função lagrangiana pode ser determinada para o problema de otimização descrito pela Equação 4.20. Aplicando as CPO, obtém-se um sistema de equações não-lineares com 31 equações e 31 variáveis. Dessa forma, a solução foi obtida utilizando o comando *fsolve* do Matlab[®] e os valores encontrados são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Solução via MML - caso 2

Potência	MML
Uni 1 (MW)	11,2074
Uni 2 (MW)	29,1029
Uni 3 (MW)	58,0028
Uni 4 (MW)	99,4452
Uni 5 (MW)	52,4564
Uni 6 (MW)	35,5083
P_L (MW)	2,3230
P_D (MW)	283,4000
$\sum P_i$ (MW)	285,7230
Custo (\$/h)	605,43

Fonte – Elaborado pelo autor.

Através da implementação do método de otimização dos Multiplicadores de Lagrange, foi possível determinar os extremos mínimos da função custo total, sujeita às restrições de balanço de carga, considerando as perdas de transmissão e a restrição dos limites de operação.

A solução desse caso pelo MML resultou em custo total de geração no valor de \$605,43/h e perdas de transmissão de 2,3230 MW. O MML retorna o valor exato do problema. No entanto, ele pode se tornar bastante complexo a medida que a dimensão do problema aumenta. Mesmo assim, é considerado um parâmetro confiável para comparar com as soluções heurísticas propostas.

4.3.2 Soluções heurísticas - caso 2

Na implementação das heurísticas, a função objetivo utilizada é dada por (4.21), onde ϕ é uma constante positiva determinada empiricamente, que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga.

$$f(P_1, P_2, \dots, P_6) = \sum_{i=1}^6 C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^6 P_i - P_D - P_L \right| \quad (4.21)$$

Foram considerados alguns parâmetros na implementação das heurísticas, os quais seguem valores similares aos utilizados na literatura:

- O valor da constante positiva ϕ utilizada foi de 50;
- PSO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $p = 50$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 2$ (SERAPIÃO, 2009);
- FA: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $n = 50$, $\alpha = 0.5$, $\beta_0 = \gamma = 1$ (YANG, 2009);
- CS: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $n = 50$ e $P_a = 0.25$ (YANG; DEB, 2009);
- GWO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e o parâmetro $l = 50$ (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014).

Além disso, como critério de parada, foi calculado o erro relativo estimado nas últimas 500 iterações e verificado se esse erro é menor do que a tolerância de 10^{-6} .

A Tabela 9 resume os melhores resultados do caso 2, utilizando critério de parada, fato comumente desconsiderado na literatura. Pode-se observar que as heurísticas, utilizando o critério de parada, retornam ótimos resultados de custo mínimo, médio (μ) e máximo, bem como excelentes valores de desvio padrão (σ), da mesma forma verificada para o caso 1.

Tabela 9 – Soluções heurísticas - caso 2.

Custos (\$/h)	PSO	FA	CS	GWO
min	605,43	605,70	605,43	605,46
med (μ)	606,12	607,39	605,43	605,80
max	614,17	609,56	605,43	606,55
dpadrão (σ)	1,93	1,01	0.00	0,26

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

Normalmente, o critério de parada utilizado garantiu a convergência do algoritmo para a solução correta, além de retornar ótimos resultados. Na tabela 9, é possível notar a qualidade das soluções através dos números resultantes para o desvio padrão (σ), que

são próximos de zero ou zero no caso do CS. O algoritmo CS se destacou também por apresentar os menores custos mínimo, médio e máximo, todos no valor de \$605,43/h. O PSO alcançou o custo mínimo como o CS, porém, foi o algoritmo que obteve o maior custo máximo, \$614,17/h e o pior desvio padrão, 1,93. O FA não encontrou o custo mínimo, mas sua melhor solução está bem próxima do custo mínimo determinado pelo CS e obteve desvio padrão de 1,01. O GWO também não encontrou a solução mínima. Entretanto, todas as suas soluções ficaram bem próximas do ótimo e seu desvio padrão próximo de zero, 0,26.

A Tabela 10 apresenta o custo computacional das heurísticas. O PSO apresentou menor tempo de processamento, 16,91 segundos, apesar de convergir após 6.500 iterações. O FA convergiu em 1.500 iterações, no entanto, esse processo durou 53,53 segundos. O CS apresentou maior tempo de execução, 532,10 segundos, e convergiu em 12.000 iterações. Já o GWO convergiu com o segundo menor tempo e número de iterações, sendo esses valores respectivamente iguais a 21,18 segundos e 3.000 iterações.

Tabela 10 – Custo computacional - caso 2.

Heurísticas	PSO	FA	CS	GWO
Tempo (s)	16,91	53,53	532,10	21,18
Iterações	6.500	1.500	12.000	3.000

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 9 mostra o gráfico das melhores soluções obtidas entre os 20 experimentos realizados com as heurísticas utilizando critério de parada para determinar o custo mínimo. Os algoritmos PSO e CS encontraram a solução ótima no valor de \$605,43/h. O FA obteve, em sua melhor simulação, o custo de \$605,70/h, e o GWO, \$605,46. A melhor solução apresentada por Cai et al. (2009) foi de \$607,76/h, que é um custo maior que a média dos custos obtidos por cada heurística aqui analisada.

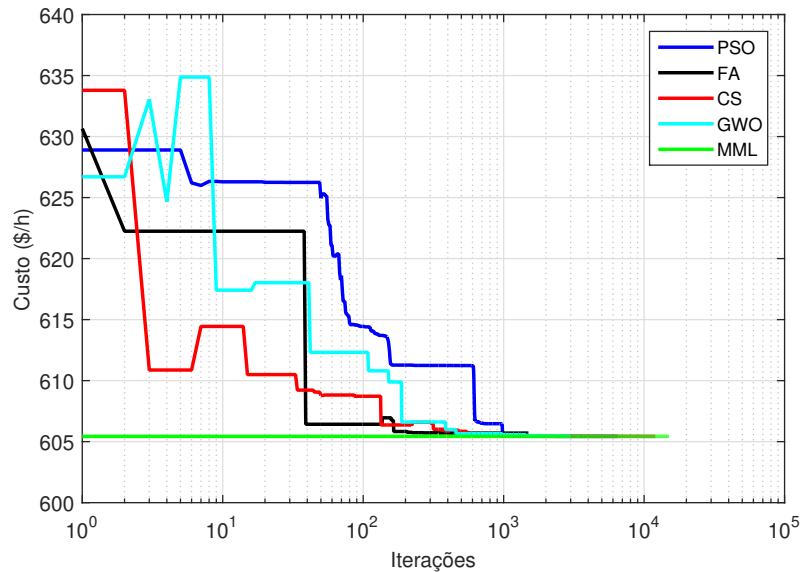
4.3.3 Comparação dos resultados - caso 2

A Tabela 11 mostra os melhores resultados obtidos pelas heurísticas em comparação com o MML. Os métodos heurísticos determinaram praticamente a mesma solução para o custo de geração. Entretanto, as heurísticas PSO e CS com critério de parada atingiram o menor custo da geração como aponta o método matemático MML, \$605,43/h, e o CS apresentou as menores perdas em comparação com o PSO. Os algoritmos FA e GWO obtiveram custo mínimo no valor de \$605,70/h e \$605,46, respectivamente. A diferença entre a solução exata do MML e das heurísticas FA e GWO, são 0,04% e 0,005% respectivamente, sendo este um erro relativo percentual baixíssimo.

Novamente, as soluções obtidas pelas heurísticas com o critério de parada apresentaram menores perdas nas linhas de transmissão. O menor valor de perdas em transmissão apresentado por Cai et al. (2009) foi de 3,05 MW. A melhor solução heurística, obtida

pelo CS, apresenta perdas de 2,32 MW. Isto representa uma diferença de 720 kW em relação a melhor solução obtida pela literatura, o que significa 31,47% a mais de potência perdida em relação ao CS com critério de parada e o Método dos Multiplicadores de Lagrange (ARAUJO, 2012). Os resultados completos obtidos para este caso, encontram-se no Apêndice B, ao final deste trabalho.

Figura 9 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 2.



Fonte – Autor.

Tabela 11 – Comparação das heurísticas com o MML - caso 2.

Potências	MML	PSO	FA	CS	GWO
Uni 1 (MW)	11,2074	11,2328	10,6141	11,2241	10,2123
Uni 2 (MW)	29,1029	29,0976	27,7403	29,1021	28,2902
Uni 3 (MW)	58,0028	57,9823	60,0703	57,9971	59,2911
Uni 4 (MW)	99,4452	99,4535	94,7737	99,4419	99,2725
Uni 5 (MW)	52,4564	52,4510	54,2615	52,4514	52,5858
Uni 6 (MW)	35,5083	35,5062	38,1712	35,5064	36,0416
P_L (MW)	2,3230	2,3234	2,2310	2,3231	2,2934
P_D (MW)	283,4000	283,4000	283,4000	283,4000	283,4000
$\sum P_i$ (MW)	285,7230	285,7234	285,6311	285,7231	285,6935
Custo (\$/h)	605,43	605,43	605,70	605,43	605,46

Fonte – Elaborado pelo autor.

4.4 Caso 3: sistema com quinze unidades geradoras

Nesta seção, é apresentada a solução do DE para um sistema termoeletrico com quinze unidades geradoras, considerando uma demanda de potência $P_D = 2.630$ MW e perdas nas linhas de transmissão, utilizando PSO, FA, CS, GWO e MML. Os dados do sistema em questão são reproduzidos na Tabela 12 (GAING, 2003).

As matrizes B com os coeficientes de perda nas linhas de transmissão (base de 100 MW) estão listadas a seguir nas Equações 4.22, 4.23 e 4.24. Essas matrizes podem ser obtidas a partir dos resultados do estudo de fluxo de potência do sistema, aplicando métodos de regressão não linear como apresentado em Saadat (1999).

Tabela 12 – Coeficientes de custos e limites de geração - caso 3.

Uni	P_i^{min}	P_i^{max}	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	150	455	0,000299	10,1	671
2	150	455	0,000183	10,2	574
3	20	130	0,001126	8,8	374
4	20	130	0,001126	8,8	374
5	150	470	0,000205	10,4	461
6	135	460	0,000301	10,1	630
7	135	465	0,000364	9,8	548
8	60	300	0,000338	11,2	227
9	25	162	0,000807	11,2	173
10	25	160	0,001203	10,7	175
11	20	80	0,003586	10,2	186
12	20	80	0,005513	9,9	230
13	25	85	0,000371	13,1	225
14	15	55	0,001929	12,1	309
15	15	55	0,004447	12,4	323

Fonte – (GAING, 2003).

$$B_{ij} = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 1,4 & 1,2 & 0,7 & -0,1 & -0,3 & -0,1 & -0,1 & -0,1 & -0,3 & -0,5 & -0,3 & -0,2 & 0,4 & 0,3 & -0,1 \\ 1,2 & 1,5 & 1,3 & 0,0 & -0,5 & -0,2 & 0,0 & 0,1 & -0,2 & -0,4 & -0,4 & -0,0 & 0,4 & 1,0 & -0,2 \\ 0,7 & 1,3 & 7,6 & -0,1 & -1,3 & -0,9 & -0,1 & 0,0 & -0,8 & -1,2 & -1,7 & -0,0 & -2,6 & 11,1 & -2,8 \\ -0,1 & 0,0 & -0,1 & 3,4 & -0,7 & -0,4 & 1,1 & 5,0 & 2,9 & 3,2 & -1,1 & -0,0 & 0,1 & 0,1 & -2,6 \\ -0,3 & -0,5 & -1,3 & -0,7 & 9,0 & 1,4 & -0,3 & -1,2 & -1,0 & -1,3 & 0,7 & -0,2 & -0,2 & -2,4 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & -0,9 & -0,4 & 1,4 & 1,6 & -0,0 & -0,6 & -0,5 & -0,8 & 1,1 & -0,1 & -0,2 & -1,7 & 0,3 \\ -0,1 & 0,0 & -0,1 & 1,1 & -0,3 & -0,0 & 1,5 & 1,7 & 1,5 & 0,9 & -0,5 & 0,7 & -0,0 & -0,2 & -0,8 \\ -0,1 & 0,1 & 0,0 & 5,0 & -1,2 & -0,6 & 1,7 & 16,8 & 8,2 & 7,9 & -2,3 & -3,6 & 0,1 & 0,5 & -7,8 \\ -0,3 & -0,2 & -0,8 & 2,9 & -1,0 & -0,5 & 1,5 & 8,2 & 12,9 & 11,6 & -2,1 & -2,5 & 0,7 & -1,2 & -7,2 \\ -0,5 & -0,4 & -1,2 & 3,2 & -1,3 & -0,8 & 0,9 & 7,9 & 11,6 & 20,0 & -2,7 & -3,4 & 0,9 & -1,1 & -8,8 \\ -0,3 & -0,4 & -1,7 & -1,1 & 0,7 & 1,1 & -0,5 & -2,3 & -2,1 & -2,7 & 14,0 & 0,1 & 0,4 & -3,8 & 16,8 \\ -0,2 & -0,0 & -0,0 & -0,0 & -0,2 & -0,1 & 0,7 & -3,6 & -2,5 & -3,4 & 0,1 & 5,4 & -0,1 & -0,4 & 2,8 \\ 0,4 & 0,4 & -2,6 & 0,1 & -0,2 & -0,2 & -0,0 & 0,1 & 0,7 & 0,9 & 0,4 & -0,1 & 10,3 & -10,1 & 2,8 \\ 0,3 & 1,0 & 11,1 & 0,1 & -2,4 & -1,7 & -0,2 & 0,5 & -1,2 & -1,1 & -3,8 & -0,4 & -10,1 & 57,8 & -9,4 \\ -0,1 & -0,2 & -2,8 & -2,6 & -0,3 & 0,3 & -0,8 & -7,8 & -7,2 & -8,8 & 16,8 & 2,8 & 2,8 & -9,4 & 128,3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$B_{ij} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0,1 & -0,2 & 2,8 & -0,1 & 0,1 & -0,3 & -0,2 & -0,2 & 0,6 & 3,9 & -1,7 & -0,0 & -3,2 & 6,7 & -6,4 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$B_{00} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 5,5 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Conforme já mencionado, o DE de unidades termoeletricas consiste em um problema de otimização onde se deseja fazer alocação da carga demandada pelo sistema de potência elétrica nas unidades geradoras, de modo a alcançar o menor custo total de geração, atendendo as devidas restrições da operação e as condições de igualdade e desigualdade individual de cada unidade. O custo total do combustível na geração de 15

termoelétricas é o somatório do custo individual de cada unidade de geração, dado pela Equação 4.25.

$$\sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) \quad (4.25)$$

Na Equação anterior, C_i é a função de custo do combustível da unidade de geração i em \$/h e P_i , em MW, é a potência gerada pela mesma unidade i .

O custo individual de cada unidade é expresso pela forma quadrática em função da potência gerada, Equação 4.26, que estará sujeito às restrições de desigualdade expressas na Equação 4.27.

$$C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (4.26)$$

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (4.27)$$

Na Equação 4.26, a_i , b_i e c_i são os coeficientes característicos do gerador e P_i^{min} e P_i^{max} são, respectivamente, os limites de operação mínimo e máximo da unidade i em MW.

Com anteriormente mencionado nos casos anteriores, a potência gerada deve satisfazer a demanda de carga solicitada pelo sistema. A demanda P_D , considerada constante, é a potência a ser suprida pelo sistema e P_L é a perda de transmissão a ser calculada conforme descrito no Capítulo 2. As Equações 4.27 e 4.28 são as referidas condições de desigualdade e igualdade do sistema.

$$\sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{15}) = 0 \quad (4.28)$$

Para este caso, o problema de minimizar o custo de quinze unidades termoelétricas considerando as perdas nas linhas de transmissão, limites de geração e o balanço de potência pode ser escrito conforme a Equação 4.29.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, \dots, P_{15}) = \sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{15}) = 0 \\ \\ P_1^{min} \leq P_1 \leq P_1^{max} \\ \\ \vdots \\ \\ P_{15}^{min} \leq P_{15} \leq P_{15}^{max} \end{array} \right. \quad (4.29)$$

4.4.1 Solução segundo o MML - caso 3

Para solucionar o DE com quinze unidades geradoras através do MML, seguiu-se o mesmo procedimento realizado para solucionar os casos 4.2 e 4.3. As restrições envolvendo

desigualdades foram reescritas como igualdades através da introdução de variáveis “slacks” e a função lagrangiana pôde ser escrita para o problema de otimização como mostra a Equação 4.30. Aplicando as CPO, como em Simon e Blume (2004), foi possível obter, através da função lagrangiana, Equação 4.31, um sistema de equações não-lineares com 76 equações e 76 variáveis.

A solução foi obtida utilizando o comando *fsolve* do Matlab[®], a qual é apresentada na Tabela 13. Essa solução foi obtida numericamente utilizando condições iniciais aleatórias que, em muitas das vezes, a solução encontrada foi pior que aquelas apresentadas pelas heurísticas. Portanto, a solução obtida pelo MML foi determinada tomando como condição inicial a melhor solução obtida entre as heurísticas, que resultou em um custo menor do que aqueles por eles encontrados.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & C(P_1, P_2, \dots, P_{15}) \\ \text{s.a.} & P_1 + P_2 + \dots + P_{15} - P_D - P_L(P_1, P_2, \dots, P_{15}) = 0 \\ & P_1 - Y_1^2 - 150 = 0 \\ & P_1 + Y_2^2 - 455 = 0 \\ & P_2 - Y_3^2 - 150 = 0 \\ & P_2 + Y_4^2 - 455 = 0 \\ & P_n - Y_m^2 - P_n^{min} = 0 \\ & P_n + Y_m^2 - P_n^{max} = 0 \\ & \vdots \\ & P_{15} - Y_{29}^2 - P_{15}^{min} = 0 & m = 1, 2, \dots, 30. \\ & P_{15} + Y_{30}^2 - P_{15}^{max} = 0 & n = 1, 2, \dots, 15. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_1, \dots, P_{15}, Y_1, \dots, Y_{30}, \lambda_1, \dots, \lambda_{31}) = & C(P_1, \dots, P_{15}) + \lambda_1 [P_1 + \dots + P_{15} \\ & - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{15})] + \lambda_2 (P_1 - Y_1^2 - 150) + \lambda_3 (P_1 + Y_2^2 - 455) + \dots + \\ & \lambda_{30} (P_{15} - Y_{29}^2 - P_{15}^{min}) + \lambda_{31} (P_{15} + Y_{30}^2 - P_{15}^{max}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.4.2 Soluções heurísticas - caso 3

Na implementação dos algoritmos analisados, a função objetivo utilizada é dada conforme (4.32), onde ϕ é uma constante positiva determinada empiricamente, que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga, como mencionado nos casos anteriores.

$$f(P_1, P_2, \dots, P_{15}) = \sum_{i=1}^{15} C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^{15} P_i - P_D - P_L \right| \quad (4.32)$$

Como critério de parada, da mesma forma que nos casos anteriores, foi calculado o erro relativo estimado nas últimas 500 iterações e verificado se esse erro é menor do que a tolerância de 10^{-6} .

Os parâmetros considerados na implementação das heurísticas são os mesmos valores usuais utilizados na literatura. Para cada método, tais parâmetros adotados foram os seguintes:

- O valor da constante positiva ϕ utilizada foi de 50;
- PSO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $p = 100$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 2$ (SERAPIÃO, 2009);
- FA: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $v = 100$, $\alpha = 0,5$, $\beta_0 = \gamma = 1$ (YANG, 2009);
- CS: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $n = 100$ e $P_a = 0,25$ (YANG; DEB, 2009);
- GWO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e o parâmetro $l = 100$ (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014).

Tabela 13 – Solução via MML - caso 3

Potência	MML
Uni 1(MW)	455,0000
Uni 2(MW)	455,0000
Uni 3(MW)	130,0000
Uni 4(MW)	130,0000
Uni 5(MW)	238,5672
Uni 6(MW)	460,0000
Uni 7(MW)	465,0000
Uni 8(MW)	60,0000
Uni 9(MW)	25,0000
Uni 10(MW)	25,7775
Uni 11(MW)	77,5615
Uni 12(MW)	80,0000
Uni 13(MW)	25,0000
Uni 14(MW)	15,0000
Uni 15(MW)	15,0000
P_L (MW)	26,9062
P_D (MW)	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.656,9062
Custos(\$/h)	32.547,50

Fonte – Elaborado pelo autor.

A Tabela 14 apresenta os resultados dos custos totais encontrados pelas heurísticas implementadas. Nessa Tabela, pode-se verificar que a melhor solução encontrada pelas heurísticas é a determinada pelo CS, equivalente a 32.553,40 \$/h. Essa resposta é, aproximadamente, 0,93% menor do que a obtida pelo PSO, 0,21% menor que a solução do FA e apenas 0,01% menor que resultado encontrado pelo GWO, os quais, respectivamente, obtiveram o custo mínimo de 32.856,10 \$/h, 32.621,24 \$/h e 32.556,86 \$/h.

Nesse caso, é possível observar uma variação nas melhores soluções encontradas pelas heurísticas. O CS, que determinou a melhor solução entre os algoritmos, apresentou

um desvio padrão nas soluções de 5,32, valor significativamente menor que o PSO e o FA, sendo este parâmetro para o GWO igual a 7,54, maior que o CS em 41,73%. Ainda, o CS apresentou menor custo mínimo, menor custo médio e menor custo máximo. Esses números apontam para uma melhor convergência do CS em determinar a solução do problema nesse caso.

A Tabela 15 apresenta o custo computacional das heurísticas. O PSO apresentou menor tempo de processamento, 106,02 segundos, e convergiu após 9.500 iterações, com o maior custo mínimo entre as heurísticas. O FA convergiu em 1.500 iterações e levou 262,31 segundos com o segundo pior custo mínimo entre as heurísticas. Já o GWO convergiu em 282,41 segundos e realizou 3.000 iterações, sendo este um numero bem razoável para a solução encontrada, que foi diferente apenas 0,01% que o melhor resultado determinado pelo CS. Ainda, pode-se destacar que o CS apresentou maior tempo de execução, 3.227,28 segundos, e convergiu após 13.000 iterações, obtendo as melhores soluções de custo mínimo, médio, máximo e desvio padrão.

Tabela 14 – Comparativo das soluções heurísticas - caso 3.

Custos	PSO	FA	CS	GWO
min (\$/h)	32.856,10	32.621,24	32.553,40	32.556,86
μ (\$/h)	33.069,94	32.770,29	32.556,14	32.566,03
max (\$/h)	33.308,56	32.872,37	32.577,70	32.584,04
σ	100,71	64,45	5,32	7,54

Fonte – Elaborado pelo autor.

Tabela 15 – Custo computacional - caso 3.

Heurísticas	PSO	FA	CS	GWO
Tempo (s)	106,02	262,34	3.227,28	282,41
Iterações	9.500	1.500	13.000	3.000

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

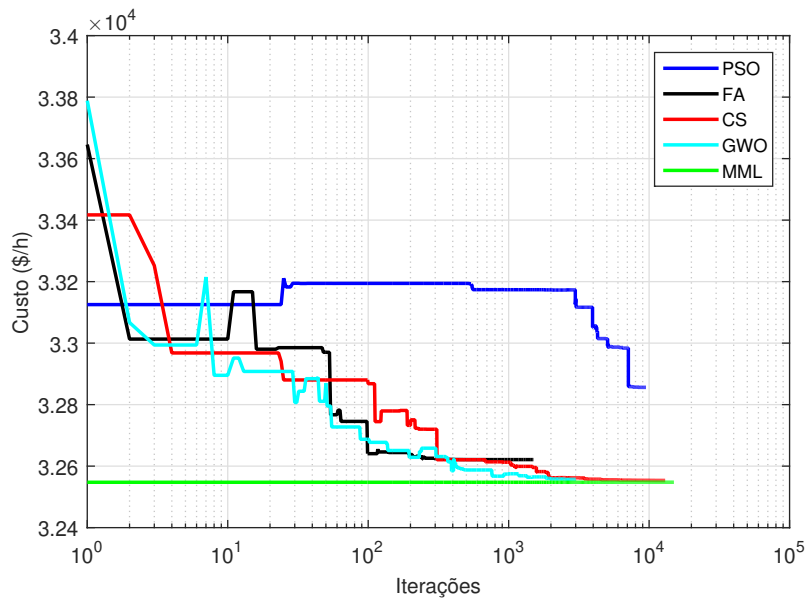
A Figura 10 mostra o gráfico das melhores soluções obtidas entre os 20 experimentos realizados com as heurísticas utilizando critério de parada para determinar o custo mínimo. Os algoritmos CS e GWO encontraram a solução ótima no valor de \$32.553,40/h e \$32.556,86/h, respectivamente. Foram estas heurísticas que mais se aproximaram da solução exata determinada pelo MML, \$32.547,50/h. O PSO e o FA obtiveram soluções 0,95% e 0,23% maiores do que a solução encontrada via MML, respectivamente.

4.4.3 Comparação dos resultados - caso 3

Observando a Tabela 16, pode-se concluir que os métodos heurísticos de solução retornaram valores bem distintos uns dos outros. Porém, o CS e o GWO resultaram em valores de custos aproximados. Nenhum dos algoritmos alcançou o custo mínimo conforme o MML. O CS foi o método que mais se aproximou da solução encontrada

pelo MML, com pouca diferença, representando um custo 0,02% maior. Por sua vez, a resposta obtida pelo GWO apresentou um custo 0,03% maior que o MML. Já o PSO e o FA apresentaram, respectivamente, custo 0,95% e 0,23% maiores em relação a resposta atingida com o MML.

Figura 10 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 3.



Fonte – Autor.

Tabela 16 – Comparativo das heurísticas com o MML - caso 3

Potência	MML	PSO	FA	CS	GWO
Uni 1(MW)	455,0000	442,2283	453,8146	455,0000	455,0000
Uni 2(MW)	455,0000	396,2998	454,8261	455,0000	453,4655
Uni 3(MW)	130,0000	121,2977	129,8744	129,9892	130,0000
Uni 4(MW)	130,0000	129,9753	129,7585	129,9919	130,0000
Uni 5(MW)	238,5672	238,6817	241,3371	232,9318	258,2840
Uni 6(MW)	460,0000	458,0793	444,9782	459,9582	460,0000
Uni 7(MW)	465,0000	420,0707	464,9291	464,9965	465,0000
Uni 8(MW)	60,0000	106,1852	63,3000	60,0255	60,0364
Uni 9(MW)	25,0000	104,5480	46,1139	25,0109	25,5692
Uni 10(MW)	25,7775	58,2845	68,2199	32,4246	25,8010
Uni 11(MW)	77,5615	49,7174	78,0197	77,1298	59,4729
Uni 12(MW)	80,0000	27,9130	22,2040	79,8438	80,0000
Uni 13(MW)	25,0000	25,2582	26,8754	25,0000	25,0230
Uni 14(MW)	15,0000	44,4354	16,2076	15,0000	15,3488
Uni 15(MW)	15,0000	39,6690	18,6208	15,0019	15,0000
P_L (MW)	26,9062	32,6435	29,0792	27,3041	28,0008
P_D (MW)	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000	2.630,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.656,9062	2.662,6435	2.659,0792	2.657,3041	2.658,0008
Custos(\$/h)	32.547,50	32.856,10	32.621,24	32.553,40	32.556,86

Fonte – Elaborado pelo autor.

O PSO, entre as heurísticas, apresentou o maior custo mínimo, 32.856,10 \$/h. Esse resultado também se refletiu nas perdas de potência transmitida. O PSO produziu 32,6435 MW para suprir as perdas de transmissão, o equivalente a 5,7373 MW a mais

que o MML, o que resulta em um aumento nas perdas equivalente a 21,32%. Já o FA apresentou perdas de 2,1730 MW, enquanto que para o GWO e o CS esses valores foram, respectivamente, 1,0946 MW e 0,3979 MW. Esses valores representam, respectivamente, 8,08%, 4,07% e 1,48% a mais de perdas em relação a solução encontrada via MML. Os resultados completos obtidos para este caso, estão no Apêndice C, ao final deste documento.

4.5 Caso 4: sistema com vinte unidades geradoras

Neste caso, foi resolvido um problema de DE, considerando as perdas nas linhas de transmissão, limites de geração e zonas de operação proibidas de um sistema composto por 20 unidades geradoras. A solução pelos métodos heurísticos apresentados neste trabalho foram comparados com aqueles apresentados em Aragón, Esquivel e Coello (2015), os quais foram utilizados como referência para comprovar a eficácia dos métodos analisados. Por tratar-se de um problema de grande tratamento matemático, optou-se por não se utilizar o MML neste caso.

Sendo assim, para o caso 4 caso, o custo total do combustível na geração de 20 termoelétricas é o somatório do custo individual de cada unidade de geração, dado por (4.33).

$$\sum_{i=1}^{20} C_i(P_i) \quad (4.33)$$

Em (4.33), C_i é a função de custo do combustível da unidade de geração i em \$/h e P_i , em MW, é a potência gerada pela mesma unidade i .

O custo individual de cada unidade é expresso pela forma quadrática em função da potência gerada, conforme (4.34).

$$C_i(P_i) = a_1 P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (4.34)$$

que estará restrito à (4.35)

$$P_i^{mín} \leq P_i \leq P_i^{máx} \quad (4.35)$$

onde a_i , b_i e c_i são os coeficientes característicos do gerador; $P_i^{mín}$ e $P_i^{máx}$ são, respectivamente, os limites de operação mínimo e máximo da unidade i em MW.

A potência gerada deve satisfazer a demanda de carga solicitada pelo sistema de acordo com a Equação 4.36.

$$\sum_{i=1}^{20} P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{20}) = 0 \quad (4.36)$$

Destaca-se que a demanda P_D , considerada constante, é a potência a ser suprida pelo sistema e P_L é a perda de transmissão a ser calculada, conforme descrito no Capítulo

2. As Equações 4.35 e 4.36 são as referidas condições de desigualdade e igualdade do sistema.

O problema de minimizar o custo de 20 unidades geradoras, considerando as perdas nas linhas de transmissão e limites de geração, pode ser descrito por (4.37).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(P_1, \dots, P_{20}) = \sum_{i=1}^{20} C_i(P_i) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{20} P_i - P_D - P_L(P_1, \dots, P_{20}) = 0 \\ \\ P_1^{min} \leq P_1 \leq P_1^{max} \\ \\ \vdots \\ \\ P_{20}^{min} \leq P_{20} \leq P_{20}^{max} \end{array} \right. \quad (4.37)$$

O sistema compreendendo as vinte unidade geradoras termoeletricas, possui carga demandada P_D equivalente a 2.500 MW. O custo está sujeito ao balanço de potência considerando as perdas de transmissão e, além disso, está restrito, também, à desigualdade dos limites de geração. Os dados do sistema estão disponíveis na Tabela 17, conforme exposto em Aragón, Esquivel e Coello (2015).

Tabela 17 – Coeficientes de custos e limites de geração - caso 4.

Uni	P_i^{min}	P_i^{max}	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	150	600	0,00068	18,19	1000
2	50	200	0,00071	19,26	970
3	50	200	0,0065	19,80	600
4	50	200	0,005	19,10	700
5	50	160	0,00738	18,10	420
6	20	100	0,00612	19,26	360
7	25	125	0,0079	17,14	490
8	50	150	0,00813	18,92	660
9	50	200	0,00522	18,27	765
10	30	150	0,00573	18,92	770
11	100	300	0,0048	16,69	800
12	150	500	0,0031	16,76	970
13	40	160	0,0085	17,36	900
14	20	130	0,00511	18,70	700
15	25	185	0,00398	18,70	450
16	20	80	0,0712	14,26	370
17	30	85	0,0089	19,14	480
18	30	120	0,00713	18,92	680
19	40	120	0,00622	18,47	700
20	30	100	0,00773	19,79	850

Fonte – Aragón, Esquivel e Coello (2015)

A matriz B dos coeficientes de perda nas linhas de transmissão, com base de 100 MW, é apresentada pela Equação 4.38. Essa matriz pode ser obtida a partir dos

resultados do estudo de fluxo de potência do sistema, aplicando métodos de regressão não-linear, como relatado nas Seções anteriores.

$$B_{ij} = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 8,7 & 0,43 & -4,61 & 0,36 & 0,32 & -0,66 & 0,96 & -1,6 & 0,8 & -0,1 & 3,6 & 0,64 & 0,79 & 2,1 & 1,7 & 0,8 & -3,2 & 0,7 & 0,48 & -0,7 \\ 0,43 & 8,3 & -0,97 & 0,22 & 0,75 & -0,28 & 5,04 & 1,7 & 0,54 & 7,2 & -0,28 & 0,98 & -0,46 & 1,3 & 0,8 & -0,2 & 0,52 & -1,7 & 0,8 & 0,2 \\ -4,61 & -0,97 & 9,0 & -2,0 & 0,63 & 3,0 & 1,7 & -4,3 & 3,1 & -2,0 & 0,7 & -0,77 & 0,93 & 4,6 & -0,3 & 4,2 & 0,38 & 0,7 & -2,0 & 3,6 \\ 0,36 & 0,22 & -2,0 & 5,3 & 0,47 & 2,62 & -1,96 & 2,1 & 0,67 & 1,8 & -0,45 & 0,92 & 2,4 & 7,6 & -0,2 & 0,7 & -1,0 & 0,86 & 1,6 & 0,87 \\ 0,32 & 0,75 & 0,63 & 0,47 & 8,6 & -0,8 & 0,37 & 0,72 & -0,9 & 0,69 & 1,8 & 4,3 & -2,8 & -0,7 & 2,3 & 3,6 & 0,8 & 0,2 & -3,0 & 0,5 \\ -0,66 & -0,28 & 3,0 & 2,62 & -0,8 & 11,8 & -4,9 & 0,3 & 3,0 & -3,0 & 0,4 & 0,78 & 6,4 & 2,6 & -0,2 & 2,1 & -0,4 & 2,3 & 1,6 & -2,1 \\ 0,96 & 5,04 & 1,7 & -1,96 & 0,37 & -4,9 & 8,24 & -0,9 & 5,9 & -0,6 & 8,5 & -0,83 & 7,2 & 4,8 & -0,9 & -0,1 & 1,3 & 0,7 & 1,9 & 1,3 \\ -1,6 & 1,7 & -4,3 & 2,1 & 0,72 & 0,3 & -0,9 & 1,2 & -0,96 & 0,56 & 1,6 & 0,8 & -0,4 & 0,23 & 0,75 & -0,56 & 0,8 & -0,3 & 5,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0,54 & 3,1 & 0,67 & -0,9 & 3,0 & 5,9 & -0,96 & 0,93 & -0,3 & 6,5 & 2,3 & 2,6 & 0,58 & -0,1 & 0,23 & -0,3 & 1,5 & 0,74 & 0,7 \\ -0,1 & 7,2 & -2,0 & 1,8 & 0,69 & -3,0 & -0,6 & 0,56 & -0,3 & 0,99 & -6,6 & 3,9 & 2,3 & -0,3 & 2,8 & -0,8 & 0,38 & 1,9 & 0,47 & -0,26 \\ 3,6 & -0,28 & 0,7 & -0,45 & 1,8 & 0,4 & 8,5 & 1,6 & 6,5 & -6,6 & 10,7 & 5,3 & -0,6 & 0,7 & 1,9 & -2,6 & 0,93 & -0,6 & 3,8 & -1,5 \\ 0,64 & 0,98 & -0,77 & 0,92 & 4,3 & 0,78 & -0,83 & 0,8 & 2,3 & 3,9 & 5,3 & 8,0 & 0,9 & 2,1 & -0,7 & 5,7 & 5,4 & 1,5 & 0,7 & 0,1 \\ 0,79 & -0,46 & 0,93 & 2,4 & -2,8 & 6,4 & 7,2 & -0,4 & 2,6 & 2,3 & -0,6 & 0,9 & 11,0 & 0,87 & -1,0 & 3,6 & 0,46 & -0,9 & 0,6 & 1,5 \\ 2,1 & 1,3 & 4,6 & 7,6 & -0,7 & 2,6 & 4,8 & 0,23 & 0,58 & -0,3 & 0,7 & 2,1 & 0,87 & 3,8 & 0,5 & -0,7 & 1,9 & 2,3 & -0,97 & 0,9 \\ 1,7 & 0,8 & -0,3 & -0,2 & 2,3 & -0,2 & -0,9 & 0,75 & -0,1 & 2,8 & 1,9 & -0,7 & -1,0 & 0,5 & 11,0 & 1,9 & -0,8 & 2,6 & 2,3 & -0,1 \\ 0,8 & -0,2 & 4,2 & 0,7 & 3,6 & 2,1 & -0,1 & -0,56 & 0,23 & -0,8 & -2,6 & 5,7 & 3,6 & -0,7 & 1,9 & 10,8 & 2,5 & -1,8 & 0,9 & -2,6 \\ -3,2 & 0,52 & 0,38 & -1,0 & 0,8 & -0,4 & 1,3 & 0,8 & -0,3 & 0,38 & 0,93 & 5,4 & 0,46 & 1,9 & -0,8 & 2,5 & 8,7 & 4,2 & -0,3 & 0,68 \\ 0,7 & -1,7 & 0,7 & 0,86 & 0,2 & 2,3 & 0,76 & -0,3 & 1,5 & 1,9 & -0,6 & 1,5 & -0,9 & 2,3 & 2,6 & -1,8 & 4,2 & 2,2 & 0,16 & -0,3 \\ 0,48 & 0,8 & -2,0 & 1,6 & -3,0 & 1,6 & 1,9 & 5,3 & 0,74 & 0,47 & 3,8 & 0,7 & 0,6 & -0,97 & 2,3 & 0,9 & -0,3 & 0,16 & 7,6 & 0,69 \\ -0,7 & 0,2 & 3,6 & 0,87 & 0,5 & -2,1 & 1,3 & 0,8 & 0,7 & -0,26 & -1,5 & 0,1 & 1,5 & 0,9 & -0,1 & -2,6 & 0,68 & -0,3 & 0,69 & 7,0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Destaca-se que esta Seção tem por objetivo apresentar os resultados das simulações computacionais, realizadas para avaliação do desempenho das heurísticas implementadas, em comparação com a solução apresentada por Aragón, Esquivel e Coello (2015), onde os autores utilizaram o Algoritmo Imune para Problemas de Despacho Econômico (IA_EDP), o qual é inspirado no modelo de células T do sistema imunológico. Nessa referência, o método teve seu desempenho analisado para diversos problemas de DE disponíveis na literatura, tendo seus resultados comparados com aqueles apresentados por outros métodos.

4.5.1 Soluções heurísticas - caso 4

Novamente, para a implementação dos algoritmos propostos, a função objetivo é dada conforme (4.39), a mesma utilizada nos casos anteriores, onde ϕ é uma constante positiva determinada empiricamente, que penaliza as soluções que não atendem ao equilíbrio no balanço de carga.

$$f(P_1, P_2, \dots, P_{20}) = \sum_{i=1}^{20} C_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^{20} P_i - P_D - P_L \right| \quad (4.39)$$

Como critério de parada, foi calculado o erro relativo estimado nas últimas 500 iterações e verificado se esse erro é menor do que a tolerância de 10^{-6} , da mesma forma realizada para os casos anteriores.

Os parâmetros considerados na implementação das heurísticas são os mesmos valores usuais utilizados na literatura. Para cada método, tais parâmetros são os seguintes:

- O valor da constante positiva ϕ utilizada foi de 100;
- PSO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $p = 100$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 2$ (SERAPIÃO, 2009);

- FA: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $v = 100$, $\alpha = 0,5$, $\beta_0 = \gamma = 1$ (YANG, 2009);
- CS: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e os parâmetros $n = 100$ e $P_a = 0,25$ (YANG; DEB, 2009);
- GWO: foram realizadas 20 execuções, considerando condições iniciais aleatórias e o parâmetro $l = 100$ (MIRJALILI; MIRJALILI; LEWIS, 2014).

A Tabela 18 apresenta os resultados dos custos totais encontrados pelas heurísticas implementadas e a solução dada por Aragón, Esquivel e Coello (2015). Nessa Tabela, pode-se verificar que a melhor solução encontrada pelas heurísticas é a determinada pelo GWO, de 62.462,00 \$/h. Essa resposta é aproximadamente 0,05% menor do que a obtida pelo PSO, 0,06% menor que a solução do FA e apenas 0,003% menor que o resultado encontrado pelo CS, métodos os quais respectivamente, obtiveram o custo mínimo de 62.490,53 \$/h, 62.498,10 \$/h e 62.463,75 \$/h.

Tabela 18 – Comparativo das soluções heurísticas - caso 4.

Custos	PSO	FA	CS	GWO	Ref. ²
min (\$/h)	62.490,53	62.498,10	62.463,75	62.462,00	62.466,80
μ (\$/h)	62.534,96	62.545,57	62.483,31	62.473,24	62.487,51
max (\$/h)	62.601,35	62.614,15	62.504,36	62.494,27	62.528,99
σ	28,82	31,15	12,54	8,00	12,04

Fonte – Elaborado pelo autor.

Nesse caso, é possível observar uma pequena variação entre as melhores soluções encontradas pelas heurísticas. Isso indica uma boa convergência dos algoritmos para a solução do problema. O FA apresentou o maior desvio padrão entre as heurísticas, atingindo o valor de 31,15. O GWO apresentou menor custo mínimo, menor custo médio e menor custo máximo dentre todas as heurísticas, inclusive em relação às soluções da literatura em análise. Ainda, pode-se ressaltar que o GWO se destacou também por um baixo valor de desvio padrão, o menor entre todos, sendo este igual a 8,00.

A Tabela 19 apresenta o custo computacional das heurísticas. O PSO apresentou menor tempo de processamento, 257,53 segundos, e convergiu após 16.500 iterações, com o custo mínimo 0,05% maior que a melhor solução. Já o FA convergiu em 1.500 iterações e levou 316,88 segundos para convergir, apresentando o maior custo mínimo entre as heurísticas. Por sua vez, o GWO convergiu em 2.346,94 s, realizando 3.500 iterações, o que representa um tempo de processamento bem superior em relação aqueles verificados nos casos anteriores. Entretanto, cabe destacar que a solução encontrada pelo GWO foi o melhor resultado determinado entre as heurísticas analisadas, apresentando, também, custo mínimo inferior ao verificado nos resultados da referência². Por fim, o CS apresentou

² Referência: Aragón, Esquivel e Coello (2015).

maior tempo de processamento, 2.489,33 segundos, convergindo após 6.500 iterações. No entanto, o CS apresentou melhores soluções de custo mínimo, médio e máximo em comparação com os resultados demonstrados em Aragón, Esquivel e Coello (2015).

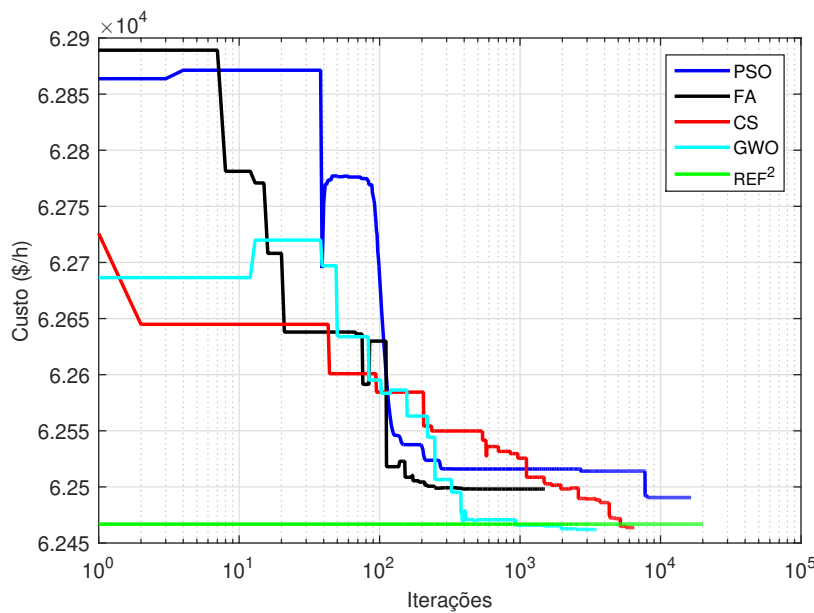
Tabela 19 – Custo computacional - caso 4.

Heurísticas	PSO	FA	CS	GWO
Tempo (s)	257,53	316,88	2.489,33	2.346,94
Iterações	16.500	1.500	6.500	3.500

Fonte – Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 11 mostra o gráfico das melhores soluções obtidas entre os 20 experimentos realizados, com as heurísticas utilizando critério de parada para determinar o custo mínimo. Os algoritmos CS e GWO encontraram uma solução melhor que a referência, no valor de \$62.463,75/h e \$62.462,00/h, respectivamente. Essas técnicas obtiveram uma solução 0,005% e 0,008% respectivamente, melhor que o resultado apontado na literatura em questão. Já o PSO e o FA obtiveram soluções 0,04% e 0,05% maiores do que a solução da referência, respectivamente.

Figura 11 – Menor custo para as heurísticas com critério de parada - caso 4.



Fonte – Autor.

4.5.2 Comparação dos resultados - caso 4

Observando a Tabela 20, pode-se concluir que os métodos heurísticos encontraram valores com baixa diferença percentual. O PSO e o FA resultaram em valores de mínimos maiores do que aqueles apresentados em Aragón, Esquivel e Coello (2015). Entretanto, essa diferença percentual não ultrapassou 0,05%. O CS e o GWO obtiveram custo mínimo menor que a literatura, com pouca diferença, sendo este 0,008% melhor no caso do GWO. Já o CS apresentou custo 0,005% menor que a literatura. Além disso, o

PSO e o FA apresentaram, respectivamente, custos 0,05% e 0,06% maiores em relação a resposta atingida pelo GWO e, respectivamente, 0,04% e 0,05% maiores do que a solução da referência. Os algoritmos não apresentaram diferenças percentuais nas soluções de custo mínimo, sendo este valor igual a 0,1%.

Tabela 20 – Comparativo das heurísticas com a literatura - caso 4

Potência	PSO	FA	CS	GWO	Ref. ²
Uni 1(MW)	489,3517	522,4807	517,3420	500,4321	498,3856
Uni 2(MW)	189,4730	116,6475	150,7032	182,0284	194,5007
Uni 3(MW)	126,7252	142,7965	126,2013	136,1101	109,7942
Uni 4(MW)	102,4843	81,2249	93,2303	99,9500	100,0175
Uni 5(MW)	106,2969	112,9283	100,6331	113,2372	118,2894
Uni 6(MW)	75,7274	62,9480	72,3513	77,2469	73,8652
Uni 7(MW)	82,3527	84,6026	103,1701	111,1623	122,2779
Uni 8(MW)	114,1337	104,5656	121,8839	118,7330	119,3704
Uni 9(MW)	107,3651	123,9123	111,6111	96,3551	99,2393
Uni 10(MW)	112,0299	109,8495	117,3305	95,6206	97,9034
Uni 11(MW)	193,4667	185,0424	154,0022	144,9485	146,9011
Uni 12(MW)	278,2737	284,7377	297,0347	296,4935	298,0860
Uni 13(MW)	117,7323	116,0452	117,2083	120,3554	116,1543
Uni 14(MW)	59,0734	62,9479	33,5123	21,0404	35,6257
Uni 15(MW)	107,9007	111,9352	128,7068	120,0347	112,5822
Uni 16(MW)	35,8667	38,1200	35,9750	37,8246	36,3446
Uni 17(MW)	65,3400	70,6035	65,1383	56,3540	67,1374
Uni 18(MW)	93,0067	77,6911	81,9174	91,9976	91,2890
Uni 19(MW)	62,6156	106,8046	107,4029	111,9830	95,9706
Uni 20(MW)	73,3795	77,8613	56,9339	58,2876	59,7995
P_L (MW)	92,5952	93,7448	92,2886	90,1950	93,5348
P_D (MW)	2.500,0000	2.500,0000	2.500,0000	2.500,0000	2.500,0000
$\sum P_i$ (MW)	2.592,5952	2.593,7448	2.592,2886	2.590,1950	2.593,5349
Custos(\$/h)	62.490,52	62.498,10	62.463,75	62.462,00	62.466,80

Fonte – Elaborado pelo autor.

O FA, entre as heurísticas analisadas, apresentou o maior custo mínimo, 62.498,10 \$/h. Esse resultado também se refletiu nas perdas de potência transmitida. O PSO produziu 92,5952 MW para suprir as perdas de transmissão, o equivalente a 2,4002 MW a mais que o GWO. Isso significa um aumento nas perdas equivalente a 2,66%. Já o FA apresentou um aumento nas perdas de 3,5498 MW, o CS, de 2,0936 MW e a referência, de 3,3398 MW, o que representa, respectivamente, 3,94%, 2,32% e 3,70% de perdas a mais. Os resultados completos obtidos para este caso, encontram-se no Apêndice D, ao final deste trabalho.

4.6 Considerações finais

Neste Capítulo, foram apresentados quatro estudos de caso com diferentes graus de dificuldade, nos quais foram aplicadas as metaheurísticas implementadas, de modo a se obter as soluções e compará-las com aquelas conseguidas via Método dos Multiplicadores

² Referência: Aragón, Esquivel e Coello (2015).

de Lagrange, bem como com os resultados dispostos na literatura especializada, como parte de uma análise criteriosa do desempenho dos algoritmos bio inspirados.

No primeiro caso teste, sendo este um sistema com três unidades geradoras, foram consideradas as restrições de igualdade e desigualdade, que são, respectivamente, o balanço de potência e os limites de capacidade. Para solução do DE com essas características, foi utilizado o MML em comparação com as heurísticas PSO, FA, CS e GWO. Todas as heurísticas analisadas apresentaram bons resultados e se mostraram ser perfeitamente aplicáveis em problemas de DE com as referidas restrições citadas, principalmente, pela eficiência na obtenção dos resultados e pela simplicidade de implementação desses algoritmos, quando comparados com a complexidade de implementação do MML.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange se mostrou um procedimento eficiente na solução do DE, pois sua metodologia é comprovadamente eficaz, com passos bem definidos, que, se bem aplicados, certamente retornarão a solução exata do problema. No entanto, esse método aumenta o número de variáveis a serem definidas para obtenção da resposta do DE. Nesse contexto, o problema mais simples iniciou com 3 variáveis e o tratamento matemático necessário para que este pudesse ser resolvido via MML, aumentou este número para 16 variáveis, compondo um sistema de 16 equações não-lineares. Vale ressaltar que a utilização dessa técnica, apesar de ser poderosa, pode se tornar bastante complicada ou até mesmo inviável dependendo do tamanho do sistema de geração a ser otimizado, o que ficou bem evidente por verificação, ao se aplicar o MML para se obter as soluções dos casos 2 e 3, compostos, respectivamente, por um sistema de seis e quinze unidades de geração.

Para o segundo caso teste, considerando limites de geração e balanço de potência, a dimensão do problema cresce em três variáveis a serem determinadas, em comparação com o primeiro caso. Nessa situação, o PSO e CS encontraram a solução exata determinada pelo MML e os algoritmos FA e GWO apresentaram uma solução muito próxima do ótimo.

Já para o terceiro caso teste, onde foram consideradas as mesmas restrições dos casos anteriores, a complexidade do problema foi aumentada, a medida que o número de variáveis também aumenta, aproximando a análise do desempenho das heurísticas a casos tipicamente encontrados no sistema elétrico. Para esse caso, o CS apresentou uma solução mais próxima da solução exata encontrada pelo MML e, novamente, os algoritmos implementados demonstraram-se eficientes e seguros para obtenção da solução de problemas de Despacho Econômico de Carga.

No último caso, o problema considerado é composto por vinte unidades de geração. Para solução do DE, as restrições de limite de capacidade e balanço de potência foram consideradas, como nos casos anteriores, assim como as perdas nas linhas de transmissão. Nesse caso, a melhor solução foi determinada pelo GWO. Porém, as demais heurísticas também apresentaram ótimos resultados. As soluções obtidas foram comparadas com a

literatura, evidenciando a consistência das soluções conseguidas através das heurísticas analisadas.

Ainda, relativo ao desempenho dos métodos, uma característica importante que deve ser observada, é o aumento do custo computacional em função do aumento das dimensões do problema de DE. Nesse contexto, o CS apresentou ótimos resultados a um custo computacional maior. Apesar dos bons resultados, as heurísticas apresentaram certa dificuldade em determinar as soluções exatas com o aumento da dimensão do problema, haja visto o tempo de execução demandado pelas mesmas.

Para solucionar o DE, as técnicas implementadas se revelaram ferramentas melhores e mais confiáveis do que o Método dos Multiplicadores de Lagrange, se comparado a sua forma metodológica para resolver esse problema de otimização. Isso se evidencia, uma vez que esses métodos possuem uma abordagem simples e direta, facilitando a maneira de tratar com os dados e restrições relacionados ao problema, em oposição à dificuldade matemática que o MML apresenta em sua formulação.

Por fim, cabe destacar que ambas as metodologias de otimização, algoritmos bio inspirados e Multiplicadores de Lagrange, podem ser utilizados para a solução do DE, embora o MML só possa ser aplicado quando a função objetivo for diferenciável, restrição esta que não existe para as heurísticas. Esses procedimentos retornaram resultados equivalentes, evidenciando sua mútua eficiência e conformidade, validando individualmente as soluções determinadas por cada método aplicado na condução dos estudos de caso realizados.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões

Neste Trabalho, aplicaram-se as heurísticas de otimização por enxames de partículas (PSO), algoritmo dos vaga-lumes (FA), algoritmo de busca dos cucos (CS) e o algoritmo dos lobos cinzentos (GWO) na resolução de quatro problemas de despacho econômico de carga (DE), considerando parques geradores com três, seis, quinze e vinte unidades geradoras termoeletricas, respectivamente, bem como as perdas nas linhas de transmissão e os limites máximo e mínimo de geração para cada unidade geradora. Além disso, as eficiências das heurísticas foram comparadas entre si, com resultados obtidos na literatura e com o resultado obtido através do tradicional método matemático aplicado para resolução de DE, o Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML).

No primeiro caso, o CS se destacou pela rápida convergência, solução equivalente ao MML e desvio padrão nulo. Os valores de custo mínimo, médio e máximo são melhores do que aqueles apresentados na literatura. Tanto o PSO quanto o FA também alcançaram custo mínimo de 1.599,98 \$/h, equivalente ao obtido através do MML e do CS, bem como baixos valores de desvio padrão (0,78 e 0,42, respectivamente). O GWO apresentou uma diferença percentual ínfima de 0,00062% em relação a solução exata. Quanto às perdas de transmissão, os algoritmos também não apresentaram diferença significativa em relação ao MML. Todas as heurísticas implementadas com critério de parada apresentaram melhores resultados do que aqueles vistos na literatura, os quais foram obtidos sem o critério de parada aplicado neste estudo.

No caso com seis unidades geradoras, novamente, o CS destacou-se entre as heurísticas por apresentar os melhores valores de custo e desvio padrão igual a zero. Entretanto, a solução apresentada pelo CS foi a que gerou maior custo computacional entre as heurísticas, com um total de 12.000 iterações e 532,10 segundos para convergir. O PSO, assim como o CS, alcançou a solução exata do MML, 605,43\$/h. O FA e o GWO apresentaram uma diferença percentual em relação a solução exata de 0,04% e 0,005%, respectivamente. As melhores soluções do FA e do GWO apresentaram menores perdas. Porém, o custo total foi maior. Todas os algoritmos obtiveram melhor custo mínimo que aqueles apresentados na referência.

Já para o terceiro caso, com quinze termoeletricas, ressalta-se que o CS se destacou pela ótima solução encontrada, 32.553,40 \$/h, que representa uma diferença de apenas 0,02% a mais que o MML. O PSO apresentou o maior custo mínimo entre as heurísticas, 32.856,10 \$/h, correspondendo a 0,95% a mais que o MML. Além disso, o FA apresentou solução igual a 32.621,24 \$/h, custo 0,23% maior do que o atingido através do MML. O GWO também não igualou a solução do MML, mas apresentou erro percentual de apenas 0,03%.

O custo mínimo encontrado pelo MML, no caso 3, foi de 32.547,50 \$/h. Porém,

cabe destacar que essa solução foi determinada tomando como condições iniciais a melhor resposta obtida entre as heurísticas, que foi aquela determinada pelo CS. O algoritmo Busca do Cuco se destacou mais uma vez, apesar de não obter o menor custo, por apresentar um baixo valor de desvio padrão, 5,32, enquanto que o PSO, FA e GWO atingiram os valores de desvio padrão iguais a 100,71, 64,45 e 7,54, respectivamente. Em relação às perdas de transmissão, os algoritmos também apresentaram uma diferença significativa em relação ao MML. Quanto às perdas, o PSO produziu 5,7373 MW, o FA, 2,1730 MW, o GWO, 1,0946 MW e o CS, 0,3979 MW, todos a mais que o obtido pelo MML.

Para o último sistema teste, com 20 usinas, destaca-se que as soluções conseguidas via heurísticas foram comparadas com aquelas apresentadas na literatura. Neste caso, a resposta encontrada pelo GWO foi a melhor, equivalente a 62.462,00\$/h, cerca de 0,008% menor que a solução da literatura. O CS também apresentou um custo menor que aquele apresentado pela literatura, sendo este estabelecido em 0,005%. O PSO e o FA obtiveram soluções 0,04% e 0,05% maiores que a solução da referência, respectivamente. Porém, apresentaram custos 0,05% e 0,06% maiores em relação ao menor custo mínimo atingido pelo GWO. As perdas do PSO representam 2,66% a mais que a potência perdida em transmissão gerada pela melhor solução encontrada pelo GWO. O FA, o CS e a referência obtiveram um aumento nas perdas de 3,94%, 2,32% e 3,70%, respectivamente, em relação a solução do GWO.

Além disso, destaca-se que as simulações dos casos teste utilizando as heurísticas com critério de parada, alcançaram as expectativas e atingiram ótimos resultados, apresentando custo mínimo total de geração, atendendo estritamente as restrições inerentes ao problema. Para o primeiro caso teste, de menor dimensão, o CS se mostrou mais eficiente. Para o segundo caso, o CS também se destacou e revelou-se melhor que os demais algoritmos.

Ao tratar de problemas de maior dimensão, as heurísticas apresentaram certa dificuldade em determinar a solução exata. Porém, obtiveram ótimas soluções com pequena diferença percentual em relação a solução exata do MML para o sistema com quinze geradores e uma solução melhor que da literatura para o sistema com vinte termoelétricas.

Por fim, vale ressaltar que uma das grandes vantagens apresentada pelas heurísticas é sua fácil implementação computacional quando comparado ao MML, o qual demanda exaustivo tratamento matemático, composto, muitas vezes, por um grande sistema de equações não lineares, evidenciando assim a aplicabilidade das técnicas heurísticas de otimização para a solução de problemas de DE, os quais demandam grandes esforços por parte dos engenheiros ao determinarem o despacho energético das fontes termoelétricas. Logo, a aplicação dessas metodologias garante soluções robustas em um curto espaço de tempo, permitindo, assim, o planejamento e a operação ótima do sistema de potência, a um baixo custo de produção energética, em um intervalo pequeno de concepção, quando comparado ao esforço computacional e matemático apresentado pelas metodologias clás-

sicas destinadas a este fim.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, citam-se:

- aplicar os métodos heurísticos em problemas de despacho econômico ambiental, utilizando algoritmos de solução multi-objetivo;
- aplicar as heurísticas em problemas de maior dimensão;
- implementar outras heurísticas e comparar suas respostas com aquelas obtidas segundo técnicas já implementadas, bem como com as respostas apresentadas na literatura; e
- implementar versões híbridas das heurísticas analisadas, em especial, do CS e do GWO, uma vez que estas apresentaram o melhor desempenho para os casos apresentados neste estudo.

REFERÊNCIAS

- ABIDO, M. Optimal design of power system stabilizers using particle swarm optimization. **Power Engineering Review, IEEE**, IEEE, v. 22, n. 7, p. 53–53, 2002. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4312374>. Acesso em: ago. 2017. Citado na página 23.
- ARAGÓN, V. S.; ESQUIVEL, S. C.; COELLO, C. C. An immune algorithm with power redistribution for solving economic dispatch problems. **Information Sciences**, Elsevier, v. 295, p. 609–632, 2015. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025514010081>. Acesso em: set. 2017. Citado 6 vezes nas páginas 69, 70, 71, 72, 73 e 74.
- ARAÚJO, L. C. **Configuração: uma perspectiva de Arquitetura da Informação da Escola de Brasília**. Orientador: Mamede Lima-Marques. 2012. 316 p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Informação) - Universidade de Brasília, Curso de Pós Graduação em Ciência da Informação, Brasília, 2012. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/10450>. Acesso em: jan. 2019. Citado na página 62.
- BASHIR, Z.; EL-HAWARY, M. Applying wavelets to short-term load forecasting using pso-based neural networks. **Power Systems, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 24, n. 1, p. 20–27, 2009. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4749374>. Acesso em: mar. 2019. Citado na página 22.
- CAI, J. et al. A multi-objective chaotic particle swarm optimization for environmental/economic dispatch. **Energy Conversion and Management**, Elsevier, v. 50, n. 5, p. 1318–1325, 2009. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0196890409000211>. Acesso em: out. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 61.
- CASTRO, L. N. D. **Fundamentals of natural computing: basic concepts, algorithms, and applications**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2006. Citado na página 22.
- COELHO, L. d. S.; MARIANI, V. C. Evolução diferencial híbrida com programação quadrática aplicada ao problema de despacho econômico de energia elétrica. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 17, n. 4, p. 409–423, 2006. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592006000400003&script=sci_arttext. Acesso em: abr. 2018. Citado na página 22.
- DAVIES, N.; BROOKE, M. d. L. An experimental study of co-evolution between the cuckoo, *Cuculus canorus*, and its hosts. i. host egg discrimination. **The Journal of Animal Ecology**, JSTOR, p. 207–224, 1989. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/4995>. Acesso em: nov. 2018. Citado na página 43.
- DJUROVIC, M.; MILANCIC, A.; KRSULJA, M. A simplified model of quadratic cost function for thermal generators. In: **Proceedings of the 23rd DAAAM Symposium**. [s.n.], 2012. p. 25–25. Disponível em: https://bib.irb.hr/datoteka/642122.0025_ZivicDjurovicatal.pdf. Acesso em: jul. 2019. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 37.

- DORIGO, M.; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. Positive feedback as a search strategy. dipartimento di elettronica e informatica, politecnico di milano. Citeseer, 1991. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.52.6342>. Acesso em: fev. 2019. Citado na página 22.
- EBBESEN, S.; KIWITZ, P.; GUZZELLA, L. A generic particle swarm optimization matlab function. In: IEEE. **American Control Conference (ACC), 2012**. [S.l.], 2012. p. 1519–1524. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6314697>. Acesso em: set. 2017. Citado na página 38.
- EUSUFF, M. M.; LANSEY, K. E. Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm. **Journal of Water Resources planning and management**, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 3, p. 210–225, 2003. Disponível em: [https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2003\)129:3\(210\)](https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:3(210)). Acesso em: dez. 2017. Citado na página 22.
- FERNANDES, E. J. **Despacho econômico com perdas e suas variantes utilizando o Algoritmo de Busca Harmônica**. Orientador: José Almeida do Nascimento. 2009. 93 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, Curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2009. Disponível em: <http://livros01.livrosgratis.com.br/cp111851.pdf>. Acesso em: ago. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- FERNANDES, E. J.; NASCIMENTO, J. A. do; TELES, J. C. Despacho econômico com perdas e suas variantes utilizando o algoritmo de busca harmônica. **Learning & Nonlinear Models**, SBRN, v. 8, n. 1, p. 63–70, 2010. Disponível em: <http://abricom.org.br/lnlm/publicacoes/vol8-no1/vol8-no1-art5/>. Acesso em: out. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- GABRIEL, P. H.; MELO, V. V. d.; DELBEM, A. C. Algoritmos evolutivos e modelo hp para predição de estruturas de proteínas. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, Sociedade Brasileira de Automática, 2012. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592012000100003&script=sci_abstract&tlng=es. Acesso em: mai. 2020. Citado na página 22.
- GAING, Z.-L. Particle swarm optimization to solving the economic dispatch considering the generator constraints. **Power Systems, IEEE Transactions on, IEEE**, v. 18, n. 3, p. 1187–1195, 2003. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1216163>. Acesso em: mai. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.
- GAING, Z.-L. A particle swarm optimization approach for optimum design of pid controller in avr system. **Energy Conversion, IEEE Transactions on, IEEE**, v. 19, n. 2, p. 384–391, 2004. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1300705>. Acesso em: mai. 2018. Citado na página 23.
- GOLDBERG, D. E. Genetic algorithms in search. **Optimization, and Machine Learning**, Addison Wesley Publishing Co. Inc., 1989. Disponível em: <https://ci.nii.ac.jp/naid/10000038763/>. Acesso em: out. 2017. Citado na página 21.
- GOLDBERG, D. E. **The Design of Innovation: Lessons from and for Competent Genetic Algorithms**. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN

1402070985. Disponível em: <https://books.google.ne/books?id=EvCKWHeueKIC&hl=fr&source=gbs_book_other_versions_r&cad=2>. Acesso em: out. 2017. Citado na página 22.

GOMEZ-EXPOSITO, A.; CONEJO, A. J.; CANIZARES, C. **Electric energy systems: analysis and operation**. CRC press, 2018. Disponível em: <https://www.academia.edu/41974373/Electric_Energy_Systems_Analysis_and_Operation_by_Antonio_Gomez_Exposito>. Acesso em: nov. 2017. Citado 3 vezes nas páginas 27, 29 e 34.

JONG, K. A. D. **Evolutionary computation: a unified approach**. [S.l.]: MIT press, 2006. Disponível em: <https://mitpress.mit.edu/books/evolutionary-computation>. Acesso em: nov. 2019. Citado na página 22.

JUANG, C.-F.; WANG, C.-Y. A self-generating fuzzy system with ant and particle swarm cooperative optimization. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 5362–5370, 2009. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0957417408003655>. Acesso em: mar. 2020. Citado na página 23.

KAPELINSKI, K. et al. Non-homogenous firefly algorithm for optimization: Application to an economic load dispatch problem. In: **2018 Simposio Brasileiro de Sistemas Eletricos (SBSE)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1–6. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8395903>. Acesso em: mai. 2020. Citado na página 24.

KENNEDY, J. Eberhart c., iparticle swarm optimization,". In: **Proceedings of IEEE International Conference on Neural Network**. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/488968>. Acesso em: jul. 2019. Citado na página 22.

KENNEDY, J. et al. **Swarm intelligence**. [S.l.: s.n.], 2001. Disponível em: <https://www.elsevier.com/books/swarm-intelligence/eberhart/978-1-55860-595-4>. Acesso em: jul. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

KOZA, J. R.; KEANE, M. A.; STREETER, M. J. Evolving inventions. **Scientific American**. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/26060164>. Acesso em: jul. 2018. Citado na página 22.

MAHOR, A.; PRASAD, V.; RANGNEKAR, S. Economic dispatch using particle swarm optimization: a review. **Renewable and sustainable energy reviews**, Elsevier, v. 13, n. 8, p. 2134–2141, 2009. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1364032109000604>. Acesso em: nov. 2019. Citado 3 vezes nas páginas 21, 27 e 38.

MIRJALILI, S.; MIRJALILI, S. M.; LEWIS, A. Grey wolf optimizer. **Advances in engineering software**, Elsevier, v. 69, p. 46–61, 2014. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0965997813001853>. Acesso em: dez. 2019. Citado 8 vezes nas páginas 22, 24, 45, 48, 55, 60, 66 e 72.

MO, N. et al. Transient stability constrained optimal power flow using particle swarm optimisation. **Generation, Transmission & Distribution, IET**, IET, v. 1, n. 3, p.

476–483, 2007. Disponível em: <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-gtd_20060273>. Acesso em: dez. 2017. Citado na página 23.

MURO, C. et al. Wolf-pack (canis lupus) hunting strategies emerge from simple rules in computational simulations. **Behavioural processes**, Elsevier, v. 88, n. 3, p. 192–197, 2011. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0376635711001884>. Acesso em: fev. 2018. Citado na página 45.

OLIVEIRA, E. S. et al. Non-convex economic dispatch using trelea particle swarm optimization. In: IEEE. **2015 IEEE Eindhoven PowerTech**. [S.l.], 2015. p. 1–6. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7232818>. Acesso em: fev. 2020. Citado na página 23.

OLIVEIRA, K.; NASCIMENTO, N.; SAAVEDRA, O. R. Uma abordagem via estratégias evolutivas para o despacho econômico considerando restrições de geração. **IEEE Transactions on Education**, IEEE, v. 6, n. 1, p. 42–50, 2008. Disponível em: <https://www.academia.edu/27006882/Uma_abordagem_via_estrat%C3%A9gias_evolutivas_para_o_despacho_econ%C3%B4mico_considerando_restri%C3%A7oes_de_gera%C3%A7ao>. Acesso em: fev. 2018. Citado 6 vezes nas páginas 21, 28, 29, 30, 31 e 32.

PASSINO, K. M. Distributed optimization and control using only a germ of intelligence. In: IEEE. **Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Held jointly with the 8th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (Cat. No. 00CH37147)**. [S.l.], 2000. p. P5–13. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/882888>. Acesso em: abr. 2020. Citado na página 22.

Pei, Z.; Hua, X.; Han, J. The clustering algorithm based on particle swarm optimization algorithm. In: **2008 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA)**. [S.l.: s.n.], 2008. v. 1, p. 148–151. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4659461>. Acesso em: abr. 2019. Citado na página 23.

PELIKAN, M.; SASTRY, K.; CANTÚ-PAZ, E. **Scalable optimization via probabilistic modeling**. [S.l.]: Springer, 2006. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-34954-9>. Acesso em: set. 2019. Citado na página 22.

PEREZ-GUERRERO, R. E.; CEDENO-MALDONADO, J. R. Differential evolution based economic environmental power dispatch. In: IEEE. **Proceedings of the 37th Annual North American Power Symposium, 2005**. [S.l.], 2005. p. 191–197. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1560523>. Acesso em: set. 2018. Citado na página 57.

PRADHAN, M.; ROY, P. K.; PAL, T. Grey wolf optimization applied to economic load dispatch problems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, v. 83, p. 325–334, 2016. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0142061516307050>. Acesso em: mai. 2020. Citado na página 24.

- RAO, S. S. **Engineering optimization: theory and practice**. John Wiley & Sons, 2009. Disponível em: <http://mec.nit.ac.ir/file_part/master_doc/20149281833165301436305785.pdf>. Acesso em: mai. 2018. Citado 4 vezes nas páginas 24, 33, 36 e 37.
- RU, N.; JIANHUA, Y. A ga and particle swarm optimization based hybrid algorithm. In: IEEE. **Evolutionary Computation, 2008. CEC 2008.(IEEE World Congress on Computational Intelligence)**. IEEE Congress on. [S.l.], 2008. p. 1047–1050. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4630925>. Acesso em: mai. 2019. Citado na página 23.
- SAADAT, H. **Power system analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1999. Disponível em: <http://powerunit-ju.com/wp-content/uploads/2016/11/Power-System-Analysis-by-Hadi-Saadat-Electrical-Engineering-libre.pdf>. Acesso em: ago. 2019. Citado 4 vezes nas páginas 28, 52, 54 e 63.
- SERAPIÃO, A. B. Cuckoo search for solving economic dispatch load problem. **Intelligent Control and Automation**, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 04, p. 385, 2013. Disponível em: <https://www.scirp.org/html/8-7900277_39506.htm>. Acesso em: ago. 2017. Citado 6 vezes nas páginas 23, 43, 54, 55, 56 e 57.
- SERAPIÃO, A. B. d. S. Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 20, n. 3, p. 271–304, 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592009000300002&script=sci_arttext&tlng=pt>. Acesso em: ago. 2017. Citado 9 vezes nas páginas 33, 38, 39, 52, 55, 57, 60, 66 e 71.
- SHARMA, S.; MEHTA, S.; CHOPRA, N. Economic load dispatch using grey wolf optimization. **International Journal of Engineering Research and Applications**, v. 5, n. 4, p. 128–132, 2015. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/ac6c/3f3ebf36b6ca8fa18bc1f9d6845945e35a96.pdf>. Acesso em: ago. 2018. Citado na página 24.
- SHEHAB, M.; KHADER, A. T.; AL-BETAR, M. A. A survey on applications and variants of the cuckoo search algorithm. **Applied Soft Computing**, Elsevier, v. 61, p. 1041–1059, 2017. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1568494617301278>. Acesso em: ago. 2019. Citado na página 24.
- SIMON, C. P.; BLUME, L. **Matemática para economistas**. Bookman, 2004. Disponível em: <http://br.norkind.ru/pdf-matem_tica_para_economistas_354640.html>. Acesso em: abr. 2019. Citado 6 vezes nas páginas 34, 35, 36, 37, 53 e 65.
- SOUZA, D. K. d. **Estimação de parâmetros por busca de cuco via voos de Lévy**. Orientador: Gideon Villar Leandro. 2014. 100 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, 2014. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/37084/R%20-%20D%20-%20DANIEL%20KAMINSKI%20DE%20SOUZA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: nov. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

- STEWART, J. Cálculo, vol. 1, 5ª edição. **Editora Thompson**, 2006. Disponível em: <http://petengenhariasifba.com.br/wp-content/uploads/2013/08/C%C3%A1lculo-vol-1-James-Stewart-5-ed-LIVRO-3.pdf>. Acesso em: out. 2017. Citado na página 36.
- TEBALDI, A.; COELHO, L. d. S.; JUNIOR, V. L. Detecção de falhas em estruturas inteligentes usando otimização por nuvem de partículas: fundamentos e estudo de casos. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 17, n. 3, p. 312–330, 2006. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592006000300006&script=sci_arttext&tlng=pt. Acesso em: nov. 2019. Citado na página 23.
- TEODOROVIC, D.; DELL'ORCO, M. Bee colony optimization—a cooperative learning approach to complex transportation problems. **Advanced OR and AI methods in transportation**, Publishing House of Poznan University of Technology Poland, v. 51, p. 60, 2005. Disponível em: https://neuro.bstu.by/ai/To-dom/My_research/failed%201%20subitem/For-courses/Job-SSP/Bee/ID161%5B1%5D.pdf. Acesso em: nov. 2018. Citado na página 22.
- TINÓS, R. Comportamento auto-organizável em algoritmos genéticos aplicados a robôs móveis em ambientes dinâmicos. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 18, n. 1, p. 13–23, 2007. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-17592007000100002&script=sci_abstract&tlng=es. Acesso em: nov. 2017. Citado na página 22.
- WALTERS, D. C.; SHEBLE, G. B. Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. **Power Systems, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 8, n. 3, p. 1325–1332, 1993. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/260861>. Acesso em: dez. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- WANG, L.; SINGH, C. Reserve-constrained multiarea environmental/economic dispatch based on particle swarm optimization with local search. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 298–307, 2009. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0952197608001322>. Acesso em: mai. 2019. Citado na página 23.
- WICKRAMASINGHE, U.; LI, X. Choosing leaders for multi-objective pso algorithms using differential evolution. In: SPRINGER. **Asia-Pacific Conference on Simulated Evolution and Learning**. 2008. p. 249–258. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-89694-4_26. Acesso em: mai. 2020. Citado na página 23.
- WYSOTA, M.; JAGODZINSKA, K.; WALKOWIAK, M. Sidelob suppression in unequally spaced antenna arrays. In: IEEE. **2008 1st International Conference on Information Technology**. [S.l.], 2008. p. 1–4. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4621695>. Acesso em: mai. 2018. Citado na página 23.
- YALCINOZ, T.; SHORT, M. Neural network approach for solving economic dispatch problem with transmission capacity constraints. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 13, p. 307 – 313, 06 1998. Disponível em:

<https://ieeexplore.ieee.org/document/667341?arnumber=667341>. Acesso em: out. 2017. Citado na página 31.

YANG, X.-S. Firefly algorithms for multimodal optimization. In: SPRINGER. **International symposium on stochastic algorithms**. 2009. p. 169–178. Disponível em: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-04944-6_14>. Acesso em: out. 2019. Citado 9 vezes nas páginas 22, 23, 40, 41, 42, 55, 60, 66 e 72.

YANG, X.-S. **Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Disponível em: <https://www.wiley.com/en-us/Engineering+Optimization%3A+An+Introduction+with+Metaheuristic+Applications-p-9780470582466>. Acesso em: out. 2019. Citado na página 24.

YANG, X.-S. **Nature-inspired metaheuristic algorithms**. Luniver press, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=iVB_ETlh4ogC&oi=fnd&pg=PR5&ots=DwjCqiEEoh&sig=v5FNBfoAIj8JngTdxB9k5pBd1jI#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: mar. 2019. Citado na página 24.

YANG, X.-S.; DEB, S. Cuckoo search via lévy flights. In: IEEE. **Nature & Biologically Inspired Computing, 2009. NaBIC 2009. World Congress on**. [S.l.], 2009. p. 210–214. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5393690>. Acesso em: mar. 2020. Citado 10 vezes nas páginas 22, 23, 24, 42, 43, 44, 55, 60, 66 e 72.

YANG, X.-S.; DEB, S. Engineering optimisation by cuckoo search. **Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation**, arXiv preprint arXiv:1005.2908, v. 1, n. 4, p. 330–343, 2010. Disponível em: <https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJMMNO.2010.03543>. Acesso em: mar. 2019. Citado na página 23.

YANG, X.-S.; HOSSEINI, S. S. S.; GANDOMI, A. H. Firefly algorithm for solving non-convex economic dispatch problems with valve loading effect. **Applied soft computing**, Elsevier, v. 12, n. 3, p. 1180–1186, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1568494611004170>. Acesso em: mar. 2018. Citado na página 23.

ZHANG, Y.; GONG, D.-W.; DING, Z. A bare-bones multi-objective particle swarm optimization algorithm for environmental/economic dispatch. **Information sciences**, Elsevier, v. 192, p. 213–227, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025511002787>. Acesso em: set. 2019. Citado na página 57.

ZIELINSKI, K.; LAUR, R. Stopping criteria for a constrained single-objective particle swarm optimization algorithm. **Informatika**, v. 31, n. 1, 2007. Disponível em: <http://www.informatika.si/index.php/informatika/article/viewFile/127/119>. Acesso em: set. 2017. Citado na página 48.

Apêndices

APÊNDICE A – RESULTADOS DO CASO 1

Tabela 21 – Despacho econômico com 3 unidades.

Simulação	PSO				FA				CS				GWO			
	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	
1	1.599,98	3.500	2,67	1.601,35	1.500	12,22	1.599,98	1.500	23,84	1.600,13	4.000	7,87				
2	1.600,55	1.500	1,11	1.600,98	1.500	12,49	1.599,98	1.500	22,78	1.600,06	1.000	2,04				
3	1.599,98	4.500	3,21	1.600,02	1.500	12,18	1.599,98	1.500	23,34	1.600,54 ²	2.500	5,48				
4	1.599,98	2.500	1,78	1.600,00	1.500	12,17	1.599,98	1.500	22,49	1.600,10	2.000	3,89				
5	1.600,41	1.500	1,20	1.600,02	1.500	12,24	1.599,98	1.500	23,05	1.600,17	1.500	2,89				
6	1.599,98	2.000	1,39	1.600,28	1.500	12,38	1.599,98	1.500	22,09	1.600,47	1.500	2,95				
7	1.599,98	3.000	2,09	1.600,16	1.500	12,54	1.599,98	1.500	21,96	1.600,14	1.500	2,87				
8	1.599,98 ¹	6.000	4,35	1.600,17	1.500	12,46	1.599,98	1.500	22,47	1.600,08	2.000	3,88				
9	1.599,98	6.000	4,22	1.600,34	1.500	12,68	1.599,98	1.500	22,26	1.600,07	2.500	4,89				
10	1.599,98	5.500	3,92	1.600,23	1.500	12,22	1.599,98	1.500	21,92	1.600,11	1.500	2,91				
11	1.599,98	3.000	2,14	1.600,09	1.500	12,54	1.599,98	1.500	22,54	1.600,04	2.000	3,86				
12	1.599,98	5.500	3,91	1.600,04	1.500	12,42	1.599,98	1.500	21,45	1.600,41	1.000	1,95				
13	1.600,00	1.500	1,06	1.600,27	1.500	12,50	1.599,98 ³	1.500	24,44	1.600,01	3.000	6,40				
14	1.599,98	5.500	4,22	1.600,36	1.500	12,85	1.599,98	1.500	29,00	1.600,14	2.000	6,64				
15	1.599,98	3.500	2,48	1.601,38 ²	1.500	12,34	1.599,98	1.500	23,68	1.600,04	2.500	9,31				
16	1.599,98	3.000	2,10	1.600,17	1.500	12,28	1.599,98	2.000	32,37	1.600,03	2.000	5,76				
17	1.599,98	1.500	1,07	1.600,22	1.500	12,26	1.599,98	1.500	22,80	1.599,99 ¹	1.000	2,44				
18	1.601,55	1.000	0,72	1.600,03	1.500	12,30	1.599,98	1.500	25,05	1.600,03	2.500	9,47				
19	1.599,98	4.000	2,90	1.599,98 ¹	1.500	12,59	1.599,98	1.500	23,88	1.600,00	2.500	5,61				
20	1.603,18 ²	3.000	2,13	1.600,11	1.500	12,28	1.599,98	1.500	22,95	1.600,05	1.000	2,28				
μ	1.600,27	3.375	2,43	1.600,31	1.500	12,40	1.599,98	1.525	23,72	1.600,13	1.975	4,67				
σ	0,78	1.653	1,20	0,42	0	0,18	0,00	112	2,60	0,16	769	2,34				

¹ Menor custo.

² Maior custo.

³ Desvio padrão nulo.

APÊNDICE B – RESULTADOS DO CASO 2

Tabela 22 – Despacho econômico com 6 unidades.

Simulação	PSO				FA				CS				GWO			
	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	
1	605,43 ¹	6.500	16,91	607,47	1.500	52,69	605,43	4.000	176,88	1.000	9,62	605,91	1.000	9,62		
2	605,67	6.500	16,07	606,26	1.500	51,87	605,43	6.000	263,14	1.000	7,38	605,98	1.000	7,38		
3	605,43	5.500	13,83	607,21	1.500	52,23	605,43 ³	12.000	532,10	2.000	14,14	606,11	2.000	14,14		
4	605,44	4.500	11,06	608,76	1.500	52,55	605,43	6.000	269,99	3.000	21,49	605,53	3.000	21,49		
5	605,55	3.500	8,66	606,76	1.500	53,04	605,43	10.500	506,44	2.500	17,71	605,88	2.500	17,71		
6	605,46	6.500	15,98	609,56 ²	1.500	53,06	605,43	7.000	340,74	2.500	17,62	605,83	2.500	17,62		
7	605,55	8.500	21,06	605,73	1.500	53,31	605,43	11.500	526,70	4.000	28,59	605,61	4.000	28,59		
8	605,85	8.500	20,88	608,20	1.500	54,15	605,43	9.500	427,47	4.000	28,11	605,80	4.000	28,11		
9	606,51	4.000	10,81	608,45	1.500	56,86	605,43	11.500	504,43	2.000	14,04	605,65	2.000	14,04		
10	605,44	5.500	13,57	607,52	1.500	54,34	605,43	6.500	320,83	2.000	14,12	605,96	2.000	14,12		
11	605,50	2.500	6,18	607,04	1.500	53,20	605,43	10.500	481,27	2.500	17,57	605,68	2.500	17,57		
12	605,48	4.000	9,84	608,54	1.500	53,33	605,43	8.500	427,44	2.000	14,21	606,55 ²	2.000	14,21		
13	605,44	5.000	12,24	607,49	1.500	53,39	605,43	10.500	466,76	3.000	21,18	605,46 ¹	3.000	21,18		
14	606,55	6.500	15,96	605,70 ¹	1.500	53,53	605,43	7.000	315,96	4.000	28,06	605,49	4.000	28,06		
15	605,43	9.000	22,40	606,18	1.500	54,08	605,43	11.500	536,63	4.000	30,42	605,85	4.000	30,42		
16	606,41	2.500	6,19	607,42	1.500	52,70	605,43	8.000	360,50	2.500	18,36	605,63	2.500	18,36		
17	606,24	3.000	7,34	607,66	1.500	52,06	605,43	11.500	517,47	2.000	14,23	606,00	2.000	14,23		
18	614,17 ²	7.500	19,06	606,54	1.500	52,04	605,43	10.500	476,82	3.500	25,02	605,68	3.500	25,02		
19	605,43	4.000	9,89	607,74	1.500	52,19	605,43	11.000	493,36	1.500	10,58	605,88	1.500	10,58		
20	605,44	7.000	17,49	607,51	1.500	52,41	605,43	12.000	537,98	4.000	28,46	605,52	4.000	28,46		
μ	606,12	5.525	13,77	607,39	1.500	53,15	605,43	9.275	424,15	2.650	19,05	605,80	2.650	19,05		
σ	1,93	2.010	5,01	1,01	0	1,14	0,00	2.441	109,21	1.001	7,04	0,26	1.001	7,04		

¹ Menor custo.

² Maior custo.

³ Desvio padrão nulo.

APÊNDICE C – RESULTADOS DO CASO 3

Tabela 23 – Despacho econômico com 15 unidades.

Simulação	PSO			FA			CS			GWO		
	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)
1	33.081,71	4.500	49,40	32.770,48	1.500	262,42	32.554,10	5.500	1.365,07	32.563,15	2.500	69,26
2	33.008,45	2.500	29,21	32.757,60	1.500	262,53	32.553,40 ¹	13.000	3.227,28	32.571,54	2.500	68,29
3	33.039,00	3.000	33,51	32.809,65	1.500	263,03	32.556,52	4.500	1.114,65	32.556,86 ¹	3.000	82,41
4	33.133,22	1.500	17,70	32.819,49	1.500	263,47	32.554,21	7.000	1.736,34	32.567,28	2.500	68,36
5	33.085,62	2.000	32,65	32.869,55	1.500	263,68	32.554,49	5.500	1.363,19	32.584,04 ²	1.500	41,09
6	32.911,25	2.500	27,60	32.621,24 ¹	1.500	262,34	32.555,42	4.000	989,23	32.571,22	3.500	96,88
7	33.248,63	1.000	10,62	32.728,57	1.500	263,15	32.558,95	3.000	745,71	32.570,86	1.500	41,35
8	32.856,10 ¹	9.500	106,02	32.723,86	1.500	258,47	32.553,66	9.000	2.230,21	32.561,76	2.000	54,78
9	33.019,73	2.500	27,38	32.827,52	1.500	257,46	32.554,04	8.000	1.977,78	32.563,00	2.500	69,10
10	33.014,52	1.000	10,97	32.764,55	1.500	259,19	32.553,78	7.000	1.762,85	32.558,52	2.500	68,50
11	33.008,75	1.000	10,34	32.667,64	1.500	254,62	32.554,83	7.500	1.855,29	32.562,16	3.000	82,05
12	33.308,56 ²	1.000	10,64	32.869,36	1.500	255,80	32.553,80	10.500	2.599,82	32.559,58	7.000	193,89
13	33.107,37	3.000	31,99	32.773,53	1.500	255,43	32.556,02	5.000	1.236,71	32.579,58	3.000	82,05
14	33.042,31	3.000	32,20	32.746,33	1.500	257,59	32.553,58	10.000	2.479,57	32.560,53	2.000	54,74
15	33.153,39	1.500	16,83	32.766,77	1.500	255,97	32.553,98	6.000	1.485,24	32.563,41	2.000	54,78
16	33.046,86	3.500	37,88	32.771,09	1.500	256,92	32.554,20	7.000	1.730,31	32.558,52	3.000	83,18
17	33.054,88	2.500	26,63	32.872,37 ²	1.500	255,74	32.557,29	3.500	865,84	32.569,25	2.500	68,73
18	33.063,05	5.000	52,84	32.739,07	1.500	257,59	32.558,11	4.000	989,31	32.560,81	3.000	82,24
19	33.078,82	2.000	21,40	32.789,78	1.500	255,89	32.554,72	4.500	1.114,64	32.561,90	1.500	41,10
20	33.136,54	2.000	21,34	32.717,36	1.500	255,20	32.577,70 ²	1.500	376,31	32.576,55	1.500	41,00
μ	33.069,94	2.725	30,36	32.770,29	1.500	258,82	32.556,14	6.300	1.562,27	32.566,03	2.625	72,19
σ	100,71	1.943	21,47	64,45	0	3,30	5,32	2.821	699,61	7,54	1.191	33,07

¹ Menor custo.

² Maior custo.

APÊNDICE D – RESULTADOS DO CASO 4

Tabela 24 – Despacho econômico com 20 unidades.

Simulação	PSO				FA				CS				GWO			
	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	Custo (\$/h)	Iterações	Tempo (s)	
1	62.539,53	6.500	123,65	62.561,86	1.500	347,24	62.504,36 ²	1.000	400,99	62.472,27	3.500	622,96	62.472,27	3.500	622,96	
2	62.532,42	10.000	159,28	62.606,84	1.500	328,92	62.482,02	5.000	1.955,70	62.473,06	4.000	709,16	62.473,06	4.000	709,16	
3	62.519,11	6.500	103,13	62.546,33	1.500	337,97	62.481,11	4.500	1.730,88	62.476,16	4.500	834,76	62.476,16	4.500	834,76	
4	62.560,71	3.000	49,12	62.526,84	1.500	391,74	62.475,02	4.000	1.530,77	62.464,58	6.000	1.071,00	62.464,58	6.000	1.071,00	
5	62.525,63	4.000	66,08	62.614,15 ²	1.500	336,85	62.463,75 ¹	6.500	2.489,33	62.476,29	2.000	355,29	62.476,29	2.000	355,29	
6	62.555,85	5.500	136,22	62.524,59	1.500	322,20	62.475,11	5.500	2.124,38	62.479,38	5.000	888,84	62.479,38	5.000	888,84	
7	62.497,66	14.000	253,07	62.498,10 ¹	1.500	316,88	62.470,98	4.500	1.721,35	62.480,87	7.000	1.247,29	62.480,87	7.000	1.247,29	
8	62.531,37	11.000	159,97	62.539,94	1.500	369,01	62.494,38	2.500	959,91	62.467,18	3.000	532,93	62.467,18	3.000	532,93	
9	62.541,46	5.500	96,61	62.543,80	1.500	360,63	62.470,77	7.000	2.677,50	62.469,37	8.000	1.423,48	62.469,37	8.000	1.423,48	
10	62.527,98	2.000	32,87	62.537,92	1.500	315,54	62.499,21	2.000	764,26	62.465,59	3.500	628,15	62.465,59	3.500	628,15	
11	62.536,28	4.500	72,90	62.518,33	1.500	580,72	62.487,96	3.000	1.146,75	62.467,06	6.500	4.090,42	62.467,06	6.500	4.090,42	
12	62.499,29	11.000	159,54	62.592,78	1.500	1.079,67	62.470,85	6.000	2.328,73	62.487,89	3.500	2.129,89	62.487,89	3.500	2.129,89	
13	62.490,53 ¹	16.500	257,53	62.532,57	1.500	1.062,10	62.494,17	2.000	771,39	62.462,00 ¹	3.500	2.346,94	62.462,00 ¹	3.500	2.346,94	
14	62.522,98	5.500	78,18	62.507,36	1.500	438,67	62.474,40	4.000	1.542,64	62.468,34	5.000	3.223,32	62.468,34	5.000	3.223,32	
15	62.500,97	3.000	40,65	62.528,25	1.500	325,86	62.478,60	3.500	1.348,47	62.470,62	1.500	1.078,79	62.470,62	1.500	1.078,79	
16	62.601,35 ²	5.500	75,52	62.543,74	1.500	341,00	62.474,36	5.500	2.122,32	62.478,84	4.500	3.305,47	62.478,84	4.500	3.305,47	
17	62.586,31	3.000	60,83	62.566,10	1.500	315,82	62.472,65	5.000	2.008,59	62.494,27 ²	3.500	2.066,05	62.494,27 ²	3.500	2.066,05	
18	62.568,48	3.500	88,31	62.558,77	1.500	312,68	62.501,79	2.000	777,01	62.470,82	3.500	617,38	62.470,82	3.500	617,38	
19	62.524,56	10.000	190,99	62.513,08	1.500	319,42	62.495,89	2.500	964,89	62.471,73	2.500	519,02	62.471,73	2.500	519,02	
20	62.536,67	3.000	45,01	62.550,01	1.500	312,03	62.498,93	1.500	653,06	62.468,45	5.500	1.049,64	62.468,45	5.500	1.049,64	
μ	62.534,96	6.675	112,47	62.545,57	1.500	425,75	62.483,31	3.875	1.500,95	62.473,24	4.300	1.437,04	62.473,24	4.300	1.437,04	
σ	28,82	4.060	66,58	31,15	0	229,13	12,54	1.761	674,59	8,00	1.673	1.073,28	8,00	1.673	1.073,28	

¹ Menor custo.

² Maior custo.