

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**NÍVEA MARIA BARRETO NUNES OLEQUES**

**ANÁLISE TEMPO-FREQUÊNCIA DE SINAIS VIA FRAMES DE GABOR E  
ESTATÍSTICA DE ALTA ORDEM: UM ENFOQUE COMPUTACIONAL**

**Bagé  
2018**

**NÍVEA MARIA BARRETO NUNES OLEQUES**

**ANÁLISE TEMPO-FREQUÊNCIA DE SINAIS VIA FRAMES DE GABOR E  
ESTATÍSTICA DE ALTA ORDEM: UM ENFOQUE COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luis Dias

Coorientadora: Profa. Dra. Vera Lúcia Duarte Ferreira

**Bagé  
2018**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

O45a Oleques, Nívea Maria Barreto Nunes

Análise tempo-frequência de sinais via frame de Gabor e estatística de alta ordem: um enfoque computacional / Nívea Maria Barreto Nunes

Oleques.

84 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização)-- Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL EM ENSINO, EXPERIMENTAÇÃO E SIMULAÇÃO, 2018.

"Orientação: Fernando Luis Dias".

1. Análise tempo-frequência. 2. Sinais . 3. Modelagem. 4. Experimentos. I. DIAS, Fernando Luis (Orient.). II. Título.

**NÍVEA MARIA BARRETO NUNES OLEQUES**

**ANÁLISE TEMPO-FREQUÊNCIA DE SINAIS VIA FRAMES DE GABOR E  
ESTATÍSTICA DE ALTA ORDEM: UM ENFOQUE COMPUTACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 30 de novembro de 2018.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Fernando Luis Dias  
Orientador  
UNIPAMPA

---

Prof. Dr. Paulo Fernando Marques Duarte Filho  
UNIPAMPA

---

Prof. Dr. Gustavo Marchesan  
UNIPAMPA

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus me proporcionar o gosto das conquistas com saúde e força nos dias de dificuldade.

À minha mãe Elizete Maria Barreto Nunes por me entender, me apoiar, pelo amor e incentivo constante.

Ao meu orientador Fernando Luis Dias pelas orientações esclarecedoras, sempre com muita responsabilidade e competência e, também pelo incentivo.

À minha também orientadora Vera Lúcia Duarte Ferreira pelo apoio nos estudos e suporte firme.

Ao meu marido Cristian Douglas Floriano de Araújo Pereira pelo suporte emocional sempre com muita compreensão e amor.

Aos meus colegas de especialização que de uma forma ou de outra contribuíram para essa conquista, em especial ao Cesar Magno Leite de Oliveira Júnior pelo companheirismo e pelo apoio emocional e intelectual.

Aos professores do curso por todo suporte e empenho nas aulas.

À Universidade Federal do Pampa por me proporcionar um ambiente acadêmico de qualidade.

À banca examinadora pelo convite aceito.

“Aquele que não é corajoso o suficiente para assumir riscos não conseguirá nada na vida”.

Muhammad Ali

## RESUMO

Este trabalho apresenta a modelagem computacional de sinais sintéticos e experimentais, focando na análise tempo-frequência. Para tanto, uma implementação da transformada de Fourier (TF) foi utilizada para produzir o conteúdo de frequência, também conhecido como densidade espectral de potência c.f. *Power Spectral Density* (PSD). Com o objetivo de produzir espectrogramas com resolução mais concentradas no plano tempo-frequência, foi introduzida na TF uma janela Gaussiana ajustada por estimativas locais da curtose. Interpretando o esquema resultante como um produto interno entre o sinal e a ação de combinações de modulação e translação c.f. *shifts time-frequency* sobre a janela, obtêm-se os frames de Gabor ajustados por estatística de alta ordem. Essa adaptação da *short-time Fourier transform* (STFT) mostra-se mais adequada à análise de sinais não estacionários, por sua capacidade de ajuste às características locais. Contudo, apesar do princípio de incerteza, em sua versão fraca para a STFT, impor restrições à concentração do espectrograma no plano tempo-frequência. A implementação da STFT adaptada foi capaz de gerar espectrogramas nítidos o suficiente para localizar os instantes de contribuição das frequências, assim como, sua evolução.

Palavras-Chave: Análise tempo-frequência. Sinais. Modelagem. Experimentos.

## **ABSTRACT**

This work presents the computational modeling of synthetic and experimental signals, focusing on time-frequency analysis. To that end, an implementation of the Fourier transform (TF) was used to produce the frequency content, also known as Power Spectral Density (PSD) power spectral density. In order to produce more focused resolution spectrograms in the time-frequency plane, a Gaussian window adjusted by local kurtosis estimates was introduced in TF. Interpreting the resulting scheme as an internal product between the signal and the action of modulation and translation combinations c.f (shifts time-frequency) on the window, we obtain the Gabor frames adjusted by high-order statistics. This adaptation of the short-time Fourier transform (STFT) is more suitable for non-stationary signal analysis because of its ability to adjust to local characteristics. However, despite the uncertainty principle, in its weak version for the STFT, impose restrictions on the concentration of the spectrogram in the time-frequency plane. The implementation of the adapted STFT was able to generate spectrograms that were clear enough to locate the contribution moments of the frequencies, as well as their evolution.

Keywords: Time-frequency analysis. Signals. Modeling. Experiments.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação de sinais .....	15
Figura 2 – Sinal estacionário.....	16
Figura 3 – Sinal determinístico .....	16
Figura 4 – Sinal aleatório.....	17
Figura 5 – Sinal contínuo.....	17
Figura 6 – Sinal transiente .....	18
Figura 7 – Realização do processo estocástico .....	20
Figura 8 – <i>Ensemble</i> de um processo estocástico .....	22
Figura 9 – Representação da STFT .....	31
Figura 10 – Sinal sintético de ruído gaussiano.....	38
Figura 11 – Sinal de ondas no oceano.....	39
Figura 12 – Sinal de temperatura.....	41
Figura 13 – Sinal de eletrocardiograma sintético .....	42
Figura 14 – Sinal caótico 1 .....	44
Figura 15 – Sinal caótico 2.....	45
Figura 16 – Sinal sintético com dependência de sazonalidade .....	47

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

TF – Transformada de Fourier

PSD – Power Spectral Density

TFA – Time Frequency Analysis

STFT – Short Time Fourier Transform

UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2 CONCEITOS BÁSICOS DE SINAIS .....</b>	<b>14</b>
2.1 Definição e classificação de sinais .....	14
2.2 Processo Estocástico .....	18
<b>3 FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE FOURIER COM MOTIVAÇÕES EM PROCESSAMENTO DE SINAIS .....</b>	<b>24</b>
3.1 Operações fundamentais em análise de Fourier .....	26
3.2 Transformada inversa de Fourier .....	29
3.3 Análise tempo-frequência com motivações em processamento de sinais.....	30
3.4 Fórmula Inversa da <i>Short-Time Fourier Transform</i> .....	33
3.5 Frame de Gabor.....	35
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>48</b>
5.1 Conclusão .....	48
5.2 Trabalhos futuros.....	48
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>50</b>
<b>APÊNDICE A - CÓDIGOS SCILAB .....</b>	<b>52</b>
<b>APÊNDICE B - PUBLICAÇÕES .....</b>	<b>54</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, em uma sociedade altamente dependente das tecnologias, os mais diversos tipos de dados são gerados, sejam para o monitoramento do clima e da temperatura, da produção e circulação de bens de consumo, e outros. Tais dados são denominados sinais e o seu processamento demanda o uso de técnicas matemáticas e computacionais capazes de realizar amostragens, extrair informações, identificar eventos, etc.

Vale enfatizar que, no dia a dia estamos todos expostos a vários tipos diferentes de sinais. Por exemplo, ao ouvir rádio, ao observar uma imagem, um vídeo e dentre outros. O processamento de sinais, então, se faz necessário e traz algumas dificuldades, das quais são: a compressão, a transmissão e a reconstrução. No caso da compressão, a televisão, por exemplo, que utiliza sequência de imagens se transforma em matriz de dados muito grande e por isso é necessário comprimí-la (MORETIN, 1999). Para isso, utilizam-se técnicas com base na análise harmônica para tentar suprir esse e os outros problemas que surgem durante o processamento.

Nesse contexto, o espectro harmônico de Fourier é uma das principais ferramentas utilizadas na identificação de informações de registro de dados, visto que muitas das características relacionadas à evolução temporal do sistema monitorado podem ser obtidas pelo mapeamento no domínio da frequência. Assim, é importante observar que a análise via Transformada de Fourier (TF) é restrita ao domínio da frequência, uma vez que se refere à representação das componentes harmônicas do sinal nesse domínio. Embora a TF seja uma ferramenta auxiliar na identificação de periodicidades, o cálculo do espectro de potência de um determinado sinal utilizando o quadrado do valor absoluto dessa, denominado densidade espectral de potência (PSD), cf. *power spectral density* (LATHI; GREEN, 2005) (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1997), não fornece informação precisa do comportamento do sinal no tempo. O processamento de sinais cujas frequências são dependentes do tempo deve ser feita com uma ferramenta de análise que seja capaz de fornecer informações sobre as variações do espectro ao longo do tempo de duração do sinal. Essa ferramenta consiste em associar uma função ao sinal de forma que seja possível fazer uma análise de Fourier localizada, e que permita obter informações no tempo e na frequência de forma simétrica e simultânea

(GRÖCHENIG, 2013). Portanto, a utilização da análise tempo-frequência é uma necessidade para que se obtenha maior exatidão na descrição do espectro.

A análise tempo-frequência (*Time-Frequency Analysis* - TFA) é um campo da análise harmônica que provém do início do desenvolvimento da mecânica quântica, em 1930, por H.Weyl, E.Wigner e J. Neumann e, também do princípio teoria da informação e análise de sinais desenvolvida por Dennis Gabor (GABOR, 1946). É muito utilizada, pois em determinadas situações é necessário saber informações de um sinal no domínio da frequência, porém, também é conveniente que se saiba, ao mesmo tempo, o instante de tempo em que ocorre. A análise clássica de Fourier, ou análise de Fourier global, tem por objetivo passar do domínio do tempo, ou espaço, para o domínio da frequência através da transformada de Fourier (TF) (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1997). A TFA, por sua vez, constitui-se como um tipo de análise de Fourier local, haja vista que a função janela introduzida na TF possui suporte localizado em vizinhanças de pontos do domínio da função ou sinal em análise. Como é o caso da transformada de Fourier janela da (*Short-time Fourier transform* - STFT).

Diante desse cenário, estudos de mapeamento tempo-frequência, visando o melhor ajuste de janelas, vem obtendo resultados satisfatórios na análise da variabilidade de sinais climatológicos, como pode ser visto em (KALAS; FERREIRA; DIAS, 2016), (REGO *et al.*, 2015) e (OLEQUES *et al.*, 2018), sinais de acústica de sala (DIAS *et al.*, 2015). Nessa perspectiva, este estudo tem como foco principal a modelagem computacional da análise tempo-frequência de sinais não estacionários, mapeados no plano tempo-frequência por frames de Gabor.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos de sinais, sua classificação e exemplos, bem como, uma breve introdução aos processos estocásticos, destacando suas principais propriedades e classificação.

O capítulo 3 aborda os principais aspectos da modelagem computacional de sinais. Serão apresentadas as ferramentas matemáticas de análise de sinais, restringindo-se as baseadas na transformada de Fourier tanto global quanto local e uma breve conceituação sobre a teoria dos Frames de Gabor.

No capítulo 4 é realizada a descrição dos experimentos computacionais realizados e a análise os resultados computacionais.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões e direcionamentos para trabalhos futuros.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS DE SINAIS

### 2.1 Definição e classificação de sinais

A modelagem computacional pressupõe que funções (de uma ou mais variáveis) possam ser estudadas na forma discreta. Entendendo-se por discreta toda função representável explicitamente por uma lista de números, caso o domínio seja finito, ou seu termo geral ser representado por uma fórmula, ou ainda podendo ser dada de modo implícito por uma relação de recorrência ou equação de diferenças.

De um ponto de vista geral, um sinal é uma manifestação de um fenômeno, retratado geralmente através de números. Tal atitude permite um paralelismo conceitual entre funções e sinais, designando, formalmente, um sinal como sendo uma função de uma ou mais variáveis, cuja imagem contém informações sobre a natureza de um fenômeno físico. Além disso, é importante destacar que grande parte dos sinais que se utilizam na prática possui imagem assumindo valor numérico real, isto é, sua imagem é um número real. No entanto, para algumas situações o estudo torna-se mais simples se considerarmos que sinais possuem imagem complexa. Isto significa que estudar sinais de imagem real é um caso particular do estudo dos sinais de imagem complexa.

Funções dependentes de apenas uma variável correspondem a sinais unidimensionais, enquanto as dependentes de mais de uma variável estão relacionadas a sinais multidimensionais. Um sinal de voz captado por um sensor de som áudio é um exemplo de sinal unidimensional, a passo que uma imagem é um exemplo de sinal multidimensional.

De modo a atender as aplicações, sinais correspondem a registros de grandezas físicas que podem ser experimentalmente medidas e estudadas, tanto na forma analítica como computacional. O método analítico mais utilizado é o baseado nas séries e transformada de Fourier. Os computacionais, por sua vez, são as versões discretas da série e da transformada de Fourier. Por conseguinte, o método de análise mais utilizado no estudo de sinais é fundamentado na análise de Fourier.

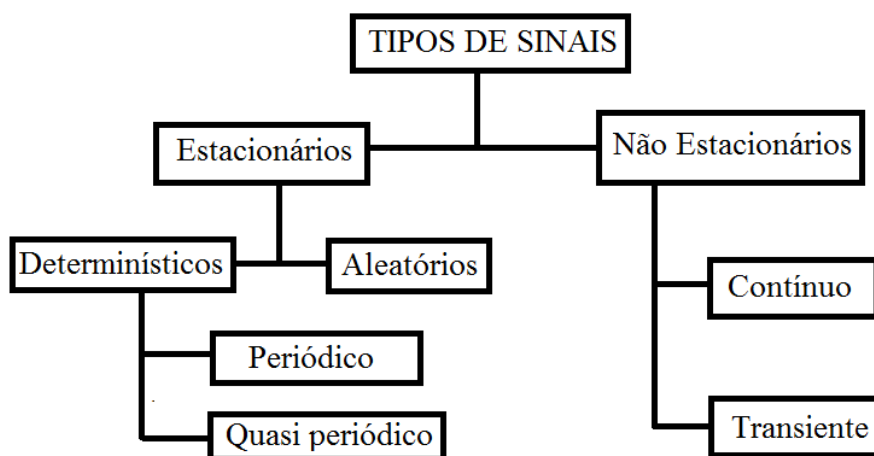
No intuito de incorporar à análise de Fourier ao estudo de sinais, é exigido que o sinal possua energia finita, isto é, que sua representação seja dada por uma função cujo quadrado seja integrável (OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1997) (LATHI; GREEN, 2005).

Levando-se em conta características relativas à dimensão, periodicidade e gráfico, um sinal é classificado, respectivamente, como:

- 1- Quanto à dimensão;
- 2- Quanto à periodicidade;
- 3- Quanto à Gráfico (perfil de continuidade, descontinuidade).

Conforme o contexto e de como o sinal foi adquirido, pode-se classificá-lo nos seguintes tipos, de acordo com a Figura 1:

Figura 1 – Classificação de sinais

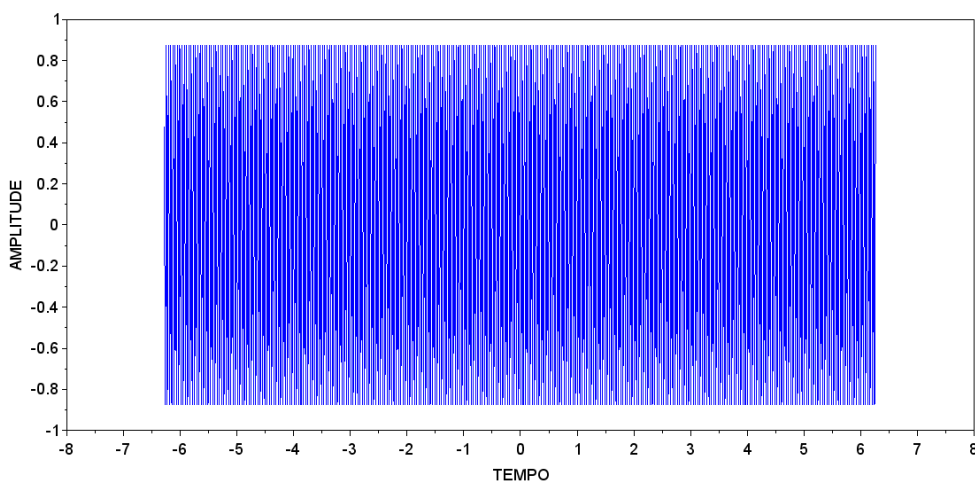


Fonte: Autora (2018)

**Sinais Estacionários** - apresentam conteúdo de frequência composto pelas mesmas frequências ao longo de toda sua duração. Devido a sua representação como uma função matemática ou, pela impossibilidade em virtude das incertezas apresentadas. Tais sinais se dividem em aleatórios e determinísticos. Sendo os primeiros caracterizados em termos de estimadores estatísticos média, variância, etc. Os últimos, por sua vez, são divididos em termos da periodicidade e quase periodicidade; nessa ordem uns possuem a mesma frequência e os outros mais de uma frequência ao longo do sinal.

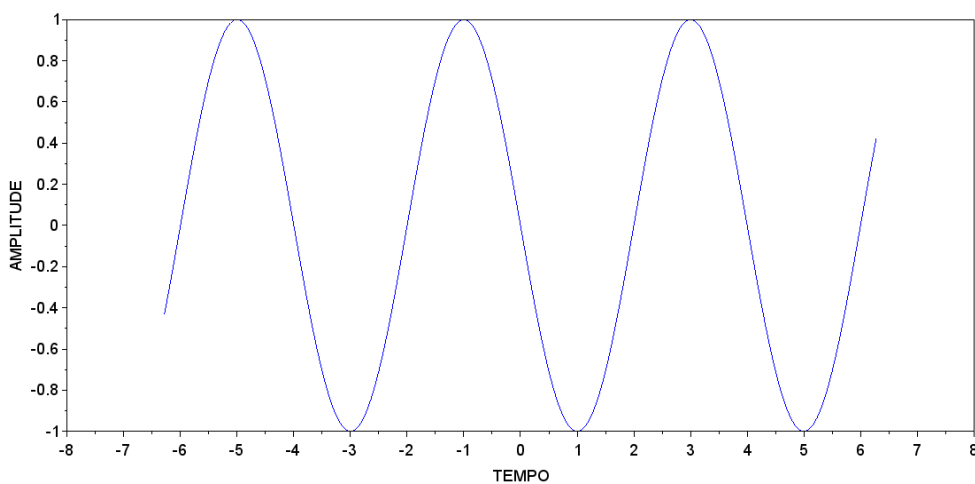
Na Figura 2 e 3 apresentam-se dois sinais, ambos estacionários, porém, o primeiro é chamado de determinístico.

Figura 2 – Sinal estacionário



Fonte: Autora (2018)

Figura 3 – Sinal determinístico

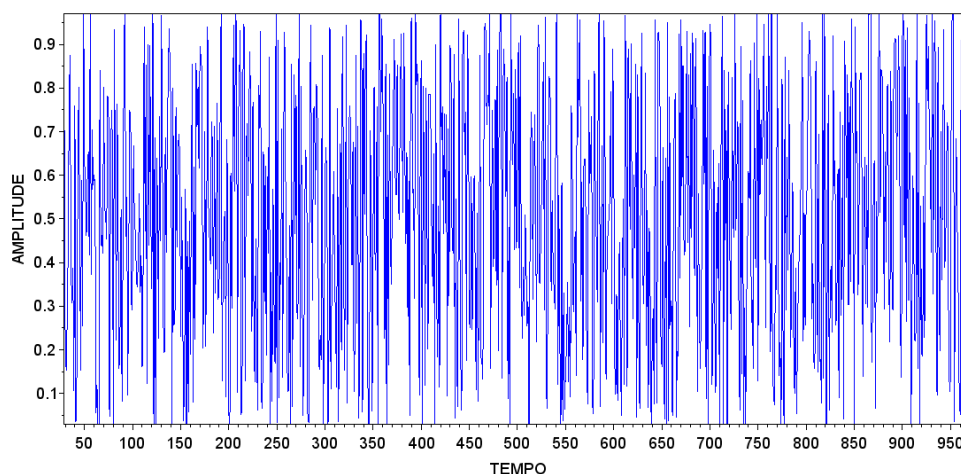


Fonte: Autora (2018)

Por outro lado, os sinais aleatórios não tem um formato esperado, ou seja, sua frequência altera a todo momento e também sua amplitude. Diferente do determinístico esse sinal não é previsível, justamente devido a essa alternância de frequência e amplitude ao longo do tempo. Contudo, apresentam regularidade em características estatísticas durante o intervalo de tempo em que acontece. Na Figura 4, apresenta-se um sinal aleatório.



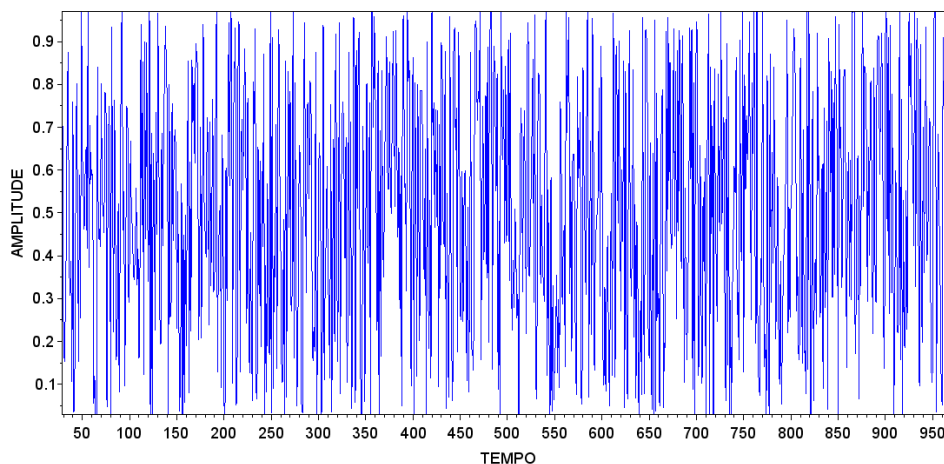
Figura 4 – Sinal aleatório



Fonte: Autora (2018)

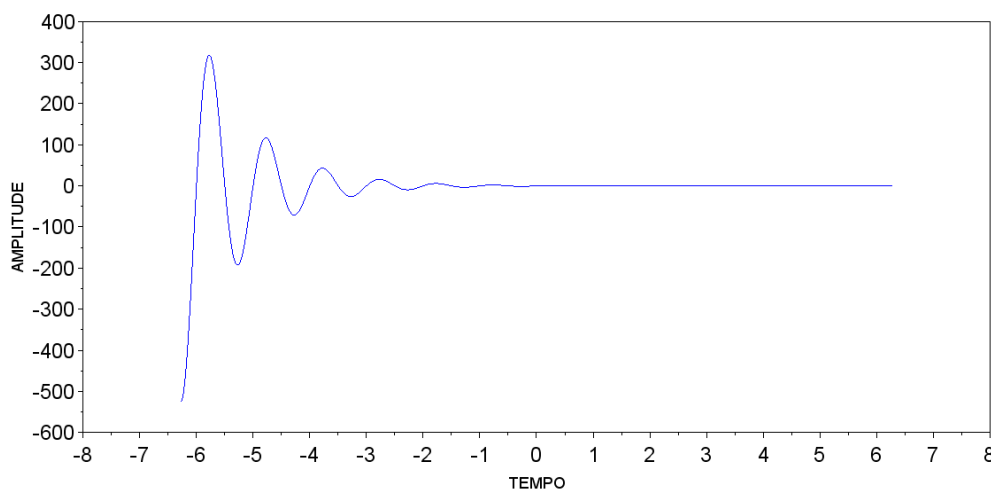
**Sinais não estacionários**- não apresentam a mesma componente de frequência ao longo do tempo. Por vezes também são chamados de aleatórios, porém, a diferença é que podem ou não ter características estatísticas uniformes. Esses sinais se dividem em contínuos e transientes, onde os primeiros são decorrentes de sinais aleatórios puros representáveis em termos de função matemática. Já os sinais transientes são decorrentes de acontecimentos únicos, ou seja, não apresentam periodicidade. Por exemplo, um surto de tensão elétrica. Na Figura 5, tem-se um sinal contínuo e na Figura 6, um transiente.

Figura 5 – Sinal contínuo



Fonte: Autora (2018)

Figura 6 – Sinal transiente



Fonte: Autora (2018)

## 2.2 Processo Estocástico

Nesta seção são apresentados os conceitos básicos referentes a variável aleatória e suas estimativas estatísticas média, variância, desvio padrão e coeficiente de autocorrelação.

Formalmente, uma variável aleatória real é uma função  $X$  que mapeia elementos de um espaço amostral  $\Omega$  no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Vale observar que um espaço amostral é um conjunto de todos os resultados possíveis de um dado experimento. Em termos práticos, uma variável aleatória real pode ser entendida como uma variável quantitativa, cuja imagem depende de fatores aleatórios. Variáveis aleatórias podem ser classificadas em contínuas e discretas. Sempre que o conjunto imagem  $X(\Omega)$  for finito ou enumerável, dizemos que  $X$  é discreta. No caso que o conjunto seja um intervalo da linha reta real, dizemos que  $X$  é contínua.

Para avaliar variáveis aleatórias são utilizadas estimativas estatísticas que permitam caracterizar tanto concentrações como dispersões as quais são definidas em termos de momentos de variável aleatória.

**Definição 1:** (Momento Central de Ordem  $k$ ). Dada uma variável aleatória  $X$  e

$k \in \mathbb{Z}$ . Se  $X$  possui média dada por  $\mu_X = E(X)$ , então seu  $k$ -ésimo momento central é definido por

$$E(X - \mu_X)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^k f_X(x) dx \quad (2.1)$$

Define-se o  $k$ -ésimo momento ordinário da variável  $X$  pela equação

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx \quad (2.2)$$

onde  $f_X(x)$  é a densidade de probabilidade da variável  $X$ . Salienta-se que  $f_X(x)$  satisfaz as seguintes propriedades:

1)

$$f_{X(x)} \geq 0 \quad (2.3)$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.4)$$

Antes de definirmos os principais estimadores estatísticos apresentamos a definição de processo estocástico.

**Definição 2:** Um processo estocástico é uma família  $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ , tal que para cada valor do parâmetro  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X(t)$  é uma variável aleatória.

O estudo de processos estocásticos é extremamente simplificado pela introdução do conceito de realizações, pois cada realização do processo estocástico pode ser interpretada como um sinal ou uma série temporal.

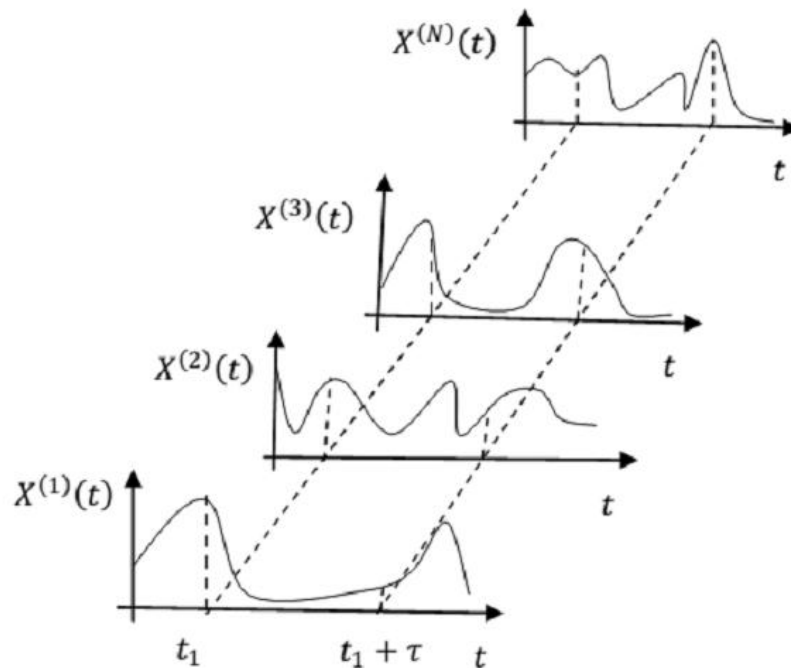
Do ponto de vista probabilístico, um processo estocástico só está completamente especificado se forem conhecidas as suas funções de distribuição de probabilidade conjuntas, para qualquer subconjunto finito de tempos,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , ou seja,

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (2.5)$$

Para se caracterizar completamente um processo estocástico  $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ , deve se saber a distribuição de todas as suas trajetórias. Isso possibilita obter informações sobre o processo mediante a análise de suas realizações. A figura a

seguir visa mostrar a interpretação de processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias.

Figura 7 – Realização do processo estocástico



Fonte: Dias (2015)

**Definição 3:** Dado um processo estocástico  $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ :

i) A variância do processo  $X(t)$  é definida por

$$\gamma_X(t_1, t_2) = E[(X(t) - \mu_t)^2] = \text{Var}(X(t)) \quad (2.6)$$

onde  $E[X(t)] = \mu_t$  é o valor esperado do processo estocástico e  $t \in \mathbb{T}$ ;

ii) A função de autocovariância do processo é denotada por  $\gamma_X(t_1, t_2)$  é definida por

$$\gamma_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_{t_1})(X(t_2) - \mu_{t_2})], \text{ para } t_1, t_2 \in \mathbb{T} \quad (2.7)$$

iii) A função de autocorrelação do processo é

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{\gamma_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\text{Var}(X(t_1))}\sqrt{\text{Var}(X(t_2))}}, \quad \text{para } t_1, t_2 \in \mathbb{T} \quad (2.8)$$

Restringindo-se a avaliação das densidades de probabilidade simples e conjunta bem como, de momentos de primeira e segunda ordens, pode-se classificar um processo estocástico em estacionário no sentido estrito e lato.

**Definição 4:** Um processo  $X(t)$  é chamado estacionário em sentido estrito se, e somente se:

i)

$$\forall t, \tau \in \mathbb{T} \quad f_{X(t)}(\cdot) = f_{X(t+\tau)}(\cdot); \quad (2.9)$$

ii)

$$\forall t_1, t_2, \tau \in \mathbb{T} \quad f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot, \cdot) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)}(\cdot, \cdot) \quad (2.10)$$

Muitos processos físicos verificam essa propriedade que é a estacionariedade estrita. A condição 2.9 indica que  $f_{X(t)}(\cdot)$  é invariante com o tempo. Já a 2.10 admite que  $f_{X(t_1)X(t_2)}(\cdot, \cdot)$  é invariante a qualquer translação de  $t$  do intervalo  $[t_1, t_2]$ . Outra noção de estacionariedade pode ser introduzida.

**Definição 5:** Um processo  $X(t)$  é chamado estacionário em sentido lato se, e somente se:

i)

$$\forall t, \quad E\{X(t)\} = m_X \quad (2.11)$$

ii)

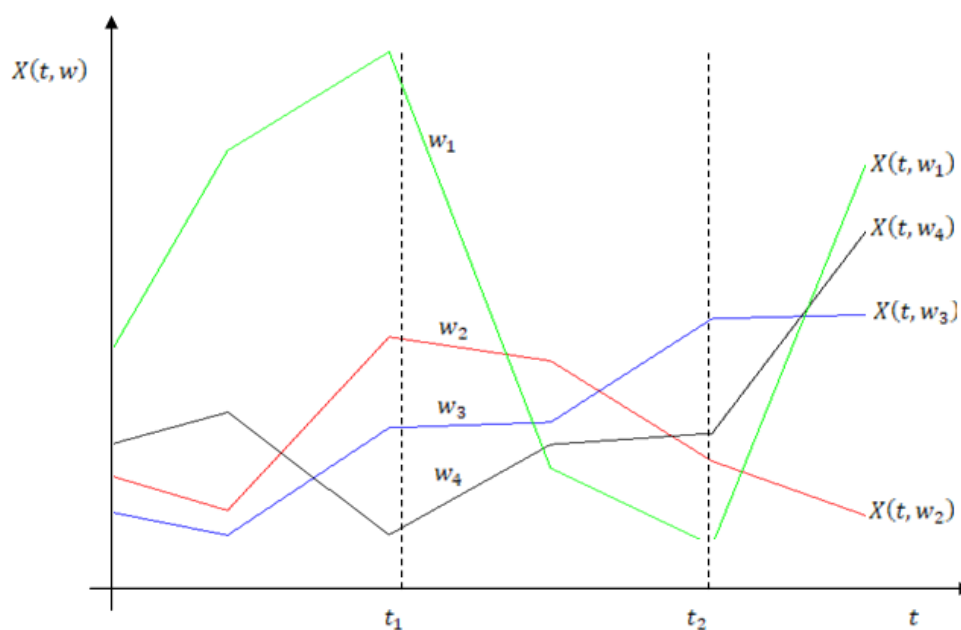
$$\forall t, \tau \in \mathbb{T} \quad E\{X(t)X(t - \tau)\} = R_X(\tau) \quad (2.12)$$

Diferentemente da estacionariedade em sentido estrito, a condição 2.11 implica que a média de  $X(t)$  é constante no tempo, e 2.12 implica que a respectiva autocorrelação não depende de  $t_1$  e  $t_2$  mas a diferença  $\tau = t_1 - t_2$  entre os extremos do intervalo  $[t_1, t_2]$ .

Outra forma definir um processo estocástico é designá-lo através da aplicação  $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja,  $T \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}$ . Assim, pela Figura 2.8, fixando

$w$ , o processo se reduz a uma função unicamente dependente de parâmetros em  $\mathbb{T}$  chamada de realização do processo. Por outro lado, fixando  $t$ , o processo reduz-se a uma variável aleatória.

Figura 8 – *Ensemble* de um processo estocástico



Fonte: Autora (2018)

A explicitação do domínio, da aplicação  $\mathbb{T}$ , como sendo o produto cartesiano entre um conjunto de parâmetros,  $\mathbb{T}$ , e o espaço amostral  $\Omega$ , permite entender a distinção entre realização de um processo estocástico e variável aleatória.

Outro aspecto fundamental dessa forma de definir processo estocástico é possibilitar distinguir dois tipos de médias:

- 1) **Médias de ensemble:** são médias calculadas sobre todas as realizações  $w$ , para um valor fixo do parâmetro  $t$ ;
- 2) **Médias temporais:** são médias calculadas para todo  $t \in \mathbb{T}$ , sobre uma dada realização.

Das definições de médias de ensemble e médias temporais, um processo estocástico é classificado como estacionário quando os estimadores estatísticos, média e variância são invariantes por  $t$ .

### 3 FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE FOURIER COM MOTIVAÇÕES EM PROCESSAMENTO DE SINAIS

Existem várias referências devotadas ao tema análise de Fourier e aplicações, sendo em sua maioria referente aos aspectos da análise global de Fourier. Podendo situar-se basicamente em áreas como teoria de aproximação, equações diferenciais parciais e nas aplicações em processamento de sinais como, (PAPOULIS; PILLAI, 2002; OPPENHEIM; WILLSKY; NAWAB, 1997; LATHI; GREEN, 2005). Por outro lado, tem aumentado o número de referências dedicadas ao tema à análise local de Fourier, sendo em sua maioria referências dedicadas à análise tempo-frequência como motivações em análise de sinais como, por exemplo, (GRÖCHENIG, 2013).

Uma das mais importantes aplicações da análise de Fourier a sinais está no estudo e na identificação de suas frequências. A ideia básica de tal análise consiste em mapear informações do domínio de tempo para o domínio de frequências. A análise de Fourier de uma função pode ser interpretada como uma decomposição de vetores numa base ortonormal. No caso particular de uma variável está análise ganha importância no estudo e na identificação das frequências presentes em um sinal periódico ou de duração finita. A ideia básica de tal análise consiste em mapear informações do domínio de tempo para o domínio de frequências. Em termos técnicos, seja

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}: \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\} \quad (3.1)$$

é o espaço de Banach de todas as funções mensuráveis que possuem norma  $L^p$  finita, isto é,

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (3.2)$$

onde a integral que figura na equação 3.2 é a integral de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ . Entendendo-se função mensurável, toda função cujo conjunto dos pontos

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d: |f(x)| < c, \quad c \in \mathbb{R}\} \quad (3.3)$$

é um conjunto mensurável, para maiores detalhes as referências são (ROYDEN; FITZPATRICK, 2010) (CARTER; BRUNT, 2000).



No caso em que  $\mathbf{p} = 2$ , define-se o produto interno em  $L^2(\mathbb{R}^d)$  como

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \overline{\mathbf{g}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad (3.4)$$

Tal produto interno transforma  $L^2(\mathbb{R}^d)$  em um espaço de Hilbert, haja vista as condições de convergência satisfeita pela integral de Lebesgue.

Um produto interno em  $\mathbb{R}^d$  é naturalmente induzido da multiplicação matricial dos vetores coluna  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  e  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d)^T$ , escrito como  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^d x_k \omega_k$ . Sendo  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$  a norma Euclidiana de  $\mathbf{x}$ .

Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  define-se a transformada de Fourier por

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}} d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

Para evidenciar que a transformada de Fourier é um operador definido em espaço de funções, escreve-se  $\mathcal{F}f$  em vez de  $\hat{f}$ .

Valendo-se do produto interno em  $L^2(\mathbb{R}^d)$  reescreve-se a equação 3.5 como

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \langle f, e^{2\pi i \boldsymbol{\omega}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \overline{e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}}} d\mathbf{x} \quad (3.6)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}$  na equação (3.6), em engenharia interpreta-se como sendo a frequência, e  $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$  sua amplitude. Já no contexto da física  $\boldsymbol{\omega}$ , por sua vez, é interpretado como sendo a variável momento e  $|\hat{f}(\boldsymbol{\omega})|^2 / \|\hat{f}\|_2^2$  como uma densidade de probabilidade.

Analisando a equação (3.4) vê-se que a transformada de Fourier possui majorante  $\|\mathbf{f}\|_1$ . Além disso, como uma consequência de se aplicar Fourier a funções de  $L^1(\mathbb{R})$ , tem-se o lema de Riemann-Lebesgue, que relaciona suavidade da função com decaimento das amplitudes  $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$ . Do ponto de vista de aplicações, interpreta-se que a suavidade da função está intrinsecamente relacionada com o decaimento de seu espectro de Fourier.

Representando o espaço de Banach das funções contínuas que decaem a zero no infinito por  $C_0(\mathbb{R}^d)$ , pelo lema de Riemann-Lebesgue fica evidente a seguinte propriedade de mapeamento da transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}: \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^d) \quad (3.7)$$

Isto implica que a norma  $\|\mathcal{F}f\|_{\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^d)}$  é finita e como consequência da continuidade, da  $\mathcal{F}$ , esta pode ser estendida para outros espaços utilizando-se versões adequadas do teorema de Han-Banach (LAX, 2002).

Para fins de processamento de sinais manter-se conservada a energia do sinal ao mapear informações entre os domínios do tempo para a frequência, vice-versa, é extremamente importante. Isto se justifica dado que muitas vezes, informações escondidas em um dos domínios podem ser identificadas em outro domínio. Para dar conta dessa exigência impõem-se que a função  $f$  pertença ao espaço intersecção de  $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  com  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . Satisfeita esta condição consegue-se estender a transformada de Fourier para todo  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  como um operador unitário, cuja isometria é garantida pelo Teorema de Plancherel. Em termos formais se  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$  então

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad (3.8)$$

Interpretando-se a equação 3.8 como uma conservação de energia ao intercambiar espaço físico e espaço das frequências, vice-versa.

### 3.1 Operações fundamentais em análise de Fourier

#### Translação e Modulação

Para  $x$  e  $\omega$  em  $\mathbb{R}^d$  consideremos  $T_x: L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  e  $M_\omega: L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  definidos, respectivamente, por

$$T_x f(t) = f(t - x) \quad (3.9)$$

e

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t) \quad (3.10)$$

Os operadores  $T_x$  e  $M_\omega$  denotam, nessa ordem, a translação por  $x$  e a modulação em  $\omega$ . Suas composições  $T_x M_\omega$  ou  $M_\omega T_x$  são chamadas *shifts time-frequency*, e satisfazem a seguinte relação de comutação

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x \quad (3.11)$$

Vale enfatizar a comutatividade entre  $T_x$  e  $M_\omega$  é atingida quando  $x \cdot \omega \in \mathbb{Z}$ . Além disso, os *shifts time-frequency* em espaços  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , são isometrias, uma vez que

$$\|T_x M_\omega f\|_p = \|f\|_p \quad (3.12)$$

Também vale observar que combinações entre Fourier, translações e modulações, gozam das propriedades

$$\mathcal{F}(T_x f) = M_{-x} \mathcal{F}(f) \quad (3.13)$$

e

$$\mathcal{F}(M_\omega f) = T_\omega \mathcal{F}(f) \quad (3.14)$$

### Convolução

Sejam  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . A convolução entre  $f$  e  $g$  é definida como sendo a função  $f * g$  dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) dy \quad (3.15)$$

Efetuada a mudança de variáveis  $z = x - y$  na equação 3.15, tem-se que a convolução é uma operação comutativa, ou seja,  $f * g = g * f$ . Também valem

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (3.16)$$

e

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) \quad (3.17)$$

A propriedade em 3.16 assegura que a operação convolução faz de  $L^1(\mathbb{R}^d)$  uma álgebra de Banach, uma vez que induz submultiplicatividade em  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , com elemento neutro dado pela função impulso

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Satisfazendo as seguintes propriedades

$$1) f(x) * \delta(x) = f(x) \quad (3.19)$$

$$2) \|\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |\delta(x)| dx = 1 \quad (3.20)$$

A vista do lema de Riemann-Lebesgue, a equação (3.17) informa que a transformada de Fourier leva  $L^1(\mathbb{R}^d)$  em subespaços de  $C_0(\mathbb{R}^d)$ , que herdam a estrutura algébrica da multiplicação de funções que tendem a zero quando  $\mathbb{R}^d \ni x \rightarrow \pm\infty$ .

### Involução e Reflexão

Utilizando a operação conjugação complexa de funções e estrutura de grupo aditivo do domínio  $\mathbb{R}^d$ , define-se a involução e a reflexão da  $f$ , respectivamente, por

$$f^*(x) = \overline{f(-x)} \quad (3.21)$$

e

$$\mathcal{J}(f(x)) = f(-x) \quad (3.22)$$

Aplicando Fourier a tais operadores tem-se

$$\mathcal{F}(f^*) = \overline{\mathcal{F}(f)} \quad (3.23)$$

e

$$\mathcal{F}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(\mathcal{F}(f)) \quad (3.24)$$

Valendo-se das operações involução e reflexão, representa-se a convolução entre  $f$  e  $g$  como um produto interno

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x g^* \rangle \quad (3.25)$$

Outra propriedade importante envolvendo essas operações é a conhecida relação de Wiener-Khintchine (MUMFORD; DESOLNEUX, 2010), dada por

$$\mathcal{F}((f * f^*)(x))(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (3.26)$$

Esta relação vincula a transformada de Fourier com a autocorrelação dada pela convolução  $f * f^*$ , fornecendo  $\hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega)}$ . Em engenharia, o lado direito da equação 3.26 é chamado de espectro de potência do sinal  $f$ .

### 3.2 Transformada inversa de Fourier

Se  $f$  e sua transformada de Fourier  $\hat{f}$  pertencem ao espaço  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , então  $f$  pode ser representada como uma superposição de ondas  $e^{2\pi x \cdot \omega}$  de frequências  $\omega$ . Em linguagem de Álgebra Linear, diz-se que a  $f$  pode ser representada como uma soma de termos  $\langle f, e^{2\pi x \cdot \omega} \rangle e^{2\pi x \cdot \omega}$ . Ou seja,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi x \cdot \omega} d\omega \quad (3.27)$$

Recorrendo a notação utilizada para a operação reflexão, fica evidente que

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{F} \quad (3.28)$$

A contrapartida de assumir como válida a fórmula da transformada inversa de Fourier para  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  é que estimativas de energia da  $f$  e da  $\hat{f}$  podem ser interpretadas em termos de autocorrelações dessas funções. Isto ocorre porque convoluções de  $f$  com  $f^*$ , em relação à origem de  $\mathbb{R}^d$ , produzem equações semelhantes a das autocorrelações tanto no domínio físico quanto no de frequências. De fato, se  $f * f^* \in L^1(\mathbb{R}^d)$  sua transformada inversa de Fourier é dada por

$$f * f^*(x) = \int \hat{f}(\omega)\hat{f}^*(\omega) e^{-2\pi x \cdot \omega} d\omega \quad (3.29)$$

Fazendo  $x = 0$  nesta última equação acima, obtém-se que a autocorrelação  $\hat{f} * \hat{f}^*$  fornece a estimativa  $\|f\|_2^2$  de energia, visto que

$$f * f^*(0) = \int \hat{f}(\omega)\hat{f}^*(\omega) d\omega = \int |f(\omega)|^2 d\omega \quad (3.30)$$

Por outro lado, da definição das operações convolução e reflexão chega-se que a seguinte estimativa para a energia da  $f$

$$f * f^*(0) = \int f(y)\overline{f(y)}dy = \int |f(y)|^2 dy \quad (3.31)$$

Por fim, a equivalência segue teorema de Plancherel, ou seja,

$$\|f\|_2^2 = f * f^*(0) = \int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega)} d\omega = \int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.32)$$

### 3.3 Análise tempo-frequência com motivações em processamento de sinais

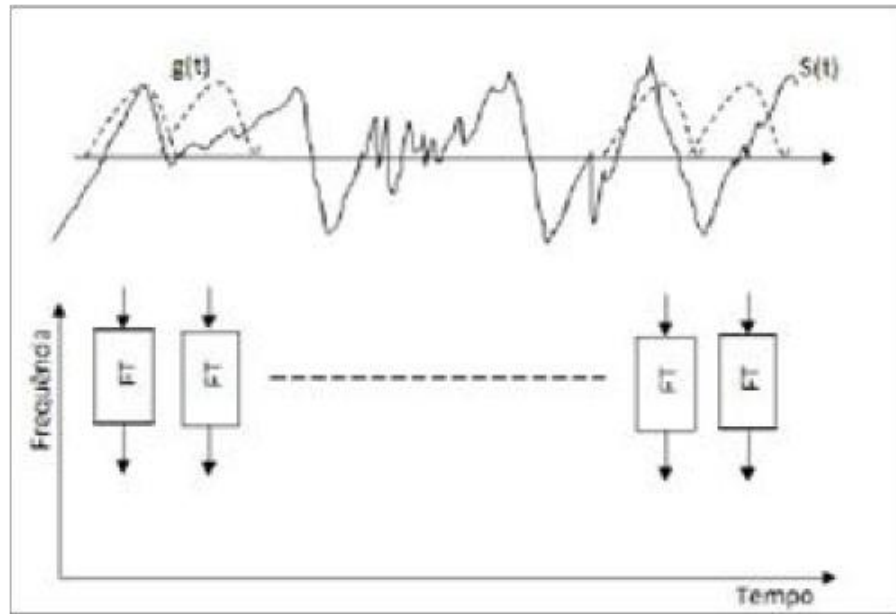
O conceito de plano tempo-frequência surge a partir dos anos 1930 nos artigos de Wigner-Billouin (MEYER, 2000). Em seguida, Gabor (1946) apresenta seu profícuo artigo sobre a decomposição de um sinal de voz como uma combinação linear de *shifts time-frequency*. Desde então, informações locais em uma grande variedade de sinais são investigadas utilizando os *shifts time-frequency*.

A essencialidade da ideia de Gabor consiste em introduzir na transformada de Fourier uma função não nula, denominada janela. Com esta modificação a transformada de Fourier passa a ser chamada transformada janelada de Fourier ou transformada de Fourier de curto tempo ou na nomenclatura inglesa *short-time Fourier transform (STFT)*, definida por

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt, \text{ para } x, \omega \in \mathbb{R}^d \quad (3.33)$$

A figura 3.1 mostra que a STFT pode ser interpretada como uma análise de Fourier local.

Figura 9 – Representação da STFT



Fonte: Dias (2015)

Considerando uma bola aberta centrada em  $x \in \mathbb{R}^d$  e raio  $r > 0$ , indicada por  $B_r(x) = \{t \in \mathbb{R}^d \mid \|t - x\|_2 < r\}$ . E escolhendo uma janela  $g$  como

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in B_r(x) \\ 0, & \text{se } t \notin B_r(x) \end{cases} \quad (3.34)$$

Reduz-se a equação 3.33 a

$$V_g f(x, \omega) = \int_{B_r(x)} f(t) e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^d \quad (3.35)$$

Mostrando que a STFT consiste em aplicar a transformada de Fourier em trechos do sinal, evidenciando, sua característica de análise local. Obviamente as magnitudes de  $|V_g f|$  indicam a concentração do conteúdo de frequências  $\omega$  da  $f$  na vizinhança de  $x$ . Para  $d = 1$ ,  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , em processamento de sinais, é chamado de plano tempo-frequência. Em física, por sua vez, é chamado espaço de fase.

Valendo-se das operações definidas nos subcapítulos anteriores, o seguinte lema lista as várias formas de representar a STFT (GRÖCHENIG, 2013).

Lema 1. Sejam  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , com  $g \neq 0$ . Então  $V_g f$  é absolutamente contínua em  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  e

$$V_g f(x, \omega) = \mathcal{F}(f \cdot T_x \bar{g})(\omega) \quad (3.36)$$

$$= \langle f, M_\omega T_x g \rangle \quad (3.38)$$

$$= \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle \quad (3.39)$$

$$= e^{-2\pi i x \cdot \omega} \mathcal{F}(\hat{f} \cdot T_\omega \hat{g})(-x) \quad (3.40)$$

$$= e^{-2\pi i x \cdot \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x) \quad (3.41)$$

$$= e^{-2\pi i x \cdot \omega} (f * M_\omega g^*)(x) \quad (3.42)$$

$$= (\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega) \quad (3.43)$$

$$= e^{-\pi i x \cdot \omega} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \bar{g}\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt \quad (3.44)$$

Demonstração: Ver (GRÖCHENING, 2013).

Comparando os lados direitos das equações 3.5 e 3.37, vemos que eles diferem substancialmente porque enquanto  $e^{2\pi i t \cdot \omega}$  é não nulo para todo  $t \in \mathbb{R}^d$ ,  $g(t - x)e^{2\pi i t \cdot \omega}$  é não nulo somente para  $t$  no suporte da janela  $g$ . Tal fato revela a característica de análise global da equação 3.5 e local da equação 3.35. Outra propriedade que distingue essas duas equações é que ao passo que as funções  $\{e^{2\pi i t \cdot \omega}\}$  formam uma base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\{g(t - x)e^{2\pi i t \cdot \omega}\}$  formam uma base ortonormal nos trechos onde  $\mathbb{R}^d$  coincide com o suporte da janela  $g$ .

### Espectrograma

Destacadas as diferenças entre a análise global e local de Fourier, neste subcapítulo definimos o espectrograma de  $f$  relativamente à janela  $g$  e suas principais propriedades. À vista disso, seja  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  uma função janela unitária na norma  $L^2$ , isto é,  $\|g\|_2 = 1$ . Define-se o espectrograma da  $f$  por:

$$espec_g f(x, \omega) = |V_g f(x, \omega)|^2 \quad (3.45)$$

Para fins de aplicação destaca-se duas propriedades do espectrograma:

**Não-negatividade:**  $espec_g f(x, \omega) \geq 0$  para todo  $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ ;

**Preservação de energia:**  $\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |V_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega = \|f\|_2^2$

A primeira propriedade do espectrograma decorre naturalmente do tipo de operação que lhe define. Sendo de serventia na representação das magnitudes do conteúdo espectral em escalas de zero para mínimo conteúdo até valores positivos compatíveis com a ordem de grandeza dos registros positivos do sinal. A segunda



por sua vez representa uma versão local do teorema de Plancherel, de aplicabilidade na estimativa da energia local do sinal.

### 3.4 Fórmula inversa da *Short-Time Fourier Transform*

Partindo do teorema de Plancherel, equação 3.8, tem-se como consequência que além de  $\mathcal{F}$  ser uma extensão para um operador unitário sobre  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , ela também preserva o produto interno. Ou seja, vale a fórmula de Parseval

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle, \quad \forall \hat{f}_1, \hat{f}_2 \in L^2(\square^d) \quad (3.45)$$

Resultado semelhante vale também para a STFT, uma vez que esta possui sua versão do teorema de Plancherel e, portanto, sua fórmula de Parseval dada por

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_1} f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g, g_2 \rangle}, \quad \forall f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad (3.46)$$

Avaliando a equação 3.46, para  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , obtêm-se que  $\|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$ . Para  $\|g\|_2 = 1$ , não é difícil mostrar que a STFT é uma isometria que leva  $L^2(\mathbb{R}^d)$  para dentro de  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . Nessas condições temos que  $f$  é completamente determinada pela STFT. Também, em virtude produto interno da equação 3.37, sempre que  $\langle f, M_\omega T_x g \rangle = 0, \quad \forall x, \omega \in \mathbb{R}^d, f = 0$ . Entretanto, apesar disso significar que o conjunto  $\{M_\omega T_x g \mid x, \omega \in \mathbb{R}^d\}$  gera um subespaço denso de  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ , isso não é suficiente para reconstruir  $f$  a partir de  $V_g f$  (GRÖCHENING, 2013). Necessitando-se, portanto, de uma fórmula explícita de representação para  $f$ , em termos de superposições dos *shits time-frequency*.

Se  $\gamma, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  são não ortogonais, relativamente ao produto interno de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , então para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , a inversa da STFT é dada por

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\square^{2d}} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma dx d\omega \quad (3.47)$$

Após esta fórmula, podemos apresentar os três passos distintos que caracterizam uma análise tempo-frequência. A saber, são eles:

**1) Análise:** Dado um sinal  $f$  e uma janela  $g$ , previamente escolhida, calcule  $V_g f$  e o interprete como um mapeamento do sinal no plano tempo-frequência.

**2) Processamento:** Transforme  $V_g f(x, \omega)$  em uma nova função  $F(x, \omega)$ .

**3) Síntese:** Escolhendo previamente uma janela  $\gamma$ , reconstrói-se o sinal processado utilizando a fórmula

$$\tilde{f} = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, \omega) M_\omega T_x \gamma dx d\omega \quad (3.48)$$

Convém observar que, do ponto de vista da análise, é pertinente um estudo sobre a escolha da função janela introduzida na TF, haja vista o princípio de incerteza. Contudo, é importante salientar que para o completo entendimento da análise tempo-frequência, tal princípio não se restringe unicamente a uma desigualdade envolvendo o sinal e sua transformada de Fourier. Como mostra a versão do princípio da incerteza para o caso unidimensional, com  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , também conhecido como inequação de Heisenberg-Pauli-Weyl (GRÖCHENIG, 2013) (MUMFORD; DESOLNEUX, 2010), escrita como

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \beta)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2 \quad (3.49)$$

para  $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$ .

É importante salientar que esta versão unidimensional do princípio da incerteza permite mostrar, utilizando as propriedades da transformada de Fourier, que a igualdade na equação 3.49, é válida se, e somente se,  $f$  for um múltiplo de  $T_\alpha M_\beta \varphi_a$ , para  $\varphi_a(x) = \exp(-\pi x^2/a)$  e  $a > 0$ . Em outras palavras, a igualdade na equação é verificada se, e só se, o sinal for múltiplo de uma função gaussiana não normalizada. Realça-se aqui, que tal versão do princípio da incerteza ainda não é totalmente adequada para mostrar a importância de se assumir um compromisso entre as resoluções no domínio tempo-frequência. A equação 3.49 é hábil em mostrar que o produto dos desvios padrão de  $|f(x)|^2$  e  $|\hat{f}(\omega)|^2$ , respectivamente, possui uma cota inferior positiva. Melhor dizendo, estes desvios não podem ser simultaneamente pequenos.

Apesar de destacar que o princípio da incerteza para  $g$  acarreta em um princípio da incerteza para  $V_g f$ . A versão descrita pela equação 3.49 não é muito apropriada dado que existe um vínculo na fórmula de inversão da STFT, tanto na equação 3.47 como na 3.48, estabelecendo uma representação para  $f$ , em termos de superposições dos *shifts time-frequencies*. Por conseguinte, é urgente considerar um princípio mais geral que afirma o seguinte: independente do tipo de mapeamento

utilizado,  $f$  não pode ser mapeada em pequenas regiões do plano tempo-frequência. (GRÖCHENIG, 2013)

**Proposição 1 (Princípio da incerteza fraco para a STFT bidimensional):** Se  $f$  e  $g$  são unitárias na norma  $L^2$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $\varepsilon \geq 0$  são tais que

$$\iint_U |V_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega \geq 1 - \varepsilon \quad (3.50)$$

Então,  $area(U) \geq 1 - \varepsilon$ .

Demonstração: Ver (GRÖCHENIG, 2013).

Como visto anteriormente, uma das consequências da fórmula inversa da STFT é estabelecer que seja possível construir uma base para o espaço  $L^2(\mathbb{R}^d)$  utilizando o conjunto  $\{M_\omega T_x g \mid x, \omega \in \mathbb{R}^d\}$ . Por outro lado, a versão fraca do princípio da incerteza afirma que a resolução do espectrograma não pode estar concentrada em uma pequena região do plano tempo-frequência. Um subsídio para tal discussão é o conceito frame de Gabor apresentado a seguir.

### 3.5 Frames de Gabor

A teoria dos frames tem origem nos estudos sobre séries de Fourier não harmônica conduzido por Duffin e Schaffer (1952), publicado seis anos após o artigo seminal *Theory of Communication de Gabor*. Muito embora abordassem questões sobre a não homogeneidade das séries de Fourier, tais estudos se mostraram de extrema importância na teoria da amostragem, na análise tempo-frequência e na teoria da wavelets. Mais detalhes ver (CASAZZA *et al.*, 2000) (FEICHTINGER; LUEF, 2012) (DAUBECHIES; GROSSMANN; MEYER, 1986).

Uma sequência  $\{g_{k,l}\} = \{T_x M_\omega g\}$  em  $L^2(\mathbb{R})$  é chamada frame de Gabor para o espaço  $L^2(\mathbb{R})$ , se existirem duas constantes positivas  $A, B > 0$  tal que para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{(x,\omega) \in \mathbb{R}^2} |V_g f(x, \omega)|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.51)$$

Para uma discussão mais detalhada sobre a teoria dos frames de Gabor (GRÖCHENIG, 2013).

Visando contemplar os objetivos desta monografia encaminha-se, a partir desta parte do texto, à modelagem computacional dos sinais utilizando o esquema de Fourier proposto em (DIAS, 2014). Vale destacar que nesse trabalho o autor

utiliza elementos da teoria dos cumulantes, também conhecida como estatística de alta ordem, para elaborar um esquema de Fourier com resolução tempo-frequência ajustada pela curtose definida pelo quarto cumulante normalizado.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como apresentado nos capítulos 2 e 3, a análise tempo-frequência é a técnica mais adequada para analisar sinais não estacionários e transientes. Contudo, em virtude do princípio de incerteza, em sua versão fraca para STFT, um desafio a ser superado nas análises é produzir espectrogramas com resolução capaz de localizar o conteúdo de frequências no tempo. Sendo a janela da STFT ajustada por estatística de alta ordem.

Assim, os experimentos foram realizados na forma descrita a seguir. Buscando sinais adequados, em tamanho e tipos, para as análises, recorreu-se aos repositórios *Times Series Prediction Repository* - ICMC - USP (PAULO, 2018) e Laboratório de Física Aplicada da Universidade de *Washington* (WASHINGTON, 2018). Dando preferência a sinais que descrevam fenômenos ambientais e de fisiologia humana, selecionaram-se os do tipo experimentais adotando como critério possuir um tamanho mínimo de amostra satisfazendo 1024 pontos. Para os sintéticos a escolha obedeceu ao mesmo critério.

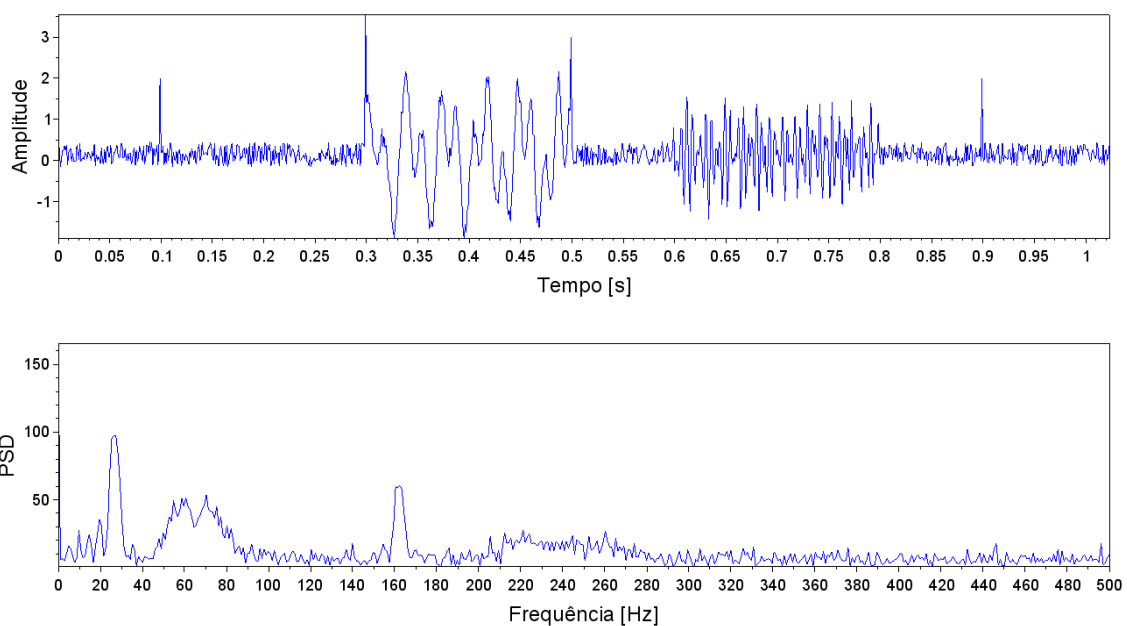
Para adequação dos dados às análises editou-se no formato de entrada do código do programa utilizado. Como recurso computacional utilizou-se um computador HP com 4 GB de memória RAM e sistema operacional de 64 bits, número de patrimônio 083489 disponibilizado pela Universidade Federal do Pampa - Unipampa Campus Bagé. Na execução dos experimentos computacionais realizou-se a implementação com a utilização do *software* computacional numérico, código aberto, *scilab* versão 5.5.2 64 bit.

A seguir, são apresentados alguns resultados dos experimentos computacionais.

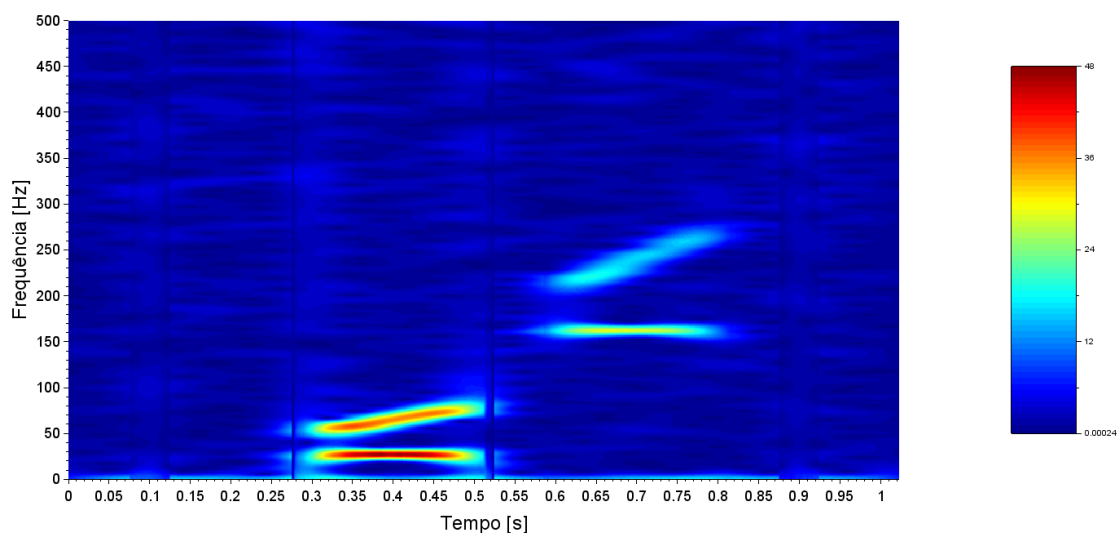
A Figura 10 a) é um sinal de ruído gaussiano sobreposto em dois trechos distintos por produtos entre senoides e exponenciais gaussianas, contendo quatro frequências diferentes. Além disso, foi introduzido quatro impulsos de mesma amplitude. Adicionalmente também apresenta um perfil de PSD, na qual evidenciam-se quatro altas amplitudes de frequências significativas. Uma em torno de 30 Hz, a qual é a maior amplitude, uma em torno de 60 Hz, uma em torno de 160 Hz e uma elevação em entre 200 e 250 Hz. Diferentemente da PSD a qual se limita a apresentar os picos de frequências, não fornecendo qualquer informações sobre os

instantes de ocorrência. O espectrograma da Figura 10 b) não só completa a caracterização do regime de frequência do sinal, como identifica os trechos de contribuição e sua evolução. A Figura 10 c) apresenta o perfil de curtose no tempo caracterizando a mudança de regime de frequência, bem como localizando as variações bruscas de amplitude.

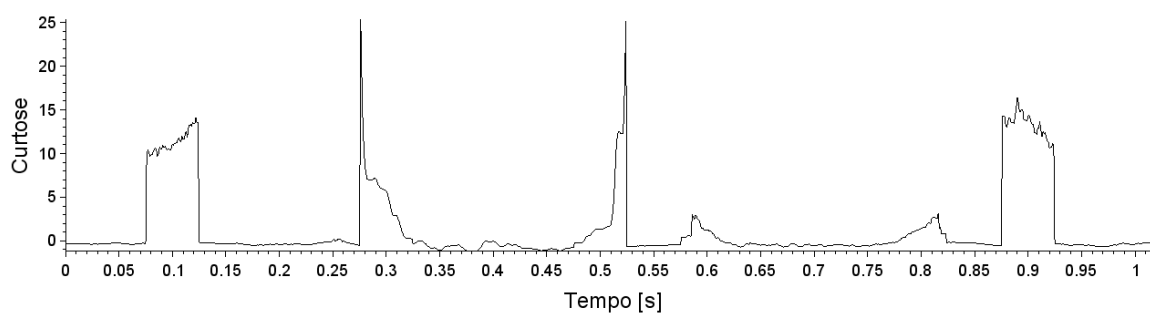
Figura 10 – Sinal sintético de ruído gaussiano



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D

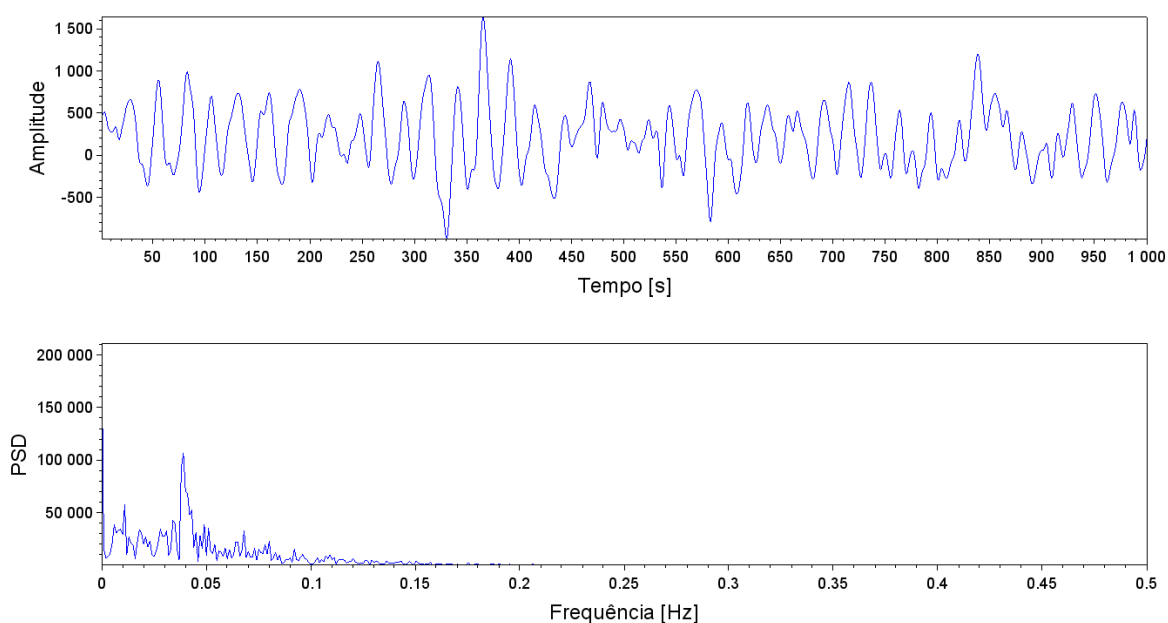


c) Curtose tempo

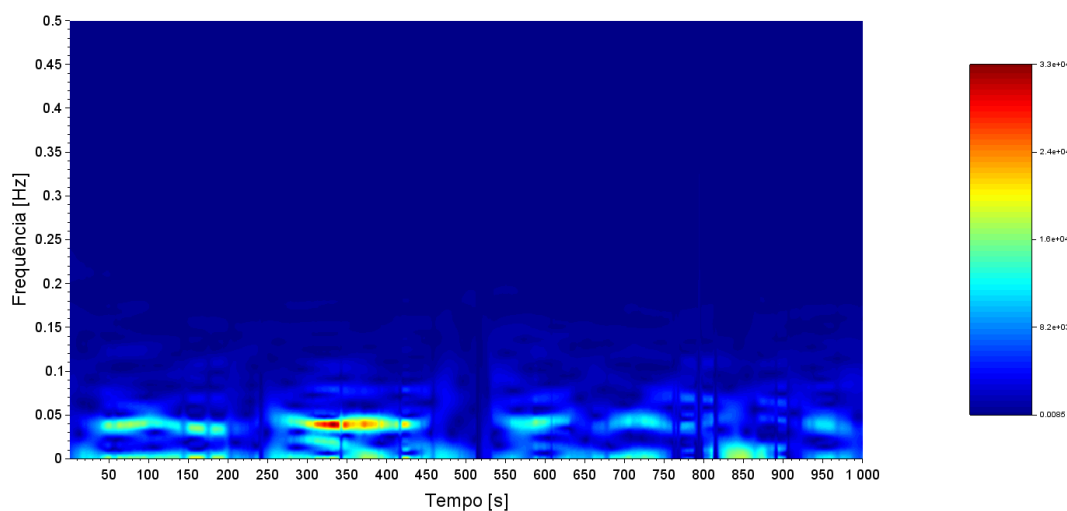
Fonte: Autora (2018)

A Figura 11 a) apresenta um sinal de ondas geradas no oceano, amostrado a uma taxa de 0.25 segundos. No gráfico da PSD, pode-se perceber que em torno da frequência 0.04 Hz apresenta uma amplitude maior, com entornos também significativos. A intensidade desses entornos e a localização do pico de frequência é mostrada na Figura 11 b). Ainda nessa figura, é possível observar que entre os instantes 300 e 450 segundos apresenta-se uma maior densidade de energia e também no entorno dessa frequência nota-se outros trechos de menor densidade de energia. Na Figura 11 c) é apresentado o perfil de curtose evidenciando um comportamento aparentemente uniforme, uma vez que a predominância de valor de curtose negativa.

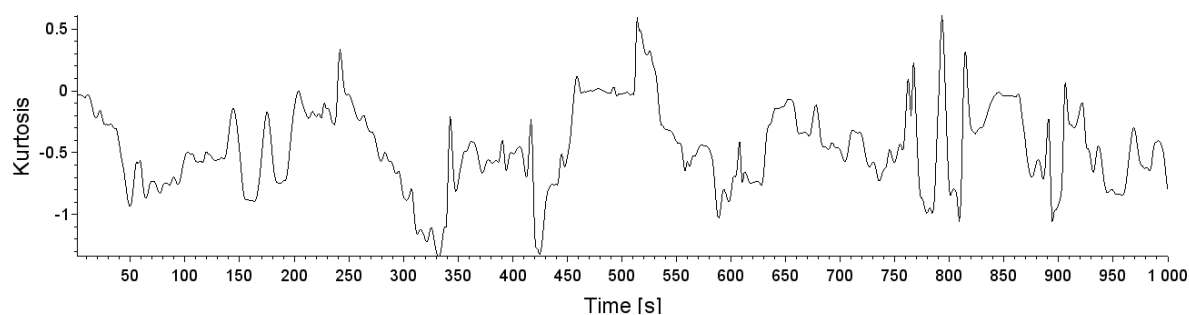
Figura 11 – Sinal de ondas no oceano



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D



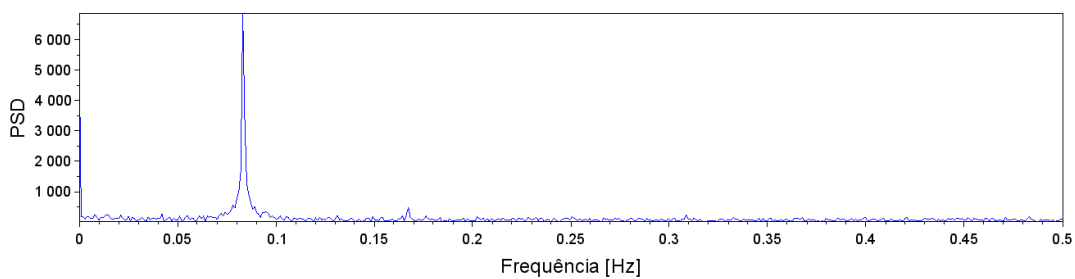
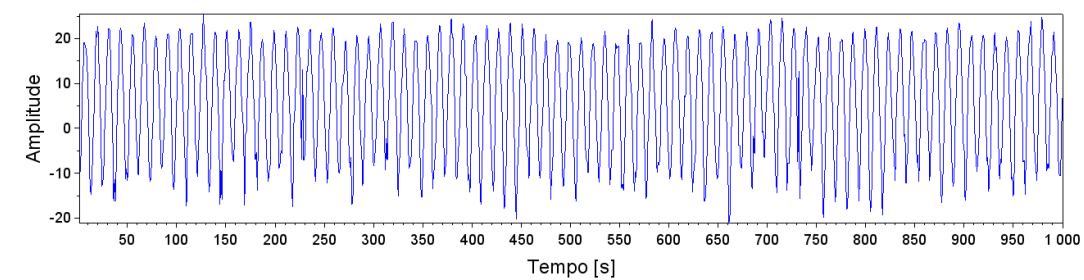
c) Curtose tempo

Fonte: Autora (2018)

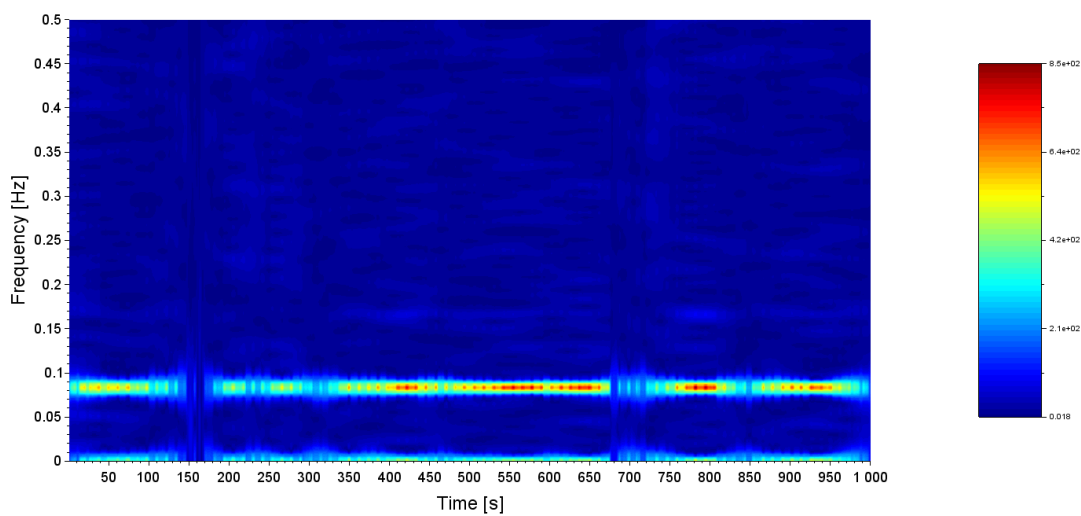
Na Figura 12 é apresentado um sinal de temperatura registrada entre os anos 1820 a 1982, da cidade de *Saint Paul* nos Estados Unidos, a uma taxa amostral mês a mês. O perfil de gráfico apresenta um padrão de comportamento oscilatório, sugerindo a predominância de uma única frequência. Tal indício é confirmado no gráfico da PSD. O espectrograma da Figura 12 b), além de corroborar para a indicação da predominância dessa única frequência, mostra que esta predomina em toda a duração do sinal. A Figura 12 c) apresenta um perfil de curtose com predominância de valores negativos indicando um comportamento aparentemente uniforme.



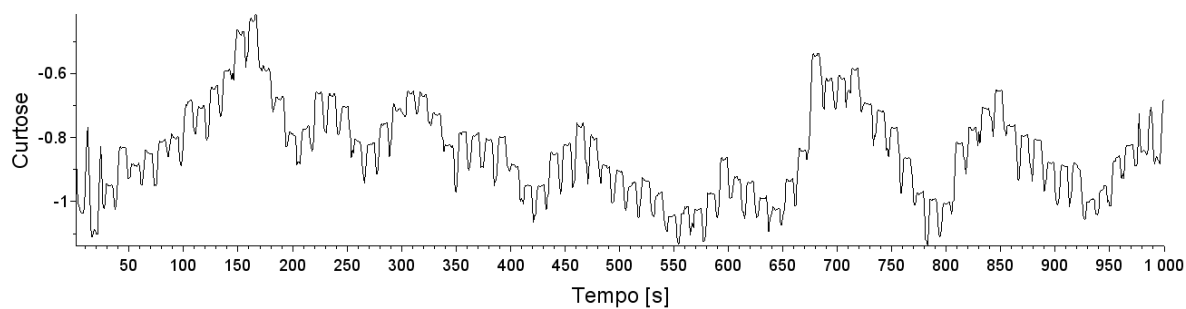
Figura 12 – Sinal de temperatura



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D

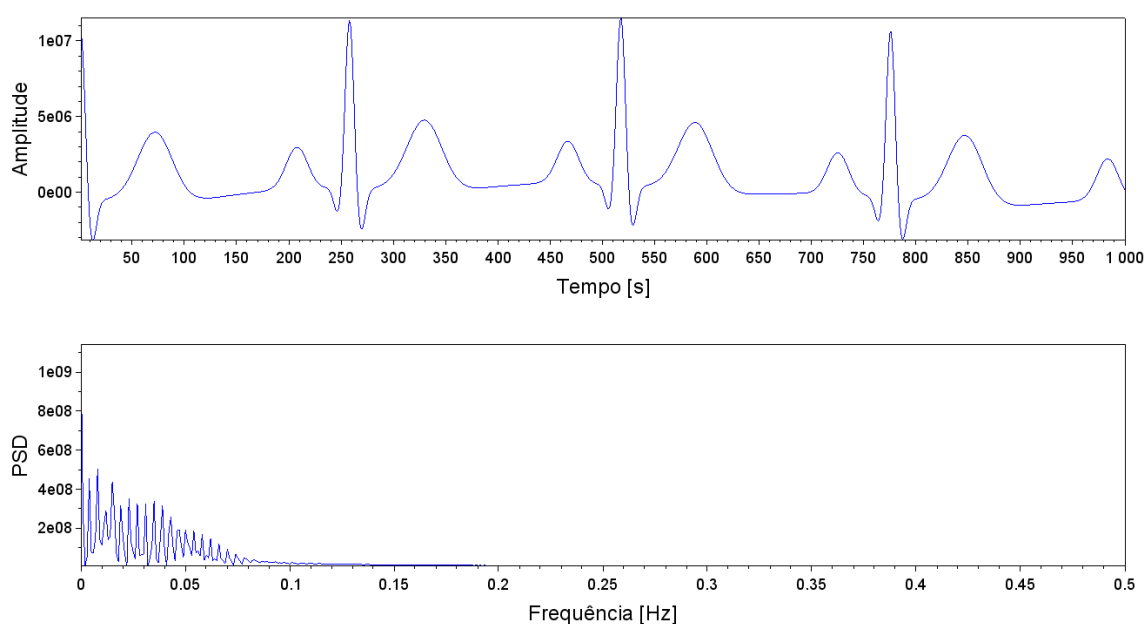


c) Curtose tempo

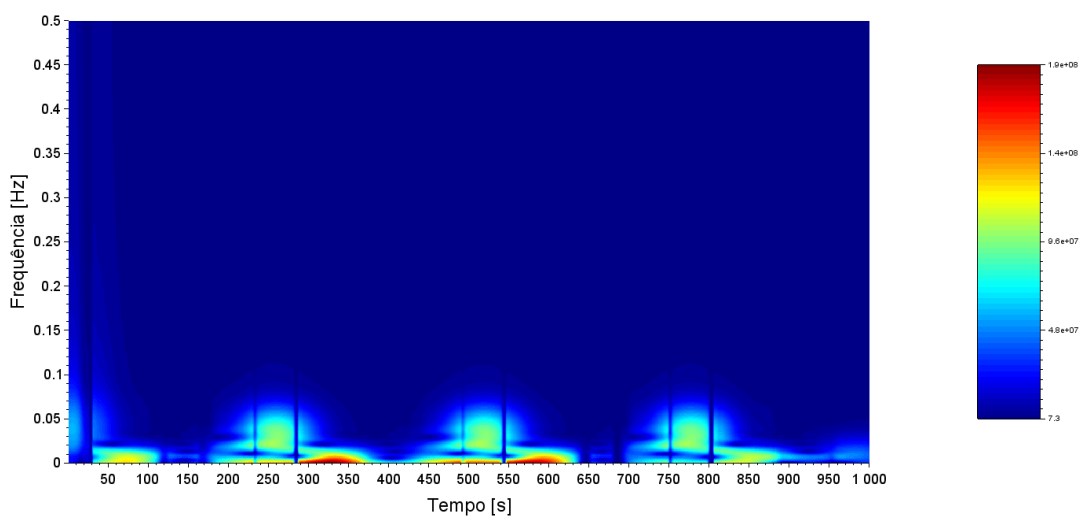
Fonte: Autora (2018)

A Figura 13 a) representa um sinal de eletrocardiograma sintético obtido através de um simulador de eletrocardiograma. O perfil do gráfico apresenta, para esse tamanho de sinal, três picos de despolarização ventricular igualmente espaçados. Para maiores detalhes sobre sinais de eletrocardiograma, consultar (BERALDO, 2017). Na PSD é notório que o perfil do gráfico decai com o aumento da frequência, o que é esperado, uma vez que uma das características desse sinal é apresentar conteúdo de frequência em apenas uma faixa limitada. Ou seja, o sinal tem banda de frequência limitada. Na Figura 13 b) nota-se que há três concentrações do conteúdo de frequência que correspondem aos picos de despolarização ventricular mostrados da Figura 13 a) referente ao perfil do sinal. Ainda através da Figura 13 a) pode-se perceber que a maior PSD é mais próxima de 0 Hz, o que confirma na observação da Figura 13 b) que mostra uma maior densidade de energia mais próxima de 0 Hz em torno de 350 e 600 segundos. Na Figura 13 c) é exibido o perfil de curtose no tempo mostrando que os picos de despolarização ventricular são os mais acentuados, correspondentes aos trechos de em torno de 250 segundos, 500 segundos e 770 segundos. As demais variações da curtose correspondem a picos secundários. Também nota-se o quanto a janela teve que se ajustar para poder visualizar o sinal ao longo do seu desenvolvimento.

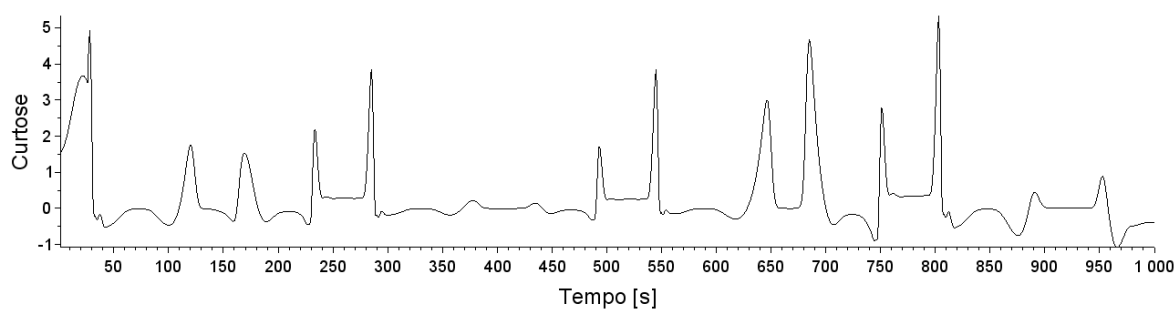
Figura 13 – Sinal de eletrocardiograma sintético



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D

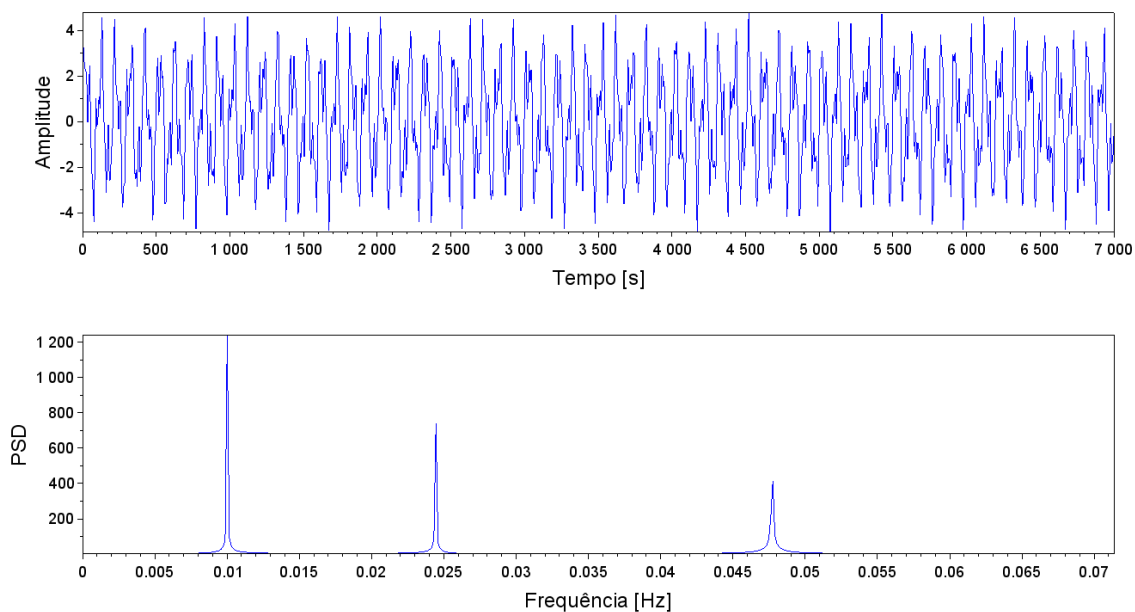


c) Curtose tempo

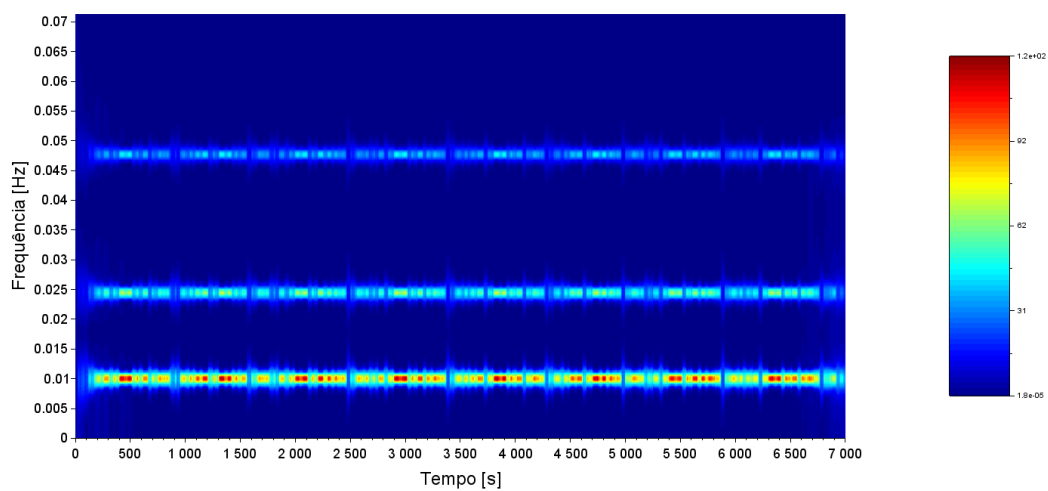
Fonte: Autora (2018)

A Figura 14 a) representa um sinal sintético com característica caótica cuja lei de formação e como foi gerado está presente no apêndice deste trabalho. O seu perfil de gráfico manifesta um padrão característico oscilatório que se mantém ao longo sua duração. Em sua PSD, evidenciada pela Figura 14 a) pode-se perceber que há três frequências significativas nesse sinal. No espectrograma mostrado na Figura 14 b) observa-se que as três frequências, destacando-se por intensidade de energia, estão presentes em toda a duração do sinal. A Figura 14 c) apresenta o perfil de curtose com um comportamento oscilatório indicando a ocorrência de vários picos no sinal. Indicando um comportamento estatístico aparentemente uniforme.

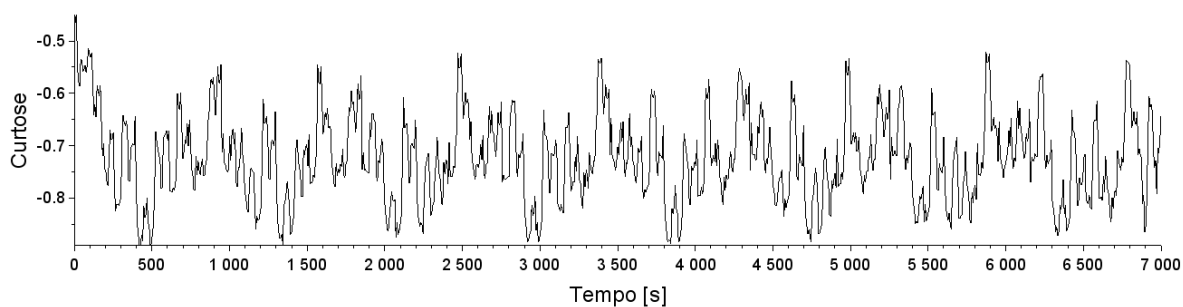
Figura 14 – Sinal caótico 1



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D

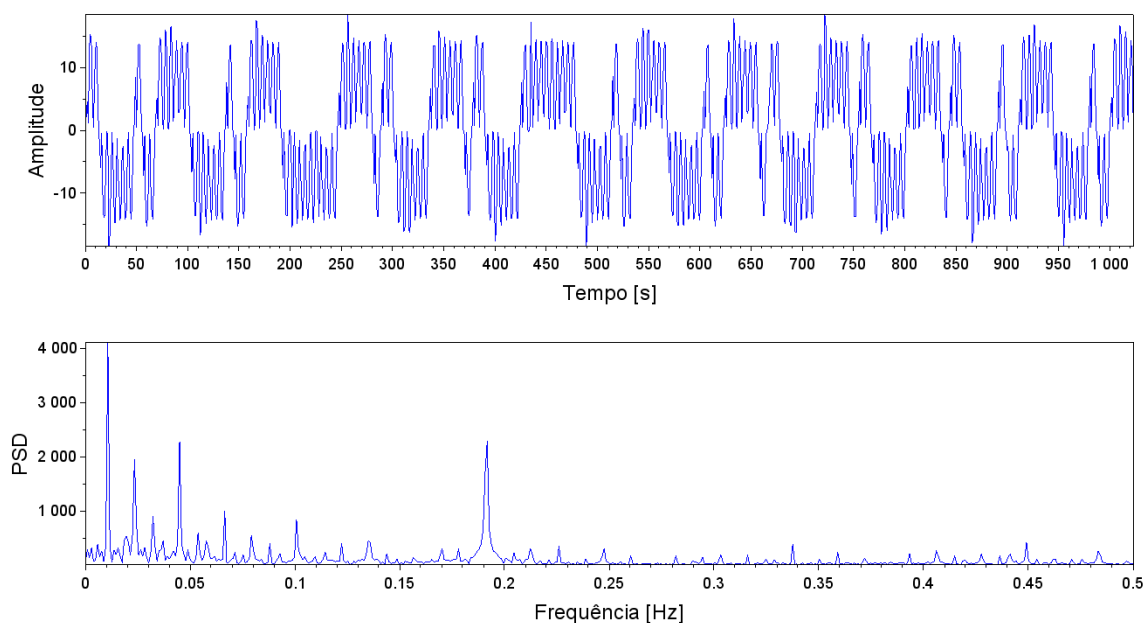


c) Kurtose tempo

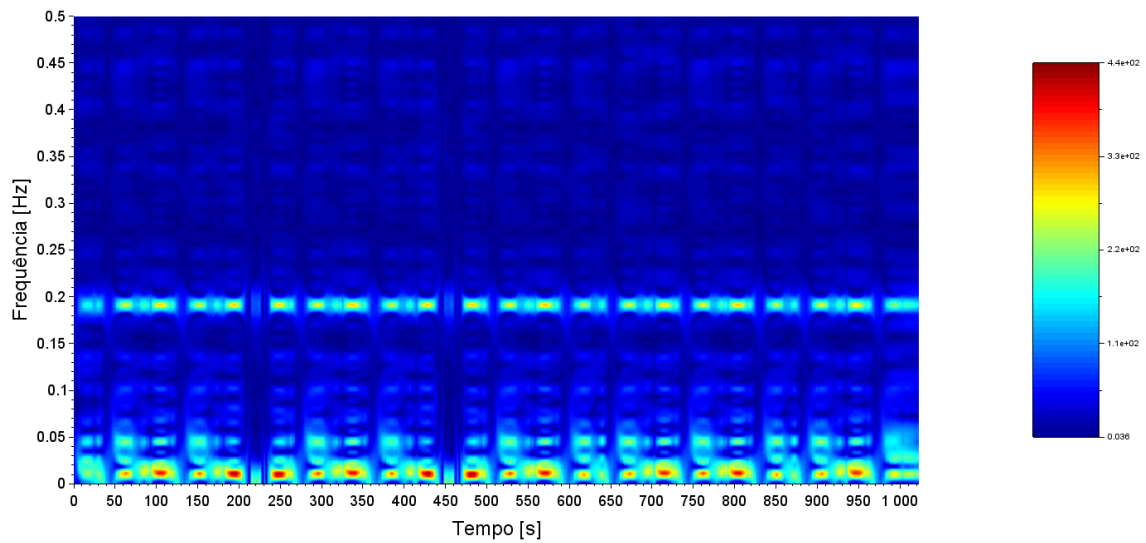
Fonte: Autora (2018)

A Figura 15 a) mostra um sinal sintético com característica caótica cuja sua lei de formação e como foi gerado está presente no apêndice deste trabalho. O perfil de gráfico é um perfil oscilatório com alternância de padrões de oscilações com amplitudes negativas e positivas apresentando esse comportamento repetitivo ao longo de toda sua duração. Na PSD, mostrada ainda na mesma figura, nota-se que quatro valores de frequências se sobressaem, em ordem de contribuição, em 0.01 Hz, 0.19 Hz, 0.045 Hz e 0.025 Hz. Essas características podem ser confirmadas através do espectrograma na Figura 4.6 b) que apresenta em destaque que essas frequências estão presentes em toda a duração do sinal. A Figura 15 c) apresenta o perfil de curtose identificando padrões de comportamento aparentemente ao longo do sinal.

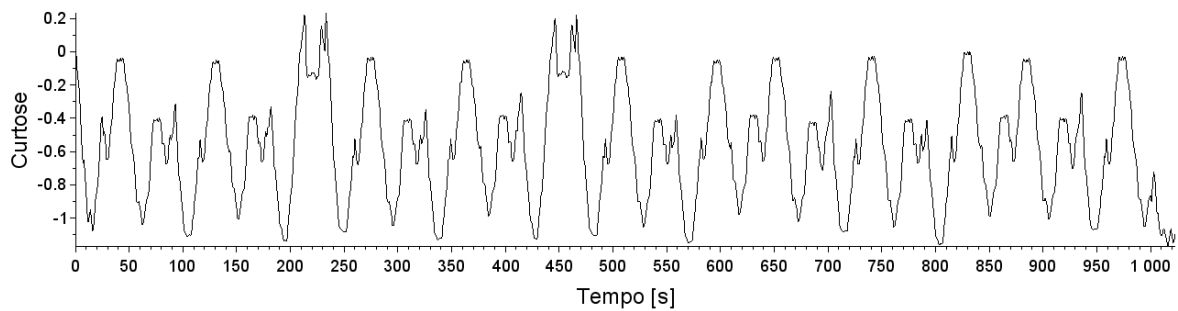
Figura 15 – Sinal caótico 2



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D

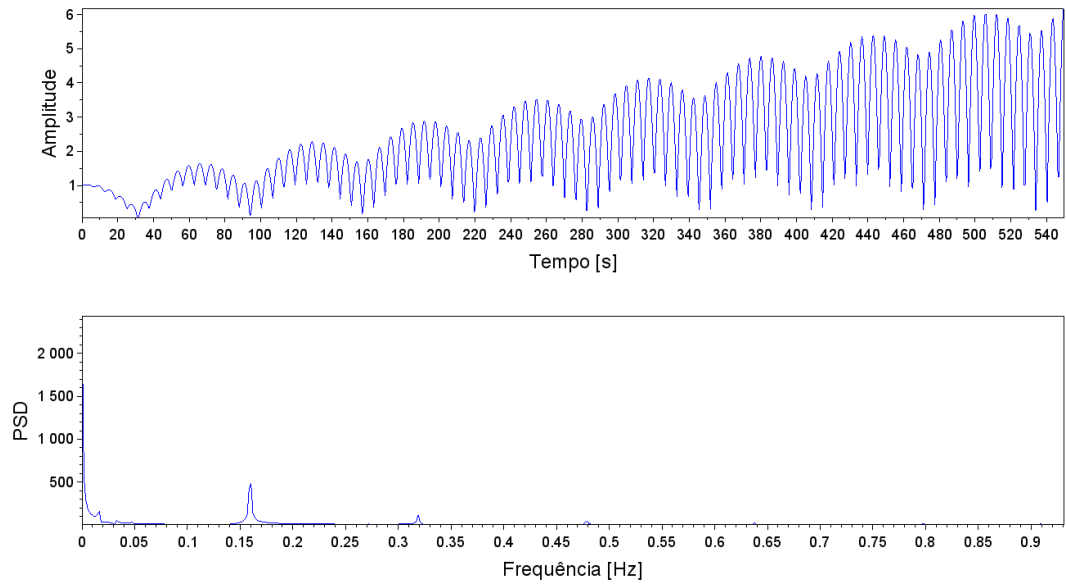


c) Curtose tempo

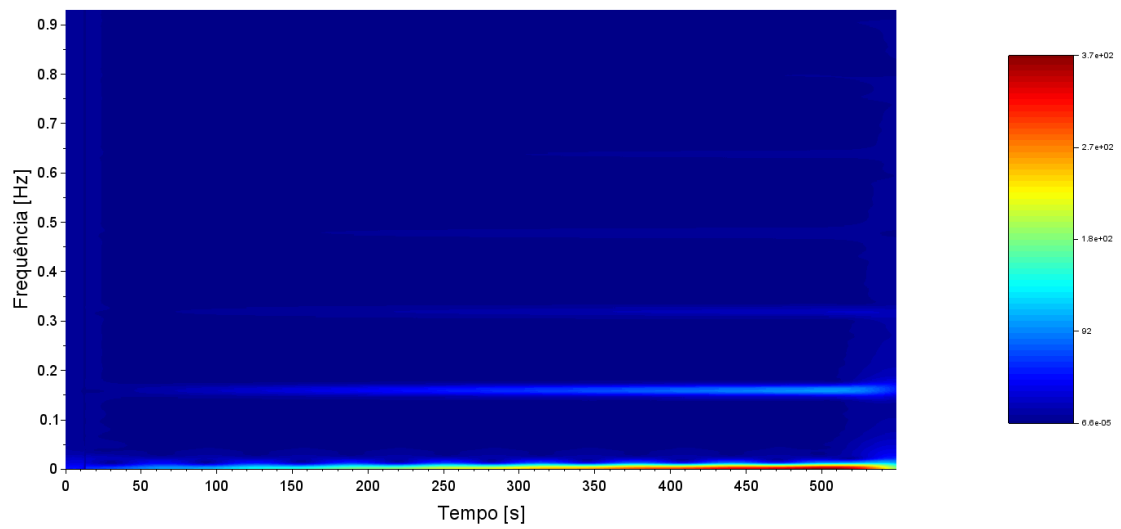
Fonte: Autora (2018)

Na Figura 16 a) é exibido um sinal sintético com dependência de sazonalidade multiplicativa, apresentando um perfil de gráfico com periodicidade de aumento de amplitude. Sua lei de formação e como foi gerado está descrito no apêndice. Na mesma figura é apresentada sua PSD que mostra algumas frequências significativas, com um padrão fixo entre seus valores e amplitudes decaindo rapidamente. Na Figura 16 b) evidencia-se que as cinco principais frequências estão presentes ao longo do sinal. Na Figura 16 c) é apresentado o perfil de curtose indicando um comportamento gaussiano ao longo de toda sua duração.

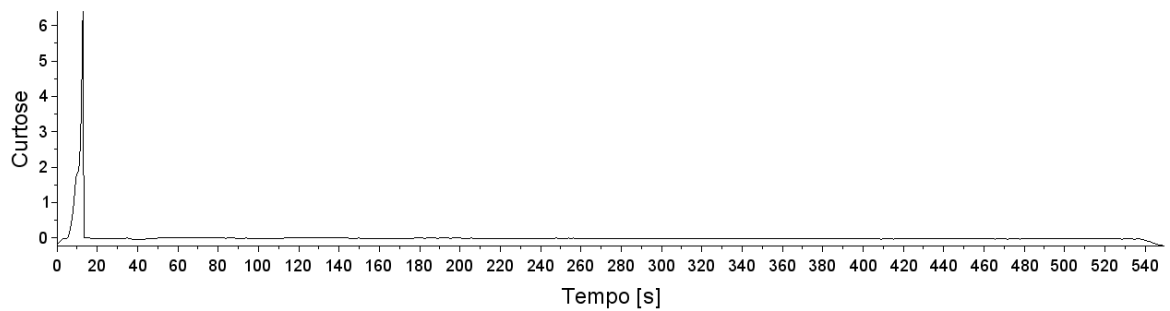
Figura 16 – Sinal sintético com dependência de sazonalidade



a) Sinal e sua PSD



b) Espectrograma 2D



c) Curtose tempo

## **5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS**

### **5.1 Conclusão**

A análise tempo-frequência ajustada por características locais do sinal conduz à análises mais confiáveis, uma vez que a resolução é ajustada. Diferentemente da versão clássica da STFT que utiliza janela escolhida a priori, as versões com janela ajustada tem se mostrado mais adequada ao mapeamento de sinais não estacionários. O ajuste por estatística de alta ordem, baseada em cumulantes além de caracterizar não linearidades e também comportamentos induzidos por outras distribuições que não a normal. Com o estabelecimento da teoria dos frames, muitas versões de esquemas de análise tempo-frequência tem surgido e se mostrado como ferramentas capazes de superar as limitações impostas pelo princípio de incerteza.

Neste trabalho, foi apresentada brevemente a análise global e local de Fourier, bem como os fundamentos de processo estocástico. Também foi apresentada a classificação dos sinais.

No intuito de mapear a evolução do conteúdo de frequência de um grupo de sinais teste, foram realizadas experimentações computacionais. Vale salientar que os sinais teste utilizados foram divididos em duas classes, a saber: sinais sintéticos e sinais experimentais.

Os sinais experimentais foram obtidos através do repositório de domínio público. A aplicação da STFT adaptada sobre sinais não estacionários permitiu a identificação e localização das frequências, bem como suas concentrações no plano tempo-frequência.

### **5.2 Trabalhos futuros**

As seguintes propostas podem ser desenvolvidas após esta pesquisa:

- A aplicação do esquema STFT adaptado à sinais experimentais de ECG, fotovoltaicos e meteorológicos justificando, de modo detalhado, a sua contribuição sobre fenomenologia dos problemas envolvidos;



- Comparar o esquema STFT adaptado com outras representações tempo-frequência, como a distribuição Wigner-ville e as representações Wavelet e Hilbert-Huang.

## REFERÊNCIAS

- BERALDO, O. A. **Processamento digital do sinal de eletrocardiograma para aplicação em experimentos de fisiologia cardíaca**. Thesis (PhD) — Universidade de São Paulo, 2017.
- CARTER, M.; BRUNT, B. V. The lebesgue-stieltjes integral. In: **The Lebesgue-Stieltjes Integral**. [S.l.]: Springer, 2000. p. 49–70.
- CASAZZA, P. G. et al. The art of frame theory. **Taiwanese Journal of Mathematics**, The Mathematical Society of the Republic of China, v. 4, n. 2, p. 129–201, 2000.
- DASGUPTA, A. **Fundamentals of probability: a first course**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- DAUBECHIES, I.; GROSSMANN, A.; MEYER, Y. Painless nonorthogonal expansions. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 27, n. 5, p. 1271–1283, 1986.
- DIAS, F. Um esquema de fourier local para análise tempo-frequência de sinais não-estacionários aplicado a ruído eletroquímico. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2014.
- DIAS, F. L. et al. Mapeamento tempo-frequência de sinais de acústica de salas. **Anais Encontro Nacional de Modelagem Computacional**, 2015.
- DUFFIN, R. J.; SCHAEFFER, A. C. A class of nonharmonic fourier series. **Transactions of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 72, n. 2, p. 341–366, 1952.
- FEICHTINGER, H.; LUEF, F. Gabor analysis and time-frequency methods. **Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics**, Springer Berlin, Germany, 2012.
- GABOR, D. Theory of communication. part 1: The analysis of information. **Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering**, IET, v. 93, n. 26, p. 429–441, 1946.
- GRÖCHENIG, K. **Foundations of time-frequency analysis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- KALAS, F. d. A.; FERREIRA, V. L. D.; DIAS, F. L. Identificação de evento extremo de precipitação via técnica de mapeamento tempo-frequência. **Anais 7 MC Sul**, 2016.
- LATHI, B. P.; GREEN, R. A. **Linear systems and signals**. [S.l.]: Oxford University Press New York, 2005.
- LAX, P. **Functional analysis. pure and applied mathematics (new york)**. Wiley-Interscience New York, 2002.

MEYER, Y. Le traitement du signal et l'analyse mathématique. In: **Annales de l'institut Fourier**. [S.l.: s.n.], 2000. v. 50, n. 2, p. 593–632.

MORETIN, P. Ondas e ondaletas: da análise de fouriera análise de ondaletas (in portuguese).[wave and wavelets: from fourier analysis to wavelets]. **Sao Paulo: Edusp**, 1999.

MUMFORD, D.; DESOLNEUX, A. **Pattern theory: the stochastic analysis of real-world signals**. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2010.

OLEQUES, N. M. B. N. et al. Aplicação da análise de fourier local e da teoria da entropia no estudo do regime de chuvas na região de bagé-rs. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão (ISSN: 2525-4782)**, v. 3, n. 2, 2018.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. Signals and systems. 1997. **Massachusetts Institute Technology, Boston University**, 1997.

PAULO, U. S. **Times series prediction repository - ICMC - USP**. 2018. Disponível em: [http://sites.labic.icmc.usp.br/icmc\\_tspr/index.php](http://sites.labic.icmc.usp.br/icmc_tspr/index.php). Acesso em: 20 ago. 2018.

REGO, T. D. C. *et al.* Identificação de eventos de sombreamento em painéis fotovoltaicos via técnicas de mapeamento tempo-frequência. **Anais 10º Simpósio Internacional de Qualidade Ambiental**, 2015.

ROYDEN, H.; FITZPATRICK, P. **Real Analysis. 4th**. [S.l.]: Boston, MA: Prentice Hall, 2010.

WASHINGTON, U. of. **Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques**. 2018. Disponível em: <http://staff.washington.edu/dbp/>. Acesso em: 20 ago. 2018.

## APÊNDICE A – CÓDIGOS SCILAB E PUBLICAÇÕES

### Sinal de ruído gaussiano

```

functionx= sinal_teste01(deltaT)

// Frequências

f1 = 27 ;
f2 = 81 ;
f3 = 162;
f4 = 171;

// Ruído Gaussiano

ruídoGaussiano = 2_ rand (1,1024) _0.3 - 0.15 ;
x = ruídoGaussiano ;
// Impulsos
x(100) = 2;
x(300) = 2;
x(500) = 2;
x(900) = 2;
// Senoides misturadas
for i =300:500
t = i _ deltaT ;
x(i) = x(i) + sin(2*%pi*f1*t )*exp (-( t-0.4)^2)
+ sin(2*%pi*f2* t*t ) * exp (-( t -0 . 4 ) ^ 2 );
end
//
// Sinais chirp
for i =600:800
t = i * deltaT ;
x(i) = x(i) + (sin(2*%pi*(f3* t ) ) * exp (-( t -0.6)^2)
+ sin (2*%p i*( f4* t* t ) ) * exp (-( t -0.8 ) ** 2 ) ) * exp (-( t^ 2 ) ) ;

```

```

End
end function
deltaT = 0.001;
sinal = sinal_teste01(deltaT ) ;
n = length(sinal) ;
tempo = 0:0.001:1.023 ;
plot(tempo, sinal)

```

### Sinal caótico 1

```

t = 0:7:7162;
s1 = (5/2)*sin(2*pi*t /100 ) + (3/2)* sin (2*pi*t /41)+ sin(2*pi*t / 21) ;
size (s1)
plot(t,s1)

```

### Sinal caótico 2

```

n =1024; // número total de amostras
x (1) = 0 ; // condição inicial
t = 0:1: 1023 ; // tempo inicial
// Sinal
For i =2: n
x(i) = (1/2) * x (i -1)+(25* x (i -1) ) / (1 + ( x (i -1) )^2)+7* cos (1.2* t(i))
end
tempo= t ;
sinal =x ;
plot (tempo ,sinal)

```

### Sinal com sazonalidade

```

t = 0: 0.5372:550 ; //intervalo de tempo
// Sinal
x =(t / 100 ) . * abs( sin (t/2)) + abs(cos (t/20))
tempo= t ;
sinal =x;
plot (tempo , sinal)

```

## APENDICE B – PUBLICAÇÕES

### ANÁLISE DE UM EVENTO DE CHUVA NA CIDADE DE BAGÉ ATRAVÉS DE METODOLOGIA DE PLANEJAMENTO FATORIAL UTILIZANDO SOFTWARE R

OLEQUES, N. M. B. N. <sup>1</sup>, FERREIRA, V. L. D.<sup>1</sup>, KALAS, F.A.<sup>2</sup>, DUARTE FILHO, P. F. M.<sup>1</sup>, DIAS, F. L.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) – Bagé / MCEES – RS – Brasil

<sup>2</sup> Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro (IPRJ) – Nova Friburgo / PPGMC – RJ – Brasil

#### RESUMO

O município de Bagé, localizado na região de campanha no Rio Grande do Sul, tem como principal economia, a produção agropecuária. A mesma sofre forte influência das condições climáticas, afetando diretamente a produção de alimentos. Nesse sentido, a utilização de técnicas estatísticas para análise de dados climáticos, em especial a precipitação, favorece a uma melhor compreensão desse fenômeno, bem como dos possíveis fatores que o afetam. Nesse contexto, este trabalho teve por objetivo a utilização de Planejamento Fatorial Completo 2<sup>o</sup> para análise de dados pluviométricos do município de Bagé utilizando o software R. Os resultados obtidos pelo planejamento indicam que todos os fatores analisados influenciam a variável resposta precipitação. Foram observadas interações entre os fatores temperatura:umidade; temperatura:pressão, temperatura:radiação, umidade:pressão e umidade: radiação, bem como as interações pressão:vento, pressão:radiação e vento:radiação.

Palavras-chave: Planejamento fatorial; Precipitação pluviométrica, *Software R*.

## 1 INTRODUÇÃO

Nas regiões de planícies, historicamente utilizadas para a produção agropecuária, o reflexo das mudanças climáticas afeta significativamente a cultura da produção de alimentos. Incrustada na planície dos pampas gaúcho, na microrregião Campanha Meridional (IBGE, 2006), o município de Bagé/RS tem sofrido nas últimas décadas com sucessivas estiagens relacionadas aos fenômenos de El Niño e La Niña (Gomes, 2012; Ribeiro, 2012; Brondani et al, 2013, entre outros).

O uso de técnicas estatísticas para análises de séries de precipitação estabelece inferências sobre variabilidade dos dados, bem como possibilita uma melhor

compreensão da gênese pluviométrica e sua relação intrínseca com outros fatores climatológicos predominantes. O planejamento fatorial tem sido utilizado no estudo dos efeitos dos fatores (variáveis) sobre uma ou mais respostas (Montgomery, 2010). Nesse sentido, buscando avaliar quais parâmetros influenciam na variabilidade do regime pluviométrico na região de Bagé, é aplicada a técnica de planejamento fatorial 2<sup>8</sup> durante um evento de precipitação nesta cidade.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Coleta de Dados

Os registros atmosféricos obtidos neste trabalho consistem em dados horários do mês de maio de 2017 registrados pela estação automática de superfície (A827) pertencente ao Instituto Nacional de Meteorologia (INMET, 2017). A estação meteorológica A827 encontra-se localizada na cidade de Bagé, a 226 m de altitude, sob as coordenadas 31.3478 °S e 54.0132 °O, no estado do Rio Grande do Sul (Figura 1).



Figura 1 - Localização geográfica de Bagé, Rio Grande do Sul (RS)

Fonte: Atlas Socioeconômico do Rio Grande do Sul (2006) adaptado por Brondani *et al* (2013).

### 2.2. Delineamento Experimental

Para a análise dos dados foi proposto um Planejamento Fatorial Completo 2<sup>s</sup>, em triplicata, no qual averiguou-se a influência de cinco fatores (temperatura, umidade, pressão, velocidade dos ventos e radiação) sobre a precipitação.

A Tabela 1 apresenta os níveis das variáveis utilizados no planejamento. Os níveis foram escolhidos através das maiores e menores médias obtidas de cada variável no mês analisado. O planejamento foi analisado no *software R* (R Core team, 2017).

Tabela 1: Níveis das variáveis para o Planejamento Fatorial Completo 2<sup>s</sup> para precipitação na cidade de Bagé.

VARIÁVEIS	Nível (-1)	Nível (+1)
Temperatura (°C)	4,7	26,9
Umidade (%)	42	97
Pressão Atmosférica (hPa)	979,2	999,3
Vento (m/s)	0,3	8,6
Radiação (KJ/m <sup>2</sup> )	-3,54	2670

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 mostra o gráfico dos efeitos principais dos fatores (temperatura, umidade, pressão, vento e radiação) sobre a variável resposta (precipitação). Individualmente, todos os fatores influenciaram significativamente a resposta. Os fatores temperatura, umidade e vento, apresentaram impacto positivo, ou seja, maior precipitação quando da mudança do nível inferior para o superior do fator. Já, os fatores, radiação e pressão, apresentaram impacto negativo, onde maiores valores de precipitação foram obtidos nos menores níveis de cada fator.



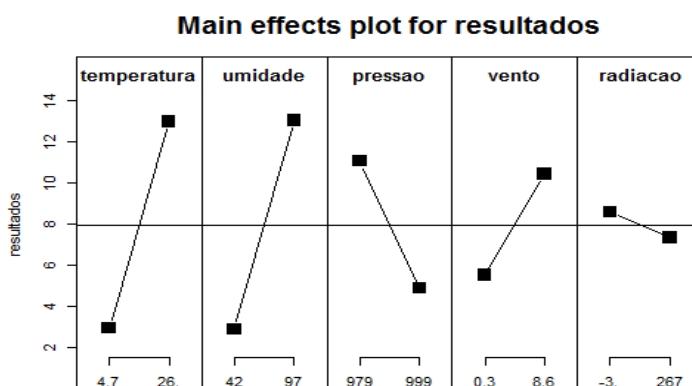


Figura 2 - Efeitos principais sobre a resposta precipitação

A Figura 3 mostra o gráfico de interações entre os fatores em estudo. As interações (temperatura:umidade; temperatura:pressão e temperatura:radiação) foram significativas pelo cruzamento das curvas sob nível maior e menor de cada fator. Também foi verificada interações entre umidade:pressão e umidade e radiação, bem como as interações pressão:vento, pressão:radiação e vento e radiação.

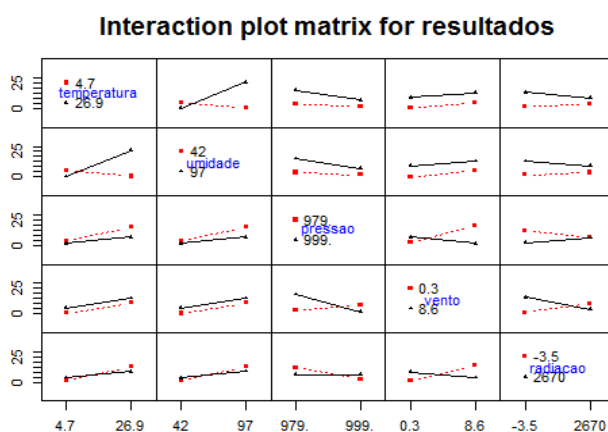


Figura 3 - Interações entre as variáveis atmosféricas

Contudo, através da análise do modelo de regressão (Tabela 1) utilizado no Planejamento, o ajuste não foi adequado  $R^2 = 0,40$ . Isso, deve-se a elevada dispersão dos dados, conforme pode ser observado pelo coeficiente de variação apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 - Estatística descritiva dos parâmetros analisados pelo R

	T (°C)	UR (%)	P (hPa)	Ventos Direção (°)	Ventos Velocidade (m/s)	Radiação (KJ/m <sup>2</sup> )	P <sub>acum</sub> (mm)
<b>Média</b>	15,65	85,00	990,10	3,37	131,41	371,41	7,96
<b>Mediana</b>	15,5	87,2	990,70	3,40	117,9	340,6	0,20
<b>Desvio Padrão</b>	2,61	7,14	3,90	1,14	62,24	213,30	21,43
<b>Coefficiente de variação</b>	0,16	0,08	0,0039	0,33	0,47	0,57	2,69
<b>Máximo</b>	21,0	94,6	997,1	5,6	248,0	688,7	92,8
<b>Mínimo</b>	11,6	64,7	981,4	1,2	38,8	30,3	0,0

Legenda: T - temperatura, UR - umidade relativa, P<sub>acum</sub> - precipitação acumulada diária

#### 4 CONCLUSÃO

As estimativas estatística realizadas com o *software R* para averiguar a influência dos fatores climáticos sobre a variável resposta precipitação pluvial mostraram-se satisfatórios na identificação das interações das variáveis estudadas, tendo em vista refletir fidedignamente as correlações observadas no meio ambiente.

#### 5 REFERÊNCIAS

- BRONDANI, A.R.; WOLLMANN, C.A. & RIBEIRO, A.A. (2013) A percepção climática da ocorrência de estiagens e os problemas de abastecimento de água na área urbana do município de Bagé / RS. Revista do Departamento de Geografia – USP, Volume 26, p. 214-232.
- GOMES, M. A. F. (2012). A água nossa de cada dia. Bagé: Secretaria Municipal Do Meio Ambiente.
- IBGE. (2006). Atlas das representações literárias de regiões brasileiras. Rio de Janeiro.

- INMET (2017). Estação Meteorológica de Observação de Superfície Automática. Instituto Nacional de Meteorologia. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Disponível em: <<http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=estacoes/estacoesautomaticas>>. Acesso em: 12 de julho de 2017.
- R Core Team (2017). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- RIBEIRO, A. A. (2012). Eventos Pluviais Extremos e Estiagens na Região das Missões, RS: a percepção dos moradores do município de Santo Antônio das Missões, Dissertação (Mestrado em Geografia; Organização do Espaço) Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.

## **APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE IMPUTAÇÃO MÚLTIPLA NO PREENCHIMENTO DE FALHAS EM REGISTROS ATMOSFÉRICOS DE BAGÉ/RS**

### **1. INTRODUÇÃO**

A modelagem de fenômenos naturais remete aos primeiros estudos de como se obter informações de medidas observadas valendo-se da previsibilidade da variável física em questão. A estabilidade e a regularidade da frequência de ocorrência de determinada condição de tempo inferidas de séries de medidas contínuas realizadas durante longos períodos têm mostrado que estimativas estatísticas das variáveis climatológicas são relevantes para o entendimento do clima de determinada região (Castelhana et al, 2017).

Um problema recorrente em análise de séries temporais são as lacunas vazias, ocasionadas pela ausência de dados ou falhas oriundas, por exemplo, do excesso de ruídos incorporados nos registros. Estratégias para a imputação de dados faltantes em séries temporais têm sido desenvolvidas nas últimas décadas objetivando solucionar o problema de falhas no preenchimento de forma rápida, no intuito de reduzir a propagação de erros a longo prazo.

Diversos são os métodos ou procedimentos que se ocupam do preenchimento de valores ausentes. As primeiras técnicas desenvolvidas possuíam

relativa simplicidade, denominadas de imputação única: imputação por média, imputação pela substituição pelo vizinho mais próximo, regressão linear. Contudo, a partir da imputação múltipla, onde a cada dado faltante são imputados mais de um dado, associando assim a variabilidade dos dados aos resultados, os métodos ficaram mais precisos e sofisticados. As técnicas mais atuais, como regressão estocástica, modelagem Markoviana, interpolação, redes neurais, entre outras viabilizam a imputação múltipla de dados (Teixeira-Granda et al, 2016; Ferreira et al, 2017).

Porém, vale observar que para completar uma série deve-se considerar tanto sua dependência dos registros e não dos dados faltantes, e que o número de características com lacunas deve ser restrito de modo a limitar o aumento da variância dos estimadores. Ou seja, é necessário a utilização de técnicas que minimizem a introdução de tendências no intuito de preservar a medida de variabilidade da série temporal.

O presente trabalho tem por objetivo completar as lacunas existentes na série de dados de insolação utilizando-se da técnica de imputação múltipla (IM) de dados faltantes com o uso do *software* estatístico R.

## **2. MATERIAIS E MÉTODOS**

Os registros atmosféricos utilizados neste trabalho foram disponibilizados pela estação meteorológica de superfície, pertencente ao Instituto Nacional de Meteorologia (INMET, 2017), e localizada na cidade de Bagé a 254 m de altitude, sob as coordenadas 31.33 °S e 54.10 °O, no estado do Rio Grande do Sul (Figura 1). De acordo com a classificação de Koppen-Geiger, essa região é caracterizada por possuir um padrão de clima temperado do tipo 'Cfa', úmido em todas as estações do ano e quente durante o verão (Ayoade, 2003).



Figura 1 - Localização geográfica de Bagé, Rio Grande do Sul (RS)

Fonte: Brondani *et al* (2013).

A técnica de IM de dados faltantes foi aplicada para dados horários de insolação para o período de 1970 a 2017, com o auxílio do software estatístico R via método PMM (*Predictive Mean Matching*), onde os parâmetros são estimados a partir de uma distribuição a posteriori própria. Utilizou-se o número de imputações múltiplas padrão ( $m = 5$ ) do pacote *mice* de um total de 29.952 registros atmosféricos.

De modo geral a técnica IM, proposta inicialmente por Db. Rubin nos anos 70 (Nunes et al, 2009) resume-se a três fases principais (Figura 2).

1. Imputação: a IM constrói  $m > 1$  bases completas de dados a partir de dados incompletos. Aos dados faltantes são alocados dados plausíveis gerados segundo a aderência desses aos dados observados.
2. Análise: são realizadas estimativas estatísticas dos parâmetros de interesse de cada base gerada por imputação, as quais refletirão o grau de incerteza sobre o valor gerado no procedimento de imputação.
3. Agrupamento: as  $m$  imputações são representadas por uma única estimativa acrescida de desvio padrão, utilizando regras de agrupamento simples.

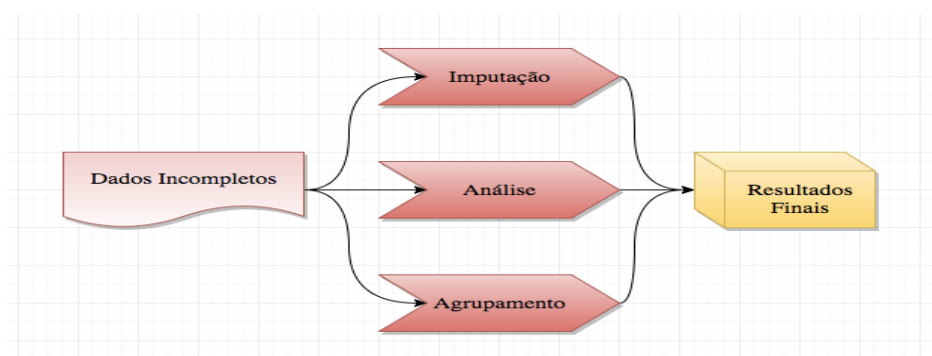


Figura 2 - Principais fases da técnica de IM

### 3. RESULTADOS e DISCUSSÃO

Os resultados referentes a análise estatística dos registros horários de insolação para o período 1970-2017 na cidade de Bagé (RS) são apresentados na Tabela 1, a seguir. De acordo com essa análise é possível inferir que de um total de 29.952 registros (N), 15.102 (NA's) são de dados faltantes, o que reforça mais ainda a técnica imputação de dados na análise desse tipo de série temporal.

Tabela 1 - Estatística descritiva dos dados horários de insolação

	<b>Insolação Total</b>
Mínimo	0,00
1º Quartil	2,20
Mediana	7,10
Média	6,23
3º Quartil	9,70
Máximo	13,30
NA's	15.102
N	29.952

A Figura 3 exibe o gráfico de dispersão da série original, onde são evidenciados padrões de aderência distintos nos trechos separados por faixas, caracterizando a existência de dados observados resultantes do completamento.

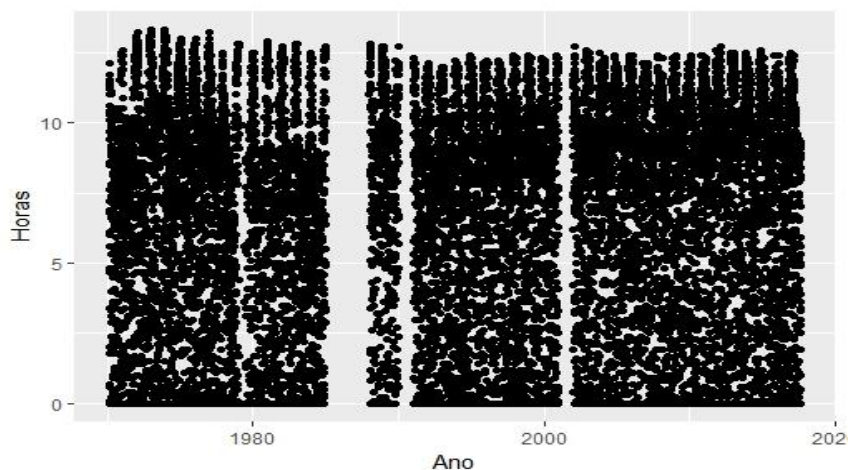
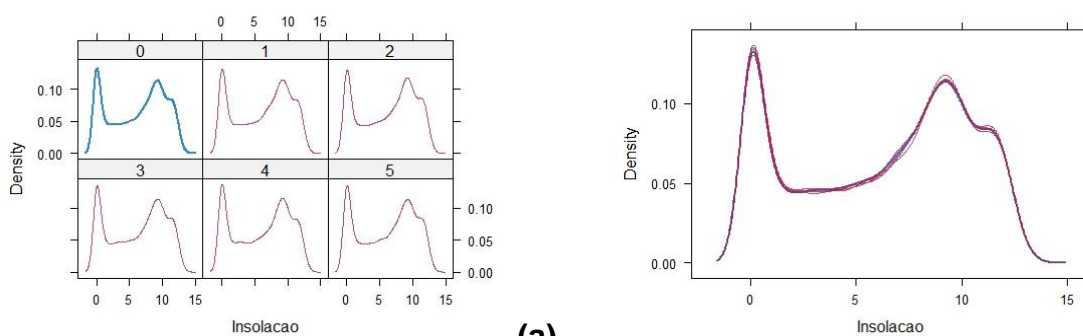


Figura 3 - Dispersão dos dados horários de insolação para o período 1970-2017



1.

(a)

(b)

Figura 4 - Comparação entre a série de dados observados x imputados pela técnica IM (a) dados observados (azul) e imputados (vermelho) e (b) sobreposição da série original e imputada.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a imputação de dados faltantes utilizando a técnica IM apresenta grande flexibilidade, permitindo não somente o uso de técnicas de agrupamentos com posterior escolha do representante de cada agrupamento como também a possibilidade do uso de métodos baseados em entropia. Softwares como R fornecem default de imputação base admitindo o critério de escolha 5 bases, como sugerido por Rubin.

A IM para os dados de séries de insolação apresentou resultados bastante promissores para a escala horária, quando comparado com os dados originais. A eficiência da imputação de dados foi da ordem de 0.98, isto é, mais de 90%.

## 5. REFERÊNCIAS

AYOADE, J. O. Introdução à climatologia para os trópicos. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil. 2003.

CASTELHANO, F. J.; PINHEIRO, G. M.; ROSEGHIN, W. F. F. Correlação entre precipitação estimada por satélite e dados de superfície para aplicação em estudos climatológicos. Geosul, Florianópolis, 2017.

FERREIRA, M. D. de M.; SANTOS, A. T. S.; LUCIO, P. S. Energia Eólica: preenchimento de falhas para velocidade do vento sobre o Estado do Rio Grande do Norte. Revista Renováveis, energias complementares, 2017.

INMET. Estação Meteorológica de Observação de Superfície Automática [internet]. In: Instituto Nacional de Meteorologia. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento; 2017 [acesso em 10 jul 2017]. Disponível em: <http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=estacoes/estacoesautomaticas>.

R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing [internet]. In: R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017 [acesso em 01 ago 2017]. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. TEIXEIRA-GANDRA, C. F. A.; SILVA, G. M.; DAMÉ, R. de C.

F.; BACELAR, L. C. S.; SIMONETE, M. A. Cadeia de Markov no preenchimento de falhas de dados diários de precipitação no Rio Grande do Sul. Magistra, Cruz das Almas – BA, 2016.

ZAMBRANO-BIGIARINI, M. hydroTSM [internet]. In: Time Series Management, Analysis and Interpolation for Hydrological Modelling R package version 0.5-1; 2017 [acesso em 20 ago 2017]. Disponível em: <https://github.com/hzambran/hydroTSM>.

**Análise tempo-frequência de Sinais via Frames de Gabor e Estatística de Alta Ordem: Um enfoque computacional**

**RESUMO**



Este artigo apresenta um estudo sobre os aspectos aplicados e computacionais da análise harmônica restrita a problemas de processamento de sinais. Tal estudo, constitui-se numa pesquisa em fase de desenvolvimento no Curso de Pós Graduação em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação na Universidade Federal do Pampa, campus Bagé, e tem como objetivo a modelagem computacional da análise tempo-frequência de sinais utilizando frames de Gabor ajustados localmente por estimativas de estatísticas de alta ordem via cumulantes. Trata-se da primeira parte da pesquisa na qual os principais elementos da teoria foram elencados possibilitando conexões entre aspectos teóricos e experimentais. Nesse sentido, são apresentados testes computacionais padrão envolvendo sinais sintéticos com características estacionárias e não-estacionárias.

**Palavras chave:** Análise Fourier Local, Estacionaridade de Sinais, Estimativas Estatísticas

**Time-Frequency Signals Analysis via Gabor Frames and High Order Statistics:  
A Computational Approach**

**ABSTRACT**

This paper presents a study on the computational and applied aspects of harmonic analysis restricted to signal processing problems. Such study is a research in the development from the postgraduate course in Computational Modeling in Teaching, Experimentation and Simulation at the Federal University of Pampa, Campus Bagé. It has as objective the computational modeling of time-frequency analysis of signals using Gabor frames locally adjusted by estimates of high order statistics via cumulants. This is the first part of the research in which the main theory elements were listed, enabling connections between theoretical and experimental aspects. In this sense, standard computational tests involving synthetic signals with stationary and non-stationary characteristics are presented.

**Keywords:** Local Fourier Analysis, Signal Stationary, Statistical Estimates

## 1. INTRODUÇÃO

A análise tempo-frequência (*Time-Frequency Analysis* – TFA) é um ramo moderno da Análise Harmônica que remonta aos primórdios do desenvolvimento da mecânica quântica, em 1930, por H. Weyl, E. Wigner e J. Von Neumann, e também ao início da teoria da informação e análise de sinais por D. Gabor, com seu artigo *Theory of Communication* publicado em 1946 (GABOR, 1946; GRÖCHENIG, 2001). Sob o ponto de vista da análise clássica de Fourier, que tem por objetivo passar do domínio físico para o domínio da frequência via transformada de Fourier (*Fourier transform* - TF) (OPPENHEIM, 1997), a TFA pode ser vista como uma análise local no intuito de mapear informações do domínio do tempo no plano tempo-frequência, como é o caso da transformada de Fourier janelada (*short-time Fourier transform* - STFT). Tal análise permite rastrear a evolução do conteúdo de frequências por justaposição das análises locais. Porém, por ser uma extensão da análise espectral clássica de Fourier ao plano tempo-frequência (espaço de fase), a TFA apresenta como uma de suas principais limitações a resolução conjunta em todo plano tempo-frequência. O que implica que as análises tempo-frequência via STFT devem satisfazer o princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg (DONOHO, 1989; GRÖCHENIG, 2001; XIUMEI, 2012).

Na teoria de processamento de sinais a análise tempo-frequência é muito utilizada no estudo de sinais não estacionários e sinais transientes. Destacando-se a STFT e a Wavelet (COHEN, 1989; DAUBECHIES, 1992; FLANDRIN, 1998; SANDSTEN, 2013). A primeira, possui certas limitações devido à escolha *a priori* da janela e ao princípio de incerteza de Gabor-Heisenberg. Por sua vez a segunda, tem a vantagem de possuir ajuste de escala e dilatação permitindo resoluções de frequência e localização no tempo gerando um único gráfico no domínio tempo-escala.

Visando minimizar as limitações inerentes a STFT, Jones-Baraniuk (BARANIUK, 1992; BARANIUK, 1993; BARANIUK, 1994) apresenta uma técnica simples e computacionalmente eficiente para a construção de esquemas STFT otimizados pelo controle do núcleo da transformada via parâmetros de concentração.

LEE (2013), apresenta um esquema de STFT com ajuste da janela da transformada controlada pela curtose local denominando tal esquema STFT de *variable short-time Fourier transform* (VSTFT), aplicando-o a sinais de vibrações. Na

mesma direção dos trabalhos anteriores, DIAS (2014) em sua tese de doutorado intitulada “Um esquema de Fourier local para análise tempo-frequência de sinais não estacionários aplicado a ruído eletroquímico” propõe um esquema VSTFT com ajuste do suporte da janela controlado pelas estimativas locais do quarto cumulante normalizado.

A presente pesquisa tem por objetivo a modelagem computacional da análise tempo-frequência de sinais utilizando frames de Gabor ajustados localmente por estimativas de estatísticas de alta ordem via cumulantes, de acordo com o esquema apresentado por DIAS (2014).

Vale comentar que, essa pesquisa está sendo realizada no Curso de Pós Graduação Especialização em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação na Universidade Federal do Pampa, campus Bagé-RS.

Nesse contexto, este trabalho apresenta a primeira parte da pesquisa supracitada. Para tal, foram realizados alguns experimentos com sinais sintéticos estacionários e, posteriormente a introdução de termos transientes que devidamente localizados, visam perturbar as condições de estacionaridade.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

No âmbito da Análise Harmônica (AH) o conjunto dos números reais é um grupo localmente compacto. E, a análise de Fourier clássica dá-se sobre um grupo abeliano localmente compacto, onde a linha reta real é pensada como um grupo munido da operação adição, possuindo uma topologia usual induzida por seus intervalos (abertos, fechados, compactos, etc.) e um sistema de vizinhanças compactas (STANKOVIC, 2005). A análise tempo-frequência, por sua vez, é definida sobre o grupo de Heisenberg (GRÖCHENIG, 2001; FEICHTINGER, 2012), tendo como caso particular a análise de Gabor que abrange a análise local de Fourier dada pela STFT. Mapeamentos do domínio do tempo para o plano tempo-frequência utilizando a transformada de Fourier são produzidos por translações em tempo e modulação em frequências, também conhecidos como *time-frequency shifts*, que ao agir sobre a função quadrado integrável definem os chamados frames de Gabor, cuja existência é assegurada somente sob certas condições dos *shifts* e da função janela (CASAZZA, 2000; FEICHTINGER 2012; CHRISTENSEN, 2014, IOSEVICH, 2015; LYNCH, 2016). Neste contexto, a modelagem computacional dos

frames de Gabor ajustados localmente via estatísticas de alta ordem poderá contribuir para o aumento da resolução dos espectrogramas resultantes das análises tempo-frequência utilizando os esquemas VSTFT.

A STFT de um determinado sinal  $s(t)$  é dada por,

$$STFT_s(t) = \int s(t)g(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (1)$$

onde  $\tau$  é a translação em tempo da janela  $g$  e  $j$  é a unidade imaginária dada por  $\sqrt{-1}$ . Um esquema da análise local de Fourier é apresentado na Fig. 1.

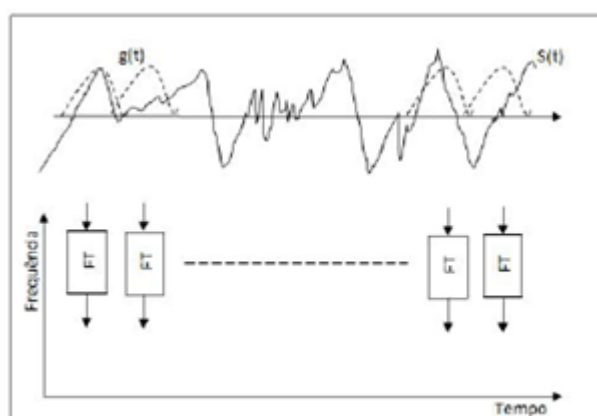


Figura 1 – Análise de Fourier Local

Fonte: Dias et al. (2015)

### 3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No decurso do projeto ter-se-á especial dedicação ao estudo do referencial teórico, destacando os resultados matemáticos fundamentais para a modelagem computacional dos *frames* de Gabor.

Tomando as referências (GRÖCHENIG, 2001; MUMFORD, 2010; DIAS, 2014), a elaboração do esquema de Fourier para a análise tempo-frequência será realizada usando os *time-frequency shifts* em espaços de Hilbert. A modelagem computacional do ajuste dos *frames* será elaborada, a implementação computacional do esquema VSTFT será executada, e os espectrogramas e perfis de curtose serão analisados.

Motivado pelos resultados iniciais sobre a análise tempo-frequência de sinais ambientais (KALAS et. al, 2016), sinais de células fotovoltaicas (RÊGO et. al, 2016) e sinais de acústica (FERREIRA et. al, 2015), serão realizados testes computacionais visando à consolidação de tais resultados. Testes e simulações com

sinais sintéticos contendo ruído branco também serão efetuados para avaliar a robustez dos esquemas VSTFT na análise de sinais gerados por fontes acústicas. Na continuação, testes levando em consideração a variação da relação sinal ruído serão simulados. A qualidade da resolução dos espectrogramas dos sinais testados indicará a necessidade ou não do pré-processamento dos dados via filtros.

#### 4. Resultados Numéricos

Com o *software Scilab*, foram gerados os sinais sintéticos caracterizados como estacionários e não estacionários. Nessa primeira etapa da pesquisa, a análise e o processamentos dos sinais em questão, foi realizada utilizando a Transformada de Fourier.

As Figuras 1 e 2 mostram dois sinais sintéticos gerados computacionalmente e seus respectivos espectros obtidos via TF. O sinal estacionário, Fig. 1, foi gerado pela equação:

$$s(t)=\cos(210t)+34\cos(250t)+12\cos(2100t) \quad (2)$$

Foi amostrado a 1000 amostras por segundo, entre os instantes de tempo  $t_1=0,25s$ ,  $t_2=0,50s$ ,  $t_3=0,75s$  e  $t_4=1s$ .

Na Figura 2 é apresentado um sinal não-estacionário, gerado pela composição do sinal  $S(t)$ , da Fig. 1, com um  $\cos(t)$ .

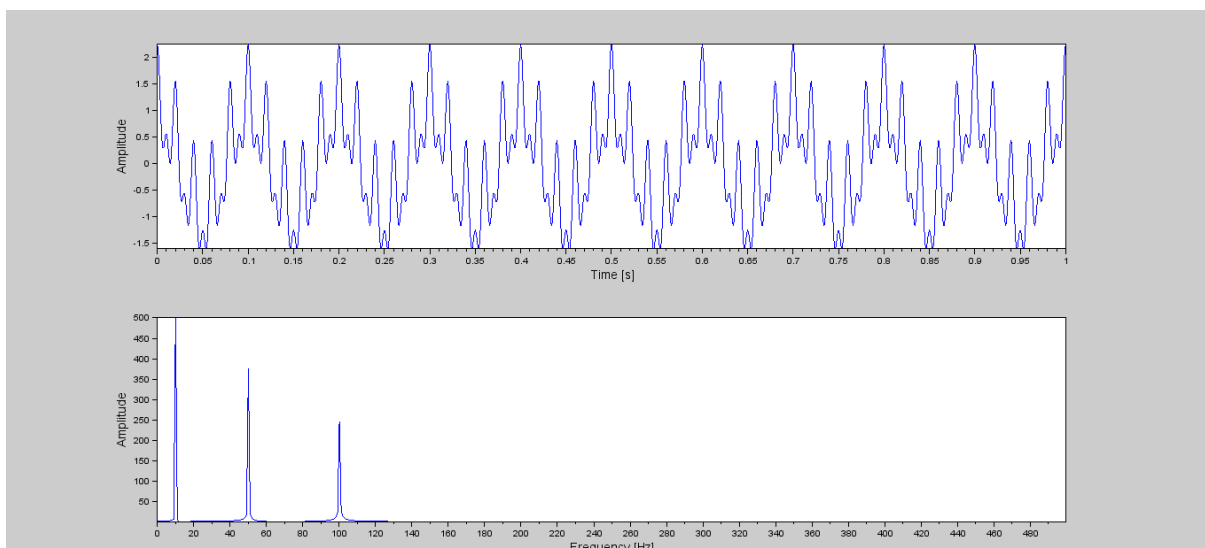


Figura 1 - Sinal estacionário com dois transiente e o espectro correspondente

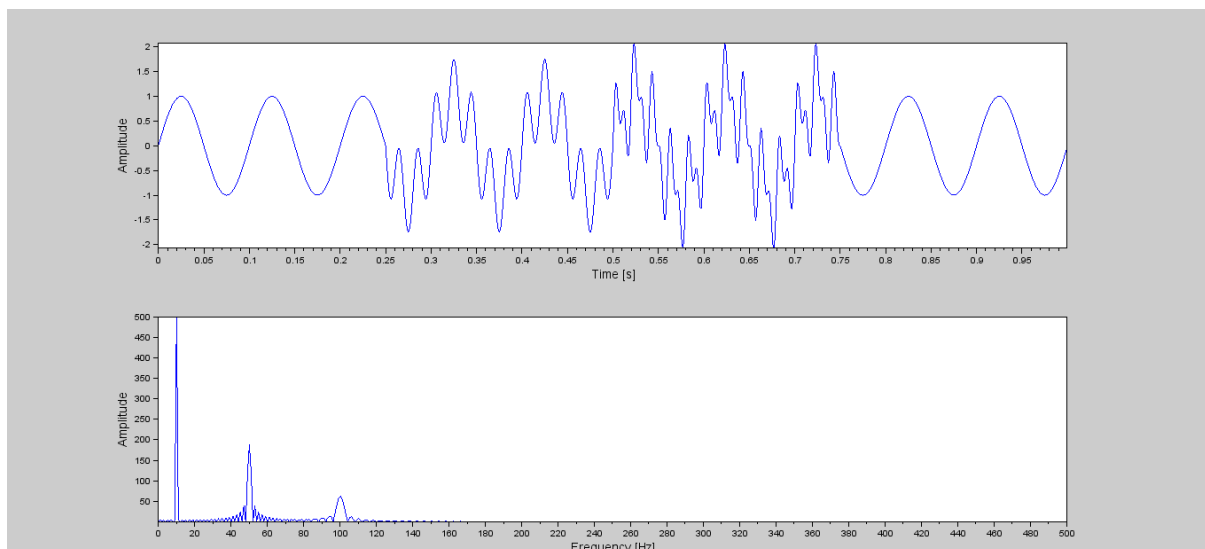


Figura 2 - Sinal não estacionário e o espectro correspondente

#### 4. CONCLUSÕES

A partir da descrição do problema, do ponto vista teórico e de suas motivações práticas, o desenvolvimento da pesquisa contempla aspectos tanto de fundamentos quanto das aplicações. A fundamentação da pesquisa foi delineada a partir da colocação do problema matemático num contexto abstrato, valendo-se da riqueza da estrutura dos grupos abelianos localmente compactos e da existência em tais grupos de uma medida invariante sob translação, chamada medida de Haar. O entendimento das propriedades dessa medida permite definir a transformada de Fourier na linha reta real. Permitindo avançar no entendimento de resultados fundamentais na análise de Fourier local.

Por outro lado, limitações quanto a identificação de regimes de frequência variantes no tempo mostram que a busca de informações via mapeamento do espaço físico para o espaço das frequências não são eficazes para obtenção da energia do sinal.

#### REFERÊNCIAS

- [1] BARANIUK, Richard G.; JONES, Douglas L. A **signal-dependent time-frequency representation: Optimal kernel design**. **IEEE Transactions on signal processing**, v. 41, n. 4, p. 1589-1602, 1993.

- [2] CHRISTENSEN, O. **A short introduction to frames, Gabor systems, and wavelet systems**. Azerbaijan Journal of Mathematics, 4(1), 25-39. 2014.
- [3] COHEN, Leon. **Time-frequency distributions-a review**. Proceedings of the IEEE, v. 77, n. 7, p. 941-981, 1989.
- [4] DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia: SIAM, v. 61. 1992.
- [5] DAVID, L. DONOHO and Philip B. **Stark Uncertainty Principles and Signal Recovery**. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 49, No. 3, p. 906-931, 1989.
- [6] DIAS, F. L. **Um esquema de Fourier local para análise tempo-frequência de sinais não estacionários aplicado a ruído eletroquímico**. 169 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, UERJ. 2014.
- [7] DUFFIN, R., SCHAEFFER, A., **A class of nonharmonic Fourier series**, Tran. Amer. Math. Soc. 72, 341–366, 1952.
- [8] FEICHTINGER, H.; LUEF, Franz. **Gabor analysis and time-frequency methods**. Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, 2012.
- [9] FERREIRA, V.L.D.; DIAS, F.L.; TENENBAUM, R.A.; SANTOS, L.R. **Mapeamento tempo-frequência de sinais de acústica de salas. Anais do XVIII Encontro Nacional de Modelagem Computacional e VI Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais**, Salvador, BA, 2015.
- [10] FLANDRIN, Patrick. **Time-frequency/time-scale analysis**. Academic press, 1998.
- [11] GABOR, D.. **Theory of communication**. J. IEE, p. 429–457, 1946.
- [12] GRÖCHENING, K. **Foundations of time-frequency analysis**. Springer, 359 p. 2001.

- [13] IOSEVICH, Alex; MAYELI, Azita. **Exponential bases, Paley–Wiener spaces and applications**. Journal of Functional Analysis, v. 268, n. 2, p. 363-375, 2015.
- [14] JONES, Douglas L.; BARANIUK, Richard G. **A simple scheme for adapting time-frequency representations**. IEEE Transactions on Signal Processing, v. 42, n. 12, p. 3530-3535, 1994.
- [15] JONES, D. L.; Baraniuk; R. G. **A simple scheme for adapting time-frequency representations**. In **Time-Frequency and Time-Scale Analysis**, Proceedings of the IEEE-SP International Symposium, p. 83-86, 1992.
- [16] KALAS, F., DIAS, F., FERREIRA, V. **Identificação De Evento Extremo De Precipitação Via Técnica De Mapeamento Tempo-Frequência**. RETEC - Revista de Tecnologias, v. 9, 2016.
- [17] LEE, J. Y. **Variable short-time Fourier Transform for vibration signals with transients**. Journal of Vibration and Control. Doi: 10.1177/1077546313499389p. 1-15. 2013.
- [18] LI, Xiumei; BI, Guoan; LI, Shenghong. **On uncertainty principle of the local polynomial Fourier transform**. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, v. 2012, n. 1, p. 120, 2012.
- [19] LYNCH, R. G. **Subsequences of frames and their operators**. Tese de Doutorado. U. Missouri, 2016.
- [20] MUMFORD, David; DESOLNEUX, Agnès. **Pattern theory: the stochastic analysis of real-world signals**. CRC Press, 2010.
- [21] OPPENHEIM, A.V.; WILLSKY, A. S.; YOUNG, I. **Signals and systems**. Prentice-Hall International, Inc., 947 p. 1997.



[22] RÊGO, T.C; DIAS, F.L.; PARIZZI, J.B.; KALAS, F.A.; FERREIRA, V.L. **Identificação de eventos de sombreamento em painéis fotovoltaicos via técnicas de mapeamento tempo-frequência. 10º Simpósio Internacional de Qualidade Ambiental – ABES, Porto Alegre, 2016.**

[23] SANDSTEN, MARIA. **Time-Frequency Analysis of Non-Stationary Processes.** PhD Thesis, 2013.

[24] STANKOVIC, Radomir S.; ASTOLA, Jaakko T.; KARPOVSKY, Mark G. **Remarks on History of Abstract Harmonic Analysis.** In: Proceedings of 2005 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP 2005.

**APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE FOURIER LOCAL E DA TEORIA DA ENTROPIA  
NO ESTUDO DO REGIME DE CHUVAS NA REGIÃO DE BAGÉ-RS  
*APPLICATION OF THE LOCAL FOURIER ANALYSIS AND THE ENTROPY  
THEORY IN THE RAIN REGIME STUDY IN THE BAGÉ-RS REGION.***

Nívea Oleques<sup>1</sup>

Francine A. Kalas<sup>2</sup>

Vera Lúcia Duarte Ferreira<sup>3</sup>

Fernando Luis Dias<sup>4</sup>

**Resumo:** O presente estudo tem como objetivo a identificação de eventos climáticos na cidade de Bagé/RS a partir de registros de precipitação pluvial no período 1970 a 2016. Nesse intuito, foi efetuada uma análise espectral da distribuição tempo-frequência da série. Tal análise ajusta a resolução do espectrograma por estimativas local da curtose generalizada por estatística de alta ordem- high-order statistics (HOS). Objetivando melhor caracterizar os trechos onde as incertezas são mais

---

<sup>1</sup> Especialização Modelagem Computacional, Universidade Federal do Pampa, [oleques@gmail.com](mailto:oleques@gmail.com).

<sup>2</sup> Dra. Modelagem Computacional, IPRJ/UERJ, [frankalas@iprj.uerj.br](mailto:frankalas@iprj.uerj.br).

<sup>3</sup> Dra. Modelagem Computacional, Universidade Federal do Pampa, [vera.ferreira@unipampa.edu.br](mailto:vera.ferreira@unipampa.edu.br)

<sup>4</sup>Dr. Modelagem Computacional, Universidade Federal do Pampa, [fernandodias@unipampa.edu.br](mailto:fernandodias@unipampa.edu.br).

relevantes, cálculos do grau de entropia foram avaliados. Os resultados são apresentados via densidade espectral de potência do sinal, espectrograma e perfil de curtose relativos aos registros da série pluvial, mostrando-se eficientes no reconhecimento dos padrões climáticos avaliados. Além disso, especificações sobre a mudança no regime de chuvas foram observadas, identificando períodos mais secos no clima da região na década de 80.

**Palavras-chave:** Estatística de alta ordem. Análise local de Fourier. Entropia. Precipitação pluviométrica.

**Abstract:** The present study aims to identify climatic events in the city of Bagé / RS from records of rainfall in the period 1970 to 2016. In this purpose, a spectral analysis of the time-frequency distribution of the series was carried out. Such an analysis adjusts the spectrogram resolution by local estimates of generalized kurtosis by high-order statistics (HOS). In order to better characterize the sections where the uncertainties are more relevant, calculations of the degree of entropy were evaluated. The results are presented via spectral density of signal power, spectrogram and kurtosis profile related to rainfall records, being efficient in the recognition of the climatic patterns evaluated. In addition, specifications on the change in rainfall regime were observed, identifying drier periods in the climate of the study region in the 1980s.

**Keywords:** High order statistics. Local Fourier analysis. Entropy. Rainfall.

## 1. INTRODUÇÃO

Estudos que envolvem eventos de precipitação são de grande interesse para o setor agropecuário e econômico, quer seja a nível local ou regional. Problemas que envolvem a escassez de água em uma dada região interferem negativamente no abastecimento urbano, irrigação de lavouras, entre outros setores da sociedade, como resultado de inúmeros fatores, como o baixo nível dos reservatórios (Ribeiro & Lunardi, 1997).

Técnicas estatísticas e análises de distribuição de probabilidade têm sido utilizadas na caracterização e em cálculos de recorrência dos eventos de

precipitação e traduzem satisfatoriamente a ocorrência de cheias ou estiagens em determinadas regiões (Silva et al, 2007). Não obstante, a natureza complexa desses sinais não estacionários requer análises matemáticas mais robustas na compreensão da dinâmica atmosférica.

Neste trabalho propõe-se a utilização de técnicas estatísticas de alta ordem que caracterizam satisfatoriamente as propriedades relacionadas a detecção de picos e variações bruscas de dados aleatórios. As análises realizadas foram aplicadas a registros de precipitação da cidade de Bagé/RS durante o período de 1970-2016. Por outro lado, na busca de compreender a influência que o grau de variabilidade espacial e temporal da precipitação pluvial exerce nas variáveis climatológicas, estimativas das incertezas inerentes aos dados através da teoria da entropia são apresentadas.

## **2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE PROCESSAMENTO DE SINAIS**

Sinais experimentais contêm informações que só podem ser identificadas com o rastreamento temporal do conteúdo de frequências (também conhecidos como harmônicos) que compõem o sinal. As ferramentas clássicas de análise de harmônicos são baseadas na transformada de Fourier (TF). A idéia básica da TF está no mapeamento de informações do domínio do tempo e em informações no domínio da frequência.

O principal inconveniente da TF é a forma global (i.e., toda extensão do sinal) de sua análise, que é incapaz de identificar variações locais e variações que evoluem no tempo. Sob o ponto de vista estocástico, isto significa que ela é uma ferramenta adequada para análise de sinais estacionários e inadequada para os não estacionários (Morettin, 1999, p. 26), que é o caso de grande parte dos sinais reais.

Visando estender a análise de Fourier a sinais não estacionários e minimizar os inconvenientes da análise global de Fourier, Gabor (1946) propôs um relevante esquema local, por inserção de uma função suave de suporte finito no núcleo da TF. Desde então, várias versões de representação tempo-frequência baseadas na transformada de Fourier local têm sido propostas, como por exemplo, alguns elementos da classe de distribuições de Cohen (1989, p. 1) e os esquemas

adaptativos *Short-Time Fourier Transform* de Jones-Baraniuk (1994, p. 1). Vale observar que tais esquemas são elaborados via otimização da concentração local da curtose ou entropia. O conceito de entropia, introduzido na teoria da informação por Shannon (1948, p. 1), mede a incerteza de uma variável aleatória ou a incerteza de sua distribuição de probabilidades permitindo a comparação entre propriedades de um conjunto de dados em termos numéricos.

De certo modo, o sucesso da extensão da análise de Fourier a uma classe mais ampla de sinais deve levar em consideração a possibilidade da descrição de processos não-Gaussianos, não lineares e de adição de ruído. Devemos lembrar que estimadores de estatística descritiva definidos por momentos de primeira e segunda ordem são úteis para caracterizar por completo apenas processos Gaussianos, haja vista que tais momentos são utilizados na definição da média e variância. Tal estatística é frequentemente denominada *second-order statistics* (SOS). Por outro lado, os processos não-Gaussianos demandam estimativas baseadas em momentos de alta ordem, denominados *high-order statistics* (HOS).

Nesse contexto, estudos de mapeamento tempo-frequência, com resolução ajustada por parâmetros locais fundamentados em HOS, vem obtendo resultados satisfatórios na análise da variabilidade de sinais climatológicos assim como na localização de interferências em sistemas solar fotovoltaicos, como pode ser visto em Kalas et al (2016) e Rêgo et al (2016, p. 1).

## 2.1. Mapeamento Tempo – Frequência

O principal objetivo da STFT é avaliar a evolução do espectro de frequência de um sinal no tempo. A idéia central é identificar frequências em determinados trechos onde o sinal e os suportes da janela coincidem. A translação da janela e a aplicação da TF aos trechos destacados produzem a análise local do conteúdo de frequências do sinal. A superposição dessas análises origina um quadro de imagens de frequências no tempo, isto é, um mapa de tempo- frequência. A STFT de um determinado sinal é dada por

$$STFT (s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t - \tau)e^{-2\pi j t \varepsilon} dt \quad (1)$$

onde  $s$  é o sinal no tempo  $t$ ,  $\tau$  é a translação em tempo da janela gaussiana  $g$ ,  $\varepsilon$  é a frequência e  $j$  é a unidade imaginária dada por  $\sqrt{-1}$ .

O quadrado da STFT é chamado espectrograma de Fourier do sinal e apresenta resolução constante para uma determinada janela. Vale observar que o espectrograma do sinal fornece o comportamento evolutivo do conteúdo de frequências no tempo com resolução determinada pelo comprimento do suporte da janela.

As frequências mapeadas pela técnica STFT, utilizando uma função janela de tamanho fixo e centro fixos, é ineficaz para minimizar a influência do princípio de incerteza de *Heisenberg*. Para controlar tal deficiência, os esquemas com janela variável, denominados VSTFT, cf. *Variable Short-time Fourier Transform*, agregam a análise de Fourier local característica de ajuste do centro e tamanho da janela proporcionando resolução à posteriori, por utilização do parâmetro curtose local do sinal definido via estatística de alta ordem - cf. *High Order Statistic* - (Dias, 2014, p. 62). Em regiões onde a curtose é relativamente alta, uma janela curta é aplicada para ampliar a resolução da imagem no local. Em contrapartida, grandes janelas são aplicadas nas regiões onde a curtose é relativamente pequena.

## 2.2. Entropia da série temporal

A entropia é classicamente definida pela 2ª lei da termodinâmica, sendo entendida como o aumento da desordem interna de um sistema enquanto a reserva interna de energia livre diminui (Epstein, 1988). Shannon e Weaver (1948) desenvolveram este conceito para a matemática considerando um conjunto de eventos aleatórios, onde a informação de cada evento, ou seja, sua entropia, é normatizada probabilisticamente para um valor entre 0 e 1. Assim, quanto maior a entropia do sistema, mais rara a ocorrência do evento. A entropia de Shannon é dada segundo a seguinte formulação

$$H = -k \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i \quad (2)$$

onde  $H$  é a entropia,  $k$  é a constante que expressa a unidade de medida,  $P_i$  é a probabilidade de ocorrência do  $i$ -ésimo evento,  $N$  é o número de eventos considerados.

De acordo com Silva (2014), séries temporais com baixa entropia indicam baixa variabilidade e a possibilidade de aplicação de técnicas computacionais para a previsão dos mesmos; enquanto que séries com entropia elevada possuem dados com distribuição irregular e séries constantes possuem entropia nula.

### **3. METODOLOGIA**

O município de Bagé encontra-se localizado na mesorregião sudoeste do Estado do Rio Grande do Sul, a  $31^{\circ}19'51''$  S de latitude e  $54^{\circ}6'25''$  W de longitude (Figura 1). Este município pertence à Microrregião da Campanha Meridional e compreende uma das faixas de mais baixa de pluviosidade média anual do RS, oscilando entre 1300 e 1500 mm (Viana, 2006). Segundo classificação de Köppen-Geiger, possui um clima temperado do tipo 'Cfa', úmido em todas as estações do ano e quente durante o verão (Ayoade, 2003).

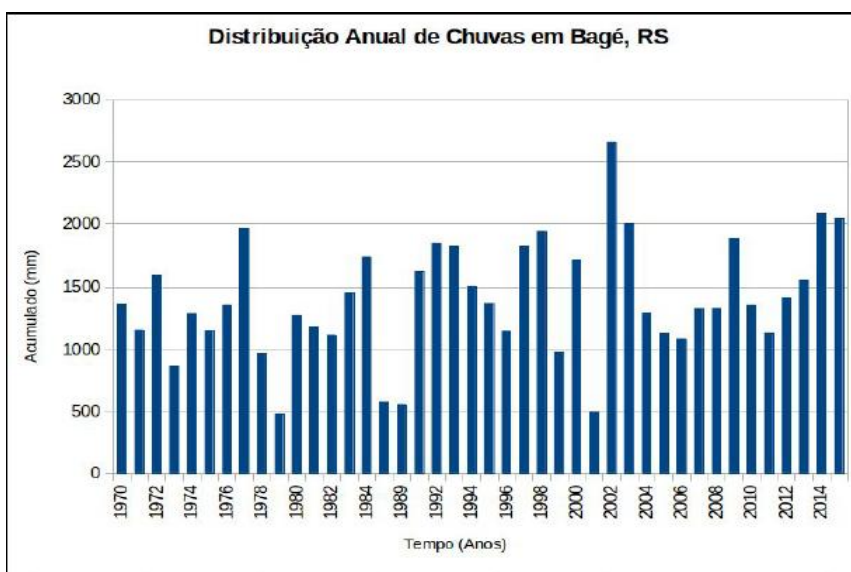
**Figura 1 - Localização geográfica de Bagé, Rio Grande do Sul (RS)**



Fonte: Atlas Socioeconômico do Rio Grande do Sul (2006). Adaptado por Brondani *et al* (2013).

A série temporal utilizada neste trabalho é oriunda de dados acumulados mensais de precipitação (mm) fornecidos pelo Instituto Nacional de Meteorologia - INMET - para o período de 1970 a 2016 (BDMET, 2016) (Figura 2).

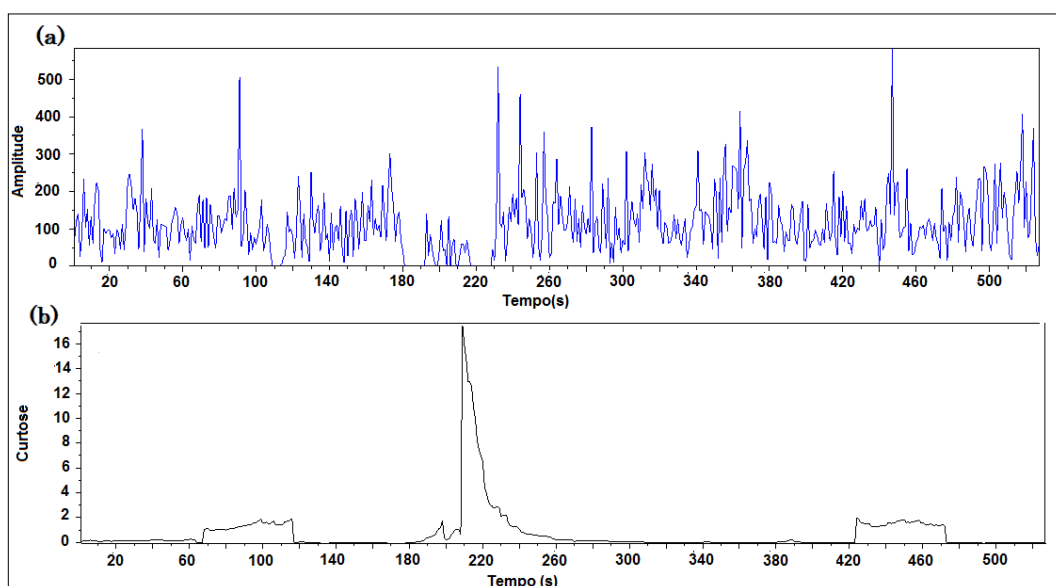
**Figura 2 - Distribuição anual de chuvas acumuladas (mm) em Bagé (RS)**



#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

A amplitude do excesso de curtose mostrado na Figura 3 identifica as mudanças do regime de frequência, bem como a localização das variações bruscas nos valores da série temporal. Os intervalos de tempo com excesso de curtose aproximadamente zero evidenciam que a densidade de probabilidade da série é próxima da distribuição normal.

**Figura 3 - Distribuição Mensal da série Pluviométrica de Bagé/RS de 1970 - 2016.**



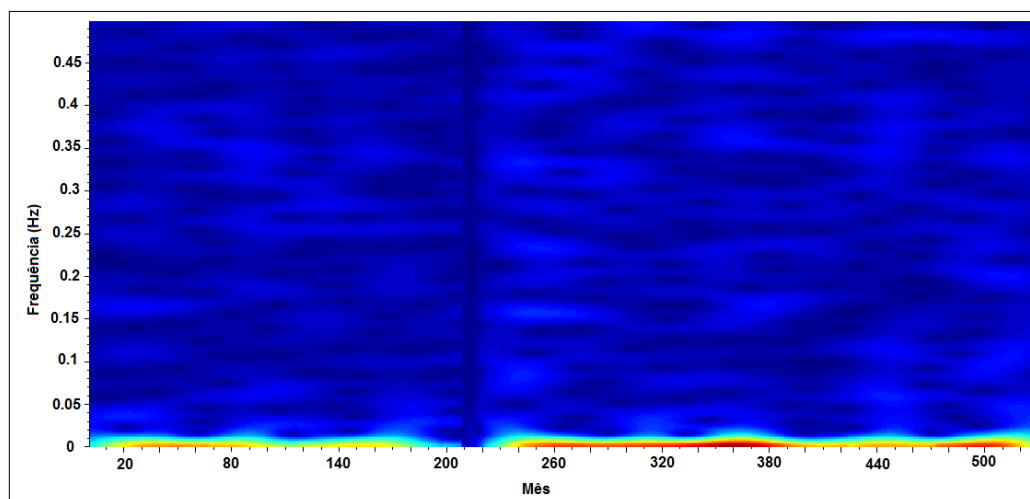
**Legenda: (a) Perfil da série pluviométrica mensal; (b) Estimativa da Curtose da série pluviométrica mensal**

A Figuras 4 e 5 apresentam os espectrogramas bi e tridimensional, respectivamente, da série pluviométrica, identificando o comportamento da variabilidade das chuvas e sua intensidade da distribuição de energia no plano tempo-frequência. Os resultados provenientes da densidade espectral (Figuras 4 e 5) na região retratam claramente uma mudança no regime de chuvas entre os meses 210 e 220 (ou seja, entre 1985 e 1989), corroborando com os resultados encontrados para a estimativa da curtose (Figura 3). Os boletins divulgados pela

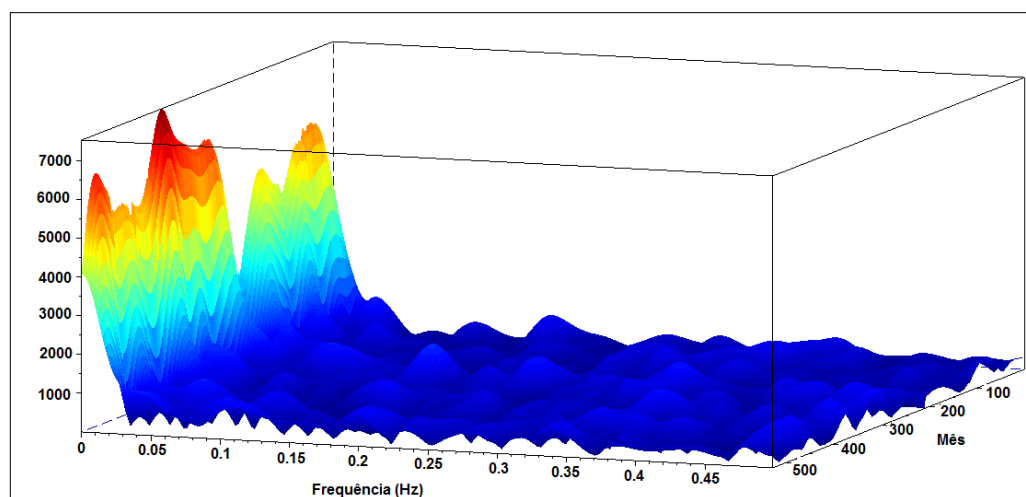


Fundação Estadual em Pesquisas Agropecuária (FEPAGRO) do Rio Grande do Sul atestam os menores índices pluviométricos na região neste mesmo período.

**Figura 4 - Espectrograma 2D da série pluviométrica**

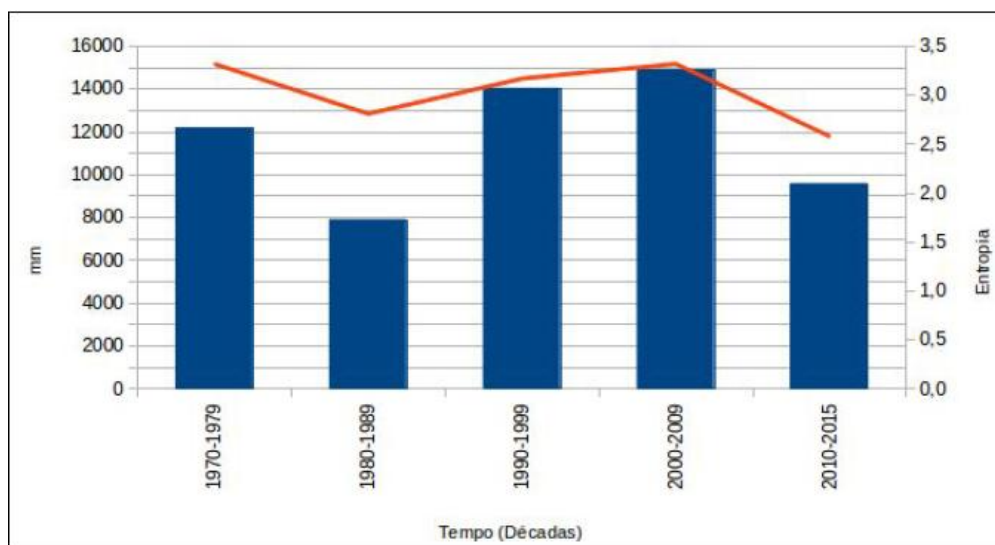


**Figura 5 - Espectrograma 3D da série pluviométrica**



A análise da entropia traz informações acerca da dispersão dos dados na série temporal. Neste estudo, valores de entropia da ordem de 2,7 foram obtidos para a década de 1980, justamente no período onde houve uma diminuição considerável no regime de distribuição pluviométrica (1985-1989) na região, corroborando mais uma vez com os resultados oriundos da técnica de Fourier. A análise decenal da entropia de precipitação é apresentada na Figura 6, a seguir.

**Figura 6 - Análise da entropia da precipitação em Bagé, RS**



## 5. CONCLUSÕES

A distribuição espectral da série de registros pluviométrico, entre os anos de 1970 a 2016, da estação meteorológica do INMET A827-Bagé/RS foi avaliada e seu espectrograma foi apresentado. A entropia da série foi calculada e as incertezas subjacentes aos dados puderam ser estimadas. A análise comparativa do perfil da curtose e da entropia confirmaram a localização de eventos de estiagem severos na década de 80.

## REFERÊNCIAS

AYOADE, J. O. **Introdução à climatologia para os trópicos**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil. 50 fls. 2003.

BDMET. 2016 **Banco de dados meteorológicos**. Disponível em: < <http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=bdmep/bdmep> > Acessado em: 30 ago. 2016.

- BRONDANI, A.R.P; Wollmann, C.A. & Ribeiro, A.A. **A percepção climática da ocorrência de estiagens e os problemas de abastecimento de água na área urbana do município de Bagé - RS** . Revista do Departamento de Geografia – USP. v.26: 214-232. 2013.
- COHEN, L. **Time-frequency distributions-a review**. Proceedings of the IEEE. v. 77 (7): 941-981. 1989.
- DIAS, F. L. **Um esquema de Fourier local para análise tempo- frequência de sinais não-estacionários aplicado a ruído eletroquímico**. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) - IPRJ/UERJ, Nova Friburgo. 169 fls. 2014.
- EPSTEIN, I. **Teoria da Informação**. Editora Ática: São Paulo. 80 fls. 1988.
- FEPAGRO. 2016. **Apresenta: Texto, boletins, banco de dados**. Disponível em < [www.fepagro.rs.gov.br](http://www.fepagro.rs.gov.br) > acesso em: maio de 2016.
- FILHO, A.F.B. **A teoria da entropia aplicada no estudo da precipitação pluvial e da vazão fluvial no Nordeste do Brasil**. Tese (Doutorado em Meteorologia)- Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Tecnologia e Recursos Naturais. 53 fl, 2012.
- GABOR, D. **Theory of communication. Part 1: The analysis of information**. Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering, Journal of the Institution. v. 93 (26): 429-441. 1946.
- JONES, D.L. & Baraniuk, R.G. **A simple scheme for adapting time-frequency representations**. IEEE Transactions on Signal Processing, 42 (12): 3530- 3535, 1994.
- KALAS, F.A; Dias, F.L.; Ferreira, V.L.D. . **Identificação de evento extremo de precipitação via técnica de mapeamento tempo-frequência**. RETEC - Revista de Tecnologias. v. 9 (3): 1-5. 2016.
- LEE, J.Y .**Kurtosis based time-frequency analysis scheme for stationary or non-stationary signals with transients** . Information Technology Journal. v.12: 1394-1399. 2013.
- MORETTIN, P.A. **Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier a Análise de Ondaletas**. Edusp, São Paulo. 320 fls. 1999.
- RÊGO, T.C. et al. **Identificação de eventos de sombreamento em painéis fotovoltaicos via técnicas de mapeamento tempo-frequência**. 10º Simpósio Internacional de Qualidade Ambiental. ABES-RS. Porto Alegre, RS. 8 fls. 2016.

RIBEIRO, A. M.; Lunardi, D. M. C. **A precipitação mensal provável para Londrina – PR, através da função gama**. Energia na Agricultura, Botucatu. v.12 (4): 37-44. 1997.

SHANNON, C. E. **A mathematical theory of communication**. The Bell System Technical Journal. v.27: 623-656. 1948.

SILVA, J.C.; Heldwein, A.B.; Martins, G.T. & Grimm, E.L. **Análise de distribuição de chuva para Santa Maria, RS**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. v.11 (1): 37-72. 2007.

SILVA, J.R.S. **Avaliação de autocorrelações e complexidade de Séries temporais climáticas no Brasil**. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 114 fl, 2014.

VIANA, D. R. **Avaliação da precipitação e desastres naturais associados a complexos convectivos de mesoescala no Rio Grande do Sul entre outubro e dezembro de 2003**. Monografia. Instituto de Geociências. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 135 fls. 2006.