

**CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA LINEAR: METANÁLISE DE PESQUISAS
NA ÁREA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Valéria Oliveira Perceval

Dra. Maria Arlita da Silveira Soares (Orientadora)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Ciências Exatas - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Ciências Exatas - Matemática.

Caçapava do Sul, dezembro de 2017.

CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA LINEAR: METANÁLISE DE PESQUISAS NA ÁREA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Valéria Oliveira Perceval¹
Maria Arlita da Silveira Soares²

Resumo: Este trabalho apresenta uma análise quanto as considerações acerca do processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares, matrizes e determinantes, presentes em pesquisas da área da Educação Matemática. Para tal, fundamentou-se nas ideias de Ponte, Branco e Matos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e na teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval, quanto a aprendizagem Matemática. A opção metodológica foi uma pesquisa qualitativa na forma de uma Metanálise por entender que esta possibilita ampliar o conhecimento teórico do tema investigado, bem como abre caminhos para a realização de estudos futuros. O mapeamento dos artigos realizou-se por meio de uma busca nos endereços eletrônicos dos periódicos e nos anais do evento ENEM, foram analisados detalhadamente quatorze (14) artigos. Por meio da análise dos dados, verificou-se que a maioria dos artigos mapeados buscou desenvolver e analisar atividades desenvolvidas com os estudantes da Educação Básica. Quanto ao pensamento algébrico, os autores não se dedicaram a analisar quais características deste pensamento foram desenvolvidas no decorrer das pesquisas. Entende-se que as produções podem dar mais atenção para as características deste pensamento, em particular, na elaboração da sequência de ensino.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. Representações Semióticas. Educação Matemática.

Abstract: This work presents an analysis of the considerations about the teaching and learning process of linear systems, matrices and determinants present in researches in the area of Mathematics Education. For this, it was based on the ideas of Ponte, Branco and Matos on the development of the algebraic thought and in the theory of the Registers of Semiotic Representation, developed by Duval, as far as the mathematical learning. The methodological option was a qualitative research in the form of a meta-analysis, since it allows to broaden the theoretical knowledge of the subject investigated, as well as opens the way for future studies. The mapping of the articles was done through a search in the electronic addresses of the journals and in the annals of the ENEM event, fourteen (14) articles were analyzed in detail. Through the data analysis, it was verified that most of the mapped articles sought to develop and analyze activities developed with students of Basic Education. As for algebraic thinking, the authors did not dedicate themselves to analyzing what characteristics of this thought were developed in the course of the research. It is understood that the productions can give more attention to the characteristics of this thought, in particular, in the elaboration of the teaching sequence.

Keywords: Algebraic Thinking. Semiotic Representations. Mathematical Education.

1 PROBLEMÁTICA

O interesse por pesquisar aspectos teórico-metodológicos relacionados ao ensino de sistemas lineares, matrizes e determinantes emergiu dos estudos e discussões realizados nos componentes curriculares que abordam estes conteúdos, em particular, Álgebra Linear, cursada no 3º semestre do Curso de Ciências Exatas – Licenciatura e nas leituras realizadas em função das atividades desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID.

Percebeu-se que, no componente curricular Álgebra Linear a ordem de apresentação desses conteúdos seguiu, a sequência, geralmente, trabalhada no Ensino Médio (EM), ou seja, matrizes, determinantes e sistemas lineares, sem ênfase nas representações gráficas dos

¹ Acadêmica do Curso de Ciências Exatas – Licenciatura.

² Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso.

sistemas lineares e sem uso de *softwares* de Matemática Dinâmica³. Contudo, algumas leituras realizadas para o PIBID e para a realização dos estágios⁴ (Regência I e II) sobre a aprendizagem matemática questionam esta ordem de apresentação desses conteúdos, visto que matrizes e determinantes são possibilidades para resolver sistemas lineares e não pré-requisitos.

Além disso, a escolha da turma em que foi realizado o Estágio Supervisionado Curricular, denominado Cotidiano da Escola Regência II, influenciou o interesse por compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares, matrizes e determinantes, pois optou-se por trabalhar com um 2º Ano do EM, etapa em que estes conteúdos são abordados na Educação Básica.

Ao analisar os documentos que orientam a organização curricular brasileira (BRASIL, 1998; BRASIL, 2002; BRASIL, 2006), verificou-se que o contato formal com a Álgebra, na Educação Básica, inicia no Ensino Fundamental com o estudo das expressões algébricas, equações do 1º e 2º grau, inequações e sistemas lineares, formados por duas equações. Quanto ao Ensino Médio, constatou-se que os documentos sugerem o estudo de equações, funções, sistemas, sequências numéricas, trigonometria do triângulo retângulo, entre outros. Vale salientar que, o estudo de conceitos algébricos nos Anos Iniciais é valorizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e reforçado no documento da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017). Ou seja, o contato com as ideias da Álgebra pode ser iniciado no início do percurso escolar.

Em relação ao estudo de sistemas lineares, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem que conste no currículo do Ensino Fundamental e seja abordada sua resolução algébrica, resolução gráfica e classificação, bem como a aplicação desse conteúdo em situações-problema. Os PCN (BRASIL, 2002) destacam que esse conteúdo deve enfatizar sua importância cultural, estender os conhecimentos dos estudantes sobre resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas 3x3, priorizando uma abordagem mais qualitativa, aplicando esse estudo à resolução de problemas.

Para uma abordagem mais qualitativa, torna-se essencial um trabalho que valorize as várias representações de sistema linear, por exemplo, algébrica, matricial, gráfica, entre outras. Segundo Grande (2006), uma das dificuldades dos estudantes na resolução de

³ O termo Matemática Dinâmica está associado a *softwares* que potencializam visualizar diferentes representações matemáticas na tela do computador. Por exemplo, pode-se visualizar, simultaneamente, a representação algébrica e gráfica de um sistema linear de ordem 3x3.

⁴ No Curso de Ciências Exatas – Licenciatura os estágios são denominados Cotidiano da Escola e estão divididos em seis, a saber: Observação, Observação e Intervenção, Aulas de Monitoria, Grupo de Estudo Orientado (GEO), Regência I, Regência II.

problemas que requerem sistemas lineares está relacionada a mobilização e articulação entre as representações algébricas e geométrica, bem como, na utilização da língua natural.

Uma abordagem mais qualitativa de sistemas lineares, também, envolve o estudo de vários métodos de resolução, em especial, o escalonamento. Quanto aos métodos de resolução de sistemas lineares, as Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio – OCNEM (BRASIL, 2016) defendem que a resolução de sistemas de equação 3×3 por regra de Cramer seja abandonada, pois este é um procedimento custoso e requer o estudo de determinantes.

Segundo Cristóvão e Spiller (2009), os conteúdos são ensinados na seguinte ordem, matrizes, determinantes e sistemas lineares. Assim, determinantes é entendido como um pré-requisito para o ensino de sistemas lineares, pois o método de resolução de sistemas ensinado é o da Regra de Cramer. Este método depende da resolução de determinantes, envolve um número grande de cálculos e só pode ser aplicado quando o sistema possuir o número de equações igual ao número de incógnitas, bem como ter uma única solução (neste caso, o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas) (BATTAGLIOLI, 2008).

As pesquisadoras supracitadas sugerem que o ensino de matrizes deve ser paralelo ao ensino de sistemas lineares, para auxiliar na compreensão, na resolução e interpretação de problemas e não um tópico isolado no ensino de Matemática. Além disso, apontam que o ensino de sistemas lineares não dependem da resolução de determinantes, corroborando com as orientações das OCNEM.

Defende-se que o objetivo do estudo de sistemas lineares, matrizes e determinantes é proporcionar aos estudantes uma construção de significados e não um treinamento mecânico. (CRISTÓVÃO; SPILLER 2009). Assim, a questão que orientará a pesquisa será: Quais considerações sobre o ensino e aprendizagem de sistemas lineares, matrizes e determinantes se apresentam nas pesquisas publicadas em eventos e periódicos da área da Educação Matemática?

Para responder essa questão de pesquisa elencou-se como objetivo geral: Analisar as considerações acerca do processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares, matrizes e determinantes presentes em pesquisas da área da Educação Matemática. Os objetivos específicos são: a) mapear as pesquisas produzidas em periódicos e eventos da área da Educação Matemática que tratam de sistemas lineares, matrizes e determinantes; b) verificar se há uma discussão quanto a sequência em que os conteúdos de sistemas lineares, matrizes e determinantes podem ser trabalhados em diferentes níveis de Ensino; c) identificar as representações e transformações cognitivas enfatizadas nas pesquisas para o ensino e

aprendizagem de sistemas lineares, matrizes e determinantes; d) averiguar se e como são utilizadas os *softwares* de Matemática Dinâmica e Objetos de Aprendizagem.

Na sequência são descritos o aporte teórico e as escolhas metodológicas para o desenvolvimento desta pesquisa.

2 ALGUNS ENTENDIMENTOS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DA ÁLGEBRA LINEAR

A Matemática, principalmente, no Ensino Médio recomenda-se ser trabalhada em seus aspectos formativo e instrumental, além disso, ser entendida como ciência (BRASIL, 2002). Em seu papel formativo, a Matemática “contribui para o desenvolvimento do processo de pensamento e a obtenção de atitudes, desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas, analisar situações proporcionando a formação de uma visão ampla e científica da realidade” (BRASIL, 1999, p. 40). Quanto ao aspecto instrumental, a Matemática oferece um conjunto de técnicas e estratégias que podem ser utilizadas para resolver problemas de diversas áreas do conhecimento, assim como na atividade profissional.

Em relação ao status de ciência da Matemática, os PCN (BRASIL, 2002) sugerem que este seja enfatizado pelos professores, pois além do aspecto formativo e instrumental a Matemática é essencial na “formação de todos os estudantes, pois contribui para uma visão de mundo, fortalecendo capacidades exigidas ao longo da vida social e profissional [...], sendo uma ciência com características próprias, tendo papel integrador junto as demais ciências da natureza” (BRASIL, 2002, p. 111).

A Matemática é considerada a linguagem das ciências (BRASIL, 2002). Neste contexto, a Álgebra se destaca porque os conceitos deste campo da Matemática possibilitam as outras áreas do conhecimento descreverem seus experimentos, por exemplo, na Biologia o crescimento de bactérias é modelado por uma função exponencial, assim como na Química, transformação e conservação são apresentadas por meio de expressões matemáticas.

A origem da Álgebra remonta com certas técnicas de resolução de problemas que eram usadas na Antiguidade (Egito, Babilônia, China e Índia), por exemplo, no papiro de Amhes/Rhind estavam descritos os passos para a resolução de diversos problemas, já possuía um cunho algébrico. Com o passar do tempo foi definido o conceito de equação e a Álgebra começa a ser entendida como o estudo da resolução de equações. Diofante (c. 200-c. 284), é um dos destaques desta época por desenvolver vários métodos para a resolução de equações e sistemas de equações. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Alguns séculos mais tarde, surge o termo “Álgebra” em um trabalho de al-Khwarizmi (790-840), para designar a operação de “transposição de termos”, essencial na resolução de uma equação. Nos meados do século XIX, o estudo das equações algébricas esgota-se com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Com a demonstração do teorema, alguns matemáticos como Gottlob Frege, Bertrand Russell e David Hilbert, passaram a defender que o objeto central da Álgebra eram os símbolos, pelo uso que se fez e faz na linguagem algébrica. Ressalta-se que a linguagem algébrica possibilita o distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam, “deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 9).

Atualmente, compreende-se que o objeto central da Álgebra vai além dos símbolos, pois compreendê-la “implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 11).

Nos currículos escolares (BRASIL, 1998; BRASIL, 2002; BRASIL, 2006; NCTM, 2008⁵; ME- PORTUGAL, 2007) a Álgebra tem papel central no estudo de expressões algébricas, equações, sistemas, inequações e funções. Pesquisadores da área da Educação Matemática (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; WALLE, 2009) defendem que a abordagem desses conteúdos deve estar articulada com o objetivo do ensino da Álgebra, ou seja, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que o desenvolvimento do pensamento algébrico engloba a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções, incluindo a capacidade de enfrentar com outras relações a interpretação e resolução de problemas matemáticos.

Um elemento igualmente central ao pensamento algébrico é a ideia de **generalização**: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objectos. Ou seja, no *pensamento algébrico* dá-se atenção não só aos objectos mas principalmente às **relações existentes** entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e **abstracto**. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objectos. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.10, grifo nosso)

⁵ Esta referência foi publicada pela APM – Associação de Professores de Matemática de Portugal.

Nesta perspectiva, percebe-se que o estudo de conceitos algébricos não se reduz somente ao trabalho com o símbolos, mas tornar o estudante capaz de pensar algebricamente, o que requer o desenvolvimento da capacidade de generalizar e abstrair.

Para Walle (2009), o ensino da álgebra está voltado para o desenvolvimento de um tipo de raciocínio específico, que contribuiu na resolução de problemas dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Para o pesquisador o pensamento algébrico “envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função” (VAN DE WALLE, 2009, p.287).

As propostas curriculares (BRASIL, 2002; BRASIL, 2006, BRASIL, 2017), também, apontam que o objetivo principal da Álgebra na Educação Básica é desenvolver o pensamento algébrico. Porque este tipo de pensamento é fundamental na elaboração e compreensão de modelos matemáticos, na representação e “análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2017, p.226).

Os PCN (BRASIL, 1998) mencionam que para desenvolver o pensamento algébrico é importante propor atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra, sendo elas aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural. Na aritmética generalizada são abordadas propriedades das operações e generalizações de padrões aritméticos. A concepção funcional refere-se a variação de grandezas. Na concepção equações o enfoque está na resolução de equações e inequações. A concepção estrutural refere-se ao cálculo algébrico e a obtenção de expressões equivalentes. Uma síntese das concepções da Álgebra pode ser observada na Figura 1.

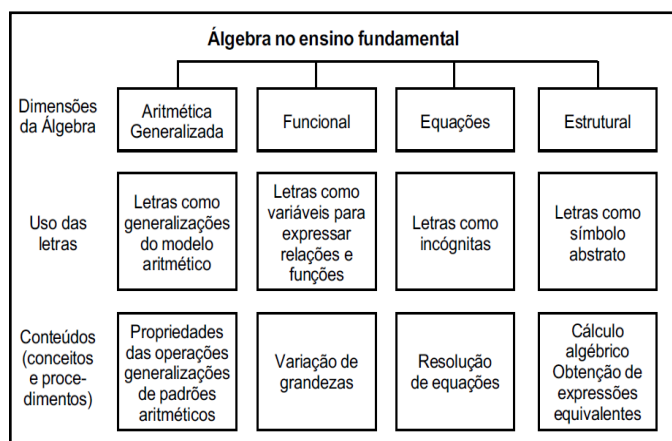


Figura 1: Concepções da álgebra
Fonte: Brasil (1998, p.116)

Vale destacar que, além dos PCN, atualmente no Brasil, há um movimento em prol da elaboração de um currículo nacional. O documento denominado de Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um conjunto de orientações que estabelecerá os direitos e objetivos de aprendizagem nos currículos das escolas públicas e privadas de Educação Infantil e Ensino Fundamental em todo o Brasil, estabelecendo os conteúdos essenciais, bem como as competências e as habilidades que os estudantes deverão adquirir. Atualmente, o documento da BNCC está na terceira versão. Em relação à Álgebra, esse documento recomenda que sejam propostas situações nas quais os estudantes

[...] identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 226)

Na citação acima percebe-se que o documento da BNCC (BRASIL, 2017) destaca três das concepções sugeridas pelos PCN: aritmética generalizada (identificar regularidades e padrões em sequências numéricas); funcional (estabelecer leis matemáticas que expressam a relação de interdependência entre grandezas); e equação (resolver problemas por meio de equações e inequações).

No Ensino Superior os conceitos algébricos, em especial, nos cursos de Matemática (Licenciatura e Bacharelado) estão organizados nas áreas de Álgebra Linear e Álgebra I (Polinômios e equações algébricas) e Álgebra II (Anéis e Grupos). A Álgebra Linear nos cursos de graduação está relacionada com outras áreas de estudo da Matemática, como na resolução de sistemas lineares, vetores, equações diferenciais, entre outros. Outra característica é a “possibilidade de unificar o pensamento matemático, sendo uma disciplina fundamental para a abstração e generalização de conceitos e objetos matemáticos” (GRANDE, 2006, p. 13).

O documento “Subsídios para a discussão de propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática elaborado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)” em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) sobre a formação de professores entende que a Álgebra Linear “constitui não apenas uma das ideias e ferramentas básicas da Matemática, mas sistematiza uma estrutura algébrica que está presente em muitas aplicações dentro e fora da Matemática” (SBEM, 2013, p. 29).

Um dos conteúdos trabalhados em Álgebra Linear são os sistemas lineares. Há vários métodos para a resolução de sistemas lineares, por exemplo, método da substituição, método de Gauss, regra de Cramer. Um dos métodos de resolução de sistemas lineares indicados,

principalmente, para a Educação Básica, é o método de Gauss (escalonamento), que permite a resolução e a classificação de qualquer sistema linear e exige um número reduzido de operações.

Outro conteúdo estudado na Álgebra Linear é o conceito de matrizes. As matrizes são necessárias para a compreensão de diversos conteúdos como: gráficos finitos, determinantes, geometria analítica, vetores, análise combinatória, entre outros. É importante registrar que as aplicações de Matrizes aparece em diversos setores da Economia, Engenharia, Tecnologia, entre outros. Ressalta-se que “o aparecimento mais formalizado dos conceitos de matrizes e determinantes ocorreu através do estudo de sistemas de equações lineares” (SANCHES, 2002, p. 8).

Segundo Grande (2006), em Álgebra Linear, existe uma variedade de representações para um mesmo objeto matemático. Corrobora com esta afirmação Battaglioli (2008) ao acreditar que no estudo, por exemplo, de sistemas lineares se for abordada apenas a representação algébrica, ocorre do estudante dominar uma técnica de resolução, sem atribuir significado para a solução encontrada.

3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Em relação a variedade de representações exigida na atividade matemática, destaca-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval (2003, 2011). Esta teoria estuda o funcionamento cognitivo na aprendizagem de conceitos matemáticos, buscando contribuir no desenvolvimento geral de capacidades como raciocínio, análise e visualização.

É importante antes de dar sequência no texto buscar uma definição para semiótica. Conforme Santaella (2002, p. 2) “semiótica é a ciência que tem por objetivo de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido.”

Na Matemática, trabalha-se com conceitos abstratos que não são acessíveis por meio de instrumentos, como na Física, Química e Biologia, ou seja, os objetos matemáticos dependem de representações para serem acessados. Além disso, há uma variedade de representações utilizadas em Matemática como nos sistemas de numeração, as figuras

geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas a língua natural. (DUVAL, 2003).

Os diferentes tipos de representações utilizadas na Matemática são denominados por Duval (2003, 2011) como registros de representação semiótica. Este termo foi utilizado para diferenciar os sistemas semióticos utilizados em Matemática e os outros sistemas semióticos fora dessa área. A escolha desse termo, também, está relacionada a palavra que “Descartes” utilizou nas páginas de sua “Geometria” e, além disso, se refere “a extensão dos recursos disponíveis em domínios como a voz, os instrumentos musicais, os modos de se expressar” (DUVAL, 2013, p. 16).

As representações semióticas são formadas pelo emprego de signos relacionados a um sistema de representação, os quais tem suas próprias dificuldades de significado e funcionamento. Para Duval (apud DAMM, 2010, p. 177) “as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento”.

Duval (apud JORDÃO, 2011) associa a aprendizagem matemática com os processos de *semiósis* e *noésis*. Compreende-se por *semiósis* a compreensão ou produção de uma representação semiótica e *noésis* a compreensão conceitual de um objeto. Assim, não se adquire conhecimento sem utilizar os sistemas de representação semiótica.

O teórico Duval classificou os diferentes registros utilizados na atividade matemática em registros multifuncionais e monofuncionais, conforme Quadro 1.

Quadro 1: Classificação dos registros de representação semiótica

| | Representação discursiva | Representação não discursiva |
|----------------------------------|---|---|
| REGISTROS MULTIFUNCIONAIS | Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - argumentação a partir de observações, de crenças... - dedução válida a partir de definição ou de teoremas. | Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). - Apreensão operatória e não somente perceptiva; - Construção com instrumentos. |
| REGISTROS MONOFUNCIONAIS | Sistemas de escrita: - numéricas (binária, decimal, fracionária); - algébricas; - simbólicas (línguas formais). Cálculo. | Gráficos cartesianos. - Mudanças de sistema de coordenadas. - Interpolação, Extrapolação. |

Fonte: Adaptado de Duval (2003, p. 14)

Os registros multifuncionais caracterizam-se por tratamentos que não são algoritmizáveis. Enquanto que nos registros monofuncionais os tratamentos podem ser algoritmizáveis.

No Quadro 2, apresenta-se situações que envolvem o estudo de sistemas lineares e a sua classificação em diferentes registros de representação semiótica.

Quadro 2: Exemplos de situações envolvendo sistemas lineares e seus diferentes registros de representação semiótica.

| Língua natural | Registro algébrico | Representação gráfica |
|---|---|-----------------------|
| Determine dois números reais cuja a soma é -2 e cuja a diferença entre o maior e o menor é 6. | $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 6 \end{cases}$ | |

Fonte: Adaptado de Battaglioli (2008, p. 14)

Conforme Duval (2003, p. 14), “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. Neste sentido, a compreensão em Matemática supõe a coordenação de registros e análise de sua aprendizagem requer um olhar para as transformações de representações semióticas. Estas transformações são de dois tipo: tratamento e conversão.

O *tratamento* de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro, ou seja, uma transformação interna a um registro (DUVAL, 2003). Por exemplo, ao multiplicarmos uma equação de um sistema linear por um número real diferente de zero, ao escaloná-lo realizamos um tratamento desse registro algébrico. No Quadro 3 expõe-se um exemplo de um tratamento ao resolver um sistema linear por escalonamento.

Quadro 3: Exemplo de tratamento

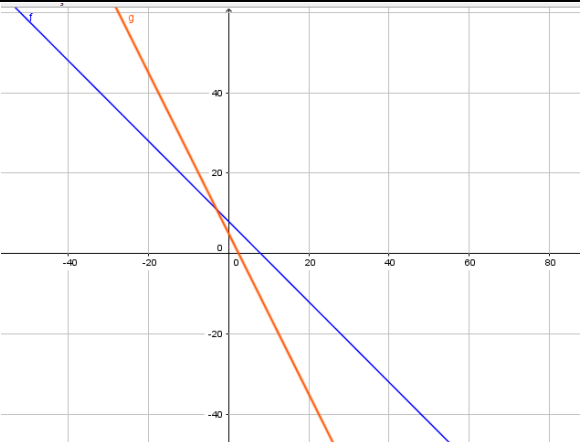
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad (-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x - 2y = -14 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} -5y = -13 \end{cases}$$

Fonte: Elaboração da autora.

No exemplo apresentado no Quadro 3 ocorreu uma transformação de representação sem a mudança de registro, na primeira equação multiplicamos por -2 e o resultado somado com a segunda equação o que originou em uma nova equação.

Para Duval (2003) a *conversão* é a transformação de uma representação em outro registro. O Quadro 4 apresenta um exemplo de conversão do registro algébrico para o registro gráfico de um sistema linear.

Quadro 4: Exemplo de conversão

| Representação no Registro Simbólico Algébrico | Representação no registro Gráfico |
|---|---|
| $\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ |  |

Fonte: Elaboração da autora.

Para compreender Matemática, na visão de Duval (2003, 2011), é essencial a distinção entre o objeto matemático tratado e a sua representação, o que gera um paradoxo cognitivo. Em qualquer caso, o objeto matemático nunca pode ser confundido com a representação semiótica utilizada para representá-lo. A possibilidade de não confundir o objeto matemático (por exemplo, sistemas lineares) e suas representações (algébrica e gráfica) está na atividade de conversão.

Assim, a conversão de registros de representação torna-se uma atividade essencial para a aprendizagem em Matemática. Do viés cognitivo, “é a atividade de conversão que, ao contrário [do que pensam muitos matemáticos], aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (DUVAL, 2008, p. 16).

Silva (2016) acredita que ao se trabalhar com o apoio de recursos computacionais e com a exploração de registros, proporciona-se um ambiente favorável para os estudantes compreenderem o conteúdo de sistemas lineares. Atualmente, para o ensino e aprendizagem

foram desenvolvidos programas, *softwares*, objetos virtuais de aprendizagem, entre outros, para o trabalho com conceitos algébricos, esses tipos de programas permitem relacionar informações dadas algebricamente com representações geométricas, numéricas e gráficas. Em relação ao campo da Álgebra, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 17) destacam o uso de tecnologias para o ensino do conceito de função.

Estas tecnologias favorecem o trabalho com diferentes formas de representação – promovendo o desenvolvimento da noção de variável e a visualização das formas simbólicas das funções. Representam, por isso, recursos de grande valor para a aprendizagem da Álgebra.

Para Duval (2013, p. 32) “a mais fascinante é o *poder de visualização* que eles oferecem em todas as áreas”. Não são somente instrumentos de cálculos, cumprem a “*função de simulação e de modelagem* que ultrapassa tudo o que podemos imaginar mentalmente ou realizar de modo gráfico-manual” (DUVAL, 2013, p. 13).

Concorda-se com os pesquisadores supracitados em relação a utilização de recursos tecnológicos, em especial, os *softwares* de Matemática Dinâmica para o ensino e aprendizagem dos conceitos de Álgebra Linear, pois possibilitam visualizar as diferentes representações semióticos do objeto matemático, bem como analisar as especificidades de cada representação. Além disso, contribuem para que o paradoxo cognitivo, apontado por Duval (2003, 2011) não ocorra. Assim, na análise das produções da área da Educação Matemática sobre conceitos relacionados a Álgebra Linear, a utilização de *softwares* de Matemática Dinâmica será analisada como um dos aspectos relevantes para a aprendizagem destes conceitos.

4 METODOLOGIA

Esta investigação seguiu os pressupostos da pesquisa qualitativa. Na Educação Matemática, conforme Bicudo (2014, p. 7), a maioria das investigações seguem procedimentos qualitativos, pois “sempre buscam contextualizar o fenômeno investigado, a problemática levantada ou, ainda, a ocorrência de acontecimentos.[...] [bem como] a descrição pormenorizada do percebido/observado”.

A organização e análise dos dados da pesquisa foram orientadas pela Metanálise. Optou-se por este procedimento porque a Metanálise tem por objetivo agregar e reduzir os dados produzidos a partir do mapeamento de pesquisas já elaboradas a uma unidade de síntese. Assim, o “procedimento de integrar esses resultados pauta-se em uma revisão sistemática da literatura, na análise dos métodos seguidos, dos subtemas trabalhados, das

conclusões a que chegaram” (BICUDO, 2014, p. 8), buscando identificar se há um padrão nas pesquisas analisadas.

Para Bicudo (2014, p. 9) a Metanálise é um estudo que vai além daquele ou daqueles já realizados. Em outros termos, a Metanálise faz interpretação das interpretações das pesquisas que constituem as fontes de produção de dados da análise a ser realizada. Pesquisas estas “tomadas como significativas em relação ao tema posto sob foco”. Nesta perspectiva, a Metanálise potencializa a teorização de problemáticas já investigadas, ampliando o tema já pesquisado, porque busca entender o que as investigações dizem e como dizem, oferecendo “um solo temático em que nos locomovemos para novas investigações” (ibidem, p. 10). Para isso, é essencial que o pesquisador esteja atento a pergunta ou tema da pesquisa proposto.

Dessa forma, analisar os dados de estudos já produzidos é “uma retomada da pesquisa realizada, mediante um pensar sistemático e comprometido de buscar dar-se conta da investigação efetuada” (BICUDO, 2014, p.13), assim, constitui-se um movimento reflexivo sobre o que foi pesquisado.

Para realizar esta pesquisa no formato de uma Metanálise inspirou-se em alguns passos propostos por Castro (2001), mencionado por Bicudo (2014, p.11), a saber: “formulação da pergunta; localização e seleção dos estudos; avaliação crítica dos estudos; [produção] dos dados; análise e apresentação dos dados; interpretação dos dados e; aprimoramento e atualização da metanálise”.

O primeiro passo já foi realizado, ou seja, a pergunta de pesquisa é apresentada na seção 1, deste texto. Para dar conta do segundo passo optou-se por selecionar as produções publicadas em 2013 e 2016 no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), pois este é considerado o maior evento da área da Educação Matemática. É importante registrar que essa seleção já foi realizada e está registrada no Apêndice A. Para isso, utilizou-se os seguintes termos: Álgebra, Álgebra Linear, Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes.

Além das produções publicadas no ENEM foram selecionadas as pesquisas publicadas nos periódicos dessa área que possuem *Qualis*, igual ou maior, a B1, a saber: Bolema, Educação Matemática Pesquisa, Educação Matemática em Revista, Perspectivas em Educação Matemática, Revemat, Revista Brasileira de História da Matemática, Boletim GEPEN, Zetetiké e Em Teia.

Destaca-se que o mapeamento foi uma etapa importante para a realização da Metanálise, em especial, para a realização dos passos 3 e 4, pois este é compreendido “como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar)

e período de tempo” (FIORENTINI; GRANDO; MISKULIN; CRECCI; LIMA; COSTA, 2012, p. 18).

O quarto passo, que é a interpretação dos dados foi desenvolvido a partir da análise dos trabalhos mapeados e o aprimoramento e atualização da Metanálise ocorreram durante a identificação de categorias dos trabalhos analisados.

5 Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes: um olhar para produções brasileiras

O mapeamento dos artigos realizou-se por meio de uma busca nos endereços eletrônico dos periódicos e na página da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que disponibiliza os anais do ENEM. No quadro 5, é apresentada a quantidade de artigos mapeados, conforme os descritores mencionados na seção reservada para a metodologia desta pesquisa. No total foram identificados vinte e nove (29) artigos, sendo a maioria destes publicados nos anais do ENEM.

Quadro 5: Quantidade de artigos mapeados nos periódicos/Evento entre 2013 a 2016

| Periódicos/ Evento | Nº de artigos |
|--|---------------|
| ENEM | 18 |
| Bolema | 1 |
| Boletim Grupo de Pesquisa em Educação Matemática – GEPEM | 1 |
| Educação Matemática em Revista | 1 |
| Educação Matemática Pesquisa | 2 |
| Em Teia | 1 |
| Perspectivas em Educação Matemática | 0 |
| Revista Brasileira de História da Matemática | 0 |
| Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat | 3 |
| Zetetiké – Revista de Educação Matemática | 2 |
| Total | 29 |

Fonte: Elaboração da autora.

Após, foi realizada a leitura dos 29 artigos. Durante essa atividade, constatou-se que 15 dos 29 artigos não abordavam os conteúdos de Álgebra Linear, destacados para esta pesquisa. Assim, optou-se por analisar detalhadamente quatorze (14) artigos (Apêndice A). Doze destes artigos foram publicados nos anais do ENEM e dois no periódico Revemat.

Definidos os artigos a serem analisados, retomou-se a leitura para identificar os objetivos de cada um. Ao analisar os objetivos, verificou-se quatro focos de interesse, descritos a seguir:

1. Proposição e desenvolvimento de atividades. Neste foco foram categorizados em nove (9) artigos que analisam atividades envolvendo os conteúdos de Álgebra Linear

(sistemas lineares, matrizes e determinantes). A utilização de *softwares* para a aprendizagem desses conteúdos foi verificada em sete (7) artigos. Assim, um (1) artigo analisou a utilização de materiais manipulativos para a aprendizagem de sistemas lineares.

2. Objeto de Aprendizagem⁶. Foram identificados dois (2) trabalhos neste foco. Ambos os trabalhos dedicaram-se ao conteúdo de matrizes. Um dos artigos expõe as etapas da construção do Objeto de Aprendizagem, deixando explícito que não desenvolveu atividades com estudantes. O outro artigo deste foco dedicou-se a analisar um Objeto de Aprendizagem e utilizá-lo no desenvolvimento de atividades com estudantes.

3. Aspectos curriculares. Neste foco, identificou-se um (1) trabalho que propõe-se a organizar uma metanálise sobre o ensino de determinantes no Brasil, desde 1920 até 2006.

4. Métodos de Resolução. Constatou-se um (1) trabalho que abordava as conexões entre dois métodos de resolução de sistemas lineares.

Dos quatro focos de interesse verificados nos artigos, constata-se que a maioria buscou propor e desenvolver atividades para a aprendizagem de sistemas lineares e matrizes, dando ênfase para o uso de *softwares*.

Quanto ao contexto em que os trabalhos foram realizados, verificou-se que seis (6) artigos referem-se ao ensino e/ou aprendizagem de conteúdos de Álgebra Linear no Ensino Médio. Destes cinco (5) artigos, quatro (4) propõem e desenvolvem atividades e um (1) constrói um Objeto de Aprendizagem. São quatro (4) os artigos que tratam de aspectos relacionados a Álgebra Linear no Ensino Superior, sendo que todos propõem e desenvolvem atividades com acadêmicos de diferentes Cursos (Física, Licenciatura em Matemática, Eletrônica). Dois (2) artigos dedicaram-se propor e desenvolver atividades com estudantes do Ensino Fundamental (8º e 9º Ano). Não foi possível identificar o contexto em dois trabalhos, pois um deles trata de aspectos curriculares do conteúdo de determinantes e um refere-se aos métodos para resolução de sistemas lineares. Constata-se que a maioria dos trabalhos foi desenvolvido com participantes do Ensino Superior.

Em relação aos procedimentos metodológicos, verificou-se que todos os trabalhos optaram pelos pressupostos de uma pesquisa qualitativa. As fontes e instrumentos de produção de dados utilizados foram: observação e registro de aulas (6 artigos), relato escrito das atividades desenvolvidas (1 artigo), videogravação das aulas ministradas e diálogos entre os estudantes (2 artigos), audiogravação das falas dos estudantes produzidas durante a

⁶ Objetos de Aprendizagem podem ser compreendidos como recursos digitais para serem utilizados para suporte ao ensino. (DE MACÊDO; CASTRO; MATHIAS; SIQUEIRA; OLIVEIRA; SALES; FREIRE, 2007, p.20).

realização das atividades (1 artigo), entrevista com estudantes sobre as dificuldades encontradas nas questões propostas (1 artigo), documentos/artigos para elaboração do Objeto de Aprendizagem (1 artigo), documentos curriculares (1 artigo). Diante desses dados, percebe-se que a maioria utilizou como instrumentos de produção de dados a observação e registros de aulas. Como a maioria dos trabalhos tinha por objetivo propor e desenvolver atividades, percebe-se que as fontes e instrumentos de produção de dados estão de acordo com os objetivos dos estudos.

Quanto ao pensamento algébrico, constatou-se que apenas 1 artigo expõe de forma explícita a ideia de generalização e abstração, essenciais ao desenvolvimento desse tipo de pensamento, como pode-se verificar no recorte extraído do texto: “Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos” (Trecho do Artigo A). Cabe destacar que, os autores deste trabalho tomam das ideias de Ponte e colaboradores para organizar o item denominado “*Algumas Concepções Teóricas que Fundamentam a Atividade*” (Trecho do Artigo A). Neste excerto percebe-se duas das vertentes do pensamento algébrico propostas por Ponte, Matos e Branco (2009), a saber: representar e resolver problemas. Destaca-se que estas vertentes não são retomadas na análise dos dados e nas considerações finais. O que leva a inferir que as atividades propostas aos estudantes não levaram em consideração esses aspectos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nos demais textos verificou-se que os aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico são expostos de forma implícita. Em outras palavras, constata-se em algumas afirmações a busca por explorar o estabelecimento de relações, representar os objetos matemáticos de formas diferentes, modelar situações-problema, generalizar. Contudo, essas questões não são o foco principal das discussões apresentadas, pois a maioria dos autores dos textos buscou organizar atividades que explorassem diferentes recursos para o ensino de sistemas lineares, matrizes e determinantes, por exemplo, Objetos de Aprendizagem, e detalhar as potencialidades destes recursos do que analisar as possibilidades da atividade para desenvolver o pensamento algébrico. Estas afirmações podem ser constatadas no decorrer do texto quando serão expostas as análises das atividades propostas pelos autores das produções analisadas.

Ao buscar identificar o que os autores dos textos trazem sobre Álgebra Linear, percebeu-se que mesmo abordando conceitos deste ramo da Álgebra a maioria não discute

questões relacionadas à Álgebra Linear (por exemplo, importância desse ramo para a Matemática e para as outras áreas; especificidades do processo de ensino e aprendizagem desse ramo). Os textos I e N são os únicos que expõem a importância da Álgebra Linear para a aprendizagem dos estudantes. Segundo os autores do texto N: “o aprendizado da Álgebra Linear é fundamental para o sucesso em diversos cursos de graduação da área de ciências exatas” (Trecho do Artigo N).

Considerando que a maioria dos artigos mapeados apresentam as atividades desenvolvidas com estudantes tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior, foi possível verificar quais transformações cognitivas são exigidas nas situações propostas, mesmo que a teoria dos Registros de Representação Semiótica não fosse a fundamentação teórica utilizada pelos autores. A seguir, são apresentadas as análises das atividades identificadas nos textos na perspectiva das transformações semióticas.

O artigo A apresenta apenas uma atividade de uma sequência⁷ desenvolvida com alunos de 8ºAno, destacando as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de um sistema linear de ordem 2. Constatou-se que a conversão é a transformação cognitiva exigida nessa atividade, pois os estudantes precisam converter do registro da língua natural (situação envolvendo o preço de balas e pirulitos) para o registro algébrico ($2x + 7y = 0,67$ / $5x + 8y = 0,75$). Nas referências desse artigo verificou-se que há um texto sobre articulação entre os quadros aritmético, algébrico e geométrico. No entanto, esta referência não foi utilizada ao longo do texto. Talvez esta referência que valoriza o trabalho com os vários campos da Matemática (aritmética, álgebra, geometria) e por consequência valoriza o trabalho com várias representações semióticas tenha sido utilizada para elaborar as situações que compõem a sequência desenvolvida com os alunos do 8ºAno.

Segundo os autores do artigo A, as atividades contribuíram para a aprendizagem dos estudantes, pois permitiu os “entender os conceitos algébricos, suas relações e aplicações em diferentes conteúdos matemáticos, dentre eles, o sistema de equações” (Trecho do Artigo A).

A pesquisa relatada no artigo B expõe os dados oriundos de uma sequência de ensino desenvolvida com estudantes de 3ºAno. Nesta sequência há quatro (4) atividades, envolvendo sistemas lineares. De acordo com os autores desse artigo “a sequência proposta para a resolução de sistemas consiste na conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e do registro algébrico para resolução gráfica” (Trecho do Artigo B). Em outras palavras, os autores elaboraram a sequência com base na teoria dos Registros de

⁷ No texto não é informado o número de atividades que compõem a sequência desenvolvida com alunos do 8ºAno.

Representação Semiótica. Esta afirmação pode ser verificada na Figura 2 quando os autores mencionam a atividade de conversão. A atividade reproduzida na Figura 2 requer a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.

| |
|--|
| <p>Apresentação da Atividade 1:</p> <p>A soma das idades de Janaina e Marisa é 17 anos. A idade de Janaina mais o dobro da idade de Marisa são 20 anos. Qual é a idade de cada uma? (Adaptada de Dante, 2007).</p> |
| <p>Análise a priori da atividade 1:</p> <p>A expectativa é de que os alunos utilizem como estratégia a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, identificando a idade de cada uma por uma incógnita, bem como utilizem seus conhecimentos prévios considerando os tratamentos necessários no sistema obtido para determinar as idades de Janaina e de Marisa.</p> |

Figura 2: Atividade 1 artigo B
Fonte: Dados da pesquisa.

As atividades 2, 3 e 4 foram desenvolvidas com auxílio do *software* Geogebra. De acordo com os autores o registro gráfico produzido no “*software torna-se um mediador das aprendizagens, possibilitando um número maior de experimentação*” (Trecho do Artigo B). Isto porque os estudantes podem por meio de *software* modificar os coeficientes das equações e verificar quais alterações são produzidas no registro gráfico (Figura 3). Na atividade reproduzida na Figura 3, ao modificar os coeficientes a, b e c na segunda equação busca-se retas paralelas e coincidentes que geram um sistema possível e indeterminado; retas paralelas e distintas, obtendo um sistema impossível; e retas concorrentes, obtendo um sistema possível e determinado (par ordenado dado pelo ponto de interseção da reta é a solução do sistema).

| |
|---|
| <p>Apresentação da Atividade 4:</p> <p>Escreva uma equação que contemple um sistema que possui:</p> <p>a) Duas retas paralelas $\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ ax + by = c \end{cases}$</p> <p>b) Duas retas coincidentes $\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ ax + by = c \end{cases}$</p> <p>c) Duas retas coincidentes $\begin{cases} -3x + 7y = -3 \\ ax + by = c \end{cases}$</p> |
|---|

Figura 3: Atividade 4 artigo B
Fonte: Dados da pesquisa.

Destaca-se que as atividades priorizavam a resolução de sistemas lineares de ordem 2. Considerando que os estudantes são do 3ºAno seria importante também relacionar o registro algébrico com o gráfico para sistemas lineares de ordem 3. Ao analisarem as

atividades desenvolvidas os autores do artigo B mencionam que, os estudantes apresentaram dificuldades no tratamento (no registro algébrico) para a resolução do sistema de equações. Uma interpretação para este resultado pode ser busca na manipulação de equações nas quais os coeficientes devem ser definidos pelos estudantes para que se tenha a solução dada do sistema.

O artigo C, assim como o B, se fundamentou na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os autores buscaram nesta teoria elementos para elaborar a sequência de atividade, “visando a exploração das relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural” (Trecho do Artigo C). A sequência foi desenvolvida com estudantes do 9º Ano e utilizou o *software* Winplot. A escolha do *software* justifica-se em função deste permitir “explorar, de forma dinâmica, relações entre representações dos registros gráfico e algébrico” (Trecho do Artigo C). A Figura 4 expõe como o *software* foi utilizado nessa pesquisa, ou seja, o *software* foi utilizado porque permite modificar os parâmetros no registro algébrico (neste caso o valor de a) e perceber a posição relativa entre as retas, o que permite classificar o sistema em: possível e determinado; possível e indeterminado; e impossível.

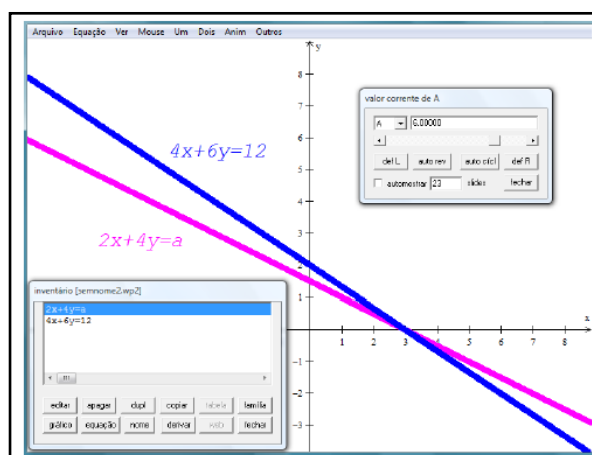


Figura 4: Construção no Winplot artigo C
Fonte: Dados da pesquisa.

Neste artigo (C) os autores exploraram apenas sistemas possíveis e indeterminados. Neste sentido, as sete (7) tarefas tinham por objetivo:

“proporcionar aos estudantes um ambiente favorável para a investigação da existência ou não da proporcionalidade entre os coeficientes da representação algébrica e suas consequências na classificação e na representação gráfica de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas” (Trecho do Artigo C).

Como os estudantes tiveram dificuldades para identificar a proporcionalidade ou não entre os coeficientes da representação algébrica, os pesquisadores reelaboraram as atividades, dando destaque para o registro tabular (Figura 5).

Tarefa 1a. Selecione no *Winplot*, um caso que gerou duas retas paralelas distintas. Complete a tabela:

| | Coeficiente de x | Coeficiente de y | Termo independente |
|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| Primeira equação | | | |
| Segunda equação | | | |

Que relação existe entre os valores dos coeficientes da primeira equação com os coeficientes da segunda equação?.....
Selecione no *Winplot* outro caso que gerou duas retas paralelas distintas. Complete a tabela:

| | Coeficiente de x | Coeficiente de y | Termo independente |
|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| Primeira equação | | | |
| Segunda equação | | | |

Que relação existe entre os valores dos coeficientes da primeira equação com os coeficientes da segunda equação?

Figura 5: Atividade Ia artigo C
Fonte: Dados da pesquisa.

O registro tabular foi utilizado porque permite aos estudantes conjecturarem sobre a relação entre os coeficientes e termos independentes de sistema cuja representação gráfica é dada por duas retas paralelas. Os autores do artigo constataram que:

“os estudantes apresentaram avanços na compreensão do conceito e que as habilidades em operar com representações nos diferentes registros e em efetuar coordenações entre eles favoreceram uma construção mais sólida do objeto matemático ‘sistemas lineares’” (Trecho do Artigo C).

Os resultados desta pesquisa reforçam a importância de trabalhar com a coordenação de vários registros de representação de um objeto matemático como aponta Duval (2003).

O artigo D é parte de uma pesquisa mais ampla. Esta pesquisa trata da conexão entre os métodos de resolução de sistemas lineares. Neste artigo, a autora apresenta a relação entre dois métodos de resolução de sistemas lineares de ordem 3x3, a saber: substituição e escalonamento. As referências expostas pela autora tratam de aspectos relacionados a Educação (MOREIRA; MASSINI, 1982⁸; MORIN, 2002⁹) e, em particular, a Educação Matemática (CHEVALARD, 2001¹⁰; PAIS, 2002¹¹). Contudo, as ideias destes autores não foram mobilizadas no desenvolvimento do trabalho, pois ficou restrito aos métodos matemáticos.

⁸ MOREIRA, Marcos A; MASSINI, Elcio S. F. Salzano. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Moraes, 1982.

⁹ MORIN, Edgar. *Educação e complexidade: os sete saberes e outros ensaios*. São Paulo: Cortez, 2002.

¹⁰ CHEVALARD, Yves et al. *Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

¹¹ PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Nesta perspectiva, pode-se afirmar que o tratamento foi a atividade cognitiva mais explorada no artigo. A ênfase no tratamento (registro algébrico) pode ser confirmada no seguinte trecho “Os tratamentos ensinados nas escolas para resolver sistemas são apresentados isoladamente um do outro, todavia, o resultado deste trabalho mostrou que a articulação entre os dois métodos para se resolver sistemas é possível e desejável”. (Trecho do Artigo D). Concorda-se com a autora em relação a importância da conexão entre os métodos, mas para que ocorra a aprendizagem de sistemas lineares é essencial que as atividades envolvam outras representações para além da algébrica.

Percebe-se que a autora do artigo E focou na análise dos erros produzidos por acadêmicos de um curso técnico de eletrônica ao resolverem sete (7) atividades. As atividades foram propostas no registro discursivo, exigindo a conversão para o registro algébrico. Em função do curso, 5 das 7 atividades envolviam circuitos elétricos, como pode ser observado na (Figura 6).

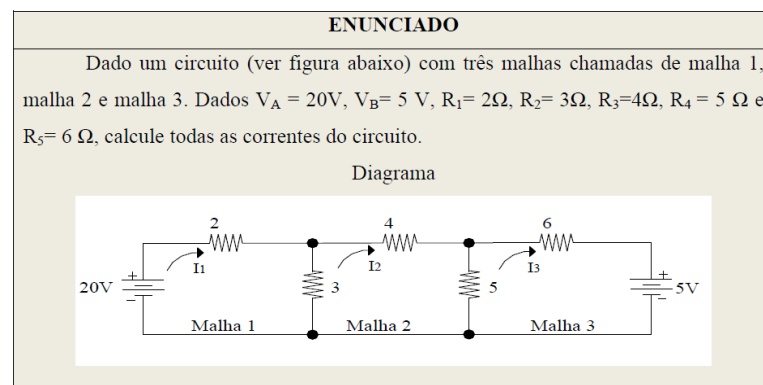


Figura 6: Atividade III artigo E
Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se na atividade reproduzida na Figura 6 que a situação proposta parte do registro discursivo para o registro algébrico, tendo como intermediário do registro figural. Mesmo não utilizando a teoria dos Registros de Representação Semiótica verifica-se que as atividades exploram aspectos desta teoria, a saber: a conversão.

O Objeto de Aprendizagem apresentado no artigo F tem por objetivo abordar o produto de matrizes. Para tanto, os autores elaboraram duas situações-problema que envolvem compras em um shopping. A primeira situação-problema propõe a compra de kits com bombons. Nesta atividade, o estudante deverá montar kits com bombons de diferentes sabores. As escolhas dos sabores e a quantidade de cada sabor que irão compor os kits são organizadas em uma tabela. Em outra tabela são expostos os valores de cada tipo de bombom

e o peso por unidade. Assim, o registro tabular é utilizado, nesta atividade, para organizar as escolhas do estudantes (Figura 7) e apresentar as grandezas (valor e peso) (Figura 8).



Figura 7: Objeto de aprendizagem artigo F
 Fonte: Dados da pesquisa.

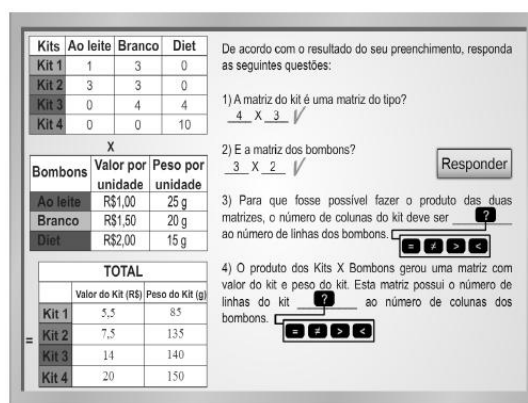


Figura 8: Atividades do Objeto artigo F
 Fonte: Dados da pesquisa.

As questões propostas na tela do Objeto de Aprendizagem (reproduzida na Figura 8) buscam que o estudante verifique que o número de colunas da “matriz do kit” é o mesmo que o número de linhas da “matriz dos bombons”, ou seja, constate que a condição para efetuar o produto entre duas matrizes ($A \times B$) é necessário que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B . Para responder essas questões o estudante faz uma conversão do registro da língua natural para o numérico, tendo por registro intermediário o tabular. A matriz que apresenta o produto dos kits por bombons não é preenchida pelo estudante. Há uma tela com explicações sobre como efetuar o produto entre matrizes. Em seguida, são propostas duas atividades para verificar se o estudante compreendeu os procedimentos para multiplicar duas matrizes. Nestas atividades são exigidos tratamentos

algébricos, a saber: multiplicação de uma matriz 2x4 por outra 4x1; multiplicação de uma matriz 4x2 por outra 2x1.

A segunda atividade proposta no Objeto de Atividade descreve a venda de camisas. Na situação elaborada são oferecidos três tipos de camisas masculinas (polo, social curta e social comprida) para serem estilizadas com dois tipos de botões (Figura 9). Assim como na primeira atividade, o objetivo desta atividade refere-se ao produto de matrizes. Para resolver a situação proposta o estudante deve preencher uma tabela e efetuar o produto das matrizes (representadas no registro tabular). Nesta atividade, não são propostas as questões sobre o formato das matrizes apresentadas na primeira atividade. Assim, pode-se afirmar que a atividade cognitiva exigida é o tratamento.

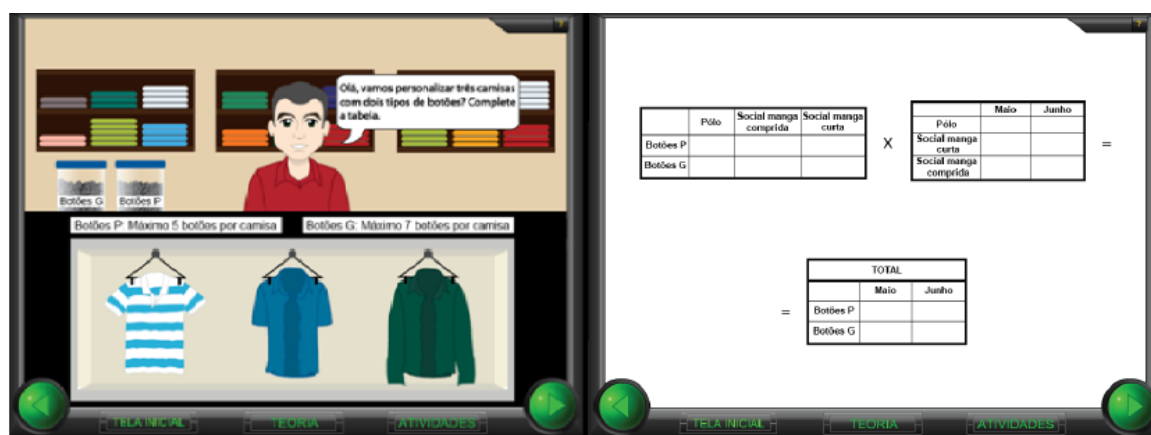


Figura 9: Atividades do Objeto artigo F
 Fonte: Dados da pesquisa.

Os autores do artigo G relatam as atividades desenvolvidas no estágio de duas acadêmicas de um curso de Licenciatura em Matemática. Segundo os autores, foram utilizados jogos e problemas contextualizados para abordar o conteúdo de matrizes. Em relação aos jogos, afirmam que foi realizado um bingo de matrizes, mas não apresentam as situações que constituem o jogo. Por isso, não foi possível analisar que tipo de atividades cognitivas foram exigidas dos estudantes ao realizarem o jogo. Quanto aos problemas contextualizados, é exposto um exemplo que trata dos gastos para realizar uma viagem com um grupo de colegas, destacando o produto de matrizes. Este exemplo explora a conversão do registro tabular para o registro algébrico. A resolução do problema segue o modelo de Polya (1995) quanto aos passos para resolver um problema. Percebe-se que o problema não foi tomado como ponto de partida para a aprendizagem de conceitos, pois há preocupações em explorar apenas os passos para sua resolução.

O Objeto de Aprendizagem apresentado no artigo H teve por objetivo explorar os tipos de matrizes, a construção de matrizes, adição e subtração, o produto de matrizes, matriz inversa e problemas envolvendo o conteúdo (Figura 10). O Objeto de Aprendizagem não busca introduzir os conceitos relacionados à matrizes, pois é “composto de atividades que exigem conceitos matemáticos já estabelecidos sobre o referido conteúdo”. (Trecho do Artigo H).

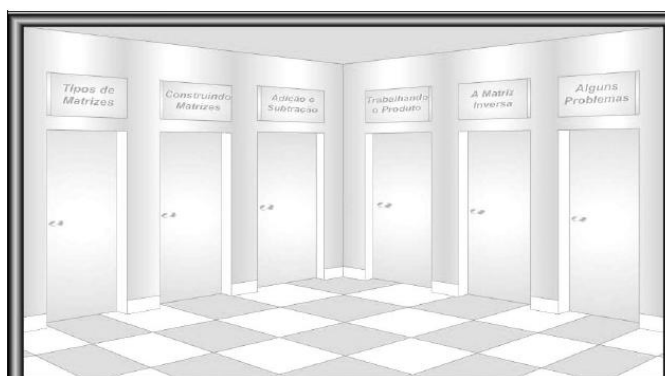


Figura 10: Objeto de Aprendizagem do artigo H
Fonte: Dados da pesquisa.

Não há acesso as atividades propostas no Objeto de Aprendizagem. Assim, não foi possível analisá-las quanto a conversões e tratamentos. Os autores apresentam uma análise do recurso quanto ao ambiente do Objeto, avaliando o formato de exibição das informações na tela; se o programa possibilita reverter as ações; se processa os dados rapidamente; se as mensagens são objetivas e adequadas; entre outros; e a sua qualidade pedagógica, verificando se o Objeto incentiva a autonomia do estudantes; se apresenta os objetivos de cada módulo; a qualidade visual, etc.

O artigo I tem por objetivo apresentar uma análise das resoluções de acadêmicos ao realizarem atividades de matrizes. A análise está fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais¹², desenvolvida por Vergnaud. Foram propostas 4 atividades. Em termos de transformação de registros, é exigido apenas tratamentos no registro algébrico (matricial). É importante registrar que o artigo N foi desenvolvido pelos mesmos autores e apresenta a mesma pesquisa relatada no artigo I. Por isso, as atividades não serão analisadas.

No artigo J é relatada uma experiência vivenciada por quatro bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). As atividades desenvolvidas pelos bolsistas com uma turma de 2ºAno do Ensino Médio tinham por objetivo utilizar o *software*

¹² “A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida por Vergnaud, com a finalidade de explicar a formação e o desenvolvimento de conceitos matemáticos” (SOARES, 2016, p. 60).

MATLAB¹³ no estudo de matrizes. Foram propostas três atividades. A primeira atividade visava o reconhecimento dos comandos do MATLAB e o entendimento de matrizes binárias¹⁴. A segunda atividade explorou cálculos com matrizes e o reconhecer que tipo de figuras podem ser formadas por matrizes binárias. Destaca-se que dos trabalhos analisados para o desenvolvimento desta pesquisa (descritos nas seções anteriores e os mapeados) este é o único que explorou as matrizes binárias, tão presentes na área computacional.

Ao analisar as atividades em termos de atividades cognitivas, constatou-se que na primeira atividade foram explorados tratamentos algébricos, envolvendo operações com matrizes e matriz inversa. Como a segunda atividade exigia que os estudantes construíssem letras nas cores brancas e pretas por meio de matrizes binárias (Figura 11), a atividade cognitiva exigida foi a conversão do registro algébrico para o registro figural.

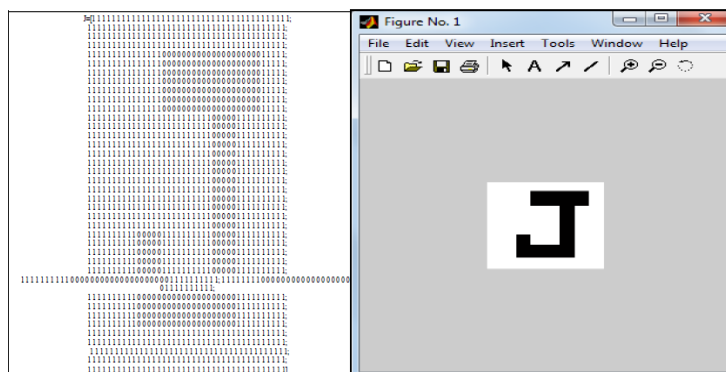


Figura 11: Atividade II do artigo J
Fonte: Dados da pesquisa

A terceira atividade solicitava aos estudantes a construção de uma “matriz livre” (150x180), ou seja, eles podiam criar diferentes imagens. A Figura 12 reproduz uma das produções dos estudantes. Eles construíram a matriz no editor de texto e depois colaram no *software*, pois facilitava para fazerem alterações, caso a imagem desejada não se concretizasse na tela do computador. Para realizar esta atividade foi necessário converter do registro algébrico (matricial) para o registro figural.

¹³ O MATLAB é um software pago destinado a fazer cálculos com matrizes (Matlab = MATrix LABoratory) desenvolvido pela MatWorks.

¹⁴ Matrizes binárias são matrizes cujos elementos pertencem ao conjunto {0,1} e têm aplicação em Ciência da Computação.

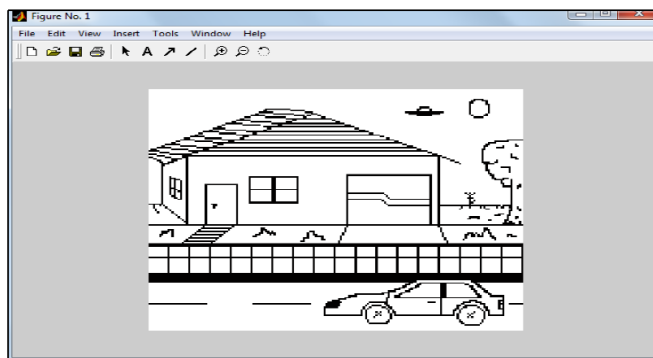


Figura 12: Atividade III do artigo J
Fonte: Dados da pesquisa.

A autora do artigo J conclui que “através dessa proposta os alunos desenvolveram habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de uma solução, construindo uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos do estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles” (Trecho do Artigo J). Percebe-se na afirmação da autora que o trabalho com matrizes binárias possibilitou relacionar conceitos matemáticos com outras áreas do conhecimento, por exemplo, a computação. Mesmo não tendo como teoria de aprendizagem matemática os Registros de Representação Semiótica, percebe-se que a autora valorizou a atividade de conversão. Uma interpretação para esta valorização pode ser evidenciada na busca por explorar por meio das atividades várias linguagens.

No artigo K é descrita uma experiência com acadêmicos da licenciatura em Matemática ao resolverem atividades sobre propriedades de determinantes. Nesta experiência foram propostas 5 atividades. Para resolvê-las os estudantes contaram com o auxílio da calculadora gráfica TI84¹⁵. Constatou-se que as atividades valorizam tratamentos no registro algébrico. Cabe destacar que, as atividades tinham um caráter exploratório-investigativo, pois após os estudantes verificarem na calculadora o resultado do determinante de diversas matrizes, eles precisavam analisar e buscar argumentos que explicassem os resultados. Por exemplo, o determinante de três matrizes resultou em zero ($detA = 0$), porque estas apresentam linha(s) e/ou coluna(s) formadas por zeros. Após, os estudantes precisavam mostrar que se as matrizes de ordem n possuem linha(s) e/ou colunas com zero, o determinante é zero. Os autores concluem que o uso da calculadora “possibilita a experimentação, a rapidez e segurança na obtenção dos cálculos que podem colaborar para a percepção de regularidades que apoiam a sistematização e generalização dos conceitos” (Trecho do Artigo K).

¹⁵ Calculadora gráfica TI84 possibilita ter acesso a ferramenta “det”, que permite obter o determinante da matriz, no caso de as matrizes serem quadradas.

Os autores do artigo M relatam os resultados de atividades desenvolvidas com estudantes do Ensino Médio. Os estudantes iniciaram as atividades por uma busca na internet sobre aspectos relacionados à história dos determinantes. O estudo de matrizes antecedeu essas discussões. Depois, trabalharam o cálculo de determinantes de uma matriz que apresentava valores nutricionais. No texto não fica explícito o que representa o valor do determinante da matriz que expõe valores nutricionais. Um jogo foi elaborado e desenvolvido com o intuito de explorar a ideia de cofator, importante na resolução de determinante de matrizes de ordem 3. Os estudantes também utilizaram planilhas para calcular o valor do determinante de uma matriz de ordem 3. A intenção com esta atividade voltou-se para a compreensão da regra de Sarrus. Como as atividades apresentadas aos alunos não foram expostas no texto, apenas foram descritos os objetivos e os recursos utilizados, não foi possível categorizá-las quanto as transformações cognitivas. Apenas supõe-se por meio das descrições expostas pelos autores que a ênfase está nos tratamentos.

Ao analisar os artigos não foi possível perceber qual o posicionamento dos autores quanto a ordem no trabalho com sistemas lineares, matrizes e determinantes, ordem esta problematizada por Cristóvão e Spiller (2009). O texto que apresenta aproximações com essas discussões é o artigo L. A autora deste artigo recorre as reformas curriculares, desde 1920 até 2006, para entender por que ensinamos determinantes. Segundo a autora, os determinantes já eram ensinados na década de 20 do século XX, relacionados a ideia de permutação (Análise Combinatória) e permaneceram assim até 1960, quando inicia o Movimento da Matemática Moderna¹⁶. Neste período, as matrizes foram apresentadas como novo conteúdo e passaram a ganhar destaque nos livros didáticos da época, “um destaque relativamente igual ao de Determinantes e Sistemas Lineares” (Trecho do Artigo L). Conforme Valente (2010), citado pela autora do artigo L:

A introdução de Matrizes constituiu exemplo do que poderíamos denominar novos conteúdos acrescidos à matemática escolar do colégio. A presença desse conteúdo parece ter representado uma das principais iniciativas para a escolarização da Álgebra Moderna no ensino elementar. Com a sua introdução, uma nova dimensão didático-pedagógica, e mesmo epistemológica, foi dada ao papel dos Determinantes. (VALENTE, 2010, p. 3)

Assim, “o estudo dos Determinantes tendia a uma nova direção, tornava-se um saber relacionado ao de Matrizes ou Sistema de Equações Lineares, deixando, a parte mais abstrata de sua Teoria e a relação com a Análise Combinatória, para cursos mais avançados, como os do ensino superior” (Trecho ao Artigo L). Ao analisar o documento denominado Orientações

¹⁶ Movimento da Matemática Moderna foi, sem sombra de dúvida, um dos principais marcos de reformas, provocando alterações curriculares em países com sistemas educativos e realidades diversas. (PIRES, 2008, p. 2)

Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), a autora do artigo L constatou que este documento sugere a retirada dos determinantes do currículo. O estudo de determinantes, geralmente, é trabalhado com foco na resolução de sistemas lineares pela Regra de Cramer. Esta regra, segundo este documento, é “um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração e, portanto de pouco significado para o aluno)” (BRASIL, 2006, p. 78). Nas considerações finais do artigo, verifica-se o posicionamento da autora, apoiada em Cabral e Segada (2009)¹⁷, em relação ao ensino de determinantes no Ensino Médio, afirmando: “consideramos extremamente positiva a exclusão da regra de Cramer do Ensino Médio” (Trecho do Artigo L). Assim, pode-se afirmar que a autora do artigo L defende a retirada do estudo de determinantes na Educação Básica, pois não é coerente justificar a inserção de um conteúdo para fazer uso de uma regra (Regra de Cramer). Conforme os PCN (BRASIL, 1998), para selecionar os conteúdos a serem abordados tem-se o desafio de

identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes. Também apontar em que medida os conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos. (BRASIL, 1998, p. 49)

Com intuito de apresentar uma síntese da análise dos artigos em relação aos seguintes aspectos: procedimentos metodológicos apresentados nos artigos; números de atividades; recursos utilizados para desenvolver as atividades; e pressupostos da teoria dos Registros de Representação Semiótica, o Quadro 6 foi organizado.

¹⁷ CABRAL, M. A. P. et al. O ensino do determinante e sua apresentação nos livros didáticos. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4, 2009, Brasília. **Anais...** Brasília – DF: Universidade Católica de Brasília, 2009. p. 1-14.

Quadro 6: Síntese de algumas categorias de análise

| Artigos | Procedimentos metodológicos | Número de atividades/situações | Recursos utilizados | RRS no referencial teórico | Tratamento | Conversão | Sentido da Conversão |
|---------|--|--------------------------------|--------------------------|----------------------------|------------|-----------|---|
| A | Sequência didática | 1 | | Não | | X | Língua natural → Registro Algébrico |
| B | Sequência didática | 4 | Geogebra | Sim | | X | Língua natural → Registro algébrico → Registro gráfico |
| C | Sequência didática | 7 | <i>Software</i> Winplot | Sim | | X | Língua natural → Registro algébrico → Registro gráfico → Registro tabular |
| D | Métodos de Resolução | - | | Não | X | | |
| E | Aplicação de atividades | 7 | | Não | | X | Registro discursivo → Registro algébrico |
| F | Aplicação de atividades | 2 | Objeto de Aprendizagem | Não | X | | |
| G | Jogos e problemas contextualizados | | | Não | | X | Registro tabular → Registro algébrico. |
| H | Aplicação de atividades | | Objeto de Aprendizagem | Não | | | |
| I | Aplicação de atividades | 4 | | Não | X | | |
| J | Sequência didática | 3 | <i>Software</i> MATLAB | Não | X | X | Registro algébrico → Registro figural |
| K | Sequência didática | 5 | Calculadora gráfica TI84 | Não | X | | |
| L | Metanálise sobre o ensino de determinantes | - | - | Não | - | - | |
| M | Sequência didática | | Excel | Não | | | |
| N | Aplicação de atividades | 4 | | Não | X | | |

Fonte: Elaborado pela autora.

Os dados do Quadro 6 permitem afirmar que, os autores dos trabalhos que optaram por seqüências didáticas são seis (6) e cinco (5) escolheram a aplicação de atividades. Os recursos relacionados ao uso do computador na sala de aula foram explorados em sete (7) trabalhos. Percebe-se que estes recursos foram utilizados para abordar os três conteúdos de Álgebra Linear analisados nesta pesquisa.

Quanto aos registros de representação semiótica como aporte teórico, constata-se que apenas os artigos B e C escolheram esta teoria. Os autores que não optaram, explicitamente, pela teoria do registros de representação semiótica recorreram as seguintes teorias: Campos Conceituais de Vergnaud, Resolução de Problemas a partir das ideias de Polya¹⁸ e Situações Didáticas de Brousseau¹⁹. Quanto as transformações cognitivas, verifica-se que o tratamento e a conversão foram identificadas em dez (10) artigos. O sentido da conversão mais explorado foi do registro da língua natural para o registro algébrico e deste para o registro gráfico. Uma interpretação para este resultado pode ser buscada na utilização de *softwares* de construção de gráficos na maioria das atividades propostas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve como foco principal identificar e analisar quais considerações sobre o ensino e aprendizagem dos conteúdos sistemas lineares, matrizes e determinantes se apresentam nas pesquisas. Assim como, verificar quais transformações cognitivas são enfatizadas nas pesquisas para o ensino e aprendizagem destes conteúdos, como são utilizados os *softwares*. Dos 29 artigos mapeados, no ENEM (2013; 2016) e nas pesquisas publicadas nos periódicos Bolema, Educação Matemática Pesquisa, Educação Matemática em Revista, Perspectivas em Educação Matemática, Revemat, Revista Brasileira de História da Matemática, Boletim GEPEM, Zetetiké e Em Teia, foram analisados detalhadamente quatorze (14). Este número de artigos pode ser considerado pequeno, em função do número de trabalhos apresentados nos dois anos de realização do evento, sendo no total 1756 comunicações científicas e 1002 relatos de experiência.

Dos artigos analisados seis (6) tratam sobre o conteúdo de matrizes, cinco (5) sobre sistemas lineares e três (3) sobre determinantes. A maioria dos artigos buscou desenvolver e analisar atividades, ou seja, elaborou e aplicou uma seqüência didática com os estudantes.

¹⁸ POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

¹⁹ BROUSSEAU, Guy. **Introdução à Teoria das Situações Didáticas**. São Paulo: Ática, 2009.

Duval (apud PONTES; FINCK; NUNES, 2017, p.305) considera que ao privilegiar esse tipo de procedimento pode gerar atrasos, pois “a inadequação frequente entre a sequência planejada e aquela que os alunos fazem de fato” e a “a grande diversidade entre os alunos de uma mesma sala de aula”. Para realizar uma pesquisa desta natureza, ao término de uma sequência didática deve-se resultar em “um ‘sabe fazer’ que os alunos poderão utilizar em todas as situações em que ela será uma ‘ferramenta’ para resolver um problema prático ou matemático” (DUVAL, 2013, p. 20).

A partir da análise percebe-se que há poucas reflexões em relação ao trabalho com estes conteúdos na formação de professores, voltou-se exclusivamente a desenvolver atividades com estudantes da Educação Básica. Ressalta-se que na formação inicial, “o trabalho com os conteúdos da educação básica não devem ser tratados apenas como revisão daquilo que os futuros professores estudaram (ou não)”. (SBEM, 2003, p. 6).

O futuro professor deve ter oportunidades de ampliar sua visão sobre a Álgebra e suas funções, identificando-a como uma das áreas de pesquisa mais importantes em Matemática, mas funcionando também como um fio unificador entre vários outros estudos matemáticos - geometria, teoria dos números, análise, topologia, matemática aplicada etc. (SBEM, 2003, p. 8).

Verificou-se que as transformações de tratamento e conversão, mesmo não tendo os Registros de Representação Semiótica como aportes teóricos estavam presentes em dez (10) artigos, porém os sentidos da conversão foram pouco (Quadro 6). Para Duval (apud PONTES; FINCK; NUNES, 2017, p. 308) “[...] a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais”, por isso a importância dada a conversão. De acordo com Duval (apud SOARES, 2016, p. 53) a conversão “é o início da compreensão em Matemática”, e por isso há uma mobilização de se tenha pelo menos, dois registros. Pois sem “produz-se um bloqueio visto como incompreensão, não saber fazer, perda de sentido, etc.” (SOARES, 2016, p. 53).

A maioria dos trabalhos recorreu ao uso de *softwares* ou Objetos de Aprendizagem. Para Jordão (2011, p. 25) “o emprego de *softwares* gráficos na Educação Matemática aumenta as capacidades natas de exploração, gerando introspecção de conceitos matemáticos envolvidos nas construções de sala de aula”. Sublinha-se que ao utilizar *softwares* é possível trabalhar com a representação gráfica dos sistemas lineares 3×3 . De acordo com Freitas (apud JORDÃO, 2011, p. 26) “em sistemas de três incógnitas, é possível utilizar um programa que trabalhe com gráficos de planos, para mostrar aos alunos a relação entre a solução algébrica (que ele já conhece) e a solução gráfica”. Além disso, destaca-se o trabalho com matrizes binárias apresentado no artigo J com o *Matlab*.

Quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico defendidos por Ponte, Branco, Matos (2009) e Walle (2009), as pesquisas analisadas que trabalharam com os conteúdos da Álgebra Linear não se dedicaram a analisar quais características (definidas nas vertentes do pensamento algébrico, apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009)) deste pensamento foram desenvolvidas no decorrer das pesquisas. Considerando que o grande objetivo do estudo da Álgebra na Educação Básica e no Ensino Superior é desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes, avalia-se que as produções podem dar mais atenção para as características deste pensamento, em particular, na elaboração das sequência de ensino.

Com relação à sequência em que os conteúdos de sistemas lineares, matrizes e determinantes são ensinados, em nenhum dos trabalhos ficou explícito esse posicionamento. Cristóvão e Spiller (2009, p. 4) acreditam que o ensino de matrizes “deve ser paralelo ao ensino de sistemas, para auxiliar na sua compreensão, como ferramenta na resolução e interpretação de problemas, e não como um tópico isolado da matemática”. Concorde-se com estas pesquisadoras e ressalta-se a necessidade de mais pesquisas, em especial, que recorram a aspectos históricos do ensino de Matemática para ampliar as discussões de como estes conteúdos podem ser abordados na Educação Básica e na formação de professores de Matemática.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para pesquisas futuras sobre estes conteúdos de sistemas lineares, matrizes e determinantes e incentivar outros estudos sobre este tema.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Tradução Magda Melo. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do Ensino Médio**: um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. In: **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 9, Ed. Temática (junho), p. 07-20, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2017.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEB, 2006.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática 5ª a 8ª série**. Brasília: SEF, 1998.

_____, Ministério da Educação. **PCN+ do Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos PCN. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. 144 p. Brasília, p. 87-111, 2002.

CRISTOVÃO, E. M.; SPILLER, L. K. P. C. **Matrizes, determinantes e sistemas ou sistemas, matrizes e determinantes?**, 2009. Disponível em: <http://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_antiores/anais17/txtcompletos/sem07/COLE_4002.pdf>. Acessado em 06 de Março de 2017.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**, Editora da PUC-SP, 2010, p. 167-188.

DE MACÊDO, L. N.; CASTRO, J. A.; MATHIAS, A. A.; SIQUEIRA, D. M. B.; OLIVEIRA, E. M.; SALES, G. L.; FREIRE, R. S. **Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem**. Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico, p. 17-26, 2007.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**, Campinas(SP):Papirus, p. 11-33, 2003.

_____. Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Entrevistadores: José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, jul./dez. 2013.

_____. **Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma: Entrar no Modo Matemático de Pensar: os Registros de Representações Semióticas**. Organização Tania M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA R. C. R.. **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: período 2001–2012**. Campinas: FE-Unicamp. E-book 2016.

GRANDE, A. L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. 2006.190 f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2o ano do Ensino Médio**. 2011. 195 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo.

PIRES, C. M. C. **Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil.** PUC, São Paulo. Disponível em <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/77810/mod_resource/content/1/Texto%20-%20PIRES%2C%20C.M.C.%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica%20e%20sua%20influ%C3%Aancia%20no%20processo%20de%20organiza%C3%A7%C3%A3o%20e%20desenvolvimento%20curricular%20no%20Brasil.pdf> Acessado em 15 de novembro de 2017.

PONTE, J. P. D; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Ministério da Educação, 2009. Disponível em <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf> Acessado em 21 de Março de 2017.

PONTES, H. M. S; FINCK, C. B; NUNES, A. L. R. **O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática.** Educação Matemática Pesquisa, v. 19, n. 1, 2017, São Paulo.

SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes.** 2002. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNICAMP, São Paulo.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 2002. Disponível em: <http://www.academia.edu/6005338/04_-_semi%C3%B3tica_aplicada_-_1%C3%BAcia_santaella>. Acesso em: 20 de Maio de 2017.

SBEM. **Subsídios para a discussão de propostas para os cursos de licenciatura em matemática, no seminário nacional de licenciaturas em matemática.** Salvador/abril/2003.

SILVA, T. **Sistemas lineares: uma proposta apoiada na exploração de registros semióticos na utilização de um recurso computacional.** 2016. Disponível em <<http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIIEBRAPEM/PDFs/GD6/thaissilva6.pdf>> Acessado em 5 de Abril de 2017.

SOARES, M. A. S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica.** Tese (Doutorado em Educação nas Ciências). Unijuí, IJUÍ, 2016.

VALENTE, W. R. **Era uma vez o cálculo de determinantes: tempos pré-modernos do ensino de matemática no colégio.** 2010. Disponível em <<http://33reuniao.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/GT19-6035--Int.pdf>> Acessado em 20 de novembro de 2017.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Apêndice A

| | Periódico/ Evento | Título | Autores | Universidade |
|----------|--|--|---|--|
| A | ENEM 2013 | Sistemas de equações com duas incógnitas: uma proposta de atividade com estudantes do 8º ano do ensino fundamental | Ludiane Felix Berto Camila Aparecida Lopes Coradetti; José Wilson dos Santos | Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul |
| B | ENEM 2013 | Sistemas de equações lineares: uma proposta de atividades com abordagem de diferentes registros de representação semiótica | Nilza Aparecida de Freitas Celina Aparecida Almeida Pereira Abar | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP |
| C | ENEM 2013 | Sistemas lineares: proposta de uma entrada experimental desenvolvida em ambiente computacional | Jeferson da Silva Gonçalves Monica Karrer | Universidade Bandeirante Anhanguera |
| D | ENEM 2013 | Conexão entre os métodos da substituição e escalonamento no estudo de sistemas de equações algébricas lineares | Lígia Françoise Lemos Pantoja | Universidade Federal do Pará – UFPA |
| E | ENEM 2016 | A matemática nos cursos de formação profissional na área tecnológica de eletroeletrônica: resolução de problemas utilizando sistemas lineares em circuitos | Vânia Maria Fazito Rezende Teixeira | PUC Minas |
| F | ENEM 2013 | O estudo de produto de matrizes por meio de um objeto de aprendizagem | Pâmella de Alvarenga Souza Arlise Moraes de Almeida Lopes Carmem Lucia Vieira Rodrigues | IF Fluminense Campus Campos-Centro |
| G | ENEM 2013 | Diferentes ferramentas para o ensino de matrizes | Raquel Silva Silveira Marcia Lorena Saurin Martinez | Universidade Federal do Rio Grande – FURG |
| H | ENEM 2013 | Um olhar lançado ao objeto de aprendizagem “matrizes”. | Carine Girardi Manfio Carmem Vieira Mathias | Universidade Federal de Santa Maria |
| I | Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat 2013 | Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes: uma investigação acerca dos invariantes operatórios | Valdinei Cezar Cardoso Lilian Akemi Kato Samuel Rocha de Oliveira | Universidades Estaduais de Campinas e de Maringá |
| J | Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat 2016 | Utilização do software MATLAB como recurso tecnológico de aprendizagem na transformação de matrizes em imagens | Raquel Marchetto | Universidade Federal do Rio Grande do Sul |
| K | ENEM 2013 | Calculadoras gráficas na formação inicial de professores de matemática: sistematizando propriedades dos determinantes | Bruno Rodrigo Teixeira Loreni Aparecida Ferreira Baldini Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino | Universidade Estadual de Londrina |
| L | ENEM 2013 | Investigação sobre a inserção e permanência dos determinantes no currículo da matemática escolar | Késia Caroline Ramires Neves | Universidade Estadual de Maringá |
| M | ENEM 2013 | Um caminho para o ensino e aprendizagem de determinantes | João Batista Regis da Silva Maria Betânia Fernandes de Vasconcelos Maria da Conceição Vieira Fernandes | Universidade Estadual da Paraíba |
| N | ENEM 2013 | Identificando teoremas em ação mobilizados em um curso de álgebra linear | Valdinei Cezar Cardoso Samuel Rocha de Oliveira Lilian Akemi Kato | Universidades Estaduais de Campinas e de Maringá |