



**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA**

**CAMPUS ALEGRETE**

**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE INVERSA DE ENSAIOS GEOTÉCNICOS UTILIZANDO**

**FERRAMENTA MATEMÁTICA DE APOIO À ENGENHARIA**

**FÁBIO GOULART DE SOUZA**

**ALEGRETE**

**2011**

**FÁBIO GOULART DE SOUZA**

**ANÁLISE INVERSA DE ENSAIOS GEOTÉCNICOS UTILIZANDO  
FERRAMENTA MATEMÁTICA DE APOIO À ENGENHARIA**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como requisito parcial para a  
aprovação no curso de Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Pampa – Campus Alegrete.

Professor Orientador: André Lübeck

Professor Co-Orientador: Adinele Guimarães

**ALEGRETE**

**2011**

*Dedico este Trabalho à  
minha mãe e minha avó  
materna.*

*Que sempre se fizeram  
presentes em minha vida  
quando eu mais necessitei.*

# ÍNDICE

## **1. Introdução**

1.1 Generalidades

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos específicos

1.3 Organização do trabalho

## **2. Revisão bibliográfica**

2.1 Modelos constitutivos

2.1.1 Modelo hiperbólico

2.1.2 Método racional para cálculo direto de recalque

2.2 Análise inversa

2.3 Métodos de otimização

2.3.1 Método de Newton-Raphson

2.4 Ensaio geotécnicos

2.4.1 Ensaio triaxial

2.4.2 Ensaio de prova de carga em placa

## **3. Procedimentos matemáticos**

3.1 Retroanálise aplicada ao ensaio triaxial

3.1.1 Aplicação do modelo hiperbólico

3.1.2 Processo de criação do algoritmo

3.1.3 Estratégia de otimização

3.2 Retroanálise aplicada à prova de carga

3.2.1 Aplicação do modelo de Winkler

3.2.2 Processo de criação do algoritmo

3.2.3 Estratégia de otimização

## **4. Resultados**

4.1 Modelo hiperbólico

4.2 Modelo de Winkler

## **5. Conclusões**

ANEXO A – algoritmos utilizados no modelo hiperbólico

ANEXO B – algoritmos utilizados no modelo de Winkler

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por olhar por mim mesmo quando estou distante.

Agradeço à minha família por me acreditar e me motivar.

Aos meus amigos por estarem ao meu lado em todos os momentos.

Aos professores do Campus Unipampa Alegrete pelos ensinamentos e por tornar possível meu sonho de possuir um curso superior.

A todos que fizeram parte desta caminhada, e que estando hoje presentes ou não, ficarão eternamente gravados na memória.

Não me entrego sem lutar

Tenho ainda coração

Não aprendi a me render

Que caia o inimigo então

(Renato Russo)

## LISTA DE FIGURAS

- FIGURA 1.1 – Deslizamento de Terra em área habitada
- FIGURA 2.1a – Representação gráfica do Modelo Hiperbólico
- FIGURA 2.1b – Representação gráfica do Modelo Hiperbólico
- FIGURA 2.2 – Modelo de Winkler
- FIGURA 2.3 – Métodos Numéricos
- FIGURA 2.4 – Método de Newton
- FIGURA 2.5 – Prensa Triaxial
- FIGURA 2.6 – Ensaio de Prova de carga em Placa
- FIGURA 3.1a – Gráfico comparativo entre Valores de Laboratório e Valores obtidos pelo Modelo Hiperbólico -  $\sigma_3 = 100kPa$
- FIGURA 3.1b – Gráfico comparativo entre Valores de Laboratório e Valores obtidos pelo Modelo Hiperbólico -  $\sigma_3 = 300kPa$
- FIGURA 3.1c – Gráfico comparativo entre Valores de Laboratório e Valores obtidos pelo Modelo Hiperbólico -  $\sigma_3 = 1050kPa$
- FIGURA 3.2 – Gráfico tensão *versus* deformação para o ensaio de placa
- FIGURA 4.1 – Gráfico comparativo antes da calibração
- FIGURA 4.2 – Gráfico comparativo com o parâmetro  $k$  ajustado
- FIGURA 4.3 – Gráfico comparativo com o parâmetro  $Rf$  ajustado
- FIGURA 4.4 – Curva Tensão *versus* Deformação – Fonte GOUVÊA (2000)
- FIGURA 4.5 – Curva Carregamento *versus* Deformação – Fonte DUARTE (2006)
- FIGURA 4.6 – Gráfico comparativo entre Modelo de Winkler e Ensaio de Placa de GOUVÊA (2000)
- FIGURA 4.7 – Gráfico comparativo entre Modelo de Winkler e Ensaio de Placa de DUARTE (2006)

## **LISTA DE TABELAS**

TABELA 2.1 – Fatores de Forma  $I_s$  para carregamentos de superfície

TABELA 3.1a – Tensão x Deformação -  $\sigma_3 = 100kPa$

TABELA 3.1b – Tensão x Deformação -  $\sigma_3 = 300kPa$

TABELA 3.1c – Tensão x Deformação -  $\sigma_3 = 1050kPa$

TABELA 3.2 – Parâmetros Iniciais do Modelo Hiperbólico

TABELA 3.3 – Parâmetros Iniciais da equação da prova de carga

TABELA 4.1 – Parâmetros do modelo hiperbólico calibrados

TABELA 4.2 – Dados do Ensaio de GOUVÊA (2000)

TABELA 4.3 – Dados do Ensaio de DUARTE (2006)

TABELA 4.4 – Resultados da minimização do ensaio de GOUVÊA (2000)

TABELA 4.5 – Resultados da minimização do ensaio de DUARTE (2006)

## **RESUMO**

### **Análise Inversa de Ensaios Geotécnicos utilizando ferramenta matemática de apoio à Engenharia.**

SOUZA, Fábio Goulart

Universidade Federal do Pampa, Unipampa

Orientador: André Lübeck; Co-orientadora: Adinele Guimarães.

Na Engenharia Civil existe a necessidade de se conhecer os parâmetros de resistência do solo, devido à grande variedade de obras que o envolve como: fundações, barragens, cortes e aterros, etc. Tais parâmetros podem ser obtidos a partir de ensaios de laboratório e de campo e, dependendo do modelo matemático escolhido, os procedimentos de identificação podem ser excessivamente subjetivos. Isto leva à busca de alternativas para tornar tais procedimentos mais práticos e exatos. Dentre as alternativas está a utilização de análise inversa através de métodos numéricos. Buscando simplificar a obtenção de parâmetros geotécnicos em situações usuais, este trabalho aplicou a análise inversa via algoritmos implementados em Matlab® em ensaios triaxiais e de prova de carga em placa. Para o ensaio triaxial utilizou-se o modelo hiperbólico e para o de placa, o modelo elástico de Winkler. Os resultados apontam que o modelo hiperbólico descreve adequadamente o ensaio triaxial e que é possível conseguir um arranjo de parâmetros ainda melhor do que os encontrados pelos métodos de calibração tradicionais, entretanto não foi possível determinar os parâmetros diretamente pelo programa desenvolvido devido à complexidade do modelo hiperbólico. Para o método implantado na prova de carga constatou-se que por se tratar de um modelo linear, a metodologia utilizada não descreveu como desejado o comportamento do ensaio. Ajustes serão necessários nos algoritmos implementados a fim de torná-los plenamente funcionais.

Palavras-chave: Análise inversa; parâmetros geotécnicos.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Generalidades

Na Engenharia Civil, a previsão de movimentos em maciços de solo assim como sua resistência às ações causadas por construções como fundações, escavações e aterros pode ser importante na prevenção de acidentes.

Em função do crescimento das cidades e do avanço da civilização sobre encostas, são cada vez mais frequentes os acidentes causados por deslizamentos de terra e desmoronamentos no Brasil. Estes acidentes estão geralmente relacionados a construções executadas em locais impróprios, conforme ilustrado na FIGURA 1.1, onde o maciço em condições naturais já se apresenta em condições de equilíbrio condicionadas à baixa incidência de chuvas ou, ainda, a solos onde as características mecânicas são desconhecidas, devido à ausência de sondagens e/ou um estudo geotécnico mais aprofundado antes da liberação da área para a construção.



FIGURA 1.1 – Deslizamento de terra em área habitada.

Fonte: <<http://lumeeear.blogspot.com/2011/02/deslizamento.html>>

Por outro lado, mesmo quando se dispõe de recursos para executar um estudo geotécnico melhor elaborado, a obtenção dos parâmetros do solo depende da experiência da equipe executora da sondagem e da adoção de práticas que dificultam muito para profissionais pouco treinados a execução dos ensaios. Da mesma forma, muitas destas práticas de vivência,

baseiam-se em critérios subjetivos que impossibilitam a obtenção dos mesmos resultados por equipes diferentes. Dentre os principais exemplos de ensaios tradicionais para solos que são de difícil tradução de resultados em parâmetros simples para projeto, estão o ensaio triaxial e as provas de carga em placa. O primeiro permite a obtenção de diversos parâmetros do solo, a depender de como o ensaio é executado e das análises que são realizadas com os dados obtidos. O segundo, é mais simples, fornece menos informações, mas mesmo assim ainda pode ter a análise mais facilitada.

O emprego de análise computacional no estudo de resultados de ensaios geotécnicos é algo já presente, mas que sempre irão depender de calibrações dos dados envolvidos que tornam a sua aplicação prática difícil. Uma das alternativas a esta análise custosa, está em aplicar a chamada retroanálise, onde a partir da curva obtida em um ensaio, usa-se um algoritmo computacional que varia os parâmetros envolvidos no método utilizado até alcançar a curva original novamente. Desta forma é possível encontrar intervalos de valores válidos para cada parâmetro de maneira prática.

A bibliografia apresenta diversos métodos de previsão de comportamento de resultados válidos para os ensaios mais tradicionais em solos. Para o ensaio triaxial, o método hiperbólico já foi empregado por diversos autores e teve sua utilização comprovada. Já o ensaio de prova de carga em placa, baseia-se nas hipóteses de solo elástico de Winkler. A retroanálise, por sua vez, baseia-se em algum destes métodos escolhidos para simular cada tipo de ensaio, a fim de encontrar os parâmetros de entrada a partir das curvas obtidas como resultado dos ensaios.

O desenvolvimento de uma ferramenta computacional que realize a análise inversa de resultados para ensaios triaxiais e de carga em placa justifica-se pela maior facilidade que estas proporcionam na obtenção dos parâmetros geotécnicos a partir dos resultados dos ensaios.

## **1.2 Objetivos**

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional para análise inversa de ensaios de solo aplicada a ensaios triaxiais e de prova de carga em placa. Para tal é necessário atingir os seguintes objetivos específicos:

### **1.2.1 Objetivos específicos**

- Analisar o uso de procedimentos de análise inversa na determinação de parâmetros de resistência de amostras de solos.
- Desenvolver um algoritmo no editor de funções do Matlab® que realize a análise inversa de ensaios triaxiais para determinação dos parâmetros geotécnicos do modelo hiperbólico;
- Desenvolver um algoritmo para a determinação dos parâmetros geotécnicos do ensaio de prova de carga em placa através de equações da Teoria da Elasticidade;
- Utilizar os resultados do ensaio realizado no algoritmo para encontrar o coeficiente de reação do solo ou constante elástica de Winkler, ( $kv$ );

### **1.3 Organização do trabalho**

O trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos, em que a introdução é o Capítulo 1.

No Capítulo 2 faz-se uma revisão para exemplificar os modelos matemáticos utilizados para descrever os ensaios, assim como, os métodos numéricos e procedimentos da análise inversa. No mesmo capítulo também se encontra uma breve explicação sobre os procedimentos de realização do ensaio triaxial e do ensaio de prova de carga em placa.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia do trabalho.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados dos exemplos testados, discutindo o ajuste de cada método, prós e contras.

As conclusões são apresentadas no Capítulo 5.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo são apresentados os conceitos referentes aos modelos constitutivos para solos, análise inversa, métodos de otimização e os ensaios geotécnicos.

### **2.1 Modelos constitutivos**

Um Modelo Constitutivo é uma equação matemática que procura representar numericamente o comportamento de um material. Existe uma grande quantidade de modelos constitutivos para os materiais encontrados na Engenharia, os que possuem argumentos mais simples são baseados na teoria da elasticidade linear e realizar a sua calibração é relativamente mais fácil (DESAI & SIRIWARDANE, 1984). Entretanto o comportamento da grande maioria dos geomateriais não obedece a teoria da elasticidade, necessitando do uso de leis constitutivas mais complexas e sofisticadas, que possuem um maior número de parâmetros, tornando assim a calibração do modelo mais difícil. O solo é um material elasto-plástico, sua resistência e rigidez dependem dos níveis de tensão e deformação, e ainda não existe um modelo constitutivo que consiga representar todas suas características. A depender dos parâmetros e ensaios envolvidos, a adoção correta de um modelo constitutivo permitirá ou não a obtenção de parâmetros de maneira prática.

Em ensaios triaxiais, um dos modelos mais empregados é o Hiperbólico, onde é adotado um modelo constitutivo plástico para simular a relação tensão-deformação, já para o ensaio de carga em placa, o mais adotado é o modelo elástico baseado nas hipóteses de Winkler.

#### **2.1.1 Modelo hiperbólico**

O comportamento tensão-deformação dos solos depende de uma grande diversidade de fatores. Vários autores vêm trabalhando na área de modelos constitutivos visando encontrar uma relação tensão-deformação que represente, adequadamente, o comportamento dos solos e que leve em conta o maior número possível de fatores condicionantes. O modelo constitutivo hiperbólico, proposto por Duncan e Chang (1970), tem sido muito utilizado em trabalhos de engenharia geotécnica em razão de sua simplicidade e da facilidade na obtenção de seus parâmetros. Esse modelo pode ser usado para representar o comportamento tensão-deformação de solos coesivos e não coesivos saturados ou secos, em condições de carregamento drenado ou não drenado.

As relações constitutivas do modelo consideram características do solo como a não-linearidade e a influência da tensão de confinamento,  $\sigma_3$ . Outras características como dilatância e a influência da tensão principal intermediária não são consideradas nesse modelo. Portanto, as relações constitutivas do modelo apresentam o mesmo comportamento para compressão, extensão ou estado de deformação plana.

A equação do modelo hiperbólico apresentada por Kondner (1963) assume que as curvas tensão *versus* deformação, sob ação de uma determinada tensão confinante  $\sigma_3$ , podem ser razoavelmente aproximadas por uma hipérbole, conforme demonstrado na FIGURA 2.1a. e Equação 2.1

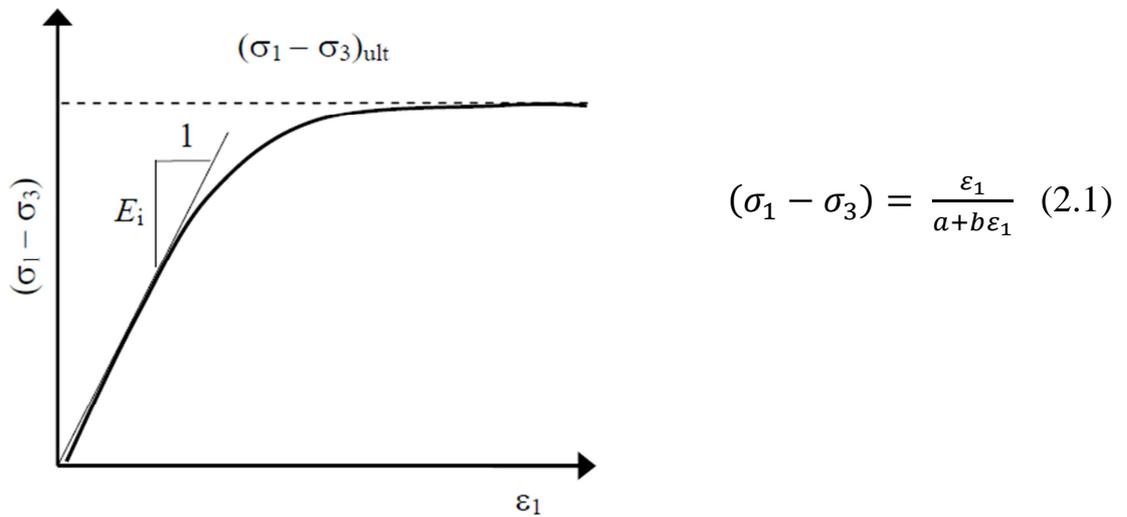


FIGURA 2.1a – Representação gráfica do Modelo Hiperbólico

A constante  $a$  está relacionada com o módulo de deformabilidade inicial, sendo  $E_i$  a inclinação inicial da curva  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  versus  $\varepsilon_1$ . Já a constante  $b$  possui relação com a diferença de tensão na condição ultima  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ . Sendo que  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  é o valor da reta assíntota à tensão desviadora  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  quando a deformação  $\varepsilon_1$  tende ao infinito. As constantes  $a$  e  $b$  ficam assim descritas pelas equações 2.2 e 2.3 respectivamente:

$$a = \frac{1}{E_i} \quad (2.2)$$

$$b = \frac{Rf}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (2.3)$$

As constantes ficam mais fáceis de se identificar quando se utiliza uma relação linear, de acordo com a FIGURA 2.1b. Para tal utiliza-se da equação da hipérbole transformada que pode ser obtida através de um simples rearranjo dos termos. Ficamos assim então com:

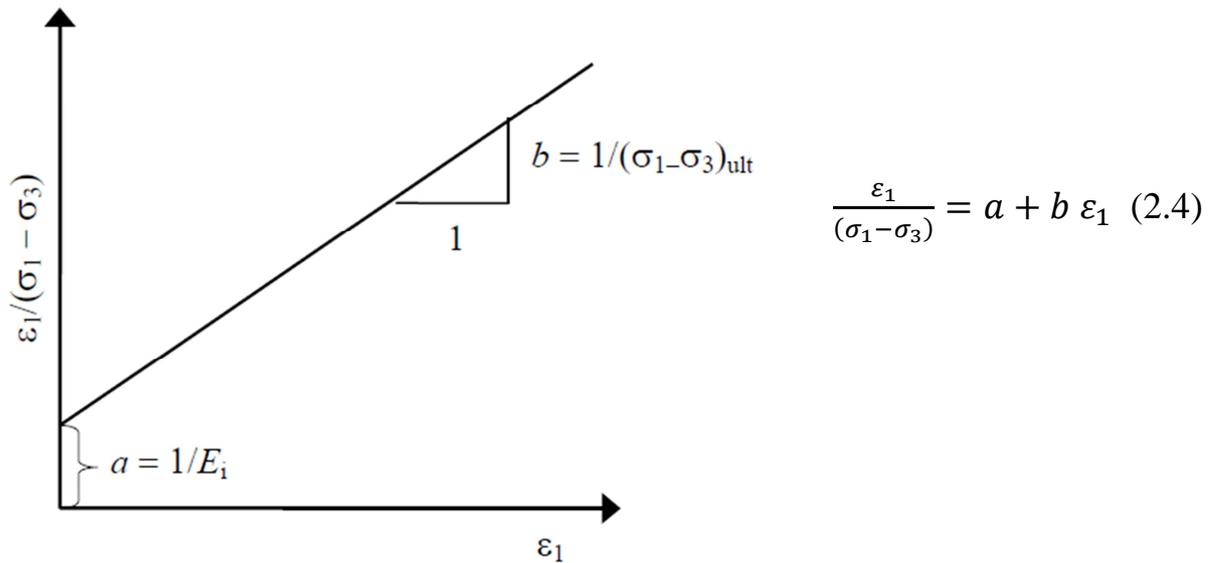


FIGURA 2.1b – Representação gráfica do Modelo Hiperbólico

JANBU (1963) propôs a seguinte equação para descrever o Módulo de Young inicial  $E_i$  em função da tensão de confinamento  $\sigma_3$ . Sendo  $pa$  o valor da pressão atmosférica em kPa,  $k$  e  $n$  parâmetros do solo.

$$E_i = k pa \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right)^n \quad (2.5)$$

A variação da tensão desviadora ultima  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  com a tensão de confinamento  $\sigma_3$  é considerada através do parâmetro da taxa de ruptura  $Rf$  conforme a equação 2.6

$$Rf = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad (2.6)$$

Onde  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$  é a resistência do solo descrita pelo critério de Mohr-Coulomb:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \operatorname{sen}(\varphi)}{(1 - \operatorname{sen}(\varphi))} \quad (2.7)$$

Sendo  $c$  o parâmetro de coesão do solo e  $\varphi$  o ângulo de atrito ou ângulo de resistência ao cisalhamento.

Definido termo por termo os componentes da equação do modelo hiperbólico, realiza-se mais um rearranjo dos termos para escrever a deformação em função da tensão conforme a equação 2.8:

$$\varepsilon_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)a}{1 - b(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (2.8)$$

Finalmente substituindo-se todos os termos e realizando as devidas simplificações ficamos com:

$$\varepsilon_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left[ 1 - \frac{Rf (\sigma_1 - \sigma_3) k pa \left(\frac{\sigma_3}{pa}\right)^n}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \operatorname{sen}(\varphi)} \right]} \quad (2.7)$$

Para:

- $\varepsilon_1 \rightarrow$  deformação axial;
- $(\sigma_1 - \sigma_3) \rightarrow$  tensão desviadora;
- $\sigma_3 \rightarrow$  tensão de confinamento;
- $k, n,$  e  $Rf \rightarrow$  coeficientes que definem a variação do módulo de elasticidade com a tensão de confinamento e o nível de tensão;
- $c$  (coesão) e  $\varphi$  (ângulo de atrito)  $\rightarrow$  coeficientes que definem a ruptura;

### 2.1.2 Modelo de Winkler

Existem diversas metodologias para a previsão de recalque em uma sapata. Dentre elas tem-se métodos empíricos, semi-empíricos e métodos racionais. Os métodos racionais podem ser diretos, quando o recalque é fornecido diretamente pela solução empregada, ou indiretos, quando o recalque é fornecido por deformações específicas, posteriormente integradas.

WINKLER (1867) propôs um modelo de cálculo para as deformações do solo baseado no conceito do coeficiente de reação. No modelo, o solo é idealizado por um conjunto independente de molas linearmente elásticas e igualmente espaçadas entre si. A rigidez dessas molas é definida através de uma constante de proporcionalidade entre a pressão aplicada e o deslocamento do solo. Este coeficiente de proporcionalidade é chamado de coeficiente de reação ou módulo de reação e comumente representado por  $k_v$ , quando utilizado pra designar uma reação vertical.

O modelo encontra-se ilustrado na FIGURA 2.2 abaixo:

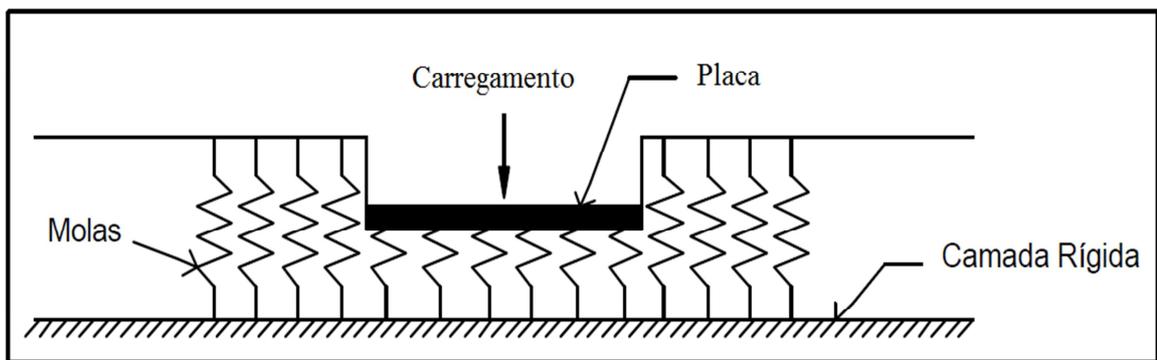


FIGURA 2.2 – Modelo de Winkler

Esta solução baseada na Teoria da Elasticidade permite o cálculo de recalques para uma sapata sob carga centrada, permitindo simular o ensaio de prova de carga para fundações rasas.

Assim, conforme o modelo de Winkler, os parâmetros de deformação do ensaio de prova de carga ficam definidos por:

$$W = q B \frac{1-\nu^2}{E} I_s \quad (2.8)$$

Onde:

$q$  = Pressão média aplicada ( $kPa$ )

$W$  = Recalque da placa ( $m$ )

$B$  = Menor dimensão da placa ou diâmetro ( $m$ )

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

E = Módulo de Young (*kPa*)

Is = Fator de forma e rigidez

TABELA 2.1 – Fatores de Forma Is para carregamentos de superfície

Forma	Flexível			Rígido
	Centro	Borda	Média	
Círculo	1,00	0,64	0,85	0,79
Quadrado	1,12	0,56	0,95	0,99
Retângulo				
L/B = 1,5	1,36	0,67	1,15	
2	1,52	0,76	1,30	
3	1,78	0,88	1,52	
5	2,10	1,05	1,83	
10	2,53	1,26	2,25	
100	4,00	2,00	3,70	
1000	5,47	2,75	5,15	

Através desta solução é também possível determinar o coeficiente de reação vertical  $k_v$  supondo uma linearidade entre a relação pressão-recalque.

$$k_v = \frac{q}{W} \quad (2.9)$$

Comparando-se as equações 2.8 e 2.9 obtém-se para um meio elástico, homogêneo e semi-infinito:

$$k_v = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{I_s} \frac{1}{B} \quad (2.10)$$

## 2.2 Análise inversa

Em um problema de ordem direta, deseja-se conhecer o resultado de um sistema de equações que possuem parâmetros conhecidos e descrevem determinadas ações. No entanto, quando uma parte ou a totalidade destes argumentos e parâmetros do sistema não é conhecido, é realizado um processo inverso. Para se obter êxito neste processo é necessário o conhecimento da solução do sistema (no caso de ensaios geotécnicos a solução são as

deformações, fornecidas pelos modelos e pelos ensaios) e também de características que definam os possíveis valores destes parâmetros, como limites por exemplo.

Assim, o procedimento matemático consiste na elaboração de uma função objetivo, para representar a diferença entre os valores de deformação medidos em laboratório e aqueles calculados pelo modelo constitutivo, através da inserção de parâmetros iniciais, e da seleção de uma estratégia de otimização que permita a procura do mínimo desta função objetivo.

A análise inversa pode ser aplicada em diversos tipos de sistemas matemáticos. Existem muitos trabalhos na área geotécnica e alguns aplicados ao comportamento de estruturas de concreto, problemas de irradiação térmica relacionada a iluminação, dentre outros. Os fatores condicionantes para se obter sucesso em uma análise inversa são as informações conhecidas sobre os parâmetros e variáveis que descrevem a equação analisada.

### **2.3 Métodos de otimização**

A otimização pode ser compreendida como uma forma prática de se identificar a melhor solução dentre as inúmeras disponíveis para um certo problema.

Um método sistemático de otimização procura um conjunto de parâmetros de um modelo visando minimizar a diferença entre observações experimentais e os resultados correspondentes simulados pelo modelo (YANG & ELGAMAL, 2003). Os parâmetros ideais que procurados serão aqueles que proporcionarem a menor diferença entre o modelo numérico e o experimental. Este ajuste é realizado por uma função objetivo, ou função erro, que mede a diferença entre os dois conjuntos de dados. É esta função que deve ser minimizada pelo método numérico.

Existem diversos métodos de otimização que podem ser aplicados dependendo do tipo de equações que se deseja otimizar. Por exemplo, existem métodos para equações lineares e não lineares, com restrição ou sem restrição. As equações restritas ainda se classificam em restrições de igualdade (para situações em que as restrições ocorrem na forma de equações), restrições de desigualdade (quando as restrições aparecem na forma de inequações) e restrições mistas (quando ocorrem as duas situações).

O problema em estudo neste trabalho consiste em equações não-lineares sem restrições. O método adotado é o de Newton-Raphson por possuir maior praticidade na execução do algoritmo e por ser um método menos complexo e eficiente em boa parte das situações. O método de Newton-Raphson não é muito utilizado na área geotécnica por depender do cálculo

das derivadas parciais da equação, as quais geralmente são difíceis de obter analiticamente para modelos constitutivos mais complexos.

Na sequência, na FIGURA 2.3, encontra-se um esquema com exemplos de métodos numéricos utilizados em equações não-lineares e após uma breve explicação sobre o funcionamento do método de Newton.

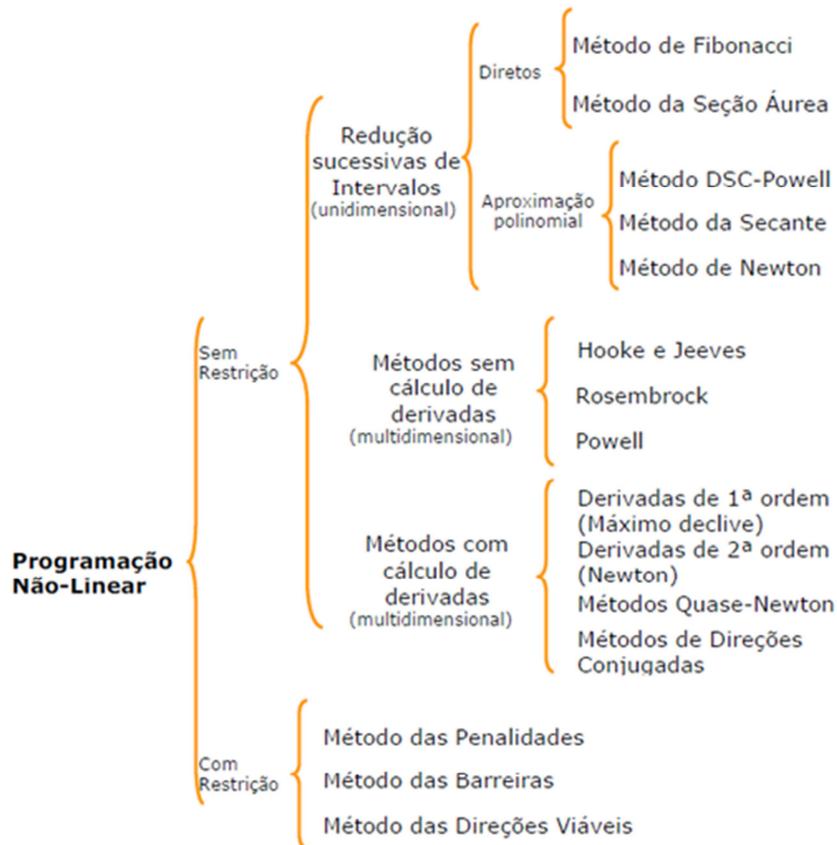


FIGURA 2.3 – Métodos Numéricos

### 2.3.1 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é usado para se obter a solução numérica de uma equação na forma  $f(x) = 0$ , onde  $f(x)$  é contínua e diferenciável e sua equação possui uma solução próxima a um ponto inicial fornecido.

O método aparece representado na FIGURA 2.4.

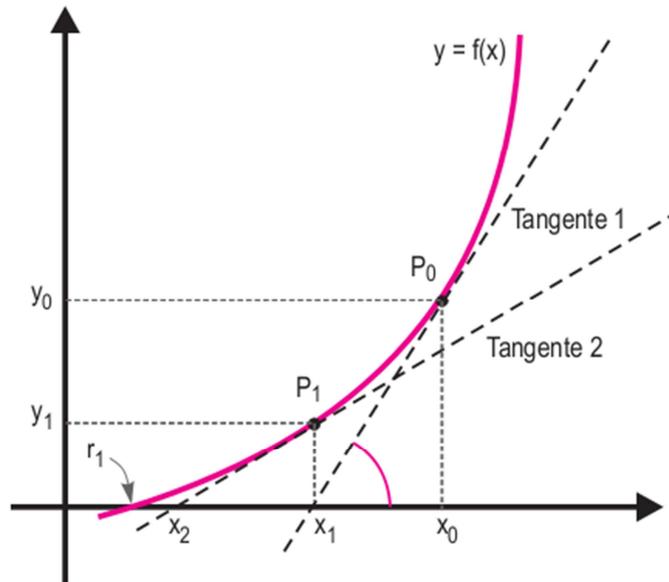


FIGURA 2.4 – Método de Newton-Raphson.

Fonte: <<http://condicao inicial.com/2010/04/raizes-de-funcoes-2-newton-raphson.html>>

O processo de solução começa com a escolha de um ponto inicial, no caso  $x_0$ , como primeira tentativa de solução. A segunda estimativa,  $x_1$ , é obtida a partir do cruzamento com o eixo da reta tangente a  $f(x)$  no ponto  $(x_0, y_0)$  e assim sucessivamente para os próximos passos.

A equação iterativa geral do método de Newton-Raphson é dada por:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.11)$$

Onde:

$f(x_i)$  é o valor da função no ponto  $x_i$

$f'(x_i)$  é o valor da derivada da função no ponto  $x_i$

Uma observação importante sobre o método é que este converge rapidamente quando bem sucedido. A sua não convergência ocorre usualmente porque o ponto de partida não está suficientemente próximo da solução. Problemas de convergência ocorrem tipicamente quando o valor de  $f'(x_i)$  é próximo de zero na vizinhança da solução (próximo a pontos de máximo, mínimo e de inflexão por exemplo).

## **2.4 Ensaios geotécnicos**

Para se executar projetos geotécnicos de qualquer natureza são necessários também ensaios geotécnicos, cujas medidas possibilitem uma definição relevante da estratigrafia do subsolo e uma estimativa realista das propriedades de comportamento dos materiais envolvidos.

Ensaios geotécnicos são aqueles realizados em camadas de solo com o intuito de obter alguma informação sobre sua estrutura, comportamento em relação a tensões e deformações e também a resistência do solo. Estas informações são pertinentes em projetos de fundações, estruturas de contenção, estabilidade de taludes, dimensionamento de pavimentos, etc.

Segundo SCHNAID (2000) no Brasil o custo correspondente à execução de sondagens de reconhecimento varia normalmente entre 0,2 e 0,5% do custo total da obra.

Neste trabalho são descritos dois ensaios geotécnicos que estão diretamente relacionados com o comportamento tensão-deformação-resistência dos solos: o ensaio triaxial que é um ensaio de laboratório, muito utilizado na área geotécnica, e o ensaio de prova de carga em placa para fundações rasas, sendo este um ensaio de campo que procura simular de forma real o comportamento de uma sapata ou de um bloco de fundação sobre a ação de um esforço axial centrado.

### **2.4.1 Ensaio Triaxial**

De acordo com BOTELHO (2007), o Ensaio Triaxial é o mais versátil ensaio laboratorial para a determinação da resistência ao cisalhamento do solo. É tido como ensaio padrão na Mecânica dos Solos. O objetivo deste ensaio é estudar o comportamento dos solos em condições similares àsquelas encontradas no campo e obter parâmetros que possam descrever seu comportamento.

A versatilidade vem do fato de poder ser feito simulando diversas condições de carregamento e drenagem permitindo a determinação das características de tensão e deformação do solo. O equipamento utilizado permite a reprodução de qualquer estado de fluido nos vazios do solo, desde um estado de pressão negativo a um completamente saturado, com um excesso de poropressão positivo.

A célula triaxial consiste de uma câmara de acrílico transparente assentada sobre uma base metálica em uma prensa. O corpo de prova é colocado sobre o pedestal, onde há uma ligação com a base da célula. A carga axial é aplicada pelo pistão e a câmara, cheia de água, permite a

aplicação de tensões confinantes à amostra. Entre a amostra e o pedestal, utilizam-se pedras porosas para facilitar a drenagem. O corpo de prova é envolvido por uma membrana de borracha, vedada no topo e base por anéis de borracha ou elásticos, para se impedir o contato com a água e variação de umidade durante o ensaio.

Através deste ensaio é então obtida uma curva de tensão *versus* deformação correspondente a uma determinada tensão de confinamento  $\sigma_3$  aplicada. Através destes valores é possível encontrar os parâmetros do modelo hiperbólico utilizando-se dos processos de calibração tradicional (os quais fazem uso de ábacos, gráficos e análises subjetivas) ou através de processos de análise inversa (por meio de métodos numéricos de otimização). Abaixo, na FIGURA 2.5 encontra-se uma foto do conjunto prensa triaxial retirada do site da Unicamp.



FIGURA 2.5 – Prensa Triaxial.

Fonte: <<http://www.fec.unicamp.br/~pjra/mecsolos.html>>

### **2.4.2 Ensaio de prova de carga em placa**

A prova de carga é o ensaio de campo que mais se aproxima do comportamento real encontrado na prática. Este ensaio tenta simular o que acontece com as camadas de um maciço de solo, em relação ao comportamento da deformação, perante a aplicação de uma tensão axial sobre uma placa ou uma sapata, no caso de fundações rasas, ou sobre uma estaca, no caso de fundações profundas.

De acordo com a NBR 6489 (1984) a realização deste ensaio de campo é feita através da utilização de uma placa rígida a qual distribuirá as tensões ao solo. A área da placa não deve ser inferior a  $0,5 m^2$ . Comumente, é usada uma placa de diâmetro 0,80m.

A prova de carga é executada em estágios de carregamento onde em cada estágio são aplicados menos de 20% da taxa de trabalho estimada do solo. Em cada estágio de carregamento, são realizadas leituras das deformações logo após a aplicação da carga e depois em intervalos de tempos sucessivos.

Os carregamentos são aplicados até que:

- Ocorra ruptura do terreno;
- A deformação do solo atinja 25 mm;
- A carga aplicada atinja valor igual ao dobro da taxa de trabalho presumida para o solo.

O descarregamento deve ser feito em estágios sucessivos não superiores a 25% da carga total, medindo-se as deformações de maneira idêntica as do carregamento.

Geralmente, para solos de alta resistência, prevalece o critério da ruptura, pois as deformações são pequenas. Para solos de baixa resistência, prevalece o critério de recalque admissível, pois as deformações do solo serão sempre grandes.

A FIGURA 2.6 demonstra um conjunto montado para a realização de um ensaio de placa.



FIGURA 2.6 – Ensaio de Prova de carga em Placa

### **3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

#### **3.1 Retroanálise aplicada ao ensaio triaxial**

Aqui serão descritos todos os procedimentos desenvolvidos durante a elaboração dos algoritmos de minimização dos parâmetros do modelo hiperbólico, utilizado para tentar simular de maneira numérica o comportamento tensão-deformação do ensaio triaxial.

##### **3.1.1 Aplicação do modelo hiperbólico**

Para a realização da simulação numérica foram utilizados resultados de ensaios triaxiais realizados na Universidade Federal de Viçosa – MG, cedidos pela co-orientadora deste trabalho, Professora Adinele Guimarães. A execução deste ensaio na Unipampa não foi possível devido ao curto prazo para a elaboração deste trabalho, e ao fato do equipamento do ensaio triaxial ainda não ter sido instalado na universidade.

O ensaio triaxial fornece deformações axiais e deformações volumétricas que podem ser descritas pelo modelo hiperbólico. No entanto, para simplificar a equação do modelo e tornar mais prática sua implantação, serão suprimidas as deformações volumétricas e utilizadas apenas as deformações axiais na elaboração dos algoritmos. O modelo como foi descrito na seção de revisão bibliográfica já aparece sem os dois parâmetros envolvidos na deformação volumétrica.

A seguir se encontram as TABELAS 3.1 com as relações entre tensão desviadora ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) e deformação axial ( $\varepsilon_a$ ) em percentual para ensaios realizados com tensões de confinamento  $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$  e  $\sigma_3 = 1050 \text{ kPa}$  em um solo caracterizado como areia densa.

TABELA 3.1a – Tensão x Deformação -  $\sigma_3 = 100$  kPa

<b>LABORATÓRIO</b>	
<b><math>\sigma_3 = 100</math> kPa</b>	
<b><math>(\sigma_1 - \sigma_3)</math> [kPa]</b>	<b><math>\varepsilon_a</math> (%)</b>
0,000	0,000
100,000	0,100
150,000	0,200
200,000	0,300
237,719	0,401
280,000	0,550
314,748	0,731
350,000	1,000
380,000	1,300
397,554	1,552
451,846	3,368
454,764	4,776

TABELA 3.1b – Tensão x Deformação -  $\sigma_3 = 300$  kPa

<b>LABORATÓRIO</b>	
<b><math>\sigma_3 = 300</math> kPa</b>	
<b><math>(\sigma_1 - \sigma_3)</math> [kPa]</b>	<b><math>\varepsilon_a</math> (%)</b>
0,000	0,000
180,000	0,100
400,000	0,300
600,000	0,500
727,959	0,660
800,000	0,800
880,000	1,000
942,361	1,214
1082,328	2,231
1161,702	4,409

TABELA 3.1c – Tensão x Deformação -  $\sigma_3 = 1050$  kPa

LABORATÓRIO	
$\sigma_3 = 1050$ kPa	
$(\sigma_1 - \sigma_3)$ [kPa]	$\varepsilon_a$ (%)
0,000	0,000
600,000	0,200
1200,000	0,400
1600,000	0,600
2000,374	0,811
2350,000	1,200
2600,000	1,600
2915,479	2,395
3305,211	4,498
3373,487	5,951
3399,084	9,096

Junto com os valores de tensão *versus* deformação do ensaio também são necessários na execução da equação modelo de valores iniciais dos parâmetros de coesão ( $c$ ), ângulo de atrito ( $\varphi$ ), taxa de ruptura ( $R_f$ ) e dos demais parâmetros ( $k$ ) e ( $n$ ). Estes valores iniciais foram fornecidos através dos métodos de calibração tradicionais e não foram calculados neste trabalho. Os cinco parâmetros fornecidos são correspondentes à deformação axial do modelo hiperbólico, e estão apresentados na TABELA 3.2.

TABELA 3.2 – Parâmetros Iniciais

Parâmetros Iniciais	
<b>c (kPa)</b>	0,000
<b><math>\varphi</math></b>	37,178
<b>Rf médio</b>	0,787
<b>k</b>	1332,6 00
<b>n</b>	0,626

Através destes parâmetros é possível determinar o quão próximo ficam as curvas do ensaio e do modelo através dos métodos de calibração tradicionais. Desta forma foram gerados gráficos comparativos entre o modelo e o ensaio para as três situações diferentes de tensão de confinamento  $\sigma_3$ , conforme as FIGURAS 3.1a, 3.1b e 3.1c.

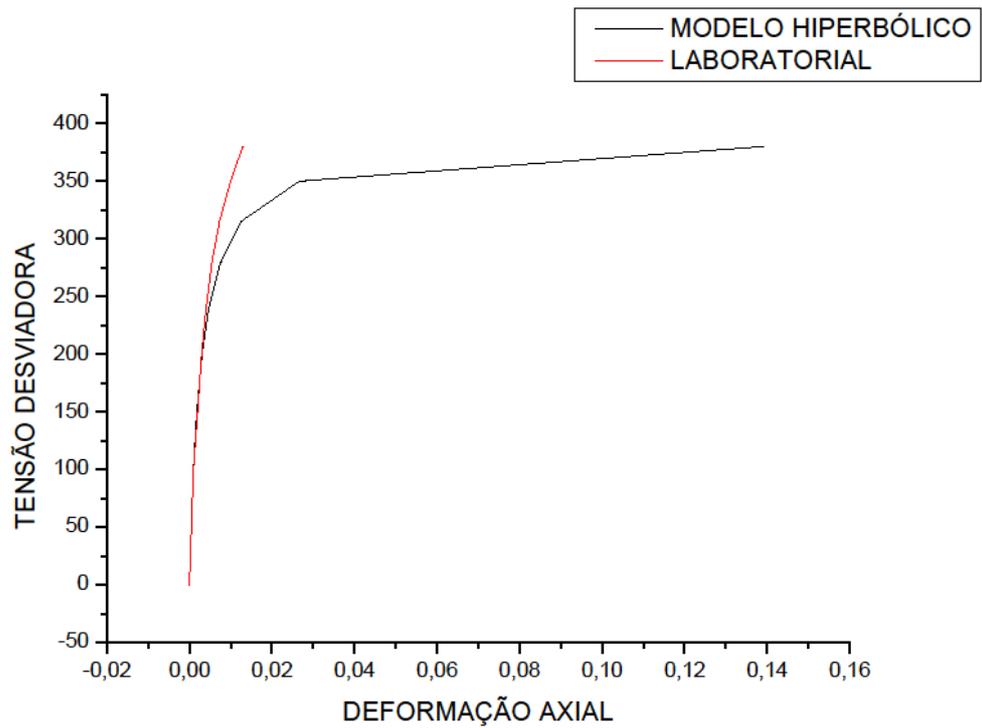


FIGURA 3.1a – Gráfico comparativo entre Valores de Laboratório e Valores obtidos pelo Modelo Hiperbólico –  $\sigma_3 = 100$  kPa

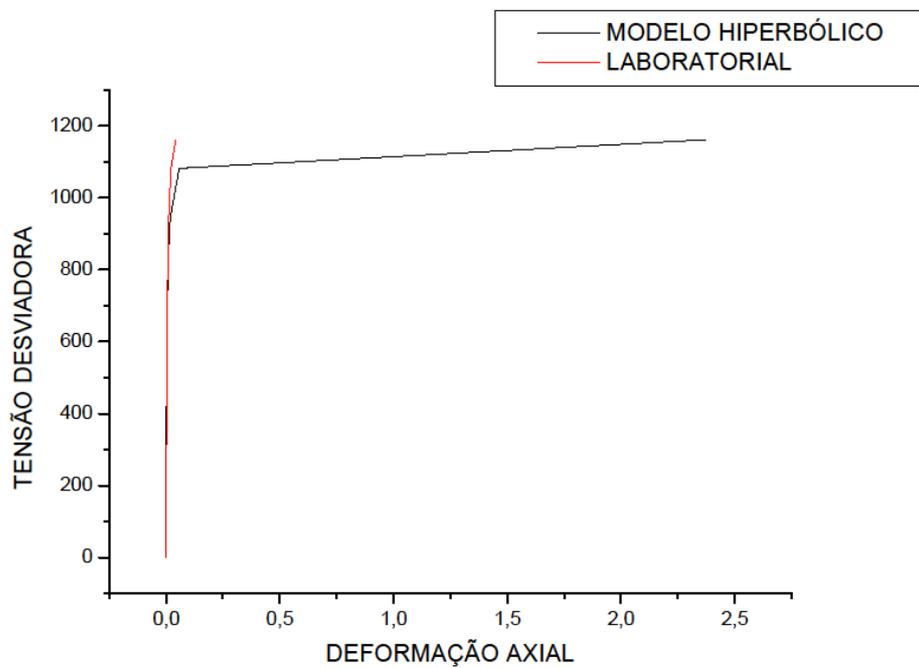


FIGURA 3.1b – Gráfico comparativo entre Valores de Laboratório e Valores obtidos pelo Modelo Hiperbólico –  $\sigma_3 = 300$  kPa

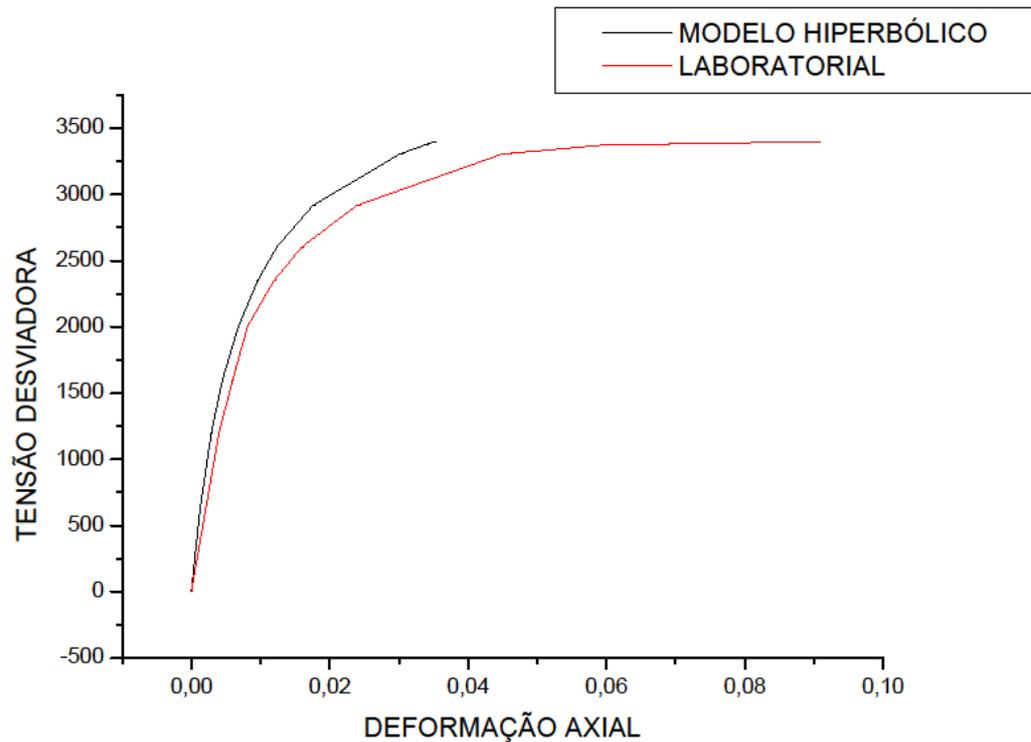


FIGURA 3.1c – Gráfico comparativo entre Valores de Laboratório e Valores obtidos pelo Modelo Hiperbólico –  $\sigma_3 = 1050$  kPa

Através do tratamento dos dados é possível determinar quais pontos são relevantes e onde os valores encontrados pelo método começam a divergir dos valores do ensaio. Analisando os gráficos determinou-se que os primeiros cinco pontos possuem uma boa correlação entre os valores de deformação do modelo e os valores de deformação do ensaio, desta forma estes serão os pontos do vetor de inicialização que será utilizado na elaboração do algoritmo.

Após a definição dos parâmetros iniciais e da quantidade de pontos a ser utilizada em cada ensaio passou-se para a elaboração da função objetivo. A função objetivo é aquela que deverá ser minimizada pelo método numérico, ou seja, que deverá ter seu ponto mínimo calculado em relação aos parâmetros do método utilizado. Para o nosso problema a função objetivo ficou definida como o quadrado do módulo da diferença realizada termo a termo dos vetores de deformação do ensaio triaxial e do modelo hiperbólico, conforme a equação abaixo:

$$Obj = \left| \sum_{i=1}^5 A_i - B_i \right|^2 \quad (3.1)$$

Onde:

$A_i$  é o vetor que carrega os valores de deformação fornecidos pelo modelo hiperbólico;

$B_i$  é o vetor que carrega os valores de deformação do ensaio triaxial;

### 3.1.2 Processo de criação do algoritmo

Como já explicitado, o método escolhido em função de sua praticidade de aplicação para ser utilizado nos algoritmos foi o método de Newton-Raphson que utiliza a primeira derivada em cada passo iterativo, conforme a equação 2.11. Por esta razão foi necessário calcular as derivadas parciais da função objetivo em relação a cada um dos parâmetros analisados. Como as equações são muito complexas para serem calculadas manualmente, estas foram escritas na linguagem do software e calculadas analiticamente com o auxílio de uma ferramenta do Matlab chamada de Symbolic. Esta ferramenta serve para que o Matlab interprete os valores inseridos como variáveis simbólicas (ao invés de variáveis numéricas) permitindo assim o cálculo das derivadas parciais através do comando *diff*.

A equação geral da derivada da função objetivo fica escrita na forma:

$$\frac{\partial Obj}{\partial A} = 2(A - B) A' \quad (3.2)$$

Como  $A'$  é a função que descreve a deformação através dos parâmetros, esta deve ser calculada em relação a cada um dos cinco parâmetros, resultando nas seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = \frac{-(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left[ pa k^2 \left( \frac{Rf (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin(\varphi) - 1)}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} + 1 \right) \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right)^n \right]} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial Rf} = \frac{-[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (\sin(\varphi) - 1)]}{[pa k (2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)) \left( \frac{Rf (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin(\varphi) - 1)}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} + 1 \right)^2 \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right)^n]} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = - \frac{\left( (\sigma_1 - \sigma_3) \log \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right) \right)}{\left( pa k \left( \frac{Rf (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin(\varphi) - 1)}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} + 1 \right) \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right)^n \right)} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = - \frac{\left( (\sigma_1 - \sigma_3) \left( \frac{Rf(\sigma_1 - \sigma_3) \cos(\varphi)}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} + \frac{Rf(\sigma_1 - \sigma_3)(\sin(\varphi) - 1)(2c \sin(\varphi) - 2\sigma_3 \cos(\varphi))}{(2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi))^2} \right) \right)}{pa k \left( \frac{Rf(\sigma_1 - \sigma_3)(\sin(\varphi) - 1)}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} + 1 \right)^2 \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right)^n} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c} = \frac{Rf(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \cos(\varphi) (\sin(\varphi) - 1)}{\frac{pa}{2} k (2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi))^2 \left( \frac{Rf(\sigma_1 - \sigma_3)(\sin(\varphi) - 1)}{2c \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} + 1 \right)^2 \left( \frac{\sigma_3}{pa} \right)^n} \quad (3.7)$$

Observa-se que as derivadas parciais são funções mais complexas em relação à função inicial do modelo descrita na equação 2.7, isto ocorre principalmente naqueles parâmetros que não possuem uma grandeza linear, mas sim senóide (como no caso do ângulo de atrito  $\varphi$ ) ou exponenciais (como o parâmetro  $n$ ).

### 3.1.3 Estratégia de otimização

A estratégia utilizada para verificar a aplicabilidade do método na equação hiperbólica foi realizar iterações em um parâmetro por vez, tratando os outros termos da equação como constantes. Desta maneira é possível determinar o tamanho do passo iterativo e verificar se o parâmetro consegue convergir para um ponto ótimo.

Para realizar este procedimento foram desenvolvidos os seguintes passos:

- Entrar no algoritmo com o vetor correspondente às deformações do ensaio triaxial, exatamente com os mesmos valores do vetor de deformações gerado pelo modelo hiperbólico utilizando-se dos parâmetros iniciais. Desta forma a função objetivo assume valor igual a zero;
- Realizar alterações no valor inicial de um dos parâmetros;
- Programar o algoritmo para realizar iterações no parâmetro modificado até que este retorne ao valor inicial, zerando novamente a função objetivo;
- Analisar os resultados e o tamanho do passo iterativo em relação a grandeza escalar do parâmetro para situações em que o parâmetro não convirja para o valor inicial;
- Alterar o tamanho do passo gradativamente até que a função consiga convergir em um numero de passos iterativos que não sobrecarregue o programa.
- Repetir todos os passos anteriores para os demais parâmetros.

O algoritmo por sua vez foi programado para retornar com o número de iterações necessárias para que o parâmetro retornasse ao seu valor inicial através do Método de Newton e o vetor com os valores dos parâmetros após a execução do programa.

O mesmo procedimento foi repetido para todos os outros parâmetros da equação em algoritmos separados, porém como se vê mais adiante no capítulo de resultados, alguns algoritmos tiveram que ser alterados através do método de Newton Modificado para que a função convergisse.

### **3.2 Retroanálise aplicada à prova de carga**

Aqui serão descritos os procedimentos desenvolvidos para a elaboração dos algoritmos de minimização dos parâmetros do modelo de Winkler, utilizado para simular numericamente o comportamento tensão versus deformação do ensaio de prova de carga em placa.

#### **3.2.1 Aplicação do método de Winkler**

O método de Winkler é amplamente utilizado por depender apenas da obtenção do coeficiente de reação vertical  $k_v$ . Porém a obtenção de tal parâmetro não é simples. O emprego de ensaio de placa é a forma mais confiável de obtenção do coeficiente. Mesmo assim, podem haver distorções em função da execução do ensaio.

A elaboração do algoritmo e sua calibração deram-se, inicialmente, através de uma tabela tensão versus deformação criada hipoteticamente pela própria equação do método.

$$W = q B \frac{1-\nu^2}{E} I_s \quad (3.8)$$

Esta equação fornece valores de recalque em função de uma pressão aplicada ( $q$ ), da dimensão maior da placa ( $B$ ), do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), do Módulo de Young ( $E$ ) e da geometria da placa ( $I_s$ ). Como a placa possui geometria e dimensões definidas e o recalque (deformação) e as pressões são retirados do ensaio, é possível determinar através de retroanálise e de tratamento de dados os parâmetros referentes ao coeficiente de Poisson e ao Módulo de Young.

Foram utilizados os seguintes valores iniciais para a criação de uma curva tensão versus deformação a ser implementada.

TABELA 3.3 – Valores iniciais da equação da Prova de Carga

$B$ (cm)	$\nu$	$E$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$Is$
80	0,3	400	0,79

Foram criados pontos para valores de tensão oscilando entre 0 e 10 kgf/cm<sup>2</sup>, procurando desta maneira compreender nesta simulação solos resistentes e poucos resistentes. Os valores de deformação encontrados pelo modelo estão descritos na FIGURA 3.2

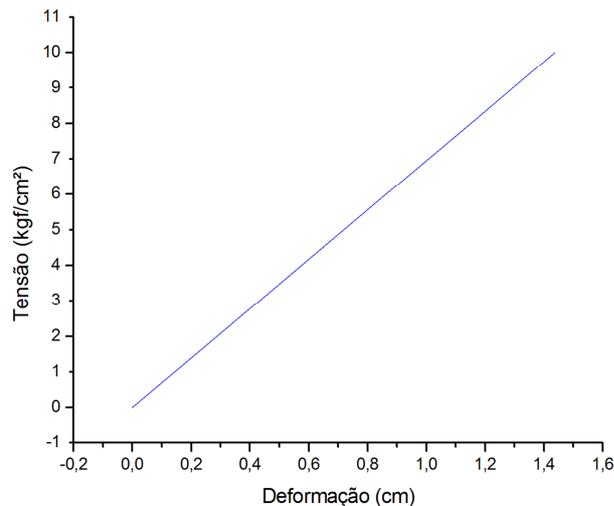


FIGURA 3.2 – Gráfico Tensão versus Deformação para o ensaio de placa

### 3.2.2 Processo de criação do algoritmo

Assim como nos algoritmos criados para o Modelo Hiperbólico, o primeiro passo na elaboração do algoritmo é calcular as derivadas parciais para cada um dos parâmetros que serão implementados através do método de Newton-Raphson. Para a equação da prova de carga foram otimizados apenas os parâmetros correspondentes ao coeficiente de Poisson e ao Módulo de Young, pois os outros são tratados como constantes no ensaio. As derivadas parciais ficam representadas assim:

$$\frac{dW}{dE} = -\frac{(q B (1 - \nu^2) Is)}{E^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{-(2 q B \nu Is)}{E} \quad (3.10)$$

Após o cálculo das derivadas, as equações foram transcritas para o formato de linguagem do Matlab. Como parâmetros de entrada o algoritmo contém os vetores de tensão ( $q$ ) e

deformação ( $W$ ) e as variáveis correspondentes ao diâmetro da placa ( $B$ ), ao fator de forma da placa ( $I_s$ ) e aos valores iniciais do Módulo de Young ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Como parâmetros de saída o algoritmo fornece o Módulo de Young e o coeficiente de Poisson corrigidos pelo processo de minimização e também o parâmetro  $k_\nu$  calculado com os valores corrigidos.

### 3.2.3 Estratégia de otimização

A estratégia utilizada para verificar a aplicabilidade do modelo foi criar algoritmos independentes que realizassem iterações em um parâmetro por vez, tratando os outros termos da equação como constantes. Este é o modo mais simples de verificar se a equação converge num ponto e também de constatar se o passo iterativo possui o tamanho adequado.

Para realizar este procedimento foram desenvolvidos os seguintes passos:

- Entrar no algoritmo com o vetor correspondente as deformações do ensaio de placa conforme os resultados obtidos pelo próprio modelo utilizando-se dos parâmetros iniciais. O objetivo aqui é que a função objetivo que mede a diferença entre os valores de deformação do modelo e os valores de deformação do ensaio fique nula.
- Realizar alterações no valor inicial de um dos parâmetros;
- Programar o algoritmo para realizar iterações no parâmetro modificado até que este retorne ao valor inicial, zerando novamente a função objetivo;
- Analisar os resultados e o tamanho do passo iterativo em relação à grandeza escalar do parâmetro para situações em que o parâmetro não convirja para o valor inicial;
- Adotar o método de Newton Modificado para as situações em que se julgar necessário;
- Repetir todos os passos anteriores para o próximo parâmetro.

O algoritmo do modelo de Winkler foi programado para retornar com o número de iterações necessárias para que o parâmetro retorne ao seu valor inicial através do Método de Newton. O algoritmo também deve fornecer de resposta o valor final dos parâmetros, após as iterações, e o valor da função objetivo.

O próximo passo foi a criação do algoritmo que realiza iterações nos dois parâmetros ao mesmo tempo. Esse programa foi criado adotando-se uma restrição de valores para o coeficiente de Poisson, entre 0,25 e 0,3 . A restrição é necessária pois para uma equação linear que possui duas variáveis existem infinitas soluções. Para que se restringisse o programa a uma única solução no mesmo conjunto de tensões e deformações seria necessária

a inclusão de outra equação que limitasse de alguma forma os valores de Módulo de Young e do coeficiente de Poisson.

Para a execução no Matlab do programa final não é necessária a informação de  $E$  e  $\nu$  pois o algoritmo já possui valores iniciais destes coeficientes predefinidos.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos em relação ao ensaio triaxial, com os algoritmos do modelo hiperbólico, e em relação ao ensaio de placa com os algoritmos do modelo de Winkler.

### 4.1 Modelo hiperbólico

Durante a elaboração dos algoritmos foi necessário verificar parâmetro por parâmetro a situação de convergência para um ponto ótimo inicial. Nesta situação quem apresentou melhores resultados foram os parâmetros  $k$  e  $\varphi$ , convergindo sempre para o ponto inicial independente do valor atribuído inicialmente. Os demais parâmetros necessitaram de algumas correções no passo iterativo e/ou redução do erro relativo, em função das equações do modelo.

Após a finalização dos algoritmos, os parâmetros iniciais fornecidos pelo método de calibração (ajuste) tradicional foram submetidos a uma série de processos iterativos até se ajustar definitivamente ao valor mínimo desejado para a função objetivo (equação 3.1). Um resumo dos resultados encontrados encontra-se descrito na tabela 4.1.

TABELA 4.1 – Parâmetros do Modelo Hiperbólico Calibrados

Parâmetro	Valor inicial	Valor Calibrado	Erro inicial	Erro Após Calibração	Diferença	Número de Iterações
$k$	1332,6	1481,8	$3,9 \cdot 10^{-6}$	$2,056 \cdot 10^{-6}$	$1,844 \cdot 10^{-6}$	68
$\varphi$	37,178	38,465	$3,9 \cdot 10^{-6}$	$1,209 \cdot 10^{-6}$	$2,691 \cdot 10^{-6}$	10064
$Rf$	0,787	0,729	$3,9 \cdot 10^{-6}$	$1,207 \cdot 10^{-6}$	$2,693 \cdot 10^{-6}$	240
$c$	0	18,2372	$3,9 \cdot 10^{-6}$	$1,207 \cdot 10^{-6}$	$2,693 \cdot 10^{-6}$	1179
$n$	0,6262	0,7241	$3,9 \cdot 10^{-6}$	$2,047 \cdot 10^{-6}$	$1,853 \cdot 10^{-6}$	144

O melhor ajuste de pontos ocorreu com os parâmetros  $c$  e  $Rf$ , porém para esta situação o ajuste da coesão não é a melhor situação pois os resultados do ensaio triaxial utilizado são de uma areia, que tem como característica ser um solo não-coesivo. A menor diferença entre o erro inicial e o erro depois da calibração da função objetivo ocorreu com o parâmetro  $k$ . Com o uso dos novos parâmetros obtidos foram construídos os gráficos das FIGURAS 4.1, 4.2 e

4.3, para mostrar a diferença entre o modelo hiperbólico e o ensaio triaxial antes e depois da calibração.

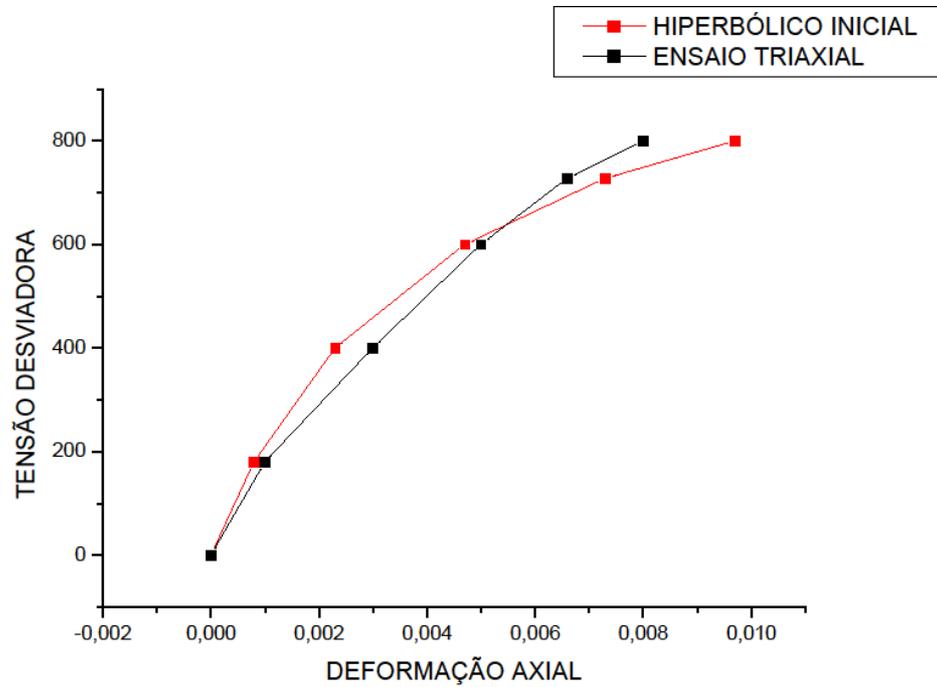


FIGURA 4.1 – Gráfico comparativo antes da calibração

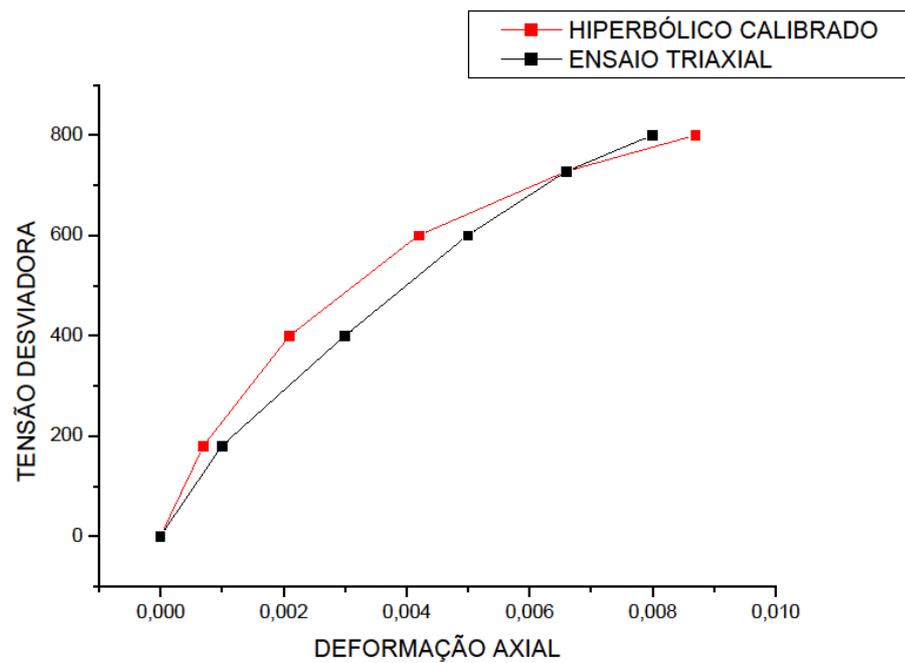


FIGURA 4.2 – Gráfico comparativo com o parâmetro  $k$  ajustado

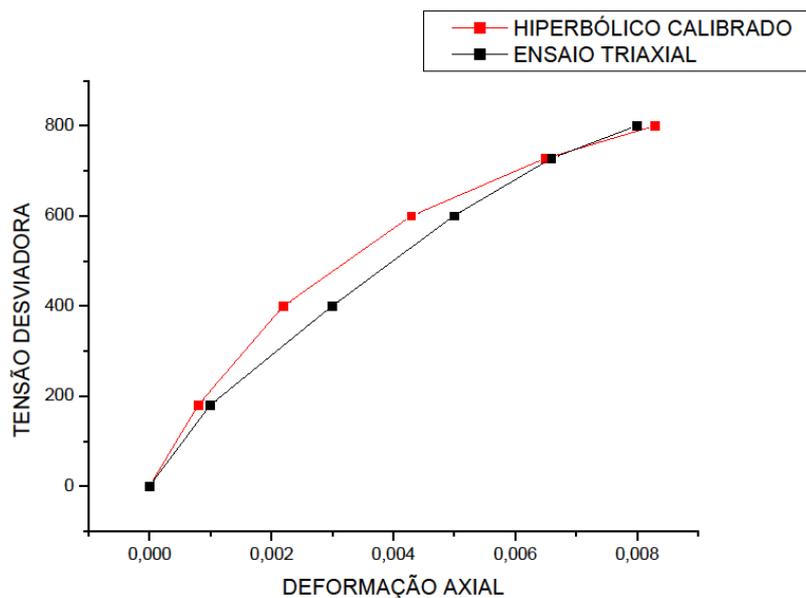


FIGURA 4.3 – Gráfico comparativo com o parâmetro  $Rf$  ajustado

Através da análise dos gráficos gerados é possível afirmar que o algoritmo criado foi eficiente em melhorar a aproximação entre o ensaio e o modelo hiperbólico calibrado de forma tradicional.

Contudo não foi possível criar uma metodologia que pudesse fornecer o valor dos parâmetros através de um estimativa inicial qualquer, pois a equação do modelo só converge para a solução desejada quando o valor inicial do parâmetro encontra-se próximo da solução. De tal forma, este procedimento só seria possível se fosse implementado um método que possua restrições aos valores de cada parâmetro do modelo.

## 4.2 Modelo de Winkler

Um dos objetivos iniciais deste trabalho era realizar o ensaio de placa em área experimental e através destes resultados encontrar os parâmetros do modelo e o coeficiente de resistência  $k_v$ . Infelizmente os resultados obtidos na execução do ensaio não representaram fielmente o comportamento do solo analisado, justamente pela pouca experiência dos operadores. Devido ainda, o prazo para execução do estudo ser curto, abriu-se mão da curva obtida experimentalmente e trabalhou-se com resultados apresentados por outros autores.

Para verificar o uso do modelo de Winkler foram utilizados os resultados pertencentes a dois ensaios de placa encontrados na literatura. O primeiro pertence a GOUVÊA (2000) e consiste de uma prova de carga realizada em uma sapata de concreto armado, quadrada, de lado igual a 100 cm, a qual serviu como uma das fundações do Edifício Santa Bárbara,

localizado no centro da cidade de Viçosa, MG. O segundo ensaio pertence a DUARTE (2006) e foi realizado em uma sapata rígida, quadrada, de lado igual a 80 cm locada no Campo Experimental da Agronomia, na Universidade Federal de Viçosa, MG. Abaixo se encontram os gráficos das curvas tensão *versus* deformação dos ensaios e os pontos e dados retirados de cada um para utilização na metodologia desenvolvida.

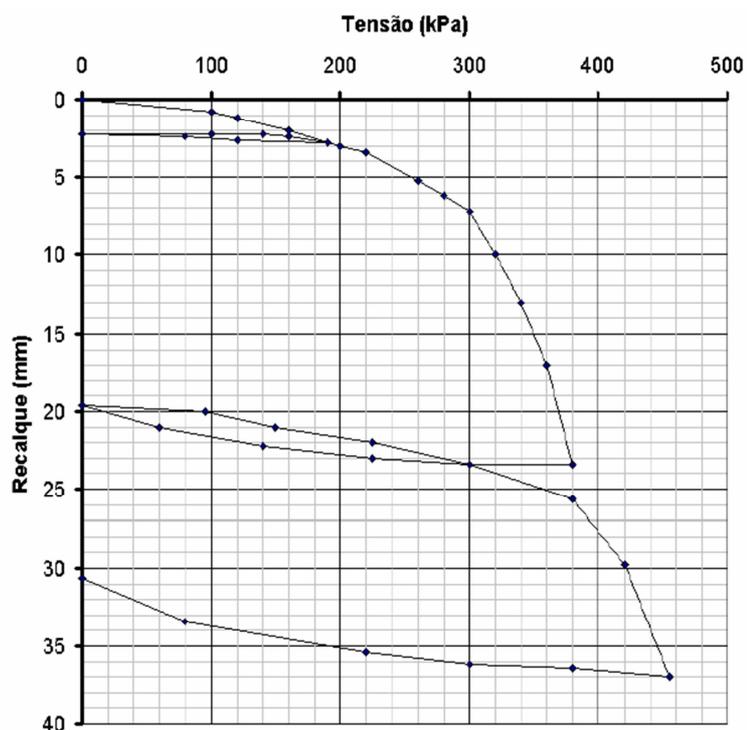


FIGURA 4.4 – Curva Tensão *versus* Deformação – Fonte GOUVÊA (2000)

TABELA 4.2 – Dados do Ensaio de GOUVÊA (2000)

<i>Tensão (kgf/cm<sup>2</sup>)</i>	<i>Deformação (cm)</i>
0	0
1	0,1
2	0,3
2,6	0,5
3,0	0,7
3,4	1,3
3,8	2,5
<i>B</i>	100 cm
<i>Is</i>	0,99

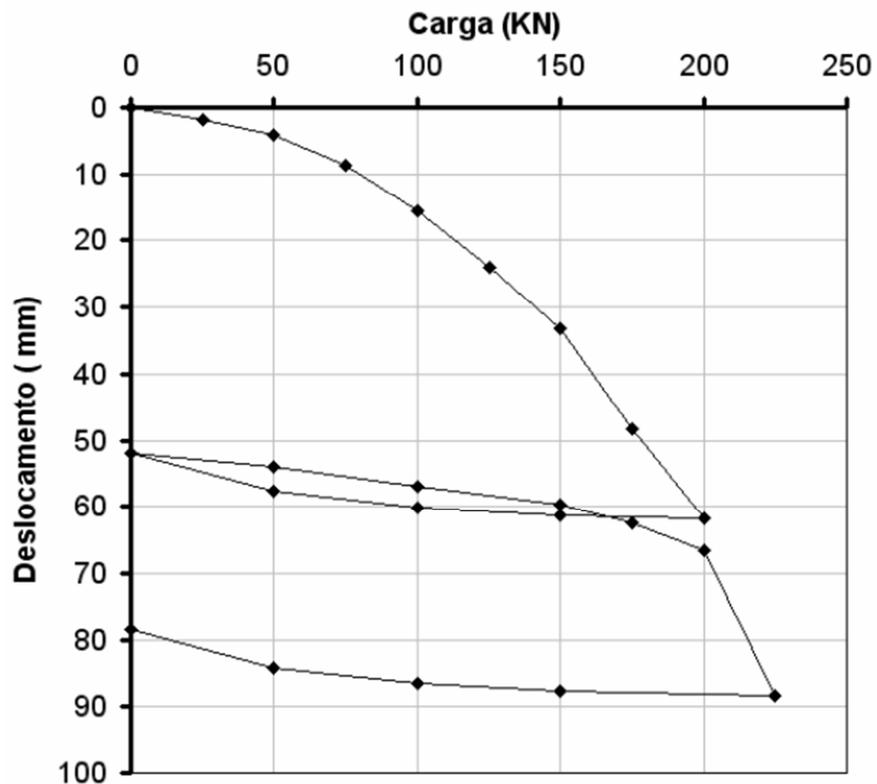


FIGURA 4.5 – Curva Carregamento *versus* Deformação – Fonte DUARTE (2006)

TABELA 4.3 – Dados do Ensaio de DUARTE (2006)

<i>Tensão (kgf/cm<sup>2</sup>)</i>	<i>Deformação (cm)</i>
0	0
0,391	0,2
0,781	0,4
1,172	0,9
1,562	1,6
1,953	2,4
2,343	3,3
<i>B</i>	80 cm
<i>I<sub>s</sub></i>	0,99

Para cada um dos ensaios aplicou-se o algoritmo com o objetivo de encontrar os o Módulo de Young e o coeficiente de Poisson que melhor aproximassem os valores de deformação do modelo aos valores de deformação dos ensaios. Foram obtidos dois resultados para cada

ensaio, conforme as TABELAS 4.4 e 4.5, fixando-se os valores de Poisson em 0,30 e 0,25 , sucessivamente.

TABELA 4.4 – Resultados da minimização do ensaio de GOUVÊA (2000)

Ensaio realizado por GOUVÊA (2000)			Coefficiente de reação ( $k_v$ )	Função Objetivo
Resultado A	$\nu = 0,30$	$E = 233,7745 \frac{kgf}{cm^2}$	$2,5949 kgf/cm^3$	$Obj = 1,8356$
Resultado B	$\nu = 0,25$	$E = 240,8384 \frac{kgf}{cm^2}$		

A função objetivo, que mede o quadrado do módulo das diferenças entre os pontos obtidos pelo modelo e os pontos do ensaio, apresentou valores relativamente altos comprovando numericamente que é necessário uma aproximação muito grande para tentar descrever um ensaio de solos através de um modelo elástico.

O coeficiente de reação vertical,  $k_v$ , é único pois o modelo linear de Winkler estabelece o coeficiente como a inclinação da reta tangente no gráfico tensão-deformação, que por ser uma reta, não sofre alteração. Os resultados obtidos podem ser visualizados nas FIGURAS 4.6 e 4.7.

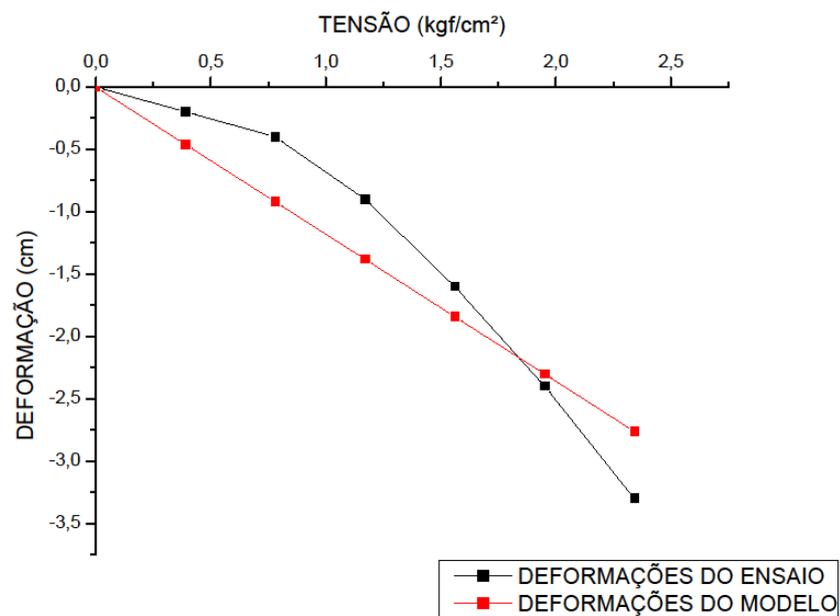


FIGURA 4.6 – Gráfico comparativo entre Modelo de Winkler e Ensaio de Placa de GOUVÊA (2000)

TABELA 4.5 – Resultados da minimização do ensaio de DUARTE (2006)

Ensaio realizado por DUARTE (2006)			Coefficiente de reação ( $k_v$ )	Função Objetivo
Resultado A	$\nu = 0,30$	$E = 61,1334 \frac{kgf}{cm^2}$	$0,8482 kgf/cm^3$	$Obj = 0,9283$
Resultado B	$\nu = 0,25$	$E = 62,9808 \frac{kgf}{cm^2}$		

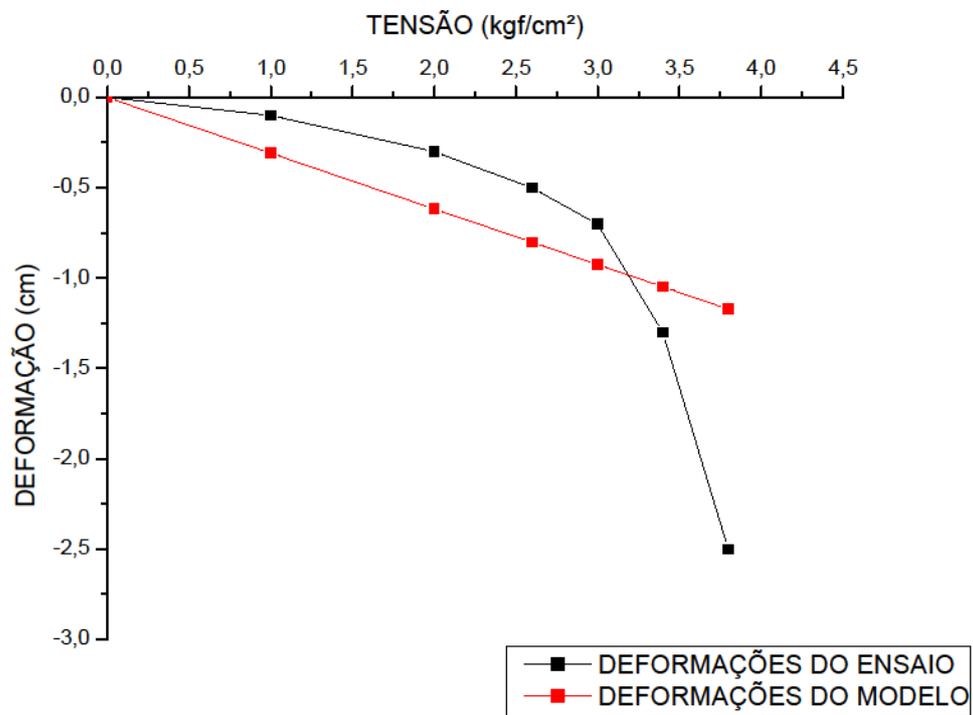


FIGURA 4.7 – Gráfico comparativo entre Modelo de Winkler e Ensaio de Placa de DUARTE (2006)

A análise dos resultados confirma que o coeficiente de reação  $k_v$  é interdependente da relação entre o coeficiente de Poisson e o Módulo de Young não sofrendo alteração no modelo. A função objetivo que representa a diferença entre os pontos do ensaio e os pontos gerados pela equação apresentou valores ligeiramente altos, mostrando que o fato do modelo de Winkler apresentar uma comportamento linear não permite um bom ajuste com a curva do ensaio.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho avaliou-se o emprego de análise inversa na calibração de modelos constitutivos de solos a partir de resultados experimentais de laboratório e de campo. Foi utilizado o modelo hiperbólico para caracterizar o ensaio triaxial e o modelo linear elástico de Winkler para descrever o ensaio de placa.

Estimativas iniciais dos parâmetros do modelo hiperbólico, obtidas de acordo com os procedimentos de calibração convencionais, foram atualizadas através de algoritmos de programação matemática baseados no método de Newton-Raphson, desenvolvidos durante este trabalho com auxílio da Ferramenta Matlab. Também foram desenvolvidos algoritmos para aproximar a reta gerada pelo modelo de Winkler à curva do ensaio de prova de carga, visando encontrar o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do modelo e, conseqüentemente, calcular o coeficiente de reação  $k_v$ .

No procedimento de análise inversa, um modelo é calibrado por mudanças iterativas das estimativas dos parâmetros até que o valor de uma função objetivo, que quantifica o erro entre resultados observados e computados, seja minimizada. Ao final deste procedimento são obtidas estatísticas de ajuste do modelo (função objetivo e melhoria do ajuste, por exemplo) que são utilizadas para avaliar a precisão do ajuste entre dados experimentais e resultados calculados numericamente e também a eficiência da análise inversa.

Tendo em vista os objetivos propostos, as seguintes conclusões podem ser delineadas:

- Em relação à elaboração do algoritmo para obtenção dos parâmetros geotécnicos do ensaio triaxial, a metodologia utilizada permite que se façam ajustes em parâmetros predeterminados através dos métodos convencionais proporcionando uma melhoria no ajuste das curvas do ensaio e do modelo.
- Em relação à elaboração do algoritmo para obtenção dos parâmetros do ensaio de prova de carga a metodologia utilizada mostrou-se eficiente em encontrar os parâmetros e também o coeficiente de reação, porém o método é simplista e não descreve com exatidão o comportamento tensão-deformação do ensaio. Devido a ausência de trabalhos que utilizem esta mesma metodologia também não foi possível comparar os coeficientes de reação com outros métodos de cálculo para os mesmos resultados de prova de carga. Contudo, cabe destacar que o modelo de Winkler apesar de simplista é amplamente utilizado por projetistas em função da fácil modelagem estrutural.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6489/84**: Prova de carga direta sobre terreno de fundação. Rio de Janeiro, 1984.

BOTELHO, B.S. (2007) **Equipamento Triaxial Cubico para Ensaio em Solos, Saturados e Não-Saturados com Sucção Matricial Controlada**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Geotecnia. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal Viçosa.

CAPUTO, Homero P. **Mecânica dos solos e suas aplicações**. Volume 1. 6ª edição. LTC: Rio de Janeiro, 2007.

DAS, Braja M. **Fundamentos de Engenharia Geotécnica**. Cengage Learning: São Paulo, 2007.

DESAI, C. S. e SIRIWARDANE, H. J. (1984) **Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

DUARTE, Leandro N (2006). **Análise de prova de carga instrumentada em uma sapata rígida**. Tese de Mestrado. Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, MG.

DUNCAN, M.J. e CHANG, C.Y.(1970) **Nonlinear analysis of stress and strain in soils**, Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, SM5, P. 1629 – 1653.

FABRÍCIO, Márcio M. e ROSSIGNOLO, João A. **Apostila de Fundações Tecnologia das Construções II**.

GILAT, Amos. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**. Bookman: Porto Alegre, 2008.

GOUVÊA, Marco Antonio de Souza (2000) **Análise das Relações Carga-Recalque de uma Fundação em Verdadeira Grandeza**. Dissertação de Mestrado, UFV, Viçosa - MG

GUIMARÃES, Adinele G. (2006) **Análise inversa para determinação de parâmetros de deformabilidade dos solos**, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa.

GUIMARÃES, Adinele G. (2006) **Determinação de Parâmetros Geotécnicos Utilizando Técnicas de Otimização**, Artigo, DPAGG Geojovem 2006.

JANBU, N. (1963) **Soil Compressibility as Determined by Oedometer and Triaxial Tests**. European Conference on Soil Mechanics & Foundations Engineering, Wiesbaden, Alemanha. vol. 1, 1963, pp.19-25.

KONDNER, R.L. (1983) **Hiperbolic Stress-Strain response: coesive soils**, Journal of Soil Mechanics and Foundadtion Division, ASCE, 89, SM1, P. 115-143.

SCHNAID, F., 2000, **Ensaio de Campo e suas aplicação à engenharia de fundações**. Oficina de Textos.

VESIC, A. S. (1961). **Beams on Elastic Subgrade and Winkler's Hypothesis**. Proceedings, 5th. ICSMFE, Paris, pp. 845-850; **apud** VELLOSO, D. A.; LOPES, F.R. (1996).

YANG,Z. e ELGAMAL,A. (2003) **Applcation of unconstrained optimization and sensitivity analysis to calibration of a soil constitutive model**. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 27, p.1277-1297.



```

1 function []=solos_n(sig3, Sigma, x, obj)
2 f= Sigma*(1/(x(1)*100*(sig3/100)^x(2)))/(1-x(3)*(1-sind(x(5))))*Sigma/(2*x(4)*cosd(x(5))+2*sig3*sind(x(5)));
3 i=0;
4 e2=2.05*10^-6;
5 L=3000;
6 while ( abs(sum((f-obj).^2))>e2) & (i<L)
7     dfn=sum(2*(f-obj).*(-Sigma*log(sig3/100))/(100*x(1)*(x(3)*Sigma*(sin(x(5))-1))/(2*x(4)*cos(x(5))+2*sig3*sin(x(5)))+1)*(sig3/100)^x(2)));
8     f= Sigma*(1/(x(1)*100*(sig3/100)^x(2)))/(1-x(3)*(1-sind(x(5))))*Sigma/(2*x(4)*cosd(x(5))+2*sig3*sind(x(5)));
9     Erro= sum((f-obj).^2);
10    xn=x(2);
11    x(2)= xn - (Erro/(10000*dfn));
12    i=i+1;
13 end
14
15 if ( i>=L )
16     disp('precisao nao alcançada!');
17 else L=i
18     res=x
19 end
20

```

```
Editor - D:\Fabio\Pen drive\Solos\Nova pasta\solos_R1.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
fx

1 function []=solos_R1(sig3, Sigma, x, obj)
2 f= Sigma*(1/(x(1)*100*(sig3/100)^x(2)))./(1-x(3)*(1-sind(x(5))))*Sigma/(2*x(4)*cosd(x(5))+2*sig3*sind(x(5)));
3 i=0;
4 e2=1.21*10^-6;
5 L=10000;
6 while( (abs(sum((f-obj).^2))>e2) & (i<L) )
7     dffr= sum(2*(f-obj).*(-(Sigma.^2*(sind(x(5)) - 1))./(100*x(1)*2*x(4)*cosd(x(5)) + 2*sig3*sind(x(5))))*(x(3)*Sigma*(sind(x(5)) - 1))/(2*x(4)*cosd(x(5))
8     + 2*sig3*sind(x(5))) + 1).^2*(sig3/100)^x(2));
9     f=Sigma*(1/(x(1)*100*(sig3/100)^x(2)))./(1-x(3)*(1-sind(x(5))))*Sigma/(2*x(4)*cosd(x(5))+2*sig3*sind(x(5)));
10     Erro= sum((f-obj).^2);
11     xK=x(3);
12     x(3)= xK - (Erro/(200*(dffr)));
13     i=i+1;
14 end
15
16 if ( i>=L )
17     disp('precisao nao alcançada!');
18 else L=i
19     res=x
20 end
21
```





```
1 function []=Placa3(q,W,B,Is)
2     vi=0.26;
3     Ei=400;
4     f= (q*B*(1-vi^2)*Is)/Ei;
5     i=0;
6     e1=10^-14;
7     L=150;
8     while ((abs(sum((f-W).^2))>e1) & (i<L))
9         dfv=sum(2*(f-W).*(-2*q*B*vi*Is)/Ei);
10        dfE=sum(2*(f-W).*(-q*B*(1-vi^2)*Is)/Ei^2);
11        f= (q*B*(1-vi^2)*Is)/Ei;
12        Erro=sum((f-W).^2);
13        vk=vi;
14        vi=vk-(Erro/dfv);
15        if (vi<0.25)
16            vi=0.25;
17        else
18            if(vi>0.3)
19                vi=0.3;
20            end
21        end
22        Ek=Ei;
23        Ei=Ek-(Erro/dfE);
24        i=i+1;
25    end
26    if ( i>=L )
27        disp('precisao nao alcancada!');
28    end
29    vi
30    Ei
31    kv=(Ei/((1-vi^2)*Is*B))
32    end
```