

Universidade Federal do Pampa

Igor Antunes Fogaça

**Utilização de refinamento de malhas na
simulação computacional aplicada ao problema
da transferência de calor**

Alegrete

2015

Igor Antunes Fogaça

**Utilização de refinamento de malhas na simulação
computacional aplicada ao problema da transferência de
calor**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Ciência da Com-
putação da Universidade Federal do Pampa
como requisito parcial para a obtenção do tí-
tulo de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Schepke

Alegrete

2015

Dedico este trabalho ao meu avô Luiz Fogaça(in memoriam).

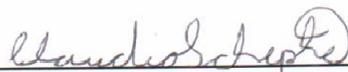
Igor Antunes Fogaça

Utilização de refinamento de malhas na simulação computacional aplicada ao problema da transferência de calor

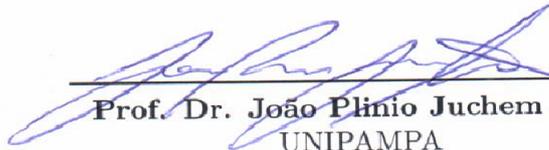
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em 2 de Dezembro de 2015.

Banca examinadora:



Prof. Dr. Claudio Schepke
Orientador



Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto
UNIPAMPA



**Prof. Dr. Igor Antonio Cancela
Melnik**
UNIPAMPA

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a saúde e força necessárias para que eu finalizasse essa graduação. A toda minha família, especialmente minha avó, meu avô(*in memorian*) e meu pai(*in memorian*) por terem me guiado pelo caminho me mostrando os valores e os princípios de um ser humano do bem, colocando minha educação em primeiro lugar. A esta universidade, seu corpo docente, direção, administração e funcionários que oportunizaram e tornaram essa graduação possível. A meu orientador, Prof. Dr. Claudio Shepke, pela parceria, pela valorosa orientação, e pelos conselhos e revisões desta monografia. A minha namorada Ruana, pela compreensão e apoio incondicional ao longo da reta final deste curso. As minhas queridas amigas Jocimara e Rosanara pelo suporte, incentivo e principalmente pelo carinho durante todos esses anos de amizade. A todos os meus amigos, especialmente ao Lincoln, Ferreira, Ciro, Wesley, Rodrigo, Rafael, Ariel, Cristhian e Matheus que sempre estiveram comigo em todos os momentos apoiando esse sonho. Finalmente, a todos que direta ou indiretamente participaram e passaram pela minha vida ao longo desta graduação, meu muito obrigado.

"A imaginação é mais importante que o conhecimento."

Albert Einstein

Resumo

O refinamento de malhas é uma importante abordagem utilizada como forma de representação e manipulação de sistemas reais. A crescente evolução de software e hardware, permitiu que problemas clássicos fossem analisados computacionalmente antes de terem seus projetos colocados em prática. Isso trouxe um melhor aproveitamento de tempo e recursos, pois falhas que só seriam descobertas em uma fase de construção são detectadas anteriormente. Outra área que se beneficia do estudo de malhas é a meteorologia, que faz suas previsões com base em um sistema computacional construído com informações retiradas da natureza, obtendo assim dados que podem antecipar como o sistema climático irá se comportar em um determinado espaço de tempo. Devido ao seu grau de importância e do apelo deste problema, este trabalho aponta as características relevantes, diferentes técnicas e métodos que envolvem o problema de refinamento de malhas através de estudos feitos na literatura. Este trabalho tem como enfoque os algoritmos clássicos para refinamento de malhas, aplicados no problema de condutividade térmica.

Palavras-chave: Refinamento de Malhas. Simulação Computacional. Computação de Alto Desempenho. Transferência de Calor.

Abstract

The mesh refinement is an important approach used as a form of representation of real systems. The increasing evolution of information technology has enabled classical problems to analyse computationally before having their designs put into practice, it brought a better use of time and resources, since failures that would only be discovered in a construction phase are detected earlier. Another area that benefits from the study of meshes is the weather, which makes its predictions based on information extracted from nature, obtaining data that can anticipate how the climatic system will behave in a given space of time. Due to their level of importance and appeal of this issue, this work points out relevant features, different techniques and methods that involve the problem of mesh refinement through studies in the literature. This work is focused on classical algorithms for refinement of meshes , applied in thermal conductivity problem.

Keywords: Mesh Refinement. Computational Simulation. High Performance Computing. Heat Transference.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curvas Cônicas.	23
Figura 2 – Placa retangular com temperaturas definidas.	25
Figura 3 – Solução do problema de transferência de calor em uma placa retangular.	26
Figura 4 – Discretização do domínio do problema de uma placa.	27
Figura 5 – Fluxograma do processo de simulação.	36
Figura 6 – Triangulação de Delaunay com circunferências visíveis.	42
Figura 7 – Malha antes e depois da utilização do refinamento com Poliedros e Voronoi.	44
Figura 8 – Transferência de calor entre dois blocos.	45
Figura 9 – Diagrama de blocos de montagem.	47
Figura 10 – Dimensões das barras de latão e alumínio	47
Figura 11 – Diagrama - Experimento montado.	48
Figura 12 – Caso A e Caso B	49
Figura 13 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Latão	52
Figura 14 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Latão	52
Figura 15 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Alumínio	53
Figura 16 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Alumínio	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Níveis de investigação	22
Tabela 2 – Tipos de Equações Diferenciais	24
Tabela 3 – Características da malha	49
Tabela 4 – Tabela de comparação das temperaturas do Cilindro de Latão.	54
Tabela 5 – Tabela de comparação das temperaturas do Cilindro de Alumínio.	55

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	21
2.1	Problemas físicos	21
2.2	Classificação de equações diferenciais parciais de 2ª ordem	22
2.2.1	Método das diferenças finitas	24
2.2.2	Equação de Laplace	24
2.2.3	Equação de Poisson	27
2.3	Métodos numéricos para equações parabólicas	28
2.3.1	Método explícito	28
2.3.2	Método implícito de Crank-Nicolson	29
2.3.3	Métodos numéricos para equações hiperbólicas	29
2.4	Equações de transferência de calor	30
2.5	Considerações	30
3	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	33
3.1	Modelos de Simulação	33
3.1.1	Características de uma simulação computacional	33
3.1.2	Tipos de simulação computacional	34
3.1.3	Estruturação da simulação	35
3.2	Formulação do problema	36
3.2.1	Coleta de dados	37
3.2.2	Modelagem	37
3.2.3	Avaliação do modelo	38
3.2.4	Programação da simulação	38
3.2.5	Validação	38
3.2.6	Realização dos experimentos	39
3.3	Considerações	39
4	REFINAMENTO DE MALHAS	41
4.1	Geração de malha	41
4.2	Princípios de triangulação	41
4.3	Triangulação de Delaunay	42
4.3.1	Propriedades	42
4.4	Poliedros de Voronoi	43
4.5	Considerações	44

5	EXPERIMENTO	45
5.1	Problema da transferência de calor	45
5.2	Descrição do ambiente	46
5.3	<i>Open Foam</i>	48
5.4	Condições iniciais da simulação	48
6	RESULTADOS	51
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	Referências	59

1 Introdução

O universo está em constante mutação. Para que o ser humano compreenda tais mudanças é imprescindível que diversas áreas da ciência continuem evoluindo. A matemática traduz em equações os segredos da natureza. O estudo da área é feito ao longo dos anos e os resultados refletem diretamente no avanço tecnológico. Nas últimas décadas as simulações computacionais têm sido de grande importância em diversas áreas, tais como, meteorologia, engenharia e medicina. Para que essas simulações sejam factíveis é necessário transformar as características do sistema analisado em um sistema matemático fidedigno. Nessas simulações devem-se considerar não só a complexidade das estruturas envolvidas, mas também uma combinação de diversos fenômenos físicos e escalas.

Portanto, mesmo que se tenha um grande poder computacional à disposição, ainda assim, tem-se uma tarefa desafiadora ao implementar métodos numéricos capazes de resolver problemas multi-escala e multifísicos com um grau de confiança que seja compatível com a necessidade. Boa parte das aplicações pode ser modelada através de equações diferenciais parciais (LANDAU; LIFSHITZ, 2013). Uma vez modeladas, as equações podem ser discretizadas, resultando em sistemas de equações lineares (DONGARRA et al., 1990).

Tais equações podem ser solucionadas computacionalmente através de métodos numéricos, que buscam encontrar o valor das incógnitas do sistema (SAAD; VORST, 2000). O uso de malhas é considerado um importante avanço no que tange à simulação de fenômenos, essas estruturas têm o objetivo de aproximar o modelo computacionalmente criado com o sistema estudado. Neste trabalho faremos um estudo sobre refinamento e simplificação de malhas aplicados ao problema de condução de calor, onde aplicaremos duas abordagens diferentes a fim de comparar resultados reais, obtidos na literatura, com resultados gerados através da simulação computacional. A abordagem utilizada para a resolução das equações diferenciais da transmissão de calor por condução foi o método de diferenças finitas, que fornece uma solução se baseando em aproximação de derivadas por diferenças finitas. Para as simulações, utilizamos o software *OpenFOAM*, programa de código aberto adequado às necessidades desta pesquisa. No capítulo dois serão apresentados conceitos de matemática e métodos numéricos utilizados em simulações computacionais através de exemplos e equações encontrados na bibliografia. No capítulo três, serão abordados temas relacionados à simulação computacional, suas características, tipos e estrutura. No quarto capítulo as principais técnicas e algoritmos de refinamento serão expostos. No capítulo cinco apresentaremos o problema da condutividade de calor, suas particularidades e os dados obtidos no experimento real. No sexto e sétimo capítulo serão apresentados os resultados da simulação e as considerações finais, respectivamente.

2 Modelagem Matemática

Fazer a modelagem de problemas físicos é, basicamente, transformar as peculiaridades, escalas e grandezas naturais em equações matemáticas que os descrevam adequadamente (WAZWAZ, 2012). Para que a solução procurada seja encontrada de uma forma mais precisa e parecida com o comportamento real, o fenômeno físico deve ser rigidamente descrito. As soluções são usualmente encontradas de uma forma analítica (através de métodos algébricos e diferenciais) ou de forma aproximada (onde empregam-se métodos numéricos que usualmente baseiam-se em operações matemáticas básicas). Neste capítulo classificaremos problemas físicos, suas equações e métodos para resolvê-los.

2.1 Problemas físicos

Problemas físicos podem ser classificados em dois âmbitos: sistemas discretos e sistemas contínuos. Quando o sistema tem um número finito de elementos interconectados pode-se dizer que este é um sistema discreto, enquanto um sistema contínuo envolve um fenômeno que se encontra em uma região contínua da matemática onde as variáveis podem assumir infinitos valores (CHI; FELTOVICH; GLASER, 1981).

- Problemas de equilíbrio: seus sistemas permanecem constantes em relação ao tempo, ou seja, suas equações não sofrem modificações conforme o tempo passa. São conhecidos também como problemas em regime permanente, de estado estacionário. Normalmente os problemas de equilíbrio são descritos por um conjunto de sistemas de equações lineares e em casos particulares por um conjunto de equações não-lineares. Exemplos são estática das estruturas, escoamento previsível e distribuição de campos eletrostáticos e magnéticos estacionários (FORTES, 2008).
- Problemas de autovalores: podem ser vistos como uma extensão dos problemas de equilíbrio, seus valores críticos ou específicos de certos parâmetros devem ser determinados além daqueles que correspondem a parte estacionária do problema. Como exemplos, podem ser citados a estabilidade das estruturas e problemas de frequência natural em sistemas mecânicos. Para encontrar a solução destes problemas usa-se sistemas de equações lineares com matriz de coeficientes singulares ou por equações diferenciais com as condições de contorno fechadas (FILHO, 2000).
- Problemas de propagação: incluem os fenômenos transitórios e de regime não-permanente e são aqueles nos quais os estados subsequentes de um sistema devem ser relacionados com um estado conhecido inicialmente. São exemplos deste tipo de

problema a propagação de ondas em meios elásticos contínuos, vibrações autoexcitadas e a condução térmica em regime transiente (BAUDE, 2000).

Na Tabela 1 pode-se ver a relação entre os problemas e o conjunto de equações correspondentes.

Tabela 1 – Níveis de investigação.

Problema	Discreto	Contínuo
Equilíbrio	Sistema de equações algébricas simultâneas	Equações diferenciais ordinárias ou parciais com condições de contorno fechadas
Autovalores	Sistema de equações algébricas simultâneas ou equações diferenciais ordinárias redutíveis à forma algébrica	Equações diferenciais ordinárias ou parciais com condições de contorno fechadas
Propagação	Sistema de equações diferenciais ordinárias simultâneas com condições iniciais conhecidas	Sistema de equações diferenciais ordinárias simultâneas com condições iniciais conhecidas

Fonte: (LEAL, 2003)

2.2 Classificação de equações diferenciais parciais de 2ª ordem

Pode-se classificar as equações diferenciais parciais em três tipos: hiperbólicas, parabólicas e elípticas. Essa classificação serve para especificar quais métodos numéricos devem ser utilizados para obter uma resolução. Problemas de fronteira fechada são descritos, normalmente, por equações elípticas, enquanto problemas de fronteira aberta são melhor representados por equações hiperbólicas ou parabólicas. Se a solução de um problema for descrito pela variável $u = u(x,y)$, a equação diferencial parcial que expressa a relação entre u e as variáveis independentes x e y pode ser escrita, genericamente, como:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (2.1)$$

Na qual a, b, c, d, e, f, g são constantes ou funções das variáveis independentes x e y . Os coeficientes a, b e c são tais que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad (2.2)$$

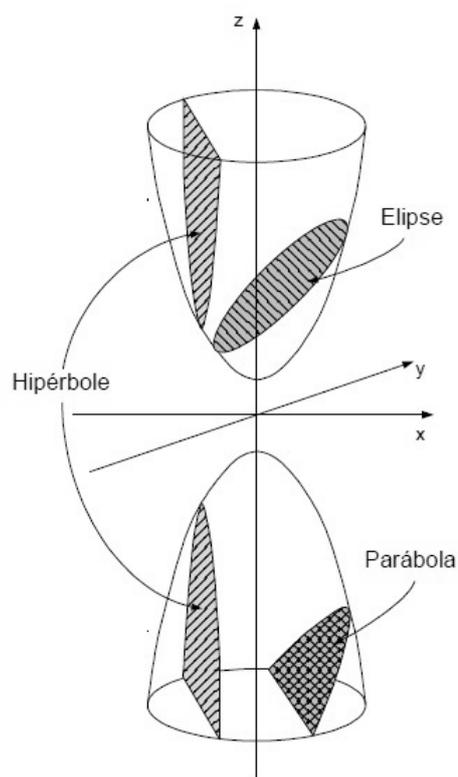
No caso dos coeficientes a, b e c serem constantes, pode-se classificar as equações diferenciais parciais da seguinte forma:

- Equações diferenciais elípticas: $b^2 - ac < 0$, raízes conjugadas complexas;
- Equações diferenciais hiperbólicas: $b^2 - ac > 0$, raízes reais e distintas;

- Equações diferenciais parabólicas: $b^2 - ac = 0$, raízes reais e idênticas.

Na [Figura 1](#) estão representadas as três curvas cônicas que são descritas pelas equações diferenciais parciais.

Figura 1 – Curvas Cônicas.



Fonte: (CUNHA, 2003)

As equações diferenciais parciais têm grande importância. Sua análise teórica as classifica em três grupos representativos na descrição de métodos numéricos.

Tabela 2 – Tipos de Equações Diferenciais.

NOME	TIPO	EQUAÇÃO
Equação de Laplace	elíptica	$\nabla^2 u = 0$ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
Equação de Poisson	elíptica	$\nabla^2 u = c$ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = c$
Equação de Fourier	parabólica	$\alpha \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$ $\alpha(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_t = 0$
Equação da Onda	hiperbólica	$c^2 \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_{tt} = 0$
Equação de Lorentz	hiperbólica	$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t)$ $c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_{tt} = -f$

A [Tabela 2](#) apresenta os principais tipos de equações diferenciais parciais.

2.2.1 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é utilizado para resolução de problemas de cálculo de valor de fronteira. Para isso, baseia-se em aproximações da diferencial exata pela diferença finita, que segue os esquemas estabelecidos pela interpolação polinomial de Newton. É bastante utilizado por sua simplicidade e facilidade de implementação.

Diferença central:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} \quad (2.4)$$

Diferença de 2º ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{(x_{i+1} - x_{i-1})^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{l^2} \quad (2.6)$$

2.2.2 Equação de Laplace

A Equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$ é uma equação diferencial parcial que pode ser representada pelo método de diferenças finitas da seguinte maneira:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{l^2} = 0 \quad (2.7)$$

Se adotarmos o incremento $h = l$, a equação [Equação 2.7](#) pode ser re-escrita como:

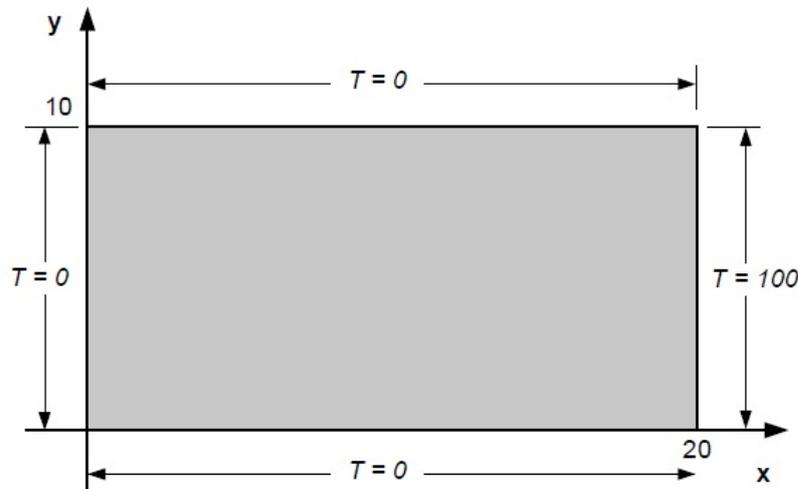
$$\frac{1}{h^2} \{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\} = 0 \quad (2.8)$$

Se escrevermos o valor da função $u(x, y)$ no ponto central (x_i, y_j) , tem-se que:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4} \quad (2.9)$$

Um dos problemas em que as equações diferenciais parciais podem ser empregadas é o de transferência de calor por condução em regime permanente. Este é um típico problema que pode ser representado por uma equação diferencial parcial elíptica. O exemplo da [Figura 2](#) demonstra como o método de diferenças finitas pode ser utilizado para transformar as equações diferenciais em um sistema de equações algébricas para calcular a potencial temperatura em pontos de uma malha quadrada.

Figura 2 – Placa retangular com temperaturas definidas.



Fonte: ([CUNHA, 2003](#))

$$T(x, 0) = 0$$

$$T(x, 10) = 0$$

$$T(0, y) = 0$$

$$T(20, y) = 100$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.10)$$

O sistema de equações é descrito por:

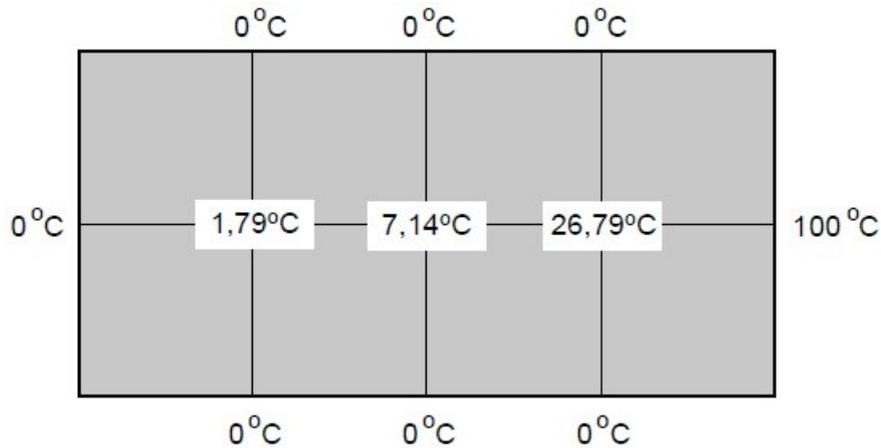
$$\begin{cases} \frac{1}{5^2} (0 + 0 + T_2 + 0 - 4T_1) = 0 \\ \frac{1}{5^2} (T_1 + 0 + T_3 + 0 - 4T_2) = 0 \\ \frac{1}{5^2} (T_2 + 0 + 100 + 0 - 4T_3) = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

A solução deste sistema fornece os valores $T_1 = 1.79^\circ C$, $T_2 = 7.14^\circ C$ e $T_3 = 26.79^\circ C$

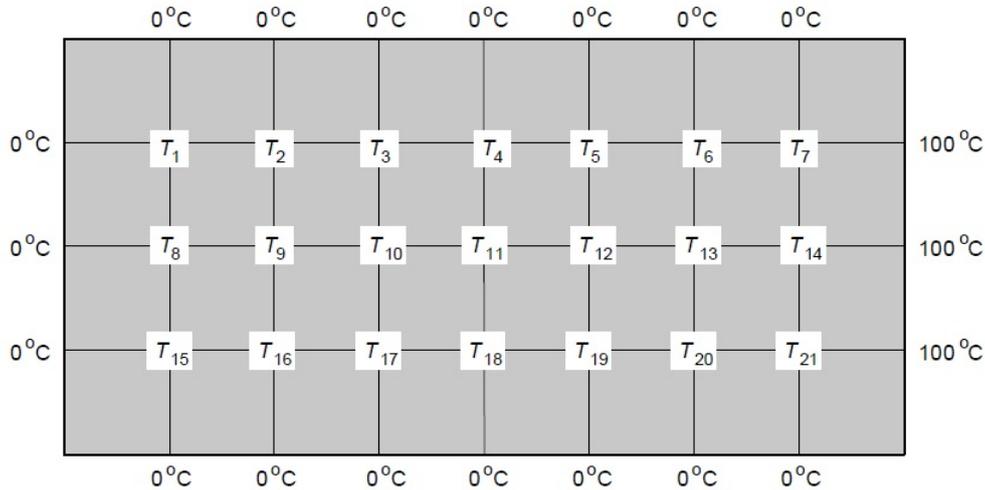
Figura 3 – Solução do problema de transferência de calor em uma placa retangular.



Fonte: (CUNHA, 2003)

Pode-se aumentar a precisão e qualidade da resposta utilizando técnicas de refinamento de malhas para obter temperaturas em diferentes pontos, como mostra a [Figura 4](#):

Figura 4 – Discretização do domínio do problema de uma placa.



Discretização do domínio do problema de transferência de calor em uma placa retangular.

Fonte: (CUNHA, 2003)

Com isso, quanto mais refina-se o sistema inicial, tem-se uma maior precisão dos resultados obtidos através da equação de Laplace. O esforço computacional empregado para encontrar as temperaturas está intimamente ligado com o nível de refinamento (número de quadrados) que a aplicação exige. Em refinamento de malhas, desempenho e precisão são duas grandezas diretamente opostas.

2.2.3 Equação de Poisson

A equação de Poisson é utilizada para resolução de problemas com regime permanente, ou seja, que envolve a presença de algum atenuante de potencial, como na transferência de calor com fonte de energia interna. Este quadro pode ser descrito pela equação abaixo, na qual c é uma constante relacionada com a variação do potencial u :

$$\nabla u + c = 0 \quad (2.11)$$

A equação de Poisson também pode ser utilizada para descrever problemas de torção de barras retangulares, na qual u é a função de torção e a constante c é o produto do ângulo de torção por unidade de comprimento pelo módulo de rigidez do material.

Aplicando-se as equações de diferenças finitas de 2ª ordem tem-se:

$$\nabla u + c = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \cdot u_{i,j} + c = 0 \quad (2.12)$$

A partir desta equação, obtém-se um sistema de equações lineares para chegar a solução do problema físico descrito de maneira análoga à obtida no exemplo da equação de Laplace, acrescido da constante c que será adicionada aos termos da matriz de termos independentes.

2.3 Métodos numéricos para equações parabólicas

Pode-se descrever as equações diferenciais parciais parabólicas em duas dimensões da seguinte forma:

$$u_t = (a_1 u_x)_x + (a_2 u_y)_y + b_1 u_x + b_2 u_y - c_1 u \quad (2.13)$$

Na qual $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $c_1 > 0$, b_1 e b_2 são funções das variáveis independentes x , y e t , sendo x e y variáveis espaciais e t a variável temporal. Na substituição das derivadas da equação acima pelo método das diferenças finitas, podem ser aplicados dois esquemas distintos denominados método explícito (no qual a substituição é direta) e método implícito de Crank-Nicolson.

2.3.1 Método explícito

Métodos explícitos calculam como um sistema se comportará em um estado futuro, as equações levam em consideração como as variáveis irão se modificar à medida que o tempo passa. Para melhor ilustrar esse procedimento de diferenças finitas pelo método implícito tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.14)$$

Onde D é o coeficiente de difusão. Aplicando as equações de diferenças finitas Equação 2.3, Equação 2.3, Equação 2.5 e Equação 2.6 na Equação 2.13, temos que:

$$\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} = \frac{1}{D} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \quad (2.15)$$

Os índices i relacionados à variável U na [Equação 2.15](#) referem-se à coordenada X_i , os expoentes K se referem à variável temporal. Resolvendo a equação tem-se:

$$u_t^{k+1} = \frac{D \cdot \Delta t}{h^2} (u_{t-1}^k + u_{t+1}^k) + \left(1 - \frac{2D \cdot \Delta t}{h^2}\right) \cdot u_t^k \quad (2.16)$$

Para que a [Equação 2.15](#) possa ser resolvida deve-se determinar o valor futuro u tendo como parâmetro os valores conhecidos no tempo t_k . Portanto, a resolução de equações parabólicas requer além das condições de contorno de x os valores iniciais de $t = t_0$. Para simplificar a [Equação 2.16](#) pode-se usar a razão $\frac{Dt}{h^2}$, com o objetivo de calcular o valor futuro tendo como base a média dos valores presentes.

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) \quad (2.17)$$

2.3.2 Método implícito de Crank-Nicolson

Com o objetivo de diminuir a instabilidade numérica observada no método implícito, o método Crank-Nicolson é usado como alternativa mais robusta para a resolução de equações diferenciais parciais.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + \frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} \right) = \frac{1}{D} \cdot \left(\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \right) \quad (2.18)$$

Pode-se definir que $r = \frac{D \cdot \Delta t}{h^2}$, substituir e arranjar a [Equação 2.17](#) para obter:

$$-ru_{i-1}^{k+1} + (2 + 2r)u_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1} = ru_{i-1}^k + (2 - 2r)u_i^k + ru_{i+1}^k \quad (2.19)$$

Para simplificar a [Equação 2.19](#) define-se que $r = 1$, logo:

$$-u_{i-1}^{k+1} + 4u_i^{k+1} - u_{i+1}^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k \quad (2.20)$$

Tem-se como vantagem na utilização do método Crank-Nicolson uma maior estabilidade para qualquer valor de R , embora tenha-se uma maior precisão para valores menores. Sendo assim, na [Equação 2.20](#) é a forma mais usual do método, que, simplificando é na verdade uma média dos valores envolvidos.

2.3.3 Métodos numéricos para equações hiperbólicas

Uma equação diferencial hiperbólica que tem muitas aplicações práticas é a equação de onda em duas dimensões.

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

Nesta equação a variável v corresponde a velocidade de propagação da onda, substituindo cada derivada pela respectiva diferença finita central e admitindo-se que $h = \Delta x = \Delta y$, tem-se:

$$\frac{1}{v^2} \cdot \left(\frac{u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2} \right) = \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.22)$$

Resolvida a equação para o tempo $t = k + 1$ chega-se em:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\Delta t^2}{v^2 h^2} (u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k) - u_{i,j}^{k-1} + [2 - 4 \frac{\Delta t^2}{v^2 h^2}] u_{i,j}^k \quad (2.23)$$

Usando $\frac{\Delta t}{v h} = \frac{1}{2}$ o último termo da equação pode ser simplificado, logo pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\Delta t^2}{v^2 h^2} (u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k) - u_{i,j}^{k-1} \quad (2.24)$$

2.4 Equações de transferência de calor

A definição de equação de calor passa por diferentes campos da ciência, é um modelo matemático para difusão térmica em sólidos. Neste trabalho, usamos um cilindro para que as simulações fossem feitas, possibilitando assim a comparação com os dados reais do experimento. Existem, na bibliografia, diferentes representações para essas equações, sua forma mais conhecida, em um ambiente em que não existam fontes de calor é:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.25)$$

Quando tem-se uma fonte de calor, a equação fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(\vec{x}, t) \quad (2.26)$$

2.5 Considerações

A modelagem matemática é aplicada em diversos campos da ciência. As equações diferenciais, por constituírem um grupo de elementos que conseguem representar, em partes, um sistema real, são de grande importância para que simulações, inclusive as descritas ao longo deste trabalho, gerem resultados satisfatórios. Pode-se concluir que o

esforço computacional empregado para resolver uma equação diferencial parcial é diretamente proporcional ao seu número de variáveis, que determinarão a complexidade do problema representado.

3 Simulação Computacional

Com o modelo matemático definido, tendo suas variáveis e o espaço que serão avaliados devidamente representados computacionalmente, os testes começam a ser feitos através da simulação. Neste capítulo apresentaremos as características de uma simulação computacional, bem como seus tipos distintos e sua estruturação.

3.1 Modelos de Simulação

Os modelos de simulação tornaram-se uma das técnicas mais populares empregadas na análise de sistemas industriais complexos (O'KANE; SPENCELEY; TAYLOR, 2000). A fase operacional compreende as maiores potencialidades de se obter os melhores resultados com o uso da simulação (O'KANE; SPENCELEY; TAYLOR, 2000). Sendo assim, de acordo com (SHANNON, 1975), a simulação não deve ser vista como uma teoria, mas como uma metodologia de resolução de problemas. Este é um método de modelagem utilizado para implementar e analisar um procedimento real (físico) ou proposto em um computador (de forma virtual) e até mesmo em protótipos (ensaios). A simulação consiste, então, no ato de imitar um procedimento real em menor tempo e com custo mais baixo, permitindo assim uma melhor análise do que vai acontecer e como reparar eventuais erros, os quais gerariam custos adicionais (LEAL, 2003).

3.1.1 Características de uma simulação computacional

Características encontradas em problemas que são analisados formam um grupo de pressupostos que justificam a utilização de simulações computacionais. De acordo com (STRACK, 1984) algumas dessas características são:

- Não há uma formulação matemática completa para o problema;
- Não há um método analítico para a resolução do modelo matemático;
- A obtenção de resultados com o modelo é mais fácil de ser realizada por simulação do que pelo método analítico;
- Não existe habilidade pessoal para a resolução do modelo matemático por técnica analítica ou numérica;
- É necessário observar o desenvolvimento do processo desde o início até os resultados finais, e são necessários detalhes específicos;

- Não é possível ou é muito difícil a experimentação no sistema real;
- É desejado estudar longos períodos de tempo ou são necessárias alternativas que os modelos físicos dificilmente fornecem.

([MOREIRA, 2001](#)) destaca quatro pontos relevantes sobre simulação, como uma ferramenta eficiente no diagnóstico de processos:

- Através da simulação podem ser estudadas algumas variações no meio ambiente e verificar seus efeitos no sistema total;
- A experiência adquirida na construção de modelos e na realização da simulação pode conduzir a uma melhor compreensão do sistema, com possibilidades de melhorá-lo;
- A simulação pode ser usada para experiências com novas situações;
- A simulação pode servir como um primeiro teste para se delinear novas políticas e regras de decisão para a operação de um sistema, antes de se experimentar no sistema real.

3.1.2 Tipos de simulação computacional

As simulações computacionais podem ser classificadas de acordo com a área em que normalmente são empregadas. De acordo com ([KELTON; SADOWSKI; SADOWSKI, 1998](#)) pode-se estabelecer alguns parâmetros para classificação das simulações computacionais:

- Tempo: quando o tempo não apresenta seu papel natural, ou seja, é invariável, classifica-se a simulação como estática. Caso contrário, apresenta-se a simulação como dinâmica, correspondendo a maioria dos modelos operacionais;
- Estado de mudança: se o estado do sistema muda de forma contínua de acordo com o tempo, como no caso de fluxos de água em reservatórios, classifica-se a simulação como contínua. Contudo, se as mudanças ocorrem somente após a separação de alguns pontos no tempo, como no caso de peças no processo de manufatura com tempos específicos, atribui-se à simulação a classificação de discreta;
- Aleatoriedade: modelos que não possuem entradas aleatórias são chamados de determinísticos, como no caso de uma operação de agenda rígida com tempos fixos. Por outro lado, modelos estocásticos operam com entradas aleatórias, por exemplo um sistema climatológico onde os parâmetros são números mutáveis.

A aproximação fiel da realidade é uma meta a ser perseguida com o objetivo de obter resultados que sejam mais parecidos com os do fenômeno natural. O entendimento do sistema natural direcionará o modelador na confecção do sistema computacional.

3.1.3 Estruturação da simulação

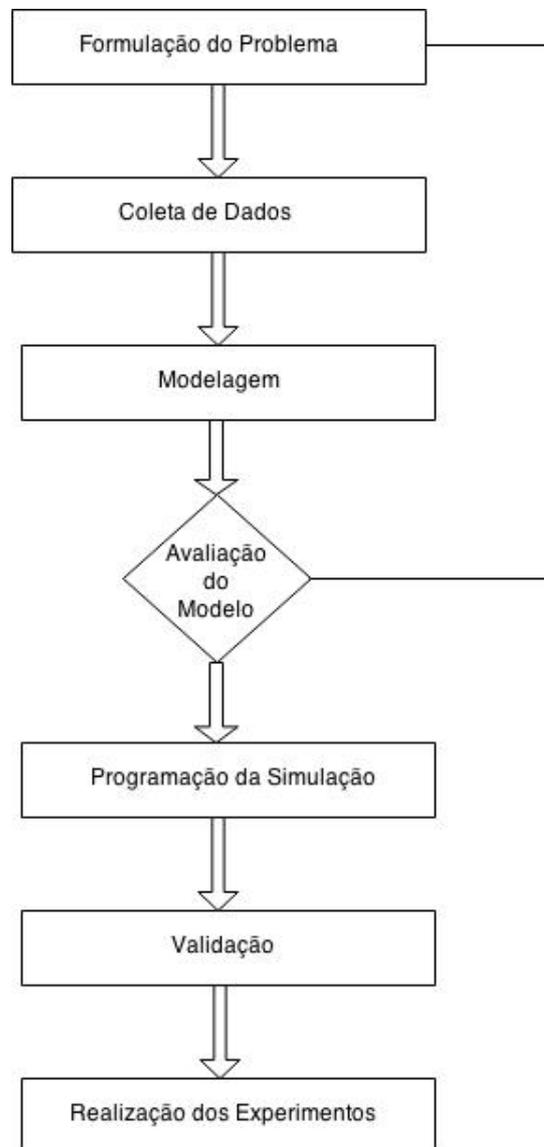
Normalmente uma simulação contém três elementos que devem ter suas inter-relações analisadas: sistema real, modelo e simulador (MOREIRA, 2001). A origem dos dados reside no sistema real, é nele onde se encontram as singularidades necessárias para criar um modelo robusto. O modelo pode ser visto como um grupo de instruções para a geração de dados, é onde transformamos os dados reais em dados computacionais e o simulador é entendido como um dispositivo capaz de levar adiante instruções que estão definidas no modelo.

Uma simulação normalmente apresenta os seguintes mecanismos internos:

- Variáveis: são as características ou atributos do sistema que podem assumir diferentes valores quando a simulação é colocada em funcionamento;
- Parâmetros: consistem em características ou atributos que assumem só um valor durante toda simulação, porém podem ser modificados se alternativas diferentes forem utilizadas;
- Fatores exógenos: parâmetros ou variáveis cujo valor afeta o sistema, porém, esse fator não é afetado por ele. São representados pelas séries ou distribuições de probabilidade que fornecem valores ao sistema;
- Fatores endógenos: parâmetros ou variáveis que tem o valor determinado pelo sistema;

(ANDRADE, 1990) propõe que um trabalho de simulação pode ser desenvolvido segundo as seguintes etapas descritas na Figura 5:

Figura 5 – Fluxograma do processo de simulação.



Fonte: Andrade (1990)

3.2 Formulação do problema

Os objetivos da simulação devem ser explicitamente definidos, além da amplitude e a profundidade que se deseja da análise e dos recursos disponíveis. Esta definição inicial do problema pode ser alterada durante a realização do processo de simulação. A simulação pode tanto ser o resultado final de uma pesquisa como uma complementação de informações atrelada a um objetivo maior (MOREIRA, 2001).

3.2.1 Coleta de dados

Recolher os dados que estão no ambiente que será simulado é um passo importante para que as respostas que serão geradas sejam úteis para a aplicação. De acordo com (MOREIRA, 2001) ao fazer uma coleta de dados deve-se ter os seguintes cuidados:

- Coletar uma quantidade suficiente de dados;
- Os dados devem ser quantitativamente confiáveis;
- Dados significativos para o processo final.

Uma vez que os dados foram coletados e tendo uma visão clara do problema a ser resolvido, pode-se começar uma nova etapa, referente à construção do modelo computacional.

3.2.2 Modelagem

O primeiro passo que deve ser considerado na modelagem de um sistema computacional é a identificação das variáveis envolvidas (MOREIRA, 2001). Este processo pode ser um dos mais difíceis para construir a simulação, haja vista todas as relações importantes, tanto entre as variáveis internas do sistema quanto entre este e o meio ambiente que o cerca. De acordo com (PEREIRA, 2000) existem alguns princípios que facilitam a modelagem do sistema, que possibilitam resultados mais confiáveis com um menor tempo de trabalho:

- Iniciar com modelos simples: os modelos mais complexos são de difícil construção e verificação. Um conceito importante que se deve ter ao modelar é de que os trabalhos de simulação devem partir de modelos simples para os mais complexos. Fazer uma inicialização com um modelo mais simples e evoluí-lo à medida que os estudos em simulação caminham, proporciona uma melhoria no tempo total de trabalho de modelagem. Desta forma a ideia é refinar o modelo gradualmente até que este consiga atender os objetivos propostos.
- Nível de detalhamento: O tempo gasto com processamento e o detalhamento do modelo desejado estão intimamente ligados. Quanto maior for a riqueza de detalhes do modelo, maior será o tempo demandado. É importante que o objetivo da modelagem seja bem definido, para que os resultados da aplicação sejam alcançados com um menor tempo e melhor uso dos recursos.
- Divisão do modelo: O modelo deve ser particionado com o objetivo de criar um subconjunto de modelos menores e mais simples de serem interpretados.

- Verificação e correção de erros: Quanto menor é o modelo, mais fácil será a verificação dos erros cometidos na fase de programação. Alguns *softwares* possuem dispositivos que permitem a verificação e correção de erros (*debug*) com mais facilidade.

3.2.3 Avaliação do modelo

Com o modelo construído precisa-se saber se ele atende os objetivos da simulação, fazendo corretamente a representação do sistema. É considerada uma etapa decisiva no processo de simulação pois a reprovação do modelo nesta etapa levará ao reinício do processo. As fases seguintes do processo dependem desta etapa. Por isso, sua consistência é de suma importância.

3.2.4 Programação da simulação

Nesta etapa a codificação é feita utilizando *softwares* de simulação que devem ser escolhidos de acordo com as possibilidades dos projetistas. Normalmente uma linguagem própria é utilizada para escrever os algoritmos envolvidos.

3.2.5 Validação

Uma vez que o sistema foi modelado e verificado, ou seja, todos os erros de programação foram eliminados, o programa estará em condições de executar sem problemas (PEREIRA, 2000). O próximo procedimento será a validação do modelo. A validação vem a ser uma avaliação do quanto o modelo construído é semelhante ao sistema real que se pretendeu simular, no aspecto de se questionar se esse modelo atende ou não às finalidades para as quais foi construído (LEAL, 2003).

A validação de modelos computacionais é de difícil realização, e dentre todas as complexidades que a envolvem, de ordem prática, teórica e estatística, existe até mesmo uma complexidade de natureza filosófica na validação (NAYLOR et al., 1971). Não há, segundo este autor, uma “receita” para se fazer a validação, e com as aproximações realizadas ao se construir o modelo já se espera que os dados gerados por ele não tenham exatamente o mesmo comportamento do sistema real. Sendo assim, mesmo que se tenha tempo ilimitado para a fase de validação, o sistema pode assumir estados que não foram previstos inicialmente, mostrando que esta fase serve para certificar os desenvolvedores que o *software* produza resultados próximos à realidade dentro do universo da aplicação. Pode-se apontar algumas diretrizes que auxiliam na validação do modelo:

- Mudança de parâmetros de entrada: Mudar os dados de entrada e comparar as respostas que o modelo fornece com as que o sistema real apresenta, verificando se as

soluções estão próximas. É um teste que pode ser feito de acordo com (HARRELL, 1992).

- *Turing test*: Dados de resposta gerados pelo modelo computacional e resultados de um experimento real são fornecidos a pessoas que conheçam o sistema. Não é dito para essas pessoas quais dados são reais e quais foram gerados pelo programa para que suas opiniões não sejam influenciadas. O desenvolvedor ficará sabendo através dessas pessoas quais diferenças foram encontradas entre os dois conjuntos de respostas. Estas diferenças serão analisadas uma a uma, juntamente com o modelador, que desta forma poderá implementar mudanças no modelo de maneira a aproximar os resultados (HARRELL, 1992).
- Desenvolver o modelo com o usuário: De acordo com (HARRELL, 1992), o desenvolvimento do modelo deve ser feito junto com as pessoas que utilizarão o *software* no futuro. Esse processo em conjunto propiciará uma melhor validação de modelo e encurtará o caminho para chegar em um modelo mais robusto.

3.2.6 Realização dos experimentos

Nesta fase são realizados testes com o modelo para avaliar seu comportamento e obter os dados necessários para a pesquisa central. Esta é a fase crucial do projeto pois todo o trabalho deve estar teoricamente pronto e funcionando de acordo com as diretrizes que foram assumidas. Os experimentos devem ser conduzidos de modo que os resultados obtidos para análise não gere deduções equivocadas por parte do modelador e do usuário.

3.3 Considerações

As simulações computacionais tornaram-se uma importante ferramenta usada para a interpretação de fenômenos físicos, químicos e biológicos. O interesse crescente na área e as demandas do mercado, tornam esse tema relevante tanto no âmbito científico/acadêmico, quanto no âmbito mercadológico. Com a constante evolução da informática, possibilitando que tenha-se cada vez mais poder de processamento à disposição, as simulações, tendem, cada vez mais, a representar com mais fidelidade os sistemas estudados.

4 Refinamento de Malhas

Neste capítulo abordaremos as técnicas para geração e refinamento de malhas, especialmente a técnica de triangulação de Delaunay e suas variações. O Algoritmo de refinamento de Shewchuk e algoritmo de refinamento de Ruppert, são importantes implementações da triangulação de Delaunay que serão aplicados no problema de transferência de calor proposto neste trabalho.

4.1 Geração de malha

Para que se possa discretizar o espaço que se quer estudar, usa-se o refinamento de malhas. Uma de suas capacidades é a de subdividir seu domínio geométrico de forma consistente, gerando assim figuras menores (simplexo), tornando a estrutura mais complexa. Essas figuras podem ser vistas como extensões geométricas geradas com a finalidade de tornar a malha mais detalhada. Em duas dimensões tem-se segmentos de retas como representação geométrica, em espaços tridimensionais geram-se tetraedros. Um simplexo K é uma lista ordenada de vértices π com $1 \leq i \leq d + 1$ onde d é a dimensão do espaço euclidiano afim E . Chama-se de $\det(K)$ o determinante de ordem $d + 1$ dado por:

$$\det(K) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ P_1^1 & \cdots & \cdots & P_{d+1}^1 \\ P_1^2 & \cdots & \cdots & P_{d+1}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ P_1^d & \cdots & \cdots & P_{d+1}^d \end{vmatrix}$$

Onde P_j é a coordenada j do ponto P_i para $1 \leq i \leq d + 1$ e $1 \leq j \leq d$.

Por definição tem-se que, se $\det(K) > 0$, K é dito ser positivamente orientado e se $\det(K) = 0$, K é dito ser degenerado (todos seus vértices pertencem ao mesmo hiperplano) (GEORGE; HERMELINE, 1992).

4.2 Princípios de triangulação

Pode-se entender triangulação de um domínio D , que se supõe limitado e poliédrico, por um conjunto S de simplexos. Para esse conjunto, de acordo com (SAKAMOTO, 2001), as seguintes condições são válidas:

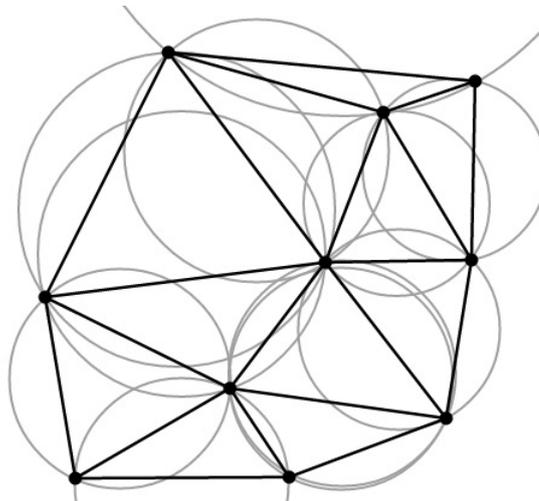
- A intersecção de dois elementos de D é vazia ou se reduz a um vértice, aresta (bidimensional) ou uma face (tridimensional);

- A união dos elementos de S é igual a D ;
- Os elementos de S devem ser regulares, no caso bidimensional eles devem estar o mais próximo possível da equilateralidade;
- O circuncirculo (bidimensional) ou circunsfera (tridimensional) de um elemento é vazio.

4.3 Triangulação de Delaunay

Chama-se de triangulação de Delaunay um conjunto de pontos em um plano onde nenhum ponto P está dentro de uma circunferência formada por qualquer triângulo do refinamento. Com isso tem-se uma maximização do menor ângulo de todos os triângulos, o que evita ângulos internos que sejam muito pequenos. Este conceito de triangulação foi inventado por Boris Delaunay em 1934 (DELAUNAY, 1934), onde o autor descreve como pode-se criar uma estrutura de triângulos com quatro ou mais pontos em uma mesma circunferência, onde esta tenha seu interior livre dos vértices dos triângulos. Considerando três dimensões, o conceito estende-se a esferas que seguem a mesma métrica da triangulação em duas dimensões, usando esferas para a representação. A Figura 6 mostra a triangulação de Delaunay com os círculos visíveis.

Figura 6 – Triangulação de Delaunay com circunferências visíveis.



Fonte: (SAKAMOTO, 2001)

4.3.1 Propriedades

Com N sendo o número de pontos da triangulação e D o número de dimensões tem-se:

- O fecho convexo dos pontos é a união de todos os simplexos envolvidos na triangulação;
- O número de simplexos é $\mathcal{O}(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$;
- Em duas dimensões, se existirem b vértices no fecho convexo, então tem-se $2n - 2 - b$ triângulos;
- Em duas dimensões tem-se em média seis triângulos para cada vértice;
- Em duas dimensões a triangulação de Delaunay maximiza os menores ângulos;
- As circunferências geradas não possuem pontos (vértices) no seu interior (Seidel, 1995).

4.4 Poliedros de Voronoi

O domínio Q pode ser decomposto em poliedros de Voronoi V_i associado ao conjunto de π de Q , tais que:

$$V_i = \{P \in \Omega, \forall 1 \leq j \leq n, d(P, P_i) \leq d(P, P_j)\}$$

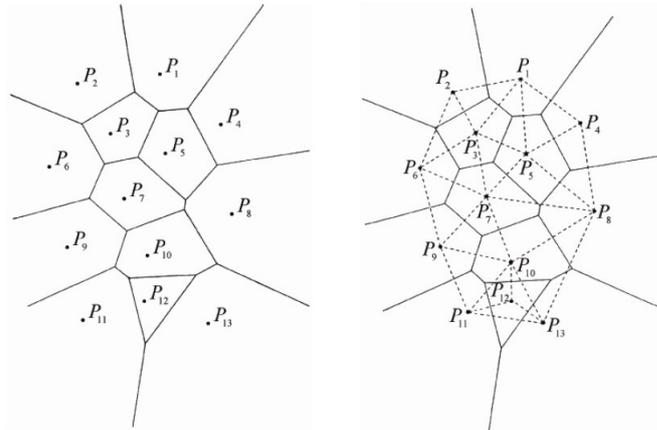
Onde $d(P, P_j)$ é a distância euclidiana entre P e P_j e n é o número de pontos.

A partir desta premissa, de acordo com (SAKAMOTO, 2007), pode-se demonstrar:

- Os poliedros são convexos de interior não vazio. Dois elementos têm intersecção vazia ou reduzia a um vértice, aresta ou face.
- Cada vértice central tem associado um conjunto que chamamos de envolvente convexa C_v , que pode ser vista como um conjunto de poliedros que apresentam v como um de seus vértices. Este conjunto define como a triangulação de Delaunay acontecerá, em outras palavras, a malha de Delaunay pode ser obtida conetando-se dois a dois os vértices centrais (V_i, V_{i+1}) dos poliedros de Voronoi vizinhos (SAKAMOTO, 2007)

A malha resultante pode ser observada na [Figura 7](#):

Figura 7 – Malha antes e depois da utilização do refinamento com Poliedros e Voronoi.



Fonte: ([MARRETO; MACHADO, 1998](#))

4.5 Considerações

O refinamento de malhas é um importante componente do campo das simulações computacionais. O desempenho e qualidade dos dados obtidos nos experimentos estão intimamente ligados à escolha da malha (que poderá ter seus elementos com tamanho e formato diferentes), já que para determinadas aplicações existem tipos mais adequados de refinamento.

5 Experimento

Neste capítulo apresentaremos o experimento que serviu de parâmetro para as simulações feitas neste trabalho, com o objetivo de demonstrar o funcionamento dos algoritmos implementados para simular a transferência de calor em relação a um sistema real. Nesta seção exporemos, também, as condições iniciais, montagem, e materiais utilizados nos testes.

5.1 Problema da transferência de calor

No campo das engenharias, a compreensão dos fenômenos de transferência de calor, tanto em regime estacionário quanto em regime transiente, tem grande importância para a simulação de estruturas expostas a mudanças de temperatura. Pode-se entender este fenômeno como sendo a energia em trânsito devido a diferença de temperatura em um determinado meio ou material. Por exemplo, se dois corpos com diferentes temperaturas forem colocados em contato direto, como na [Figura 8](#), acontecerá uma transferência de calor do corpo de temperatura mais elevada para o corpo de menor temperatura até que haja equivalência térmica entre eles. Diz-se que o sistema tende a atingir o equilíbrio térmico.

Figura 8 – Transferência de calor entre dois blocos.



Se $T_1 > T_2$, logo $T_1 > T > T_2$

Está implícito na definição da figura 8 que um corpo nunca contém calor, é identificado como tal quando cruza a fronteira de um sistema. É portanto um fenômeno transitório, que cessa quando não existe mais uma diferença de temperatura. De acordo com ([HOLMAN, 1998](#)) os diferentes processos de transferência de calor são definidos como mecanismos de transferência de calor. Existem três mecanismos básicos, que são reconhecidos da seguinte forma:

- Quando a transferência de energia ocorrer em um meio estacionário, que pode ser um sólido ou um fluido, em virtude de um gradiente de temperatura, usa-se o termo transferência de calor por condução.

- Quando a transferência de energia ocorrer entre uma superfície e um fluido em movimento, em virtude da diferença de temperatura entre eles, usa-se o termo transferência de calor por convecção.
- Quando, na ausência de um meio interveniente, existe uma troca líquida de energia (emitida na forma de ondas eletromagnéticas) entre duas superfícies a diferentes temperaturas, usa-se o termo radiação

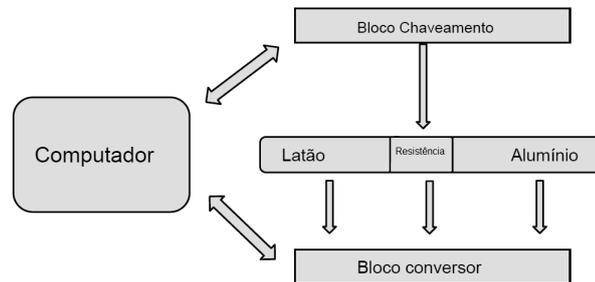
5.2 Descrição do ambiente

Os dados que serviram de parâmetro para a realização deste trabalho foram retirados do artigo (RODRIGUES; MOURA; MONTICELLI, 2006), nas condições iniciais do experimento os autores dispuseram de uma bancada de experimentação com os seguintes equipamentos:

- Duas barras (aço e latão) em suportes isolantes;
- Termopares tipo J;
- Resistência elétrica;
- Bloco de chaveamento;
- Sistema de aquisição de dados (conversor A/D e comunicação de dados);
- Computador;
- Software para aquisição e controle.

O diagrama de montagem apresentado na [Figura 9](#) demonstra a organização do material utilizado no experimento. O computador tem basicamente duas funções, uma delas é chavear a resistência, ligando-a e desligando-a através do bloco de chaveamento, a segunda função é guardar as informações de temperatura que foram obtidas, alimentando a base de dados. Ao ligar as resistências, que estão na parte central do experimento, a transferência de calor acontece, fazendo com que os sensores captem as temperaturas.

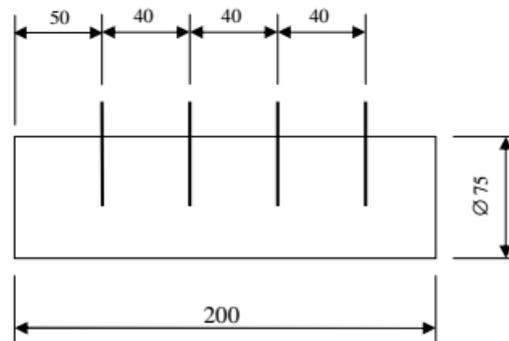
Figura 9 – Diagrama de blocos de montagem.



Fonte: (RODRIGUES; MOURA; MONTICELLI, 2006)

Na [Figura 10](#) pode-se observar as dimensões dos cilindros utilizados nos experimentos, ambos com 75 milímetros de diâmetro e 200 milímetros de altura. Observa-se também a localização dos sensores de temperatura.

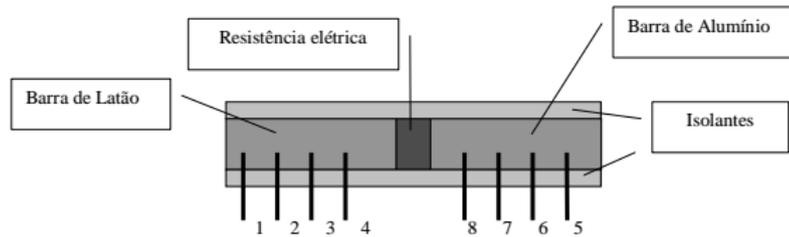
Figura 10 – Dimensões das barras de latão e alumínio



Fonte: (RODRIGUES; MOURA; MONTICELLI, 2006)

A potência usada na resistência elétrica foi de 150W (valor nominal-eficaz), potência essa controlada através do computador, o que possibilitou o controle de temperatura através de um software. O esquema foi organizado como mostra a [Figura 11](#).

Figura 11 – Diagrama - Experimento montado.



Fonte: (RODRIGUES; MOURA; MONTICELLI, 2006)

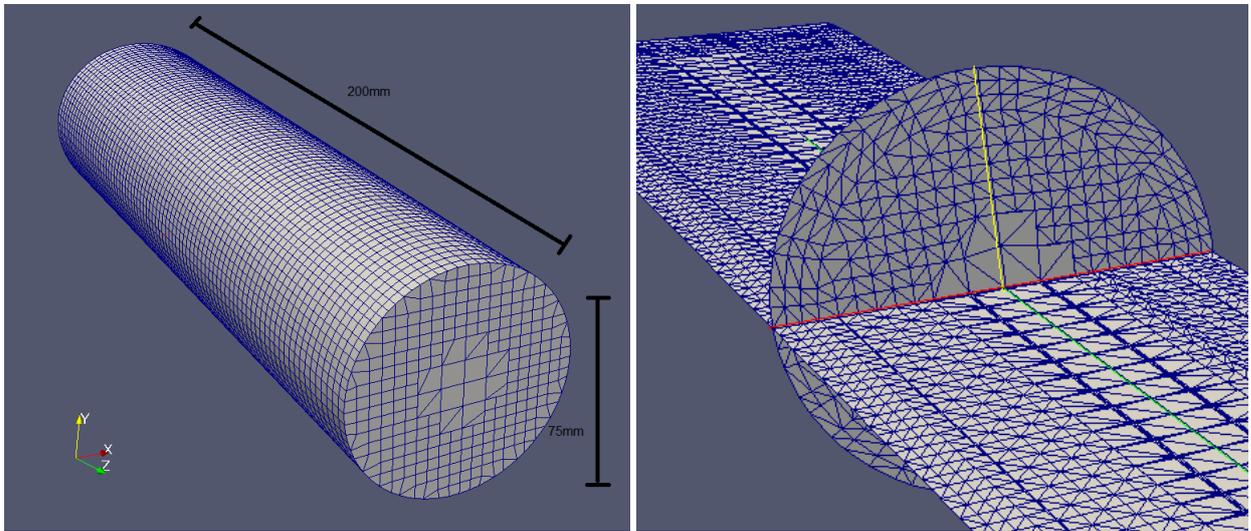
5.3 *Open Foam*

O nome *Open Foam* é composto pela palavra *open*, e a abreviação *Foam*. A palavra *open*, que tem por tradução aberto, indica que o programa de computador é distribuído como um software de código livre sob as mesmas condições e termos do GNU, enquanto *Foam* é uma abreviação para *Field Operation And Manipulation*, que na tradução significa operações e manipulações de campo. O *Open Foam* é um programa escrito em C++ que contém diversas bibliotecas e ferramentas para realizar simulações em diferentes campos da física, especialmente simulações de dinâmica de fluidos e transferência de calor. Todo código fonte deste programa pode ser encontrado gratuitamente em <http://www.openfoam.com> (GJESING; HATTEL; FRITSCHING, 2009). Neste trabalho, o *Open Foam* foi utilizado a fim de discretizar o espaço do experimento, criar as malhas e rodar a simulação computacional para descobrir a temperatura em diferentes pontos dos cilindros analisados.

5.4 Condições iniciais da simulação

Para início da simulação computacional discretizamos os cilindros usando a ferramenta Snappyhex, disponibilizada juntamente com o *Open Foam*. Foram criados dois tipos de malhas para discretizar o espaço que foi analisado, uma malha quadrangular e outra triangular, a fim de comparar os resultados com os dados reais. Pode-se observar os sólidos, após a criação das malhas nas Figura 16:

Figura 12 – Caso A e Caso B



Cilindro com malha quadrangular e triangular.

As características das malhas geradas podem ser vistas na [Tabela 3](#) :

Tabela 3 – Características da malha

	Número de pontos	Número de faces
Caso A	53.664	158.645
Caso B	105.342	345.287

Com a modelagem matemática e modelagem computacional prontas, executou-se o algoritmo que simulou como a temperatura cresceu nos pontos onde os sensores foram colocados. A simulação computacional calculou as temperaturas em cada um os pontos de cada malha utilizada, no próximo capítulo serão apresentados os resultados obtidos.

6 Resultados

Foram executados os algoritmos - escritos em linguagem Fortran - para os dois casos de teste em execuções separadas. No primeiro caso, onde a malha criada foi retangular o tempo de execução chegou a 25 minutos e 7 segundos. Para o segundo caso onde utilizamos uma malha triangular, mais refinada, o tempo de processamento foi de 42 minutos e 45 segundos. o tempo de refinamento de ambas as malhas foi menor que 1 segundo, sendo um dado irrelevante para este trabalho. O computador utilizado para realizar os testes tem as seguintes configurações:

- Processador: Intel 7-3610QM Quad Core 3,30 GHz;
- Memória Primária: 8 Gigas;
- Memória Cash: 6 Megas;
- Sistema operacional: Ubuntu 14.10.

É importante destacar que os algoritmos utilizados encontraram todas as temperaturas dos respectivos pontos da malha ao longo do tempo, porém, neste trabalho, destacamos apenas as temperaturas dos pontos à 150mm, 110mm, 70mm e 30mm de distância da fonte de calor e usamos como parâmetro os tempos de 10 minutos, 20 minutos, 30 minutos, 40 minutos, 50 minutos e 60 minutos. Os resultados obtidos podem ser vistos nos gráficos e tabelas que seguem:

Figura 13 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Latão

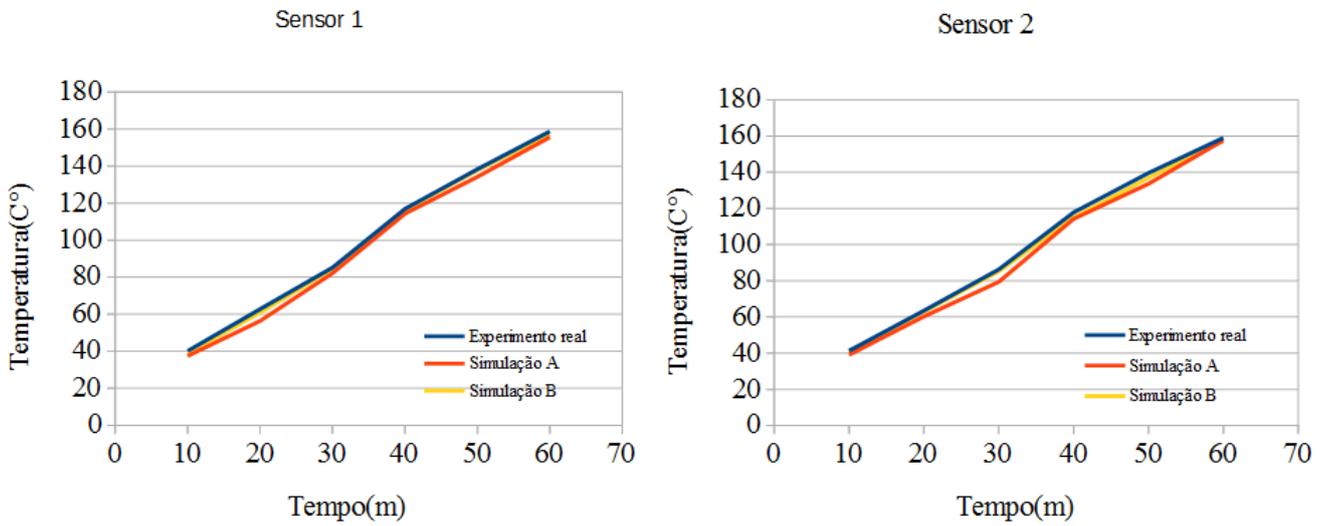


Figura 14 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Latão

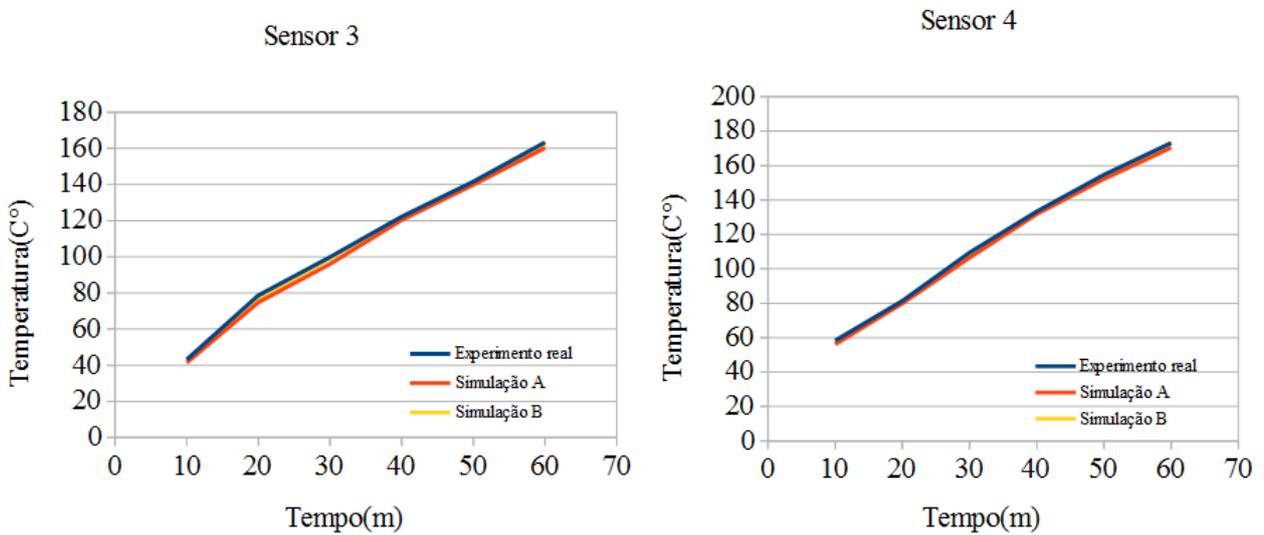


Figura 15 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Alumínio

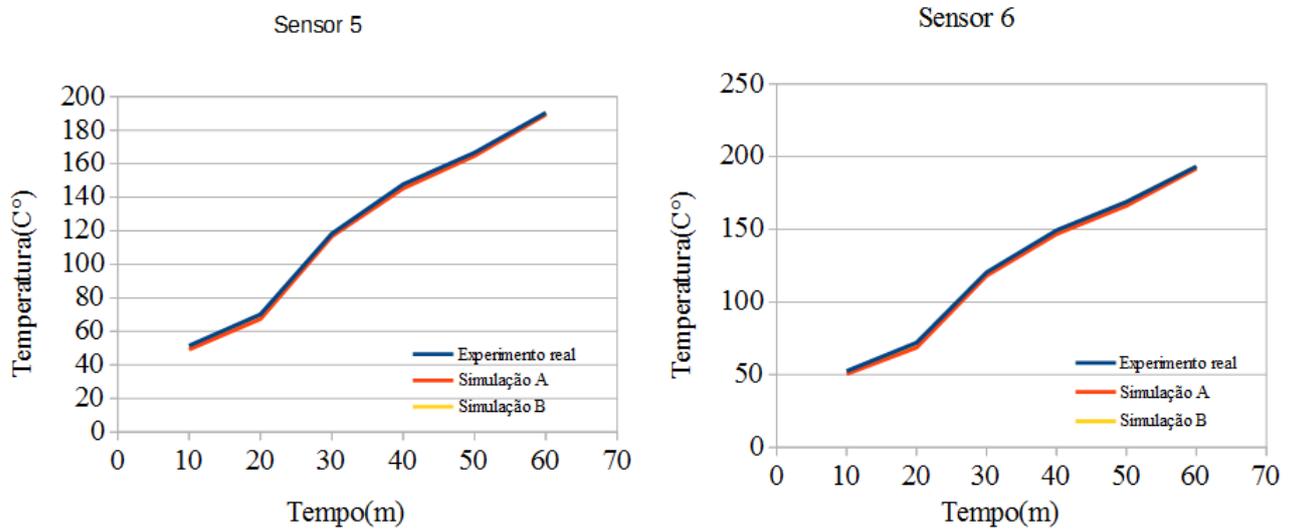


Figura 16 – Gráficos de temperatura em relação ao tempo do Cilindro de Alumínio

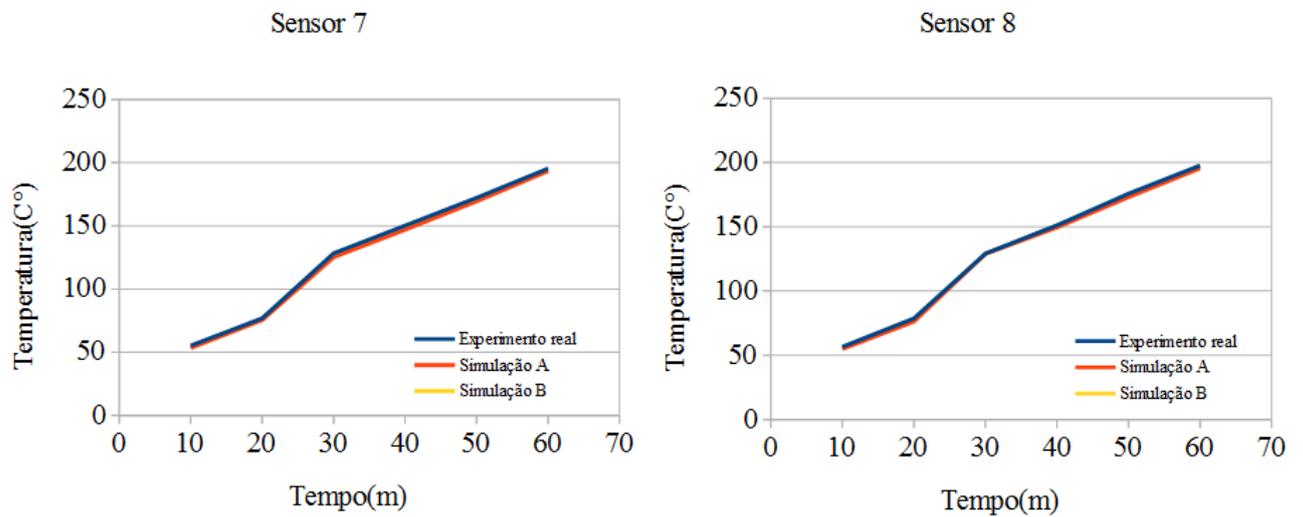


Tabela 4 – Tabela de comparação das temperaturas do Cilindro de Latão.

Sensor 1	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	40,2	62,8	85,2	116,9	138,3	158,7
Temperatura da Simulação 1	37,5	56,4	82,2	114,3	134,2	155,6
Temperatura da Simulação 2	38,9	60,9	84,4	116,2	137,7	157,1
Erro % da Simulação 1	6,7	10,1	3,5	2,2	2,9	1,9
Erro % da Simulação 2	3,2	3	0,9	0,5	0,4	1
Sensor 2	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	41,3	63,5	86,3	117,8	139,6	159
Temperatura da Simulação 1	39,1	60,3	79,4	114,2	133,6	157,6
Temperatura da Simulação 2	40,9	62,9	85,2	115,1	136,9	158,4
Erro % da Simulação 1	5,3	5	7,9	3	4,2	0,8
Erro % da Simulação 2	0,9	0,9	1,2	2,2	1,9	0,3
Sensor 3	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	43,2	78,7	99,9	122,3	141,7	163,4
Temperatura da Simulação 1	41,4	74,8	96	120,4	139,9	160,3
Temperatura da Simulação 2	42,8	76,6	99	121,9	140,6	162,3
Erro % da Simulação 1	4,1	4,9	3,9	1,5	1,2	1,8
Erro % da Simulação 2	0,9	2,6	0,9	0,3	0,7	0,6
Sensor 4	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	58,3	81,4	109,5	133,4	154,7	173,2
Temperatura da Simulação 1	56,1	79,9	106,5	131,8	152,2	170,4
Temperatura da Simulação 2	57,9	81,2	108,8	132,9	153,1	172,8
Erro % da Simulação 1	3,7	1,8	2,7	1,1	1,6	1,6
Erro % da Simulação 2	0,6	0,2	0,6	0,3	1	0,2

Tabela 5 – Tabela de comparação das temperaturas do Cilindro de Alumínio.

Sensor 5	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	51,5	70,2	118,3	147,7	166,6	190,4
Temperatura da Simulação 1	49,2	67,4	116,7	145,3	164,7	189,3
Temperatura da Simulação 2	50,6	69,7	117,9	146,7	165,7	190
Erro % da Simulação 1	4,4	3,9	1,3	1,6	1,1	0,5
Erro % da Simulação 2	1,7	0,7	0,3	0,6	0,5	0,2
Sensor 6	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	52,5	72,1	120,4	149,3	168,9	193,2
Temperatura da Simulação 1	50,5	68,7	118,1	146,7	166,2	191,8
Temperatura da Simulação 2	51,8	71,2	119,9	148,7	168,8	193,1
Erro % da Simulação 1	3,8	4,7	1,9	1,7	1,5	0,7
Erro % da Simulação 2	1,3	1,2	0,4	0,4	0,05	0,05
Sensor 7	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	55,3	76,9	128,3	150,2	172,2	195,4
Temperatura da Simulação 1	53,3	75,4	125,2	146,9	169,4	193,4
Temperatura da Simulação 2	54,7	76,3	127,4	148,9	171,3	194,1
Erro % da Simulação 1	3,6	1,9	2,4	2,1	1,6	1
Erro % da Simulação 2	1	0,7	0,7	0,8	0,5	0,6
Sensor 8	10min	20min	30min	40min	50min	60min
Temperatura Experimento	56,6	78,7	129,2	151,2	175,8	197,7
Temperatura da Simulação 1	54,9	76,2	128,9	149,5	173,1	195,5
Temperatura da Simulação 2	56,2	78,2	129	150,9	174,2	196,2
Erro % da Simulação 1	3,1	0,2	1,1	1,5	1,1	1,1
Erro % da Simulação 2	0,6	0,1	0,1	0,9	0,7	0,7

7 Considerações Finais

De acordo com os gráficos e tabelas dos resultados apresentados neste trabalho o objetivo da simulação de transferência de calor foi alcançado com um grau de confiança aceitável, e, dependendo da aplicação em que for utilizada, pode servir de parâmetro para outros experimentos. Pode-se observar, em uma análise elementar, primeiramente, que as temperaturas dos sensores que estão mais próximos da fonte de calor se mantiveram maiores durante toda simulação. As temperaturas encontradas no cilindro de alumínio se mantiveram, em todos os momentos da simulação, maiores que as temperaturas do cilindro de latão, isso se deve a maior capacidade do material na transmissão de calor por condução, demonstrada na simulação. Dos dois tipos de refinamento de malhas utilizados, pode-se facilmente perceber que os melhores resultados alcançados foram os da malha triangular(Caso B/Simulação 2), isso se deve ao fato de existirem mais pontos próximos ao sensores, gerando assim resultados mais parecidos com as temperaturas do experimento real. No Caso A, descrito como “Simulação 1”, onde utilizamos uma malha retangular para o refinamento, obtivemos os melhores resultados nos Sensores 5 e 8, aos 60 e 20 minutos respectivamente, com um erro de $1,1^{\circ}\text{C}$ aos 60 minutos e $2,5^{\circ}\text{C}$ aos 20 minutos. Em média, o melhor resultado foi encontrado no sensor 8, com um erro de $1,8^{\circ}\text{C}$. Na malha triangular, descrita como “Simulação 2” os melhores resultados foram encontrados no sensor 4 e no sensor 6, ambos aos 60 minutos, onde a diferença entre a temperatura do experimento para a simulação foi de $0,4^{\circ}\text{C}$ e $0,1^{\circ}\text{C}$, respectivamente. Em média, os melhores resultados da simulação 2 foram obtidos no sensor 6, com média de erro de $0,4^{\circ}\text{C}$ e no Sensor 4, com $0,6^{\circ}\text{C}$. Pode-se concluir com as simulações que a diferença entre os resultados obtidos com a malha retangular é relativamente pior que os obtidos com a malha triangular, porém o tempo de processamento e recursos computacionais utilizados para o cálculo das temperaturas com a malha triangular é consideravelmente maior.

Referências

- ANDRADE, E. L. de. *Introdução à pesquisa operacional*. [S.l.]: LTCE, 1990. Citado na página 36.
- BAUDE, E. Refinamento adaptativo de malhas 2d e 3d para a solução numérica de problemas de propagação eletromagnética. *Biblioteca Digital da Unicamp*, 2000. Citado na página 22.
- CHI, M. T.; FELTOVICH, P. J.; GLASER, R. Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive science*, v. 5, n. 2, p. 121–152, 1981. Citado na página 21.
- CUNHA, M. C. C. *Métodos numéricos*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 26 e 27.
- DELAUNAY, B. Sur la sphere vide. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, v. 7, n. 793-800, p. 1–2, 1934. Citado na página 42.
- DONGARRA, J. J. et al. *Solving linear systems on vector and shared memory computers*. [S.l.]: ACM, 1990. Citado na página 19.
- FILHO, A. A. Elementos finitos. *São Paulo: Érica*, 2000. Citado na página 21.
- FORTES, W. R. *Precondicionadores e solucionadores para resolução de sistemas lineares obtidos de simulação de enchimento de reservatórios*. Tese (Doutorado) — Fortes, Wagner Rodrigues, 2008. Citado na página 21.
- GEORGE, P.; HERMELINE, F. Delaunay’s mesh of a convex polyhedron in dimension d. application to arbitrary polyhedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 33, n. 5, p. 975–995, 1992. Citado na página 41.
- GJESING, R.; HATTEL, J.; FRITSCHING, U. Coupled atomization and spray modelling in the spray forming process using open foam. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, Taylor & Francis, v. 3, n. 4, p. 471–486, 2009. Citado na página 48.
- HARRELL, C. *System improvement using simulation*. [S.l.]: Promodel Corp., 1992. Citado na página 39.
- HOLMAN, J. P. *Transferencia de calor*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 45.
- KELTON, W. D.; SADOWSKI, R. P.; SADOWSKI, D. A. *Simulation with arena, WCB*. Tese (Doutorado) — McGraw-Hill, New York, NY, 1998. Citado na página 34.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2013. Citado na página 19.
- LEAL, F. *Um diagnóstico do processo de atendimento a clientes em uma agência bancária através de mapeamento do processo e simulação computacional*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 22, 33 e 38.

- MARRETO, C.; MACHADO, J. A compact library for automatic generation of tetrahedral meshes using the mathematica system. *Proc. of 8th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering & European TEAM Workshop.*, 1998. Citado na página 44.
- MOREIRA, C. M. *Estratégias de reposição de estoques em supermercados: avaliação por meio de simulação*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção., 2001. Citado 4 vezes nas páginas 34, 35, 36 e 37.
- NAYLOR, T. H. et al. Técnicas de simulação em computadores. *Editores Vozes, São Paulo*, 1971. Citado na página 38.
- O’KANE, J.; SPENCELEY, J.; TAYLOR, R. Simulation as an essential tool for advanced manufacturing technology problems. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 107, n. 1, p. 412–424, 2000. Citado na página 33.
- PEREIRA, I. C. Proposta de sistematização da simulação para fabricação em lotes. *Itajubá, MG: Dissertação de Mestrado, UNIFEI*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- RODRIGUES, R. d. E. S.; MOURA, Â. B. D.; MONTICELLI, C. O. Transferência de calor unidimensional: Um experimento didático. 2006. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 48.
- SAAD, Y.; VORST, H. A. V. D. Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 123, n. 1, p. 1–33, 2000. Citado na página 19.
- SAKAMOTO, M. M. Implementação de um gerador tridimensional de malhas de elementos finitos, com aplicações à simulação computacional em odontologia. *UNESP*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- SAKAMOTO, M. M. *Algoritmo de refinamento de Delaunay a malhas seqüenciais, adaptativas e com processamento paralelo*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. Citado na página 43.
- SHANNON, R. E. Systems simulation. *Prentice-Hall*, 1975. Citado na página 33.
- STRACK, J. *GPSS: modelagem e simulação de sistemas*. [S.l.]: LTC, 1984. Citado na página 33.
- WAZWAZ, A.-M. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: CRC Press, 2012. Citado na página 21.