Método axiomático e teoria econômica*

Jorge Paulo de Araújo[**] — *Professor Adjunto do Departamento de Relações Internacionais e Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)*

Tanise Brandão Bussmann[***] — *Economista da UFRGS, Pós-Graduanda em Economia do Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional de Minas Gerais (Cedeplar) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)*

Resumo

O objetivo do presente artigo é apresentar a origem comum e os diferentes significados do método axiomático aplicado à teoria econômica em John von Neumann e Gerard Debreu.

Palavras-chave

Método axiomático; John von Neumann; Gerard Debreu.

Abstract

The objective of this paper is to present the common origin and the different meanings of the axiomatic method applied to the economic theory of John von Neumann and Gerard Debreu.

Key words

***Axiomatic method;* John von Neumann; Gerard Debreu.**

Classificação JEL: **B40, B23.**

* Artigo recebido em maio 2012 e aceito para publicação em jun. 2013.

** *E-mail*: 00006283@ufrgs.br

*** *E-mail*: tanisebrandao@gmail.com

Os autores agradecem ao Economista Rafael Luís Spengler pela leitura prévia e sugestões, eximindo-o da responsabilidade por eventuais equívocos.

1 Introdução

Os livros **Teoria do Valor**, de Gerard Debreu, e **Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico**, de von Neumann e Morgenstern, são exemplos do uso da Matemática em Economia, assim como o célebre **Análise Econômica**, de Paul Samuelson.

Claramente, o **Teoria do Valor**, de Debreu, e o **Análise Econômica**, de Paul Samuelson, divergem não apenas do ponto de vista estrito da teoria econômica e nos métodos matemáticos empregados, mas no papel que atribuem à Matemática Aplicada e como a concebem. Entretanto as diferenças entre von Neumann e Debreu em relação à Matemática são menos visíveis. Esse é o tema do presente artigo.

Todos atribuem à Matemática concisão, generalidade, objetividade e rigor. Essas propriedades justificam seu emprego. Todavia, para Debreu, tais propriedades resultam de um método matemático, chamado axiomático, que, por sua vez, como Nicholas Bourbaki, Debreu parece confundir com a própria Matemática. Neumann também emprega o método axiomático, mas está distante de confundi-lo com a própria Matemática.

O objetivo deste trabalho é enfatizar a diferença dos papéis da Matemática na teoria econômica, entre Neumann e Debreu, ainda que ambos tenham uma origem comum.

Nas seções 2 e 3, estabelecem-se as origens do método axiomático moderno. Na seção 4, define-se o método axiomático na concepção de Hilbert. Nas seções 5 e 6, expõem-se as versões desse método em Neumann, Bourbaki e Debreu. Finalmente, na seção 7, comentam-se as semelhanças e diferenças entre Neumann e Debreu.

2 A abstração progressiva

O modelo de Matemática como ciência axiomática nasceu no fim do século XVIII, com o surgimento das geometrias não euclidianas. A partir dessas geometrias, destacou-se a possibilidade de teorias matemáticas que explorassem consequências formais de princípios falsos de um ponto de vista supostamente empírico.

O modelo de ciência válido no século XVIII construía o corpo de conhecimentos sobre os suportes da experiência empírica e dos princípios, *a priori*, não empíricos que conformam a experiência.

As geometrias não euclidianas iniciaram a separação entre os conceitos de verdade matemática e de verdade em geral. Até aquele momento, proposições eram verdadeiras, porque correspondiam a fatos ou a princípios cuja verdade se obtém por outra fonte que não a empírica. Se, no começo, os axiomas das geometrias não euclidianas são simplesmente proposições falsas, porque não correspondem aos fatos, progressivamente, os matemáticos compreenderam que seus resultados são independentes da verdade ou da falsidade dos axiomas e que a geometria se reduz a deduzir proposições de princípios mais ou menos independentes em relação aos fatos.

Outro impulso para a axiomatização originou-se do esforço de integrar as diferentes geometrias, incluindo a geometria projetiva, num corpo coerente de princípios. Ora, o que dirige aqui a formulação de axiomas não é a sua verdade ou falsidade, mas o seu potencial unificador. Assim, introduziram-se, em geometria projetiva, os chamados "elementos ideais", como, por exemplo, pontos no infinito.

Por outro lado, a álgebra do século XIX começou a reconhecer a existência de estruturas como grupos, anéis, ideais e corpos em disciplinas diversas. A Teoria dos Grupos surgiu dos trabalhos de Paolo Ruffini (1765-1822), que introduziu o conceito de grupo de permutações nos seus estudos sobre funções racionais. A partir do estudo do grupo de permutações das raízes de um polinômio, Evarist Galois (1811-1832) obteve uma condição necessária e suficiente para a obtenção das raízes de um polinômio através de radicais.

As generalizações de número inteiro começaram com Karl-Friedrich Gauss (1777-1855), quando introduziu o conceito de inteiros gaussianos $a+i \cdot b$ com $a,b \in Z$. Posteriormente, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) chamou de inteiros algébricos aqueles $a+i \cdot b$ que são raízes de polinômios unitários com coeficientes inteiros. O conjunto dos números que satisfazem tais polinômios não constitui um subcorpo de Z, pois faltam os inversos multiplicativos. Todavia exemplifica uma nova estrutura algébrica chamada anel de integridade. Dedekind introduziu a noção de ideal a partir da noção prévia de anel definida por Ernest Eduard Kummer (1810-1893).

Embora, no século XIX, esses matemáticos tenham direcionado a álgebra para a formulação dos conceitos de estruturas algébricas, que, logicamente, se descolaram das intenções originais, para eles, o objetivo dessas estruturas ainda se relaciona ao esclarecimento e à análise das raízes de polinômios.

Portanto, a álgebra ainda era o que sempre foi: resolução de equações algébricas. Progressivamente, as estruturas algébricas emergiram como objetivo de estudo autônomo, e os conceitos relacionados e originários dos números inteiros, racionais, reais ou complexos tornaram-se exemplos dessas estruturas.

O livro fundamental para a nova perspectiva é o **Moderne Algebra**, de Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996), publicado entre 1930 e 1931. Na **Introdução** desse livro, van der Waerden apresenta seu objetivo:

> A direção abstrata, formal ou axiomática a qual se deve o novo ímpeto na álgebra tem propiciado novas formulações de ideias, compreensão de inter-relações e resultados de grande alcance, especialmente em teoria dos grupos, teoria dos corpos, teoria da valoração, teoria dos ideais e teoria dos números hipercomplexos. O principal objetivo do livro é introduzir o leitor nesse mundo completo de conceitos. (Waerden, 1991, p. ix, tradução nossa).[1]

Esse livro exemplifica a crescente abstração que, para o bem ou para o mal, marcou a Matemática do século XX.

Outro impulso em direção à abstração foi dado pela Teoria dos Conjuntos, graças às muitas dificuldades que surgiram dessa teoria.

A Teoria dos Conjuntos é criação de um matemático alemão chamado George Cantor (1845-1915), que, na década de 70 do século XIX, estudando a representação de funções em séries trigonométricas, formulou a noção de conjunto derivado e, daí, partiu para a construção de números ordinais transfinitos. Algumas ideias importantes para Cantor, como de conjunto derivado e o chamado método diagonal, foram obtidas antes pelo Matemático Dubois-Reymond, mas foi Cantor que abstraiu essas ideias do contexto em que estavam imersas e as desenvolveu por si mesmas (Wang, 1954, p. 243-244).

A Teoria dos Conjuntos pode ser dividida em duas classes de conceitos. Uma, muito antiga, que remonta a Aristóteles, que, na Teoria do Silogismo, trata, essencialmente, das relações de pertinência, de estar contido, de união, da intersecção de conjuntos e do conjunto complementar. Toda a Teoria do Silogismo aristotélica pode ser expressa através dessas noções.

A outra classe de conceitos trata do infinito e significa uma negação da noção aristotélica de infinito como aquilo que não tem término. Como diz o próprio Cantor no ensaio **Fundamentos Para Uma Teoria Geral dos Conjuntos, Uma Investigação Matemático-Filosófica Sobre a Teoria do Infinito**, de 1882:

> Foi no transcurso de muitos anos de esforços e investigações científicas que me vi impulsionado logicamente, quase contra a minha vontade (pois se opõe a tradições que foram muito apreciadas por mim), ao ponto de vista de considerar o infinitamente grande não só na forma de algo que cresce sem limites [...] mas também na forma determinada daquilo completamente infinito [...]. (Cantor, 1996, p. 890, tradução nossa).

[1] Todas as citações foram traduzidas pelos autores deste trabalho, exceto Hilbert (2003).

Portanto, o tema principal da Teoria dos Conjuntos é a noção de infinito. As tradições apreciadas por ele, às quais Cantor se refere, são as aristotélicas.

A nova noção que Cantor introduz é que os infinitos são muitos, e ele inventa um processo para classificá-los. Cantor cria uma maneira de contar quantos elementos existem em conjuntos que possuem infinitos elementos.

Um dos argumentos de Cantor consiste na demonstração de que os subconjuntos de um conjunto sempre são em maior número do que os elementos do conjunto. Facilmente, verifica-se isso em relação a conjuntos com um número finito de elementos. Por exemplo, se se tomar o conjunto $X = \{a,b,c\}$, o conjunto das partes de X é

$$2^X = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

que tem oito elementos. Não é difícil perceber que, se X tem n elementos, então, são 2^n subconjuntos. Fato que explica a notação 2^X para o conjunto dos subconjuntos de X. Sabe-se que $n < 2^n$, se $n \geq 1$. A novidade é que Cantor estende esse resultado para conjuntos infinitos, demonstrando que o número de elementos de um conjunto qualquer X, a cardinalidade de X, notada $\#X$, é sempre menor que a cardinalidade $\#2^X$ de 2^X. Ora, a primeira consequência que se tem é que não se pode falar do conjunto de todas as coisas, pois o conjunto de todas as coisas, digamos U, deve conter $\#2^U$ e, portanto, conteria mais elementos do que possui! Esse resultado, no mínimo, mostra que, segundo a noção de conjunto introduzida por Cantor nos artigos **Contribuições Para a Teoria dos Números Transfinitos**, de 1895, se "[...] por um 'agregado' entendemos qualquer reunião em um todo M de objetos bem definidos de nossa intuição ou de nosso pensamento", isso não é sustentável, porque pensar a totalidade dos objetos nos conduz a uma contradição.

Muito resumidamente, para o Matemático Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), a lógica é o ponto de partida para a fundamentação da aritmética. Frege é o primeiro autor a perceber que a lógica aristotélica é insuficiente para expressar a Matemática e procura elaborar uma linguagem e expressar as leis gerais adequadas para a Matemática

No **Fundamentos da Aritmética** (1884), Frege formula o conceito de número cardinal através da Teoria dos Conjuntos de Cantor. Entre 1893 e 1903, Frege escreveu o que considera a sua grande obra, **As Leis Fundamentais da Aritmética**, onde pensa ter feito a redução da aritmética à lógica.

A radicalização do programa fregeano foi realizada por Bertrand Arthur William Russel (1872-1970), que procurou reduzir toda a Matemática à lógica no famoso **Principia Mathematica** (1910-13), em coautoria com Alfred North Whitehead (1861-1947).

Em 1902, pouco antes de ser publicado o segundo volume do **As Leis Fundamentais da Aritmética**, Bertrand Russel, numa carta para Frege, observou que a correspondência que Frege havia admitido entre conjuntos e funções proposicionais, isto é, entre conjuntos e conceitos, conduz a uma contradição. O conhecido paradoxo, chamado de Paradoxo de Russel, pode ser formulado de maneira simples. Seja $C = \{x \mid x \notin x\}$, então, se $C \in C \rightarrow C \notin C$ e se $C \notin C \rightarrow C \in C$, isto é, $C \in C \leftrightarrow C \notin C$.

As tentativas para eliminar as contradições originadas na Teoria dos Conjuntos foram outro forte impulso para a abstração, como se verá a seguir.

3 O método axiomático e o formalismo de Hilbert

O método axiomático moderno surgiu em 1895, com **Os Fundamentos da Geometria**, de Hilbert, que o autor define como "a análise lógica de nossas intuições espaciais" (Hilbert, 2003, p. xix).

O precursor de Hilbert é Euclides (300 a.C.) com **Os Elementos**. Mas, diferentemente do grego, Hilbert não fornece alguma definição para ponto, reta, etc. Esses conceitos são definidos, implicitamente, pelas relações que mantêm entre si, nos axiomas. Essa é uma diferença fundamental entre Euclides e Hilbert. O sistema euclidiano é o que se chama de uma axiomática material; e o sistema hilbertiano é uma axiomática formal. Em Euclides, os conceitos primitivos têm definições; em Hilbert, não têm. Essa concepção de teoria matemática não é originalmente de Hilbert, ela já estava implícita nas geometrias não euclidianas, mas foi ele que a colocou como um princípio metodológico da Matemática.

As proposições iniciais que enlaçam os conceitos primitivos e que constituem as definições desses conceitos são chamadas axiomas e devem ser escolhidas de forma a "[...] construir um sistema completo de axiomas mais simples possível" (Hilbert, 2003, p. xix, tradução nossa). Por completo, o autor quer dizer que, através desse sistema de axiomas, se podem deduzir "os mais importantes teoremas" da geometria plana.

A outra ideia é que o sistema de axiomas tem que ser consistente, isto é, não dar origem a contradições. No Capítulo 2 de **Os Fundamentos da Geometria**, depois de expor o conjunto dos axiomas no Capítulo 1, Hilbert espelha esses axiomas no R^2, para obter uma demonstração da consistência relativa, ou seja, se a geometria analítica plana é consistente, então, também é a geometria euclidiana plana.

Além disso, Hilbert analisa a independência relativa dos grupos de axiomas e mostra a independência do famoso V postulado euclidiano em relação aos outros axiomas. Pode-se dizer que, do ponto de vista metodológico, esse pequeno livro é o começo da Matemática como a entendemos hoje.

No artigo **Sobre o Conceito de Número**, publicado em 1900, Hilbert defende o método axiomático como uma maneira de conter um provável fluxo de contradições para o interior das teorias matemáticas causado pelo chamado método genético.

O método genético consiste em introduzir novos conjuntos de números, de maneira que novas equações tenham soluções. Na sequência, introduzem-se os números inteiros negativos, fracionários, irracionais e, finalmente, os números complexos.

O Historiador Leo Corry (2000) mostra que as origens do método axiomático de Hilbert estão nas preocupações com a fundamentação da Física. Hilbert também critica o costume dos físicos de introduzirem um novo princípio, quando, aparentemente, se faz necessário, apelando para a verdade empírica daquele para justificar sua compatibilidade com o corpo teórico restante (Corry, 2000).

Por outro lado, em geometria, os elementos como pontos, retas e planos, juntamente com as relações entre esses elementos, são introduzidos todos de uma vez. Esse é o método axiomático, ou seja, a apresentação de todos os objetos e de todas as suas relações.

> A minha opinião é esta: apesar do grande valor pedagógico e heurístico do método genético, o método axiomático é preferível para uma exposição definitiva e logicamente segura dos conteúdos de nosso conhecimento. (Hilbert, 1953, p. 245, tradução nossa).

Hilbert concebe a geometria como uma análise das propriedades do espaço físico (Corry, 2002). Uma visão tradicional diversa daquela do século XX, que vê a geometria como um sistema formal desconectado de interpretações particulares.

Corry (2000) sita três físicos que exerceram influência em Hilbert. São estes, Heinrich Hertz, Carl Neumann e Paul Volkmann. Esses três homens se preocuparam com os princípios fundamentais da Física e, mais particularmente, com aquilo que se pode chamar de “lógica” desses princípios.

Hertz, no livro **Os Princípios da Mecânica**, publicado, postumamente, em 1896, estabelece certas condições que as teorias devem satisfazer. Por exemplo, não devem contradizer as leis do pensamento, ou seja, não devem ser autocontraditórias; não devem contradizer as relações externas que estão expressando; e devem expressar o maior número possível de relações externas e o menor número possível de relações inexistentes externamente. Numa linguagem moderna, pode-se dizer que as teorias devem ser consistentes, com axiomas verdadeiros, quando interpretados, e, se possível, completas, no sentido de que toda a proposição verdadeira deve ser, logicamente, deduzida dos axiomas.

Ironicamente, a concepção da Matemática como um sistema de proposições desconectadas de interpretações também encontra suas origens em Hilbert, como é bem sabido. Por isso, a maioria dos autores facilmente acredita que a formalização de Hilbert se relaciona, exclusivamente, com o seu programa de assegurar bases consistentes para a Matemática Cantoriana.

Defensor da Teoria dos Conjuntos de George Cantor, Hilbert e sua escola procuraram métodos que permitissem tratar a Matemática como um objeto matemático e, assim, obter demonstrações de que, pelo menos, as teorias mais fundamentais estavam livres de inconsistências.

O interesse "mais de perto" de Hilbert nos fundamentos da Matemática resulta da publicação do famoso paradoxo que Russel encontrou no sistema de Frege. Diz Hilbert, no célebre artigo **Sobre o Infinito**, de 1925,

> Foi, em especial, a contradição descoberta por Zermelo e Russel que, dada a conhecer ao mundo matemático, teve o efeito de uma catástrofe em nossa disciplina (Hilbert, 1993a, p. 93, tradução nossa).

E continua:

> [...] o estado em que nos encontramos atualmente por causa dos paradoxos é insuportável pela duração. Se, em Matemática, modelo de certeza e verdade, os conceitos e raciocínios, tal e como todo mundo ensina, aprende e aplica, conduzem a disparates, onde encontraremos, por outro caminho, a segurança e a verdade, quando até o pensamento matemático falha? (Hilbert, 1993a, p. 94, tradução nossa).

Em 1885, Charles Sanders Pierce, ao tratar uma propriedade x que vale para algum indivíduo, escreve $\sum_i x_i = x_1 + x_2 + \ldots$, onde x_i significa que a propriedade vale para o indivíduo i. Então, o somatório acima significa "x_1 ou x_2 ou x_3...", isto é, uma "soma lógica". Para dizer que uma propriedade vale para todo o indivíduo i, Pierce escreve $\prod_i x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots$, que significa que "x_1 e x_2 e x_3 ..." é um "produto lógico". Ambas as proposições são infinitamente longas, se o número de indivíduos não é limitado.

No artigo **Sobre os Fundamentos da Lógica e da Aritmética**, de 1904, Hilbert mantém a interpretação acima. Hilbert entende um determinado enunciado $A(x)$, que é válido para todo o número natural x arbitrário, como uma proposição infinita longa "$A(x_1)\, e\, A(x_2)\, e\, A(x_3)\, e \ldots$", ou seja, $\prod_i x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots$; um enunciado que vale para, pelo menos, um natural x, como uma proposição infinitamente longa "$A(x_1)\, ou\, A(x_2)\, ou\, A(x_3)\, ou \ldots$", ou seja, $\sum_i x_i = x_1 + x_2 + \ldots$.

O artigo **Sobre o Infinito**, de 1925, é a consolidação do pensamento de Hilbert sobre as questões metodológicas da Matemática. Na primeira parte do artigo, expõe o método axiomático e a metamatemática, que chama de Teoria da Demonstração. Claramente, mostra que o único critério de validade para o emprego de qualquer ideia, em Matemática, é o de consistência, cuja demonstração exige que se reduza a teoria a um sistema de signos sem significados. "[...] devemos substituir as argumentações com o infinito por processos finitos que nos conduzam ao mesmo resultado, quer dizer, que façam possível as mesmas demonstrações e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas" (Hilbert, 1993a, p. 84, tradução nossa).

Nesse artigo, as interpretações acima para os quantificadores "existe" e "todos" são a causa dos problemas da Teoria dos Conjuntos. Um enunciado existencial não pode ser interpretado como uma disjunção infinita; e um enunciado universal, como uma conjunção infinita. As interpretações como disjunção e conjunção são válidas apenas para domínios de finitos.

No artigo **Sobre o Infinito**, Hilbert faz uma longa exposição sobre a inexistência de objetos em quantidade infinita. Então, as fórmulas que fazem referências a conjuntos com infinitos objetos são desprovidas de significado, porque não correspondem a conjuntos fisicamente existentes.

Hilbert começa observando que, no passado, a Matemática enfrentou problemas semelhantes e que, para isso, por exemplo, na álgebra, introduziu $i = \sqrt{-1}$, para que todas as equações algébricas tivessem raízes e com o objetivo de manter as leis da álgebra da maneira mais simples possível (Hilbert, 1993a, p. 100). Esse método Hilbert chama de "introdução de elementos ideais". Pois bem, em relação às proposições discutidas, tem-se que junto "[...] aos enunciados finitos acrescentar os enunciados ideais". No que constituem esses "enunciados ideais"? "Fórmulas que não têm significado" (Hilbert, 1993a, p. 103):

> Todas as fórmulas que fazem referência ao infinito são ideais nesse sentido e basta que sejam definidas de maneira que não conduzam a inconsistências. E, em relação às proposições lógicas, a maneira como são definidos os enunciados ideais é tal que o que não queremos é precisamente renunciar ao uso

> das leis simples da lógica aristotélica (Hilbert, 1993a, p. 100, tradução nossa).

Esse é o chamado enfoque finitista:

> A generalização dessa ideia [o enfoque finitista] nos conduz a uma concepção das matemáticas que as considera um inventário de fórmulas, às quais correspondem, em primeiro lugar, expressões concretas de enunciados finitistas, às quais se acrescentam, em segundo lugar, outras fórmulas que não têm significado nenhum e que constituem os objetos ideais de nossa teoria (Hilbert, 1993a, p. 102, tradução nossa).

Os enunciados ideais, por sua vez, introduzem a necessidade da formalização:

> [...] os enunciados ideais carecem de significação e, por isso, não podemos aplicar as operações lógicas de maneira concreta como aos enunciados finitistas. É necessário submeter as operações lógicas e as demonstrações a um processo de formalização. Esse processo requer uma reformulação das relações lógicas em fórmulas (Hilbert, 1993a, p. 102, tradução nossa).

Para Hilbert, os objetivos para a análise de um sistema axiomático são: a demonstração da completude desse sistema, ou seja, que todas as proposições, ou suas respectivas negações, podem ser provadas a partir do conjunto de axiomas escolhido; a independência do conjunto de axiomas, isto é, que alguns axiomas não podem ser obtidos a partir dos demais; finalmente, a consistência, isto é, que não se pode provar uma proposição e a respectiva negação.

Como Kant, Hilbert não vê o problema nos princípios lógicos, mas na sua aplicação indevida, ou seja, no seu uso não crítico:

> [...] podemos recorrer à ciência que quisermos e conduzir as observações e experiências que desejarmos, o infinito não se encontra em parte alguma na realidade. Poderia ocorrer, entretanto, que o lugar próprio do infinito não seja a realidade, mas nosso pensamento. E pode resultar que, neste, o infinito assuma uma função conceitual absolutamente imprescindível (Hilbert, 1993a, p. 94, 87, tradução nossa).

Para Hilbert, os paradoxos da Teoria dos Conjuntos surgem, porque não se reconhece adequadamente o papel de enunciados ideais para as proposições que tratam do infinito. Comete-se o erro de atribuir para essas proposições significados similares àqueles atribuídos para as proposições finitistas. Na atribuição de significado aos enunciados ideais, o que deve guiar é a manutenção da validade das regras lógicas usuais para os enunciados finitistas.

A radicalização do programa hilbertiano, obviamente, simplifica a questão, compreendendo os significados dispensáveis não apenas em relação aos enunciados ideais, mas em relação a todas as proposições, desde que estabelecidas, claramente, quais são as regras lógicas que devem ser preservadas. Esse é, propriamente, o processo final de abstração e formalização.

Hilbert concebe o método axiomático como um procedimento de análise tanto na Física quanto na Matemática. Na Física, segue as prescrições de Heinrich Hertz principalmente. Na Matemática, tal método tem emprego idêntico, ou seja, a análise das relações entre os axiomas: "[...] as investigações sobre os fundamentos da geometria sugerem o problema: tratar da mesma maneira, através de axiomas, aquelas ciências físicas nas quais a Matemática tem papel importante" (Hilbert, 1902, p. 454, tradução nossa).

Posteriormente, na fase formalista, Hilbert divisa, na axiomática, a possibilidade de evitar as inconsistências da Teoria dos Conjuntos e de obter métodos matemáticos para a demonstração da consistência e da completude das teorias matemáticas através da redução dessas teorias a sistemas formalizados: "[...] existe uma única e absolutamente necessária condição para a aplicação dos elementos ideais, a saber, a prova de consistência" (Hilbert, 1993a, p. 106, tradução nossa).

4 John Von Neumann

Von Neumann ingressou na Universidade de Göttingen para seu Pós-Doutorado, sob orientação de David Hilbert, em 1926. O objetivo era trabalhar nos fundamentos da Matemática, mas logo se envolveu com mecânica quântica (Leonard, 2007). Em 1927, já era famoso através de uma série de trabalhos importantes em Teoria dos Conjuntos, álgebra e mecânica quântica (Ulam, 1958).

Em 1928, von Neumann publicou o artigo **Zur Theorie der Gesselschaftsspiele**[2] (von Neumann, 1928), onde está a primeira demonstração do Teorema Minimax. Em 1932, apresentou uma versão preliminar do que viria a ser conhecido como seu modelo de equilíbrio geral nos colóquios de Karl Menger (von Neumann, 1968). Entre as inovações desse trabalho, está a utilização de desigualdades, ao invés de igualdades, na produção e no consumo de bens, ou seja, inequações ao invés de equações, e o uso do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para provar a existência de equilíbrio. Em 1944, publicou o livro **The Theory of Games and Economic Behavior** (von Neumann; Morgenstern, 1953), escrito, conjuntamente, com o Economista Oskar Morgenstern.

[2] Em português, **Sobre a Teoria dos Jogos**.

Para von Neumann, a grande vantagem da aplicação do sistema axiomático hilbertiano é a ausência de conteúdo. O mesmo funciona a partir de regras que são criadas com a combinação dos símbolos primitivos, advindos de axiomas ou de teoremas, sendo admitidos, no primeiro caso, ou provados, no segundo caso (Rashid, 2007).

Mesmo após Gödel ter provado a incompletude da aritmética, que explicita as falhas do formalismo hilbertiano, von Neumann defende a utilização da técnica axiomática, pois, para ele, "[...] a axiomatização da teoria dos conjuntos era apenas um modo de proceder" (Rashid, 2007, p. 510, tradução nossa), ou seja, o *modus operandi* presente no formalismo poderia continuar a ser utilizado. Von Neumann segue acreditando no instrumental axiomático, bem como nos resultados do método de raciocínio abstrato. Entretanto a teoria formalista e o Programa de Hilbert acabam deixando de interessar von Neumann. "Minha opinião pessoal, partilhada com outros, é que Gödel mostrou que o programa de Hilbert é, essencialmente, sem esperança" (von Neumann, 1947a, n. p., tradução nossa).

Na conferência The Role of Mathematics in the Sciences and in Society, proferida em 1954, von Neumann observa que

> Têm existido flutuações bastante sérias de opinião entre os matemáticos profissionais sobre o que é rigor matemático. Na minha própria experiência, que se estende por apenas trinta anos, isso tem flutuado tão consideravelmente, que a minha convicção pessoal e sincera sobre o que é rigor mudou, no mínimo, duas vezes (von Neumann, 1963, p. 480, tradução nossa).

Explicitamente, coloca a exigência de rigor em posição secundária:

> [...] existem [matemáticos] que dizem que não se deve usar mais que aquilo que uma crítica rigorosa aprovou. Mas um conjunto mais amplo de matemáticos acha que é correto usar certas áreas da Matemática, ainda que existam pontos questionáveis. E, sobretudo, a Física teórica está certa: por que não deveria tal área que serviu à Física teórica, ainda que não satisfaça 100% da ideia de rigor, ser desenvolvida? Isso pode soar estranho, como um rebaixamento de padrões, mas acredito que um grande grupo de pessoas pensa assim, e eu penso assim (von Neumann, 1963, p. 481, tradução nossa).

Ainda, "[...] a melhor inspiração matemática vem da experiência, e é difícil acreditar na existência de um conceito de rigor absoluto e imutável dissociado de toda experiência humana" (von Neumann, 1947a, n. p., tradução nossa).

Para Israel e Gasca (2009), von Neumann acreditava que a Matemática funcionava como uma ferramenta para análise da realidade. A Matemática deve retornar à realidade com sua validação empírica. O exercício abstrato é uma parcela do que a Matemática proporciona, sendo necessário o retorno à realidade, para considerar o exercício teórico completo.

> Na minha opinião, a característica mais vital da Matemática é sua relação peculiar com as ciências naturais, ou, de forma mais geral, com qualquer ciência que interprete a experiência em um patamar superior do que o puramente descritivo. (von Neumann, 1947, n. p., tradução nossa).

Com isso, observa-se que a relação de Neumann com as aplicações da Matemática é muito próxima da visão de Hilbert. No **Teoria dos Jogos**, faz referência às questões lógicas que estão associadas a toda a axiomatização: consistência, completude e independência dos axiomas (von Neumann; Morgenstern, 1953, p. 76).

Apesar de a Matemática não ser considerada uma ciência que utiliza métodos empíricos ou tem sua base na empiria, não é por isso que a mesma não tem relação com essas ciências. Para Neumann, "[...] algumas das melhores inspirações da Matemática Moderna [acredita-se, as melhores], claramente, têm origem nas ciências naturais" (von Neumann, 1947, n. p., tradução nossa).

A Matemática não poderia fechar-se em si mesma, dando espaço para abstrações muito grandes. Sua importância estaria na aplicação no mundo real, sendo, portanto, necessária a interação entre a teoria e a empiria. As ciências rejuvenesceriam, ao utilizarem os problemas empíricos para o desenvolvimento das suas teorias. Por esse motivo, as aplicações da Matemática são importantes e foram exploradas por von Neumann na Física e na Economia predominantemente (Rashid, 2007).

> Uma disciplina matemática está sujeita a muitos perigos graves, quando se afasta das suas fontes empíricas, ou, ainda mais, se a segunda ou a terceira geração [de matemáticos] é apenas indiretamente inspirada por ideias vindas da "realidade". Ela se torna mais e mais estetizante, mais e mais *l'árt pour l'árt* [...], existe o perigo grave de que o assunto se desenvolva ao longo de linhas de menor resistência, que o fluxo muito longe de sua fonte se separará numa multidão de ramificações insignificantes e que a disciplina se desorganizará numa massa de detalhes e complexidades. Em outras palavras, a uma grande distância da sua fonte empírica, ou após muita obstrução "abstrata", um assunto matemático está sujeito ao perigo da degeneração. (von Neumann, 1947a, n. p., tradução nossa).

Em relação à teoria econômica, von Neumann observa que a Matemática estava sendo usada sem obter sucesso. Apesar das críticas sobre os limites da aplicação da Matemática na Economia, para ele, a utilização dos métodos e a comparação desses resultados com os dados empíricos levariam a uma adequação. A teoria econômica precisa, inicialmente, desenvolver alguns axiomas básicos, para, então, permitir a apropriada aplicação de métodos matemáticos.

Rashid (2007) mostra que von Neumann acreditava que o desenvolvimento do uso de instrumentos matemáticos na Economia deveria desenvolver-se com a evolução dessa ciência. Como a Física começou a evoluir no uso de instrumentos matemáticos após vários séculos, a Economia também precisaria esperar para evoluir:

> Verdadeiramente, a Matemática tem sido usada em teoria econômica, talvez, mesmo, de maneira exagerada. Em qualquer dos casos, seu uso não tem sido altamente bem-sucedido. Isso é o contrário do que se tem observado em outras ciências: lá a Matemática tem sido aplicada com grande sucesso, e a maioria dessas ciências, dificilmente, poderia prosseguir sem ela (von Neumann; Morgenstern, 1953, p. 3, tradução nossa).

E acrescenta:

> Para começar, os problemas econômicos não foram formulados claramente e, frequentemente, são colocados em termos tão vagos, que fazem o tratamento matemático sem esperança *a priori,* porque é totalmente indeterminado o que os problemas realmente são. Não existe sentido em usar modelos exatos onde não existe clareza nos conceitos e questões nos quais são esses métodos aplicáveis. Consequentemente, a tarefa inicial é esclarecer o conhecimento do assunto pelo trabalho descritivo adicional. Mas, mesmo naquelas partes onde o trabalho descritivo tem sido conduzido de maneira mais apropriada, as ferramentas matemáticas raramente têm sido usadas apropriadamente. Elas foram conduzidas de maneira inadequadas, como nas tentativas para determinar o equilíbrio econômico pela mera contagem de equações e incógnitas, ou elas levaram a meras traduções em símbolos da forma literária da expressão, sem qualquer subsequente análise matemática (von Neumann; Morgenstern, 1953, p. 4, tradução nossa).

A escola hilbertiana, aparentemente, procura estender a aplicação da Matemática o máximo possível. Para Leonard (1995, p. 735, tradução nossa), a análise de jogos

> [...] era parte de um esforço generalizado para levar a Matemática a um limite, para mostrar que a Matemática pura e abstrata e formal poderia constituir um instrumento explicativo, não apenas para análise da natureza, mas também para análise social, [...] onde a interação de seres humanos estaria envolvida.

O interesse de von Neumann pela Teoria dos Jogos e a possibilidade de desenvolvimento da mesma foram frutos de dois fatores, segundo Mirowski (1992). O primeiro é a influência formalista de Hilbert, que mostra que a objetividade da Matemática permite a criação de certos patamares, onde é possível reconhecer o que é verdadeiro ou não, independentemente de questões morais ou religiosas. O outro fator é o surgimento da mecânica quântica, com a introdução de um fator estocástico. Isso influenciou von Neumann na utilização de probabilidades, como se os indivíduos tivessem um comportamento estocástico (Mirowski, 1992).

Von Neumann critica o método walrasiano, por não levar em consideração as interações entre os indivíduos. Consequentemente, critica Hicks e Samuelson. Além disso, do ponto de vista matemático, **Valor e Capita**l e **Os Fundamentos da Análise Econômica** não parecem ser contemporâneos ao **Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico**, mas, sim, contemporâneos às obras de Newton (Morgenstern, 1976).

Para Leonard (1995), a obra de von Neumann e Morgenstern é escrita de forma a confrontar o *mainstream* da teoria econômica, representado por Hicks e Samuelson na época. O livro **Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico** representou uma ruptura. A utilização de modelos da mecânica clássica para explicação da Economia é rejeitada pelos autores, como também o cálculo infinitesimal, utilizado, usualmente, nesses problemas.

Morgenstern (1976) revela que, de fato, um dos objetivos do livro é causar uma ruptura com a Economia convencional. Os problemas de maximização e minimização não são os únicos relevantes, a interação entre os agentes deve ser considerada, como em mercados oligopolizados. Outros fatores, como a ordem das ações pelos indivíduos, também devem ser levados em conta, pois são relevantes na teoria econômica.

5 Extremos da teoria formalista: Bourbaki

Num famoso artigo de 1970, **The Work of Nicholas Bourbaki**, o Matemático Jean Dieudonné (1906-1992) comenta o impacto que o livro de van der Waerden teve sobre um grupo de jovens matemáticos franceses, que passaram a se apresentar sob o pseudônimo de Nicholas Bourbaki:

> Em 1930, eu estava em Berlim trabalhando na minha tese. Ainda lembro o dia em que [o livro de] van der Waerden foi posto à venda. Minha ignorância em álgebra era tal que, hoje em dia, eu teria uma solicitação de ingresso à universidade recusada. Corri por aqueles volumes e vi um novo mundo abrir--se diante de mim (Dieudonné, 1970, p. 136, tradução nossa).

E continua:

> Eu tinha uma graduação da École Normale e não sabia o que era um ideal, eu só sabia o que era um grupo! Isso dá uma ideia do que um jovem matemático francês sabia em 1930. Dessa maneira, tentei seguir van der Waerden, mas ele cobria

apenas uma pequena parte da álgebra (Dieudonné, 1970, p.136, tradução nossa).

Durante o auge da Teoria Formalista (anos 20 e 30 do século XX), os teóricos franceses não se interessaram por esse método, estavam mais preocupados com a Teoria das Funções e as interações entre a análise matemática e a Matemática aplicada à Física.

Além disso, os franceses, segundo Dieudonné (1970), ao se preocuparem mais com a Primeira Guerra Mundial do que com o desenvolvimento científico do País, levaram todos os homens ao *front* de batalha. Logo, houve um hiato de uma geração, o que acabou resultando em uma dificuldade para a França se adaptar aos métodos mais modernos, dado que seus acadêmicos não tinham familiaridade com esses métodos. Dieudonné (1970) estima que dois terços dos jovens cientistas franceses tenham morrido nessa guerra.

Nos anos imediatos à Primeira Grande Guerra, a Matemática francesa estava defasada em, aproximadamente, 20 anos, em relação às escolas matemáticas alemã, principalmente, polonesa e russa.

Dieudonné (1970) lembra que o único contato que os jovens tinham com a Matemática Moderna era através dos seminários mantidos por Jacques Hadamard (1865-1963) no Collège de France. Nesses seminários, Hadamard propunha-se a estudar a Teoria das Funções, que estava sendo desenvolvida em outros países.

Após alguns anos, segundo Dieudonné (1970), os integrantes perceberam que, caso seguissem estudando apenas essa área, acabariam sem conseguir acompanhar as demais áreas da Matemática. Em 1934, após a aposentadoria de Hadamard, os seminários passaram a ser dirigidos por Gaston Julia (1893-1978).

Buscando retomar a tradição de excelência da Matemática francesa e lembrando que esse país era conhecido pela universalidade do pensamento matemático, foi alterada a estrutura do seminário e surgiu o projeto de um livro — inspirado no livro de van der Waerden que também é uma produção coletiva — que expusesse as principais ideias da Matemática Moderna. Esse é, segundo Dieudonné (1970), o nascimento do Nicholas Bourbaki. Nesse novo formato, os membros buscaram elaborar um tratado que contivesse as ideias centrais da Matemática Moderna.

O livro de van der Waerden trata, principalmente, de estruturas algébricas e limita a análise das estruturas de ordem e topológicas às primeiras. Segundo o Historiador Leo Corry (1992), na obra de van der Waerden, pela primeira vez, o objetivo tradicional da álgebra, ou seja, a análise da existência e das expressões de raízes de polinômios, é relegado a um papel secundário. Os números racionais e reais aparecem através da construção de corpos de frações; e os números reais, como classes de sequências fundamentais. Em outras palavras, os números racionais e reais, antes conceitos primitivos, são mostrados como construções particulares de estruturas algébricas analisadas com anterioridade. Por outro lado, as propriedades que se chamam topológicas, como continuidade, densidade, etc., não são consideradas.

O projeto Bourbaki é a continuidade do trabalho de van der Warden. Dieudonné comenta que os primeiros tratados sistematizando topologia geral, álgebra exterior e grupos de Lie são de Bourbaki.

Dieudonné comenta que existia um trabalho prévio, que era a Enciclopédia Alemã de Matemática, conhecida como a Enciclopédia de Klein, cuja publicação se estendeu de 1898 a 1933, que não deveria ser confundido com o projeto Bourbaki. O objetivo dos matemáticos reunidos em torno do nome Bourbaki não era um trabalho de referência bibliográfica, mas, no espírito do livro de van der Waerden, "um texto matemático demonstrativo do começo ao fim" (Dieudonné, 1970, p. 138, tradução nossa).

As teorias que Bourbaki utilizava para estudar eram aquelas que já haviam sido bastante desenvolvidas, de forma que seus fundamentos fossem conhecidos e pudessem ser desenvolvidos racionalmente (Dieudonné, 1970). O método axiomático, para Bourbaki, é o modo de apresentação desses blocos básicos com as quais se montam as teorias matemáticas. Com o desenvolvimento axiomático dos principais teoremas, seria possível decompor a teoria, de forma a transformar seus fragmentos em instrumentos para aplicação em diversas áreas da Matemática (Dieudonné, 1970). É importante ressaltar que Bourbaki não inovou a área de pesquisa, fornecendo apenas o suporte para aqueles interessados no núcleo, na essência dessa teoria. Dieudonné (1970) insiste que Bourbaki proviu os instrumentos para lidar com as áreas da Matemática.

Bourbaki não se restringia às divisões anteriores da Matemática. O importante eram as semelhanças da estrutura. Nesse sentido, as primeiras demonstrações, para Dieudonné (1970), deveriam ser aquelas que contemplariam um número maior de estruturas, sendo essenciais em diversas áreas do conhecimento matemático. Ainda, as teorias onde a prova, usualmente, se dava de forma pouco rigorosa, sem, necessariamente, uma organização racional por trás, dificilmente seriam objeto de estudo.

Um conceito bourbakiano fundamental é o de "estrutura", que, no artigo de 1949, está limitada a grupos, conjuntos ordenados e espaços topológicos. Todavia, no artigo de 1970, Dieudonné assume uma posição mais flexível, aparentemente, sugere que existem mais estruturas fundamentais que podem ser propostas e observa que quais são essas estruturas é motivo de especulação no interior do grupo.

No artigo de 1949, uma estrutura é definida, um tanto vagamente, como "[...] o caráter comum de diferentes conceitos designados por esse nome genérico e que pode ser aplicado a conjuntos de elementos cuja natureza não foi especificada" (Bourbaki, 1950, p. 225, tradução nossa). No artigo de 1970, não é apresentada uma nova definição, mas é acrescentado que a ideia de estrutura se origina da compreensão de que "[...] grandes partes da Matemática podem ser desenvolvidas logicamente, de maneira fecunda, a partir de um pequeno número de axiomas bem escolhidos" (Dieudonné, 1970, p. 138, tradução nossa). Bourbaki (1950) acreditava que o desenvolvimento axiomático possibilitaria a utilização das estruturas como ferramentas de trabalho do matemático. Uma vez reconhecendo as relações entre os elementos, ele saberia todos os teoremas decorrentes daquelas relações, que poderiam ser comuns a outros elementos com relações semelhantes.

Como se observou anteriormente, o método axiomático, para Hilbert, é um método de análise lógica. Entretanto existe, em Hilbert, uma terceira característica do método axiomático, que está expressa no artigo **O Pensamento Axiomático**, de 1917:

> Penetrar, no sentido que indicamos, em níveis axiomáticos mais profundos significa também alcançar uma visão mais profunda da natureza e da essência do pensamento científico e dar um passo significativo no processo de tomada de consciência da unidade essencial do conhecimento (Hilbert, 1993b, p. 35, tradução nossa).

Esse é o principal sentido atribuído por Bourbaki ao método axiomático, porém restrito à Matemática: "[...] o que o método axiomático coloca como seu objetivo essencial é exatamente aquilo que o formalismo lógico não pode suprir, nominalmente, a profunda inteligibilidade da Matemática" (William, 1996, p. 1268, tradução nossa).

O método axiomático, para Bourbaki (1950), seria esquemático, idealizado e congelado. Esquemático porque faria uma simplificação e uma sistematização dos fatos, ao invés de uma descrição. Idealizado porque muitas áreas da Matemática, na realidade, não possuiriam uma intersecção com as demais, estando mais distantes do núcleo que Bourbaki desejava formar. Congelado porque, durante o processo de identificação das estruturas, não seria possível alterar as relações. Isso não significa que a axiomatização bourbakiana levaria à verdade definitiva, mas que alterações na teoria que era foco de axiomatização acabariam inutilizando o corpo axiomático, que deveria ser reexaminado a cada modificação. Provavelmente, o núcleo central seria mais consistente, e, por isso, as mudanças nas diversas teorias não levariam a grandes alterações do mesmo (Bourbaki, 1950).

Em relação à aplicação da Matemática em outros ramos do pensamento, Bourbaki não tinha oposição, mas, segundo Aubin (1997), acreditava que a Matemática deveria permanecer livre de influências externas. Ainda, Bourbaki acreditava que o desenvolvimento da Matemática não deveria ser norteado pelas necessidades das demais ciências, pois isso acabava não desenvolvendo novas matemáticas (Aubin, 1997).

Como Bourbaki vê, na estrutura, apenas a característica unificadora, essa se torna desconectada do contexto da aplicação, e o fato de as teorias matemáticas encontrarem aplicação nas ciências, como na Física, se torna um mistério insondável.

> Por que algumas das mais intrincadas teorias em matemáticas se tornam ferramentas indispensáveis para o físico moderno, para o engenheiro e para o artífice de bombas? Afortunadamente, para nós, o matemático não sente necessidade de responder tais questões nem se acha responsável pelos usos e abusos do seu trabalho. (Bourbaki, 1949, p. 2, tradução nossa).

Bourbaki (1950) não chega a dissociar a empiria da axiomatização. Para ele, alguns fatos seriam adaptáveis a certos corpos axiomáticos. No entanto, esse fato estaria *a posteriori*, após a formação do corpo axiomático.

6 Gerard Debreu

A filiação de Gerard Debreu ao grupo Bourbaki deu-se através do Matemático Henri Cartan (1904-2008), que foi professor de Debreu no período 1941-46, em que este estudou Matemática na École Normale, em Paris. Aparentemente, a decisão de dedicar-se à teoria econômica foi determinada pelo livro **À la Recherche d'une Discipline Économique**, de Maurice Allais (1911-2010), publicado em 1943. Outra influência importante foi o livro **Theory of Games and Economic Behavior**, de von Neumann e Morgenstern, de 1944. (Düppe, 2012, p. 422-425).

Em 1950, Debreu tornou-se pesquisador da Cowles Foundation e, em 1955, professor em Yale. Em 1956, uma versão do livro **Theory of Value, an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium**, que seria publicado em 1959, foi apresentada como Tese de Doutorado na Universidade de Paris. Em 1962, Debreu tornou-se professor na Universidade da Califórnia, em Berkeley (Hildebrand, 1983, p. 8).

Os trabalhos mais conhecidos de Debreu são o artigo, publicado na **Econometrica**, em 1954, em coautoria com Kenneth Arrow (1921), intitulado **Existence of an Equilibrium for Competitive Economy** e o livro **Theory of Value** (Düppe, 2012, p. 428-429). Na década de 70 do século XX, Debreu introduziu, na Teoria do Equilíbrio, o uso da topologia diferencial em contraste com as técnicas anteriores, que utilizavam o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Hildebrand, 1983, p. 27-29).

Para Till Düppe (2012, p. 420-422), a paradoxal carreira de Debreu como economista, com sua insistência na generalidade e no rigor e seu aparente desinteresse pelas questões epistemológicas relacionadas à Teoria do Equilíbrio, explica-se pela transferência do ideário bourbakiano para a teoria econômica.

Em relação a Debreu, Hildebrand (1983) comenta que a axiomatização da ciência econômica já havia sido buscada por outros autores, como Wald, von Neumann, Morgenstern, Koopmans e Arrow.

Debreu e von Neumann estabelecem o método axiomático aplicado à ciência econômica de maneira similar:

> Uma teoria axiomatizada, primeiramente, seleciona seus conceitos, e cada um desses conceitos primitivos é representado por um objeto matemático. [...] Em segundo lugar, são feitas suposições explícitas e totalmente especificadas sobre a representação matemática desses conceitos matemáticos. Então, a análise matemática estabelece as consequências dessas suposições na forma de teoremas. A interpretação econômica dos teoremas é o último passo da análise. De acordo com esse esquema, uma teoria axiomatizada tem uma forma matemática que é completamente separada de seu conteúdo econômico (Debreu, 1959, p. 1265, tradução nossa).

O trecho acima é similar ao que se lê no **Teoria dos Jogos**:

> Temos evitado mesmo dar nomes aos objetos matemáticos introduzidos, de maneira a não estabelecer correlações com qualquer significado que a associação de nomes possa sugerir. Nessa pureza absoluta, esses conceitos podem, então, ser objetos de uma investigação matemática exata. Esse procedimento é mais adequado para mostrar precisamente os conceitos definidos. A aplicação aos temas dados intuitivamente segue depois, quando a análise exata estiver completa (von Neumann; Morgenstern, 1953, p. 74, tradução nossa).

Note-se que, para von Neumann, o tratamento formal é um procedimento que facilita a análise matemática, enquanto Debreu enfatiza a questão da explicitação das suposições e do rigor na dedução das consequências.

Debreu atribui à axiomatização o papel de oferecer instrumentos para o desenvolvimento posterior:

> Mais positivamente, a especificação completa das suposições, o enunciado exato das conclusões e o rigor das deduções de um estudo axiomático fornecem um fundamento sobre o qual a construção da teoria econômica pode prosseguir. Além disso, a possibilidade para os pesquisadores de serem capazes de usar diretamente os resultados de seus predecessores é um fator

> decisivo no desenvolvimento de um campo científico (Hildebrand, 1983, p. 5, tradução nossa).

Similarmente, Bourbaki acreditava que o desenvolvimento axiomático possibilitaria a utilização das estruturas como ferramentas de trabalho do matemático:

> As "estruturas" são ferramentas para o matemático; tão logo são reconhecidas entre os elementos que estão sendo estudados, relações que satisfazem axiomas de certo tipo, o matemático tem, completamente, à sua disposição o arsenal inteiro de teoremas gerais que pertencem à estrutura daquele tipo (Bourbaki, 1950, p. 227, tradução nossa).

Como nota Hildebrand (1983, p. 5, tradução nossa), o maior distanciamento em relação à realidade, como em Bourbaki, é observável em Debreu, pois "[...] qualquer teoria axiomática deveria passar pelo árduo teste de remover todas as interpretações econômicas intrínsecas ao modelo e observar se a estrutura matemática se mantinha sem essas interpretações". Nas afirmações de Debreu,

> [...] uma teoria axiomatizada tem uma forma matemática que é completamente separada de seu conteúdo econômico. Se removemos a interpretação econômica dos conceitos primitivos, das suposições e das conclusões do modelo, o que ainda fica é sua estrutura matemática nua. O divórcio entre forma e conteúdo, imediatamente, produz uma nova teoria, quando uma interpretação nova dos conceitos primitivos é descoberta (Debreu, 1986, p.1265, tradução nossa).

Ainda, mostrando a importância do estudo do modelo *per se*, em concordância com Bourbaki, Debreu (1986, p. 1265, tradução nossa) afirma: "[...] como um modelo formal de uma economia adquire vida matemática por si, ele se torna objeto de um processo inexorável, onde o rigor, a generalidade e a simplicidade são perseguidos".

Em relação ao rigor lógico, Debreu acredita que o método axiomático consegue aumentar o rigor da teoria econômica:

> [...] na sua forma matemática, a teoria econômica está aberta a um eficiente exame minucioso dos erros lógicos. O rigor que foi alcançado como consequência está em contraste com os padrões de raciocínio que eram aceitos no final da década de 1930 (Debreu, 1991, p. 3, tradução nossa).

No artigo de 1991, Debreu acrescenta que "[...] pela exatidão da formulação, a análise econômica, eventualmente, está mais próxima do seu ideal de ser livre de ideologia" (Debreu, 1991, p. 1266, tradução nossa).

7 Neumann e Debreu

Neumann e Debreu, como matemáticos aplicados, utilizaram, em suas teorias, a formulação axiomática que é a forma de expressão comum dos matemáticos até hoje e cujas origens estão em Hilbert. Todas as atribuições que são feitas à axiomática por Hilbert encontramos em Neumann, Bourbaki e Debreu, porém com ênfases diferentes.

Para Neumann, a estrutura axiomática não se descola das aplicações, exceto para a finalidade de análise lógica, que, aparentemente, tem um papel secundário. Neumann é crítico do estudo das estruturas axiomáticas por si mesmas, independentemente das aplicações que as geraram. Os conceitos matemáticos relacionados à determinada disciplina científica manifestam-se a partir do conteúdo empírico e são tratados através do método axiomático. Como se comentou anteriormente, para von Neumann, o método axiomático é a maneira que ele tem à disposição para produzir Matemática.

A relação íntima que Neumann percebe entre a Matemática e a realidade, aparentemente, também é compartilhada por Hilbert, como se observa no artigo **O Pensamento Axiomático**.

Para Debreu, por sua vez, o interesse no método axiomático é ditado, principalmente, pela preocupação com o rigor dos argumentos. Essa preocupação guarda semelhanças com a tentativa formalista de demonstrar a consistência da Teoria dos Conjuntos e também com a crença de Bourbaki de que a axiomática indica o caminho para localizar e evitar inconsistências lógicas (Bourbaki, 1949, p. 3).

Além disso, Debreu atribui grande valor à possibilidade que o método axiomático oferece de gerar estruturas utilizáveis em várias aplicações. Essa é uma das vantagens que Hilbert apresenta para defender o método axiomático na Física (Corry, 1997). Também, em Bourbaki, a noção de estrutura matemática desempenha o papel de “arsenal” de resultados à disposição dos matemáticos.

Conclusão

Para muitos autores, como Mark Blaug (2001), por exemplo, a possibilidade da Economia como ciência matematizável se dá a partir da revolução marginalista. Entende-se que, embora se possa, com razoável segurança, assegurar que o ponto de partida da matematização moderna seja o modelo walrasiano, discutido nos círculos vienenses, não são as concepções científicas marginalistas que determinam a matematização da teoria econômica que surgiu no século XX. Ao contrário, é o modelo walrasiano que se ajusta à concepção científica, alheia ao marginalismo, originada na escola matemática formada em torno de David Hilbert. Acredita-se que o desdobramento matemático da escola marginalista pode ser encontrado mais facilmente em Samuelson, por exemplo.

Mark Blaug (2003) diz que Debreu se declara um bourbakiano. Certamente, Debreu está mais próximo do Bourbaki que Neumann. Sem dúvida, a escola neoclássica, a partir de Debreu, estuda as estruturas formais de maneira quase autônoma em relação às suas origens na teoria econômica. Dessa maneira, justificam-se as críticas mais comuns (Beed; Kane, 2001) em relação ao discurso neoclássico, ou seja, ausência de correspondência entre os conceitos matemáticos e os fatos econômicos e o pequeno número gerado de proposições empiricamente testáveis nas referidas teorias, ou até mesmo a ausência de tais proposições.

Referências

ALVAREZ, C.; SEGURA, L. F. Introducción. In: HILBERT, D. **Fundamentos de las matemáticas**. Cidade do México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, 1993. p. 9-14.

AUBIN, D. The withering immortality of Nikolas Bourbaki: a cultural connector at the confluence of Mathematics, Structuralism and the Olipo in France. **Science in Context**, Cambridge, v. 10, p. 297-342, 1997.

BEED, C.; KANE, O. What is the critique of the mathematization of Economics? **Kyklos**, v. 44, n. 4, p. 581-612, 2001.

BLAUG, M. **Teoría económica en retrospección**. Cidade do México: Fondo de Cultura Económica, 2001.

BLAUG, M. The formalist revolution of the 1950s. **Journal of the History of Economic Thought**, Cambridge, v. 25, n. 2, p. 145-156, 2003.

BOREL, A. Twenty-five years with Nikolas Bourbaki. **Notices of American Mathematic Society**, Providence, RI , v. 45, n. 3, p. 373-380, 1998.

BOURBAKI, N. Foundations of Mathematics for working mathematician. **The Journal of Symbolic Logic**, v. 14, n. 1, p. 1-8, 1949.

BOURBAKI, N. The architeture of Mathematics. **The American Mathematical Monthly**, Washington, D. C. , v. 57, n. 4, p. 221-232, 1950.

CANTOR, G. On a property of the set of real algebraic numbers. In: WILLIAN, E. **From Kant to Hilbert:** a source book in the foundations of Mathematics. New York: Oxford University Press, 1996. v. 2, p. 878-920.

CANTOR, G. **Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers**. New York: Dover, 1955.

CORRY, L. David Hilbert and the axiomatization of Physics (1894-1905). **Archive For History Of Exact Sciences**, v. 51, n. 2, p. 83-198, 1997.

CORRY, L. David Hilbert y su filosofía empiricista de la geometria. **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, Caracas, v. 9, n. 1, p. 27-44, enero 2002.

CORRY, L. Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure. **Synthese**, v. 92, n. 3, p. 315-348, 1992.

CORRY, L. The empiricist roots of Hilbert's axiomatic method. In: HENDRICKS, V. F.; PEDERSEN, S. A.; JORGENSEN, K. F. (Org.). **Proof theory:** history and philosophical significance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 35-54.

CORRY, L. The origins of eternal truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond. **Science in Context**, Cambridge, v. 10, n. 2, p. 253--296, 1997a.

CORRY, L. Writing the ultimate mathematical textbook: Nicolas Bourbaki's éléments de Mathématique. In: ROBSON, E.; STEDALL, J. **Handbook of the history of Mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 2009. Cap. 6.4, p. 565-587.

CROWE, M. J. Ten misconceptions about Mathematics and its history. In: ASPRAY, W.; KITCHER, P. (Org.). **History and philosophy of Modern Mathematics**. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988. p. 260--277.

DEBREU, G. Economic theory in the mathematical mode. **The American Economic Review**, Pittsburgh, PA, v. 74, n. 3, p. 267-278, 1984.

DEBREU, G. Mathematization of economic theory. **The American Economic Review**, Pittsburgh, PA, v. 81, n. 1, p. 1-7, 1991.

DEBREU, G. Theoretic models: mathematical forms and economic content. **Econometrica**, New York, v. 54, n. 6, p. 1259-1270, 1986.

DEBREU, G. **Theory of Value**. New Haven: Yale University Press, 1959.

DIEUDONNÉ, J. A. The work of Nikolas Bourbaki. **The American Mathematical Monthly**, Washington, D. C., v. 77, p. 134-145, Feb 1970.

DÜPPE, T. Gerard Debreu's secrecy: his Life in order and silence. **History of Political Economy**, Durham, NC, v. 44, n. 3, p. 413-449, 2012.

HILBERT, D. Acerca del concepto de número. In: HILBERT, D. **Fundamentos de las matemáticas**. México, D. F.: UNAM, 1993. p. 17-22.

HILBERT, D. Acerca del infinito. In: HILBERT, D. **Fundamentos de las matemáticas**. México, D. F.: UNAM, 1993a. p. 83-121.

HILBERT, D. El pensamiento axiomático. In: HILBERT, D. **Fundamentos de las matemáticas**. México, D. F.: UNAM, 1993b. p. 23-35.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Paulino Lima Fontes, A. J. Franco de Oliveira/Gradiva-Publicações, 2003.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Madrid: Publicaciones Del Instituto Jorge Juan de Matematicas, 1953.

HILBERT, D. La fundamentación de la teoría elemental de números. In: HILBERT, D. **Fundamentos de las matemáticas**. México, D. F.: UNAM, 1993c. p. 123-135.

HILBERT, D. La nueva fundamentación de las matemáticas. In: HILBERT, D. **Fundamentos de las matemáticas**. México, D. F.: UNAM, 1993d. p. 37--62.

HILBERT, D. Mathematical problems: lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 8, p. 479-481, 1902.

HILDEBRAND, W. Introduction. In: DEBREU, G. **Mathematical economics**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 1983. p. 1-29.

ISRAEL, G.; GASCA, A. M. **The world as a mathematical game:** John von Neumann and twientieth century science. Berlin: Birkhäuser Verlag Ag, 2009.

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. John von Neumann's work in the Theory of Games and mathematical economics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, RI, v. 64, n. 3, p. 100-122, 1958.

LEONARD, R. J. Creating a context for Game Theory. **History of Political Economy**, Durham, NC, v. 24, p. 29-76, 1992.

LEONARD, R. J. From parlor games to social science: von Neumann, Morgenstern, and the creation of Game Theory 1928-1944. **Journal of Economic Literature**, Pittsburgh, PA, v. 33, n. 2, p. 730-761, 1995.

LEONARD, R. J. **New light on von Neumann:** politics, Psychology and the creation of Game Theory. Torino: Università di Torino, 2007. (Working Paper Series, n. 7).

LEONARD, R. J. The collapse of Interwar Vienna: Oskar Morgenstern's Community, 1925-50. **History of Political Economy**, Durham, NC, v. 43, n. 1, p. 83-130, 2011.

MARSCHAK, J. Neumann's and Morgenstern's new approach to static economics. **Journal of Political Economy**, Chicago, v. 54, n. 2, p. 97-115, Apr 1946.

MIROWSKI, P. What were von Neumann and Morgenstern trying to accomplish? **History of Political Economy**, Durham, NC, v. 24, p. 113-147, 1992.

MORGENSTERN, O. Perfect foresight and economic equilibrium. In: MORGENSTERN, O. **Selected economic writings of Oskar Morgenstern**. New York: New York University Press, 1978. p. 169-183.

MORGENSTERN, O. The collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. **Journal of Economic Literature**, Pittsburgh, PA, v. 14, n. 3, p. 805-816, Sept 1976.

RASHID, S. John von Neumann and scientific method. **Journal of the History of Ideas**, Philadelphia, v. 68, n. 3, p. 501-527, July 2007.

ROWE, D. The calm before the storm: Hilbert’s early views on foundations. In: HENDRICKS, V. F.; PEDERSEN, S. A.; JORGENSEN, K. F. (Org.). **Proof Theory:** history and philosophical significance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 55-93.

SIEG, W. Toward finitist Proof Theory. In: HENDRICKS, V. F.; PEDERSEN, S. A.; JORGENSEN, K. F. (Org.). **Proof Theory:** history and philosophical significance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 95-114.

ULAM, S. Tribute to John von Neumann. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, RI, v. 64, n. 3, p. 1-49, 1958.

VON NEUMANN, J. A model of general economic equilibrium. In: BAUMOL, W. J.; GOLDFELD, S. M. **Precursors in mathematical economics:** an anthology. London: London School of Economics, 1968.

VON NEUMANN, J. **The Mathematician:** part 1. 1947. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Extras/Von_Neumann_Part_1.html>. Acesso em: 1º jul. 2011.

VON NEUMANN, J. **The Mathematician:** part 2. 1947a. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Extras/Von_Neumann_Part_2.html>. Acesso em: 1º jul. 2011.

VON NEUMANN, J. The role of Mathematics in the sciences and in society. In: VON NEUMANN, J. **Collected works**. New York: Macmillan, 1963. v. 6.

VON NEUMANN, J. Zur Theorie der Gesselschaftsspiele. **Mathematische Annalen**, v. 100, p. 295-320, 1928.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and economic behavior**. 7. ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.

WAERDEN, B. **Algebra**. New York: Springer Verlag, 1991. v. 1 e 2.

WANG, H. The formalization of Mathematics. **The Journal of Symbolic Logic**, v. 19, n. 4, p. 241-266, Dec 1954.

WILLIAM, E. **From Kant to Hilbert:** a source book in the foundations of Mathematics. New York: Oxford University Press, 1996. v. 2.